



HAL
open science

Une nouvelle minoration pour la trace absolue des entiers algébriques totalement positifs

Valérie Flammang

► **To cite this version:**

Valérie Flammang. Une nouvelle minoration pour la trace absolue des entiers algébriques totalement positifs. 2016. <hal-01346165>

HAL Id: hal-01346165

<https://hal.science/hal-01346165v1>

Submitted on 18 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

UNE NOUVELLE MINORATION DE LA TRACE DES ENTIERS ALGEBRIQUES TOTALEMENT POSITIFS

V. FLAMMANG

1 Introduction

Soit α un entier algébrique de degré $d \geq 2$, totalement positif, i.e., dont les conjugués $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont tous des réels positifs et de polynôme minimal P . On pose

$$S_k = \sum_{i=1}^d \alpha_i^k.$$

La *trace absolue* de α se définit par

$$\mathcal{Trace}(\alpha) = \frac{1}{d} \text{trace}(\alpha) = \frac{1}{d} S_1$$

et on désigne par \mathcal{T} l'ensemble de tels $\mathcal{Trace}(\alpha)$.

Le *problème de Schur-Siegel-Smyth pour la trace* (appelé ainsi par P. Borwein dans son livre [B]) est le suivant :

On se fixe $\rho < 2$. Il faut alors montrer que tous les entiers algébriques totalement positifs, sauf un nombre fini, vérifient $\mathcal{Trace}(\alpha) > \rho$.

Le problème a été résolu en 1918 par I. Schur pour $\rho < \sqrt{e}$ [Sc] puis en 1945 par C. L. Siegel pour $\rho < 1.7337$ [Si]. Les résultats de Schur et de Siegel font intervenir des inégalités sur le discriminant d'un entier algébrique qui est la quantité

$$\text{Disc}(\alpha) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Tous les nombreux résultats ultérieurs se basent sur le principe des *fonctions auxiliaires* qui repose sur le fait que le résultant de deux polynômes à coefficients entiers et sans facteurs communs est un entier non nul. Ainsi en 1984, C.J. Smyth résout le problème pour $\rho < 1.7719$ [Sm3], en 1997, V. Flammang, M. Grandcolas et G. Rhin pour $\rho < 1.7735$ [F2], en 2004, J. McKee et C.J. Smyth pour $\rho < 1.7783786$ [McS1], en 2006, J. Aguirre, M. Bilbao et J. C. Peral pour $\rho < 1.7800$ [ABP], en 2006 par V. Flammang pour $\rho < 1.7822$ (communication privée à C. J. Smyth). En 2007, J. Aguirre et J. C. Peral ont résolu le problème pour $\rho < 1.7836$ [AP1] puis en 2008 pour $\rho < 1.784109$ [AP2]. En 2009, nous l'avons résolu pour $\rho < 1.78702$ [F3]. J. McKee [Mc] a résolu le problème en 2011 pour $\rho < 1.78839$ en utilisant une partie de nos polynômes ayant des racines complexes provenant de la fonction auxiliaire donnée dans [F3]. En 2011 également, Y. Liang et Q. Wu [LW] ont résolu le problème pour $\rho < 1.79193$.

Nous montrons ici les théorèmes suivants :

Théorème 1. *Si α est un entier algébrique totalement positif de degré d et polynôme minimal différent de $x, x-1, x^2-3x+1, x^3-5x^2+6x-1, x^4-7x^3+13x^2-7x+1$ et $x^4-7x^3+14x^2-8x+1$ alors on a :*

$$\frac{1}{d}\text{trace}(\alpha) \geq 1.792806.$$

Rappelons qu'un entier algébrique α de degré d est *réciroque* si son polynôme minimal P vérifie $P(x) = x^d.P(1/x)$.

Corollaire 1. *Si α est un entier algébrique totalement positif et réciroque de degré d et de polynôme minimal différent de $x^2 - 3x + 1$ et $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$, alors on a :*

$$\frac{1}{d}\text{trace}(\alpha) \geq 1.896403.$$

Théorème 2. *Si α est un entier algébrique totalement positif de polynôme minimal différent de $x, x-1, x-2, x^2-3x+1, x^3-5x^2+6x-1, x^4-7x^3+14x^2-8x+1, x^5-9x^4+28x^3-35x^2+15x-1$ et $x^6-11x^5+45x^4-84x^3+70x^2-21x+1$ alors on a :*

$$\frac{1}{d}S_2 \geq 5.321767.$$

Théorème 3. *Si α est un entier algébrique totalement positif de polynôme minimal différent de $x, x-1, x-2, x^2-3x+1, x^3-5x^2+6x-1, x^5-9x^4+28x^3-35x^2+15x-1, x^6-11x^5+45x^4-84x^3+70x^2-21x+1, x^8-15x^7+91x^6-286x^5+495x^4-462x^3+210x^2-36x+1$ et $x^9-17x^8+120x^7-455x^6+1001x^5-1287x^4+924x^3-330x^2+45x-1$ alors on a :*

$$\frac{1}{d}S_3 \geq 17.568276.$$

Remarques

Les minoration des Théorèmes améliorent les plus récentes connues à savoir celles obtenues par Y. Liang et Q. Wu en 2011 qui sont respectivement 1.79193, 5.31935 et 17.56765.

La minoration du corollaire améliore celle de X. Dong et Q. Wu [DW] qui est de 1.8945909.

Les polynômes qui interviennent dans ces trois théorèmes ainsi que leurs exposants se trouvent en fin de note ainsi que sur le site : <http://iecl.univ-lorraine.fr/Valerie.Flammang/Trace.txt>

2 Le principe des fonctions auxiliaires

La fonction auxiliaire qui intervient dans l'étude de la trace est du type :

$$\text{pour } x > 0, f(x) = x - \sum_{1 \leq j \leq J} c_j \log |Q_j(x)| \quad (1)$$

où les c_j sont des nombres réels positifs et les polynômes Q_j sont des polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[x]$.

Cette fonction auxiliaire a été introduite par C. J. Smyth dans [Sm2].

Soit m le minimum de la fonction f . Si P ne divise aucun des polynômes Q_j , on a alors

$$\sum_{i=1}^d f(\alpha_i) \geq md$$

i.e.,

$$\text{trace}(\alpha) \geq md + \sum_{1 \leq j \leq J} c_j \log \left| \prod_{i=1}^d Q_j(\alpha_i) \right|.$$

Puisque P ne divise aucun des Q_j , alors $\prod_{i=1}^d Q_j(\alpha_i)$ est un entier non nul car il est le résultant de P et de Q_j .

Par conséquent, si α n'est pas une racine de Q_j , on a

$$\mathcal{T}r\text{ace}(\alpha) \geq m.$$

Par ailleurs, J. P. Serre (voir Appendix B dans [AP2]) a montré que cette méthode ne peut pas donner une telle inégalité pour ρ plus grand que 1.8983021. . . Par conséquent, cette méthode ne peut pas être utilisée pour montrer que 2 est le plus petit point d'accumulation de \mathcal{T} .

Néanmoins, il est intéressant d'essayer d'obtenir des minorations pour $\mathcal{T}r\text{ace}(\alpha)$. Par exemple, cela a été utilisé dans la recherche de nombres de Salem de petit degré et de trace -2 par J. McKee et C. J. Smyth [McS1]. Y. Liang et Q. Wu ont obtenu, grâce à leur résultat, le degré minimum d'un nombre de Salem de trace -4 et -5 [LW].

Remarque : Dans la fonction auxiliaire de la trace, il suffit de remplacer x par x^2 puis par x^3 pour obtenir les fonctions auxiliaires qui interviennent pour S_2 et S_3 .

3 Relation entre fonction auxiliaire et diamètre transfini entier généralisé

3.1 Rappels sur le diamètre transfini entier généralisé

Soit K un compact de \mathbb{C} . Le *diamètre transfini* de K se définit par

$$t(K) = \liminf_{\substack{n \geq 1 \\ n \rightarrow \infty}} \inf_{\substack{P \in \mathbb{C}[X] \\ P \text{ unitaire} \\ \deg(P) = n}} |P|_{\infty, K}^{\frac{1}{n}}$$

où $|P|_{\infty, K} = \sup_{z \in K} |P(z)|$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.

Nous définissons le *diamètre transfini entier* de K par

$$t_{\mathbb{Z}}(K) = \liminf_{\substack{n \geq 1 \\ n \rightarrow \infty}} \inf_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X] \\ \deg(P) = n}} |P|_{\infty, K}^{\frac{1}{n}}$$

Enfin, si φ est une fonction positive définie sur K , le φ -*diamètre transfini entier généralisé* de K se définit par

$$t_{\mathbb{Z}, \varphi}(K) = \liminf_{\substack{n \geq 1 \\ n \rightarrow \infty}} \inf_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X] \\ \deg(P) = n}} \sup_{z \in K} \left(|P(z)|^{\frac{1}{n}} \varphi(z) \right).$$

Cette version du diamètre transfini entier pondéré a été introduite par F. Amoroso [A2] et est un outil important dans l'étude des approximations rationnelles de logarithmes de nombres rationnels.

3.2 Lien avec les fonctions auxiliaires

Dans la fonction auxiliaire (1), on remplace les c_j par des nombres rationnels a_j/q où q est un entier > 0 tel que $q.c_j$ soit un entier pour tout $1 \leq j \leq J$. On peut alors écrire :

$$\text{pour } x > 0, f(x) = x - \frac{t}{r} \log |Q(x)| \geq m \quad (2)$$

où $Q = \prod_{j=1}^J Q_j^{a_j} \in \mathbb{Z}[X]$ est de degré $r = \sum_{j=1}^J a_j \deg Q_j$ et $t = \sum_{j=1}^J c_j \deg Q_j$ (cette formulation a été introduite par J. P. Serre). Par conséquent, on cherche un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\sup_{x>0} |Q(x)|^{t/r} e^{-x} \leq e^{-m}.$$

Si l'on suppose t fixé, cela revient à trouver une borne supérieure effective pour le diamètre transfini entier pondéré de l'intervalle $[0, \infty[$ avec le poids $\varphi(x) = e^{-x}$:

$$t_{\mathbb{Z},\varphi}([0, \infty[) = \liminf_{\substack{r \geq 1 \\ r \rightarrow \infty}} \inf_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X] \\ \deg(P) = r}} \sup_{x > 0} \left(|P(x)|^{\frac{t}{r}} \varphi(x) \right)$$

Remarque : Même si l'on a remplacé le compact K par l'intervalle infini $[0, \infty[$, le poids φ assure que la quantité $t_{\mathbb{Z},\varphi}([0, \infty[)$ est finie.

4 Construction d'une fonction auxiliaire

Le point essentiel est de trouver une liste de "bons" polynômes Q_j , i.e., qui donnent la meilleure valeur possible de m . Jusqu'en 2003, les polynômes étaient trouvés de façon heuristique. Par exemple, dans [Sm3] et [AP1], les auteurs ont cherché une collection de polynômes de petite trace absolue dont toutes les racines sont positives. En 2003, Q. Wu [Wu] a mis au point un algorithme qui permet une recherche systématique des "bons" polynômes. La méthode était la suivante. On considère une fonction auxiliaire comme celle définie en (1). On se fixe un ensemble E_0 de points de contrôle uniformément répartis sur un intervalle réel $I = [0; A]$ où A est "suffisamment grand". Par LLL, on trouve un polynôme Q petit sur E_0 au sens de la norme quadratique. On teste ce polynôme dans la fonction auxiliaire et on ne conserve que les facteurs de Q qui ont un exposant non nul. La convergence de cette nouvelle fonction fournit des minima locaux que l'on ajoute à l'ensemble de points E_0 pour obtenir un nouvel ensemble de points de contrôle E_1 . On relance LLL avec l'ensemble E_1 et on réitère le procédé.

En 2006, nous avons apporté deux améliorations à l'algorithme précédent dans l'utilisation de LLL. La première consiste, à chaque pas, à prendre en compte non seulement les nouveaux points de contrôle mais également les nouveaux polynômes de la fonction auxiliaire qui est la meilleure. La seconde est l'introduction d'un coefficient correcteur t . L'idée est d'obtenir les bons polynômes Q_j par récurrence. Ainsi, nous appelons cet algorithme *l'algorithme récursif*. Nous le détaillons, toujours pour la trace. Le premier pas consiste à optimiser la fonction auxiliaire $f_1 = x - t \log x$. On a alors $t = c_1$ où c_1 est la valeur qui donne la meilleure fonction f_1 . On suppose qu'on a des polynômes Q_1, Q_2, \dots, Q_J et une fonction f la meilleure possible pour cet ensemble de polynômes sous la forme (2). On cherche un polynôme $R \in \mathbb{Z}[x]$ de degré k ($k = 10$ par exemple) tel que

$$\sup_{x \in I} |Q(x)R(x)|^{\frac{t}{r+k}} e^{-x} \leq e^{-m},$$

où $Q = \prod_{j=1}^J Q_j$. On veut donc que

$$\sup_{x \in I} |Q(x)R(x)| \exp\left(\frac{-x(r+k)}{t}\right)$$

soit aussi petit que possible. On applique LLL aux formes linéaires

$$Q(x_i)R(x_i) \exp\left(\frac{-x_i(r+k)}{t}\right).$$

Les x_i sont des points de contrôle constitués de points uniformément répartis sur l'intervalle I auxquels on a ajouté les points où f a des minima locaux. On trouve donc un polynôme R dont les facteurs irréductibles R_j sont de bons candidats pour agrandir l'ensemble $\{Q_1, \dots, Q_J\}$. On ne conserve que les facteurs R_j qui ont un coefficient non nul dans la nouvelle fonction auxiliaire optimisée f . Après optimisation, certains polynômes précédents Q_j peuvent avoir un exposant nul et sont alors rejetés.

En 2009, pour obtenir la constante 1.78702, l'algorithme précédent avait été répété pour k variant de 10 à 30. Nous nous étions arrêtés quand deux pas consécutifs ne fournissaient plus aucun nouveau polynôme. Ici, nous avons procédé différemment. Nous avons fait varier k systématiquement de 3 à 82 et nous avons constaté que, même après plusieurs pas infructueux, des polynômes à exposant non nul apparaissent encore. C'est cette légère variante qui a permis l'amélioration des constantes.

Remarque

La constante t obtenue pour la fonction auxiliaire du Théorème 1 vaut 2.641327. Elle est proche de la valeur optimale de J. P. Serre qui est égale à 2.249214.

5 Optimisation des c_j

On a à résoudre un problème du type suivant : trouver

$$\max_C \min_{x \in X} f(x, C)$$

où $f(x, C)$ est une fonction linéaire par rapport à $C = (c_0, c_1, \dots, c_k)$ (c_0 est le coefficient de x qui est égal à 1) et X est un domaine compact de \mathbb{C} , le maximum étant pris pour $c_j \geq 0$ pour $j = 0, \dots, k$. Une solution classique consiste à prendre de très nombreux points de contrôle $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ et à résoudre le problème de programmation linéaire standard :

$$\max_C \min_{1 \leq j \leq N} f(x_j, C).$$

Mais alors le résultat obtenu dépend des points de contrôle choisis.

L'idée de la programmation linéaire semi-infinie (introduite en Théorie des Nombres par C. J. Smyth [Sm2]) consiste à répéter le processus précédent en ajoutant à chaque étape de nouveaux points de contrôle et à vérifier que ce procédé converge vers m , la valeur de la forme linéaire pour un choix de C optimum. L'algorithme est le suivant :

- (1) On choisit une valeur initiale de C soit C^0 et on calcule

$$m'_0 = \min_{x \in X} f(x, C^0).$$

- (2) On choisit un ensemble fini X_0 de points de contrôle appartenant à X et l'on a

$$m'_0 \leq m \leq m_0 = \min_{x \in X_0} f(x, C^0).$$

- (3) On ajoute à X_0 les points où $f(x, C^0)$ admet des minima locaux pour obtenir un nouvel ensemble X_1 de points de contrôle.
- (4) On résout le problème de programmation linéaire standard :

$$\max_C \min_{x \in X_1} f(x, C)$$

On obtient une nouvelle valeur de C notée C^1 et un résultat de la programmation linéaire égal à $m'_1 = \min_{x \in X} f(x, C^1)$. On a alors

$$m'_0 \leq m'_1 \leq m \leq m_1 = \min_{x \in X_1} f(x, C^1) \leq m_0,$$

(5) On répète les étapes (2) à (4) et on obtient donc deux suites (m_i) et (m'_i) qui vérifient

$$m'_0 \leq m'_1 \leq \dots \leq m'_i \leq m \leq m_i \leq \dots \leq m_1 \leq m_0,$$

On s'arrête dès qu'il y a assez bonne convergence, quand par exemple, $m_i - m'_i \leq 10^{-6}$. Supposons que p itérations suffisent alors on prend $m = m'_p$.

6 Preuve du Corollaire 1

Pour obtenir leur résultat, X. Dong et Q. Wu [DW] ont utilisé une fonction auxiliaire du type :

$$\text{pour } x > 0, f(x) = x + \frac{1}{x} - \sum_{1 \leq j \leq J} c_j \log |Q_j(x)| - \sum_{1 \leq j \leq J} c_j \log |Q_j(\frac{1}{x})|.$$

Nous procédons différemment. Soit α un entier algébrique totalement positif et réciproque de degré d et de polynôme minimal P . Alors il existe un polynôme Q totalement positif de degré $d/2$ vérifiant :

$$P(X) = X^{d/2} Q(X + \frac{1}{X} - 2).$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et $\beta_1, \dots, \beta_{d/2}$ les racines de P et Q respectivement. Alors on a :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq d/2, \beta_i = \alpha_i + \frac{1}{\alpha_i} - 2 \quad \text{et} \quad \alpha_i = \frac{\beta_i + 2 \pm \sqrt{(\beta_i + 2)^2 - 4}}{2}.$$

$$\text{Par conséquent, } \text{trace}(P) = \sum_{i=1}^d \alpha_i = \sum_{i=1}^{d/2} \left(\alpha_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) = \sum_{i=1}^{d/2} \left(\frac{\beta_i + 2 + \sqrt{(\beta_i + 2)^2 - 4}}{2} + \frac{\beta_i + 2 - \sqrt{(\beta_i + 2)^2 - 4}}{2} \right),$$

i.e., $\text{trace}(P) = \sum_{i=1}^{d/2} \beta_i + d = \text{trace}(Q) + d$. Or, le polynôme Q vérifie les hypothèses du Théorème 1 donc

$$\frac{\text{trace}(P)}{d} = \frac{\text{trace}(Q)}{\frac{d}{2} \cdot 2} + 1 \geq \frac{1.792806}{2} + 1 = 1.896403.$$

Polynômes et exposants qui interviennent dans le Théorème 1

$\text{pol}=[x,$
 $x - 1,$
 $x - 2,$
 $x^2 - 3x + 1,$
 $x^2 - 4x + 1,$
 $x^2 - 4x + 2,$
 $x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$
 $x^3 - 6x^2 + 9x - 3,$
 $x^3 - 6x^2 + 9x - 1,$
 $x^3 - 6x^2 + 8x - 1,$
 $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1,$
 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 32x^2 + 13x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 31x^2 + 12x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 29x^2 + 11x - 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 43x^4 - 72x^3 + 51x^2 - 14x + 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 43x^4 - 73x^3 + 53x^2 - 15x + 1,$
 $x^7 - 13x^6 + 64x^5 - 150x^4 + 172x^3 - 89x^2 + 18x - 1,$
 $x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 157x^3 - 78x^2 + 16x - 1,$
 $x^7 - 12x^6 + 54x^5 - 114x^4 + 117x^3 - 56x^2 + 12x - 1,$
 $x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 144x^4 + 160x^3 - 80x^2 + 16x - 1,$
 $x^8 - 15x^7 + 89x^6 - 269x^5 + 445x^4 - 402x^3 + 187x^2 - 40x + 3,$
 $x^8 - 15x^7 + 90x^6 - 277x^5 + 467x^4 - 428x^3 + 200x^2 - 42x + 3,$
 $x^8 - 14x^7 + 78x^6 - 221x^5 + 339x^4 - 277x^3 + 111x^2 - 19x + 1,$
 $x^8 - 14x^7 + 78x^6 - 222x^5 + 345x^4 - 289x^3 + 120x^2 - 21x + 1,$
 $x^9 - 16x^8 + 103x^7 - 344x^6 + 643x^5 - 681x^4 + 399x^3 - 123x^2 + 18x - 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 134x^8 - 537x^7 + 1265x^6 - 1798x^5 + 1526x^4 - 743x^3 + 194x^2 - 24x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 134x^8 - 538x^7 + 1273x^6 - 1822x^5 + 1560x^4 - 766x^3 + 200x^2 - 24x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 135x^8 - 549x^7 + 1320x^6 - 1920x^5 + 1662x^4 - 813x^3 + 206x^2 - 24x + 1,$
 $x^{10} - 19x^9 + 150x^8 - 643x^7 + 1641x^6 - 2573x^5 + 2472x^4 - 1412x^3 + 451x^2 - 71x + 4,$
 $x^{10} - 18x^9 + 135x^8 - 549x^7 + 1321x^6 - 1929x^5 + 1689x^4 - 847x^3 + 223x^2 - 26x + 1,$
 $x^{12} - 21x^{11} + 190x^{10} - 972x^9 + 3103x^8 - 6439x^7 + 8780x^6 - 7789x^5 + 4372x^4 - 1483x^3 + 283x^2 - 27x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 208x^{10} - 1108x^9 + 3666x^8 - 7840x^7 + 10948x^6 - 9877x^5 + 5589x^4 - 1885x^3 + 349x^2 -$
 $31x + 1,$
 $x^{12} - 21x^{11} + 190x^{10} - 972x^9 + 3102x^8 - 6430x^7 + 8750x^6 - 7742x^5 + 4336x^4 - 1470x^3 + 281x^2 - 27x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 207x^{10} - 1093x^9 + 3574x^8 - 7539x^7 + 10373x^6 - 9219x^5 + 5145x^4 - 1718x^3 + 318x^2 -$
 $29x + 1,$
 $x^{12} - 21x^{11} + 190x^{10} - 971x^9 + 3090x^8 - 6373x^7 + 8613x^6 - 7565x^5 + 4216x^4 - 1432x^3 + 277x^2 - 27x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 208x^{10} - 1108x^9 + 3667x^8 - 7851x^7 + 10995x^6 - 9977x^5 + 5702x^4 - 1952x^3 + 368x^2 -$
 $33x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 209x^{10} - 1123x^9 + 3757x^8 - 8125x^7 + 11435x^6 - 10317x^5 + 5775x^4 - 1913x^3 +$
 $349x^2 - 31x + 1,$
 $x^{13} - 23x^{12} + 229x^{11} - 1298x^{10} + 4637x^9 - 10930x^8 + 17323x^7 - 18505x^6 + 13193x^5 - 6143x^4 +$
 $1798x^3 - 310x^2 + 28x - 1,$
 $x^{13} - 23x^{12} + 230x^{11} - 1313x^{10} + 4730x^9 - 11240x^8 + 17929x^7 - 19217x^6 + 13689x^5 - 6338x^4 +$
 $1837x^3 - 313x^2 + 28x - 1,$
 $x^{13} - 23x^{12} + 229x^{11} - 1298x^{10} + 4637x^9 - 10930x^8 + 17322x^7 - 18499x^6 + 13181x^5 - 6134x^4 +$
 $1796x^3 - 310x^2 + 28x - 1,$
 $x^{13} - 23x^{12} + 231x^{11} - 1333x^{10} + 4894x^9 - 11963x^8 + 19810x^7 - 22195x^6 + 16544x^5 - 7942x^4 +$
 $2334x^3 - 388x^2 + 32x - 1,$
 $x^{13} - 23x^{12} + 231x^{11} - 1333x^{10} + 4894x^9 - 11962x^8 + 19800x^7 - 22157x^6 + 16475x^5 - 7880x^4 +$

$$\begin{aligned}
& 2308x^3 - 384x^2 + 32x - 1, \\
& x^{13} - 23x^{12} + 231x^{11} - 1333x^{10} + 4895x^9 - 11975x^8 + 19867x^7 - 22332x^6 + 16721x^5 - 8062x^4 + \\
& 2372x^3 - 392x^2 + 32x - 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1736x^{11} + 7061x^{10} - 19368x^9 + 36643x^8 - 48110x^7 + 43567x^6 - 26760x^5 + \\
& 10844x^4 - 2778x^3 + 420x^2 - 33x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1736x^{11} + 7060x^{10} - 19355x^9 + 36573x^8 - 47907x^7 + 43221x^6 - 26404x^5 + \\
& 10625x^4 - 2701x^3 + 406x^2 - 32x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1736x^{11} + 7061x^{10} - 19369x^9 + 36655x^8 - 48167x^7 + 43704x^6 - 26937x^5 + \\
& 10964x^4 - 2816x^3 + 424x^2 - 33x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 275x^{12} - 1755x^{11} + 7216x^{10} - 20082x^9 + 38697x^8 - 51961x^7 + 48328x^6 - 30594x^5 + \\
& 12779x^4 - 3344x^3 + 502x^2 - 37x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 275x^{12} - 1754x^{11} + 7200x^{10} - 19973x^9 + 38284x^8 - 51007x^7 + 46942x^6 - 29332x^5 + \\
& 12084x^4 - 3131x^3 + 472x^2 - 36x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1737x^{11} + 7077x^{10} - 19477x^9 + 37056x^8 - 49065x^7 + 44959x^6 - 28036x^5 + \\
& 11556x^4 - 3003x^3 + 455x^2 - 35x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1735x^{11} + 7046x^{10} - 19275x^9 + 36333x^8 - 47505x^7 + 42862x^6 - 26281x^5 + \\
& 10667x^4 - 2747x^3 + 418x^2 - 33x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1736x^{11} + 7061x^{10} - 19370x^9 + 36666x^8 - 48216x^7 + 43819x^6 - 27092x^5 + \\
& 11086x^4 - 2870x^3 + 436x^2 - 34x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1735x^{11} + 7044x^{10} - 19248x^9 + 36183x^8 - 47058x^7 + 42081x^6 - 25460x^5 + \\
& 10155x^4 - 2568x^3 + 387x^2 - 31x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1735x^{11} + 7044x^{10} - 19246x^9 + 36160x^8 - 46953x^7 + 41834x^6 - 25137x^5 + \\
& 9920x^4 - 2478x^3 + 371x^2 - 30x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 274x^{12} - 1735x^{11} + 7045x^{10} - 19262x^9 + 36264x^8 - 47311x^7 + 42547x^6 - 25976x^5 + \\
& 10489x^4 - 2685x^3 + 406x^2 - 32x + 1, \\
& x^{15} - 27x^{14} + 322x^{13} - 2237x^{12} + 10058x^{11} - 30777x^{10} + 65693x^9 - 98793x^8 + 104703x^7 - 77645x^6 + \\
& 39727x^5 - 13710x^4 + 3079x^3 - 424x^2 + 32x - 1, \\
& x^{15} - 27x^{14} + 323x^{13} - 2261x^{12} + 10304x^{11} - 32190x^{10} + 70713x^9 - 110296x^8 + 121940x^7 - \\
& 94465x^6 + 50220x^5 - 17760x^4 + 3993x^3 - 532x^2 + 37x - 1, \\
& x^{15} - 28x^{14} + 348x^{13} - 2533x^{12} + 11998x^{11} - 38873x^{10} + 88169x^9 - 140945x^8 + 157932x^7 - \\
& 122084x^6 + 63478x^5 - 21465x^4 + 4521x^3 - 560x^2 + 37x - 1, \\
& x^{15} - 27x^{14} + 323x^{13} - 2261x^{12} + 10304x^{11} - 32189x^{10} + 70700x^9 - 110227x^8 + 121746x^7 - \\
& 94152x^6 + 49927x^5 - 17607x^4 + 3953x^3 - 528x^2 + 37x - 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 374x^{14} - 2836x^{13} + 14091x^{12} - 48408x^{11} + 118290x^{10} - 208431x^9 + 265782x^8 - \\
& 244226x^7 + 159913x^6 - 73242x^5 + 22819x^4 - 4635x^3 + 573x^2 - 38x + 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 374x^{14} - 2835x^{13} + 14069x^{12} - 48205x^{11} + 117251x^{10} - 205149x^9 + 259051x^8 - \\
& 235052x^7 + 151556x^6 - 68201x^5 + 20860x^4 - 4172x^3 + 514x^2 - 35x + 1, \\
& x^{16} - 28x^{15} + 351x^{14} - 2604x^{13} + 12735x^{12} - 43295x^{11} + 105183x^{10} - 184976x^9 + 236157x^8 - \\
& 217812x^7 + 143430x^6 - 66161x^5 + 20778x^4 - 4257x^3 + 532x^2 - 36x + 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 376x^{14} - 2881x^{13} + 14533x^{12} - 50911x^{11} + 127385x^{10} - 230770x^9 + 303849x^8 - \\
& 289697x^7 + 197940x^6 - 95254x^5 + 31441x^4 - 6835x^3 + 916x^2 - 67x + 2, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 375x^{14} - 2857x^{13} + 14279x^{12} - 49348x^{11} + 121177x^{10} - 214063x^9 + 272717x^8 - \\
& 249314x^7 + 161704x^6 - 73113x^5 + 22457x^4 - 4506x^3 + 554x^2 - 37x + 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 375x^{14} - 2859x^{13} + 14320x^{12} - 49711x^{11} + 123001x^{10} - 219813x^9 + 284591x^8 - \\
& 265614x^7 + 176517x^6 - 81849x^5 + 25677x^4 - 5199x^3 + 630x^2 - 40x + 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 375x^{14} - 2857x^{13} + 14280x^{12} - 49366x^{11} + 121313x^{10} - 214625x^9 + 274106x^8 - \\
& 251427x^7 + 163671x^6 - 74197x^5 + 22790x^4 - 4557x^3 + 557x^2 - 37x + 1, \\
& x^{16} - 28x^{15} + 350x^{14} - 2583x^{13} + 12543x^{12} - 42286x^{11} + 101792x^{10} - 177300x^9 + 224146x^8 - \\
& 204688x^7 + 133439x^6 - 60943x^5 + 18971x^4 - 3869x^3 + 487x^2 - 34x + 1, \\
& x^{16} - 29x^{15} + 375x^{14} - 2858x^{13} + 14300x^{12} - 49539x^{11} + 122165x^{10} - 217274x^9 + 279559x^8 - \\
& 259009x^7 + 170802x^6 - 78665x^5 + 24591x^4 - 4995x^3 + 614x^2 - 40x + 1, \\
& x^{17} - 31x^{16} + 433x^{15} - 3608x^{14} + 20017x^{13} - 78160x^{12} + 221435x^{11} - 462611x^{10} + 717469x^9 - \\
& 825627x^8 + 700247x^7 - 432227x^6 + 190457x^5 - 58254x^4 + 11862x^3 - 1504x^2 + 105x - 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^{17} - 31x^{16} + 433x^{15} - 3607x^{14} + 19991x^{13} - 77864x^{12} + 219489x^{11} - 454402x^{10} + 694109x^9 - \\
& 779715x^8 + 637464x^7 - 372774x^6 + 152065x^5 - 41797x^4 + 7377x^3 - 780x^2 + 44x - 1, \\
& x^{17} - 31x^{16} + 433x^{15} - 3608x^{14} + 20016x^{13} - 78141x^{12} + 221279x^{11} - 461883x^{10} + 715331x^9 - \\
& 821490x^8 + 694870x^7 - 427515x^6 + 187693x^5 - 57190x^4 + 11605x^3 - 1469x^2 + 103x - 3, \\
& x^{17} - 30x^{16} + 404x^{15} - 3233x^{14} + 17157x^{13} - 63818x^{12} + 171512x^{11} - 338436x^{10} + 493528x^9 - \\
& 531403x^8 + 419445x^7 - 239493x^6 + 96981x^5 - 27083x^4 + 5010x^3 - 577x^2 + 37x - 1, \\
& x^{18} - 31x^{17} + 434x^{16} - 3634x^{15} + 20320x^{14} - 80254x^{13} + 231007x^{12} - 493187x^{11} + 787795x^{10} - \\
& 943937x^9 + 846712x^8 - 565450x^7 + 278719x^6 - 100140x^5 + 25720x^4 - 4567x^3 + 527x^2 - 35x + 1, \\
& x^{19} - 34x^{18} + 527x^{17} - 4935x^{16} + 31194x^{15} - 140864x^{14} + 469184x^{13} - 1173625x^{12} + 2224717x^{11} - \\
& 3203723x^{10} + 3495285x^9 - 2868329x^8 + 1750564x^7 - 782324x^6 + 250793x^5 - 56098x^4 + 8421x^3 - \\
& 799x^2 + 43x - 1, \\
& x^{20} - 36x^{19} + 592x^{18} - 5901x^{17} + 39894x^{16} - 193914x^{15} + 700960x^{14} - 1922589x^{13} + 4046847x^{12} - \\
& 6570299x^{11} + 8228620x^{10} - 7915862x^9 + 5800824x^8 - 3198214x^7 + 1304348x^6 - 384755x^5 + 79651x^4 - \\
& 11093x^3 + 974x^2 - 48x + 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 662x^{19} - 7017x^{18} + 50652x^{17} - 264096x^{16} + 1029529x^{15} - 3064808x^{14} + 7056359x^{13} - \\
& 12651679x^{12} + 17706626x^{11} - 19317587x^{10} + 16350844x^9 - 10650739x^8 + 5276504x^7 - 1955895x^6 + \\
& 530450x^5 - 102025x^4 + 13307x^3 - 1099x^2 + 51x - 1, \\
& x^{21} - 37x^{20} + 629x^{19} - 6520x^{18} + 46121x^{17} - 236127x^{16} + 905630x^{15} - 2657404x^{14} + 6041615x^{13} - \\
& 10714547x^{12} + 14856377x^{11} - 16082796x^{10} + 13529730x^9 - 8775980x^8 + 4340293x^7 - 1611879x^6 + \\
& 440266x^5 - 85918x^4 + 11484x^3 - 984x^2 + 48x - 1, \\
& x^{21} - 37x^{20} + 629x^{19} - 6520x^{18} + 46121x^{17} - 236128x^{16} + 905654x^{15} - 2657659x^{14} + 6043199x^{13} - \\
& 10720947x^{12} + 14874086x^{11} - 16117217x^{10} + 13577179x^9 - 8822270x^8 + 4371857x^7 - 1626575x^6 + \\
& 444767x^5 - 86772x^4 + 11574x^3 - 988x^2 + 48x - 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 661x^{19} - 6986x^{18} + 50215x^{17} - 260384x^{16} + 1008299x^{15} - 2978253x^{14} + 6796491x^{13} - \\
& 12066219x^{12} + 16707028x^{11} - 18019925x^{10} + 15072989x^9 - 9703686x^8 + 4755571x^7 - 1747760x^6 + \\
& 471956x^5 - 91010x^4 + 12021x^3 - 1018x^2 + 49x - 1, \\
& x^{21} - 37x^{20} + 629x^{19} - 6519x^{18} + 46093x^{17} - 235774x^{16} + 902977x^{15} - 2644137x^{14} + 5994942x^{13} - \\
& 10595414x^{12} + 14631953x^{11} - 15768232x^{10} + 13201104x^9 - 8520973x^8 + 4194537x^7 - 1551385x^6 + \\
& 422456x^5 - 82341x^4 + 11026x^3 - 951x^2 + 47x - 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 662x^{19} - 7016x^{18} + 50623x^{17} - 263716x^{16} + 1026549x^{15} - 3049190x^{14} + 6998496x^{13} - \\
& 12495319x^{12} + 17393108x^{11} - 18847465x^{10} + 15823311x^9 - 10210292x^8 + 5006216x^7 - 1836383x^6 + \\
& 493503x^5 - 94394x^4 + 12327x^3 - 1030x^2 + 49x - 1, \\
& x^{21} - 37x^{20} + 628x^{19} - 6488x^{18} + 45656x^{17} - 232062x^{16} + 881750x^{15} - 2557644x^{14} + 5735638x^{13} - \\
& 10012934x^{12} + 13642521x^{11} - 14494118x^{10} + 11961174x^9 - 7616692x^8 + 3707186x^7 - 1361262x^6 + \\
& 370329x^5 - 72717x^4 + 9906x^3 - 878x^2 + 45x - 1, \\
& x^{21} - 37x^{20} + 630x^{19} - 6550x^{18} + 46529x^{17} - 239462x^{16} + 923949x^{15} - 2729046x^{14} + 6247852x^{13} - \\
& 11160284x^{12} + 15587664x^{11} - 16997691x^{10} + 14401727x^9 - 9405147x^8 + 4679771x^7 - 1746253x^6 + \\
& 478206x^5 - 93254x^4 + 12396x^3 - 1049x^2 + 50x - 1, \\
& x^{22} - 40x^{21} + 740x^{20} - 8407x^{19} + 65683x^{18} - 374549x^{17} + 1614800x^{16} - 5380628x^{15} + 14047901x^{14} - \\
& 28969248x^{13} + 47361479x^{12} - 61398902x^{11} + 62932078x^{10} - 50697588x^9 + 31811123x^8 - 15352578x^7 + \\
& 5603004x^6 - 1511320x^5 + 291944x^4 - 38597x^3 + 3254x^2 - 154x + 3, \\
& x^{22} - 39x^{21} + 701x^{20} - 7710x^{19} + 58104x^{18} - 318403x^{17} + 1314115x^{16} - 4175106x^{15} + 10350675x^{14} - \\
& 20180685x^{13} + 31052363x^{12} - 37709766x^{11} + 36034271x^{10} - 26939661x^9 + 15625755x^8 - 6953429x^7 + \\
& 2339557x^6 - 583805x^5 + 105193x^4 - 13152x^3 + 1069x^2 - 50x + 1, \\
& x^{22} - 40x^{21} + 737x^{20} - 8305x^{19} + 64097x^{18} - 359585x^{17} + 1518936x^{16} - 4938470x^{15} + 12528509x^{14} - \\
& 24997863x^{13} + 39368654x^{12} - 48935809x^{11} + 47854274x^{10} - 36582907x^9 + 21654374x^8 - 9794508x^7 + \\
& 3325702x^6 - 827755x^5 + 146179x^4 - 17489x^3 + 1322x^2 - 56x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 858x^{22} - 10556x^{21} + 89748x^{20} - 560151x^{19} + 2661377x^{18} - 9851449x^{17} + 28843603x^{16} - \\
& 67443670x^{15} + 126654006x^{14} - 191494024x^{13} + 233061937x^{12} - 227750986x^{11} + 177843081x^{10} - \\
& 110184505x^9 + 53645540x^8 - 20266836x^7 + 5843592x^6 - 1257832x^5 + 196066x^4 - 21177x^3 + \\
& 1479x^2 - 59x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 859x^{22} - 10592x^{21} + 90344x^{20} - 566173x^{19} + 2702939x^{18} - 10059252x^{17} + 29622628x^{16} - \\
& 69679771x^{15} + 131629715x^{14} - 200131135x^{13} + 244773712x^{12} - 240118139x^{11} + 187934748x^{10} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 116465181x^9 + 56566618x^8 - 21250343x^7 + 6070888x^6 - 1290222x^5 + 198069x^4 - 21067x^3 + \\
& 1455x^2 - 58x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 859x^{22} - 10591x^{21} + 90311x^{20} - 565675x^{19} + 2698377x^{18} - 10030848x^{17} + 29495071x^{16} - \\
& 69251786x^{15} + 130533011x^{14} - 197955518x^{13} + 241407113x^{12} - 236043600x^{11} + 184084671x^{10} - \\
& 113642568x^9 + 54978625x^8 - 20575825x^7 + 5859381x^6 - 1242735x^5 + 190755x^4 - 20343x^3 + \\
& 1414x^2 - 57x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 858x^{22} - 10555x^{21} + 89714x^{20} - 559620x^{19} + 2656321x^{18} - 9818597x^{17} + 28689109x^{16} - \\
& 66899428x^{15} + 125187554x^{14} - 188434347x^{13} + 228088005x^{12} - 221442351x^{11} + 171617735x^{10} - \\
& 105437276x^9 + 50878424x^8 - 19053046x^7 + 5451455x^6 - 1167270x^5 + 181746x^4 - 19728x^3 + \\
& 1396x^2 - 57x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 859x^{22} - 10592x^{21} + 90343x^{20} - 566143x^{19} + 2702527x^{18} - 10055814x^{17} + 29603116x^{16} - \\
& 69599896x^{15} + 131385672x^{14} - 199563191x^{13} + 243755457x^{12} - 238705077x^{11} + 186418058x^{10} - \\
& 115213090x^9 + 55779678x^8 - 20879404x^7 + 5942419x^6 - 1258437x^5 + 192673x^4 - 20477x^3 + \\
& 1418x^2 - 57x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 858x^{22} - 10555x^{21} + 89714x^{20} - 559619x^{19} + 2656292x^{18} - 9818214x^{17} + 28686052x^{16} - \\
& 66882928x^{15} + 125123719x^{14} - 188251302x^{13} + 227691298x^{12} - 220785712x^{11} + 170784613x^{10} - \\
& 104628729x^9 + 50282707x^8 - 18724259x^7 + 5318251x^6 - 1128813x^5 + 174174x^4 - 18779x^3 + \\
& 1329x^2 - 55x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 858x^{22} - 10555x^{21} + 89714x^{20} - 559619x^{19} + 2656293x^{18} - 9818240x^{17} + 28686358x^{16} - \\
& 66885085x^{15} + 125133873x^{14} - 188285001x^{13} + 227772450x^{12} - 220929536x^{11} + 170972989x^{10} - \\
& 104810395x^9 + 50410312x^8 - 18788358x^7 + 5340650x^6 - 1134036x^5 + 174934x^4 - 18840x^3 + \\
& 1331x^2 - 55x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 859x^{22} - 10592x^{21} + 90344x^{20} - 566173x^{19} + 2702939x^{18} - 10059252x^{17} + 29622629x^{16} - \\
& 69679793x^{15} + 131629930x^{14} - 200132368x^{13} + 244778330x^{12} - 240130036x^{11} + 187956383x^{10} - \\
& 116493244x^9 + 56592561x^8 - 21267254x^7 + 6078496x^6 - 1292501x^5 + 198497x^4 - 21112x^3 + \\
& 1457x^2 - 58x + 1, \\
& x^{24} - 43x^{23} + 858x^{22} - 10556x^{21} + 89748x^{20} - 560149x^{19} + 2661319x^{18} - 9850685x^{17} + 28837542x^{16} - \\
& 67411297x^{15} + 126530720x^{14} - 191148153x^{13} + 232333528x^{12} - 226587839x^{11} + 176429798x^{10} - \\
& 108880119x^9 + 52737121x^8 - 19795079x^7 + 5664221x^6 - 1209247x^5 + 187074x^4 - 20114x^3 + \\
& 1408x^2 - 57x + 1, \\
& x^{26} - 47x^{25} + 1032x^{24} - 14073x^{23} + 133650x^{22} - 939584x^{21} + 5074160x^{20} - 21562027x^{19} + \\
& 73265558x^{18} - 201223170x^{17} + 449829027x^{16} - 821782544x^{15} + 1228894791x^{14} - 1503592842x^{13} + \\
& 1501724324x^{12} - 1219221943x^{11} + 799781540x^{10} - 420445551x^9 + 175258436x^8 - 57136292x^7 + \\
& 14310194x^6 - 2688900x^5 + 366902x^4 - 34680x^3 + 2108x^2 - 72x + 1]
\end{aligned}$$

coef=[0.53793383, 0.46790921, 0.06201384, 0.17528252, 0.00244359, 0.00594619, 0.06656685, 0.00415865, 0.00162666, 0.00026381, 0.02268826, 0.02087990, 0.00171650, 0.00670572, 0.00494538, 0.00435669, 0.00083999, 0.00026780, 0.00126922, 0.00059158, 0.00116447, 0.00026057, 0.00148560, 0.00074059, 0.00057768, 0.00004154, 0.00054812, 0.00222604, 0.00155412, 0.00207869, 0.00033049, 0.00022743, 0.00177254, 0.00018066, 0.00396194, 0.00036795, 0.00153950, 0.00006089, 0.00001082, 0.00024610, 0.00026106, 0.00013027, 0.00011303, 0.00118914, 0.00121424, 0.00072737, 0.00141169, 0.00133850, 0.00031424, 0.00009481, 0.00053529, 0.00022239, 0.00027012, 0.00265436, 0.00013343, 0.00008118, 0.00058771, 0.00110371, 0.00034140, 0.00057026, 0.00039390, 0.00034566, 0.00061844, 0.00167209, 0.00048967, 0.00053393, 0.00014761, 0.00026572, 0.00004545, 0.00051001, 0.00023718, 0.00053096, 0.00103947, 0.00040674, 0.00006127, 0.00017196, 0.00015398, 0.00015069, 0.00029189, 0.00059635, 0.00184900, 0.00027761, 0.00050559, 0.00005135, 0.00006235, 0.00015616, 0.00001694, 0.00041928, 0.00077785, 0.00096075, 0.00047160, 0.00097929, 0.00010843, 0.00006276, 0.00052579, 0.00007747, 0.00018519]

Polynômes et exposants qui interviennent dans le Théorème 2

$\text{pol}=[x,$
 $x - 1,$
 $x - 2,$
 $x^2 - 3x + 1,$
 $x^2 - 4x + 2,$
 $x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$
 $x^3 - 6x^2 + 9x - 1,$
 $x^3 - 6x^2 + 9x - 3,$
 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1,$
 $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 17x + 3,$
 $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2,$
 $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 31x^2 + 12x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 32x^2 + 13x - 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 44x^4 - 79x^3 + 63x^2 - 18x + 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 45x^4 - 84x^3 + 70x^2 - 21x + 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 44x^4 - 78x^3 + 60x^2 - 16x + 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 44x^4 - 78x^3 + 59x^2 - 15x + 1,$
 $2x^8 - 26x^7 + 136x^6 - 367x^5 + 544x^4 - 435x^3 + 171x^2 - 27x + 1,$
 $x^8 - 14x^7 + 78x^6 - 221x^5 + 338x^4 - 273x^3 + 106x^2 - 17x + 1,$
 $x^8 - 14x^7 + 78x^6 - 222x^5 + 345x^4 - 289x^3 + 120x^2 - 21x + 1,$
 $x^8 - 15x^7 + 90x^6 - 276x^5 + 459x^4 - 405x^3 + 171x^2 - 27x + 1,$
 $x^8 - 15x^7 + 90x^6 - 277x^5 + 467x^4 - 428x^3 + 200x^2 - 42x + 3,$
 $x^8 - 15x^7 + 91x^6 - 286x^5 + 495x^4 - 462x^3 + 210x^2 - 36x + 1,$
 $x^8 - 15x^7 + 90x^6 - 276x^5 + 458x^4 - 400x^3 + 165x^2 - 27x + 1,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 456x^6 + 1012x^5 - 1333x^4 + 1016x^3 - 421x^2 + 86x - 7,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 456x^6 + 1012x^5 - 1332x^4 + 1010x^3 - 409x^2 + 77x - 5,$
 $x^9 - 17x^8 + 119x^7 - 444x^6 + 956x^5 - 1205x^4 + 867x^3 - 335x^2 + 61x - 4,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 456x^6 + 1011x^5 - 1324x^4 + 986x^3 - 376x^2 + 57x - 1,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 455x^6 + 1001x^5 - 1287x^4 + 924x^3 - 330x^2 + 45x - 1,$
 $x^9 - 16x^8 + 104x^7 - 354x^6 + 680x^5 - 745x^4 + 454x^3 - 145x^2 + 21x - 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 135x^8 - 549x^7 + 1320x^6 - 1920x^5 + 1662x^4 - 813x^3 + 206x^2 - 24x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 562x^7 + 1388x^6 - 2104x^5 + 1937x^4 - 1036x^3 + 294x^2 - 36x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 561x^7 + 1377x^6 - 2058x^5 + 1844x^4 - 941x^3 + 248x^2 - 28x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 561x^7 + 1376x^6 - 2049x^5 + 1815x^4 - 899x^3 + 220x^2 - 21x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 562x^7 + 1387x^6 - 2096x^5 + 1913x^4 - 1002x^3 + 271x^2 - 30x + 1,$
 $x^{11} - 20x^{10} + 171x^9 - 818x^8 + 2405x^7 - 4492x^6 + 5318x^5 - 3861x^4 + 1604x^3 - 340x^2 + 32x - 1,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 190x^9 - 971x^8 + 3088x^7 - 6348x^6 + 8490x^5 - 7259x^4 + 3803x^3 - 1131x^2 + 166x - 9,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 189x^9 - 953x^8 + 2954x^7 - 5812x^6 + 7238x^5 - 5523x^4 + 2415x^3 - 538x^2 + 48x - 1,$
 $x^{11} - 20x^{10} + 172x^9 - 832x^8 + 2485x^7 - 4733x^6 + 5730x^5 - 4261x^4 + 1812x^3 - 390x^2 + 36x - 1,$
 $x^{11} - 22x^{10} + 208x^9 - 1106x^8 + 3635x^7 - 7643x^6 + 10286x^5 - 8609x^4 + 4194x^3 - 1040x^2 + 96x - 2,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 210x^{10} - 1142x^9 + 3906x^8 - 8752x^7 + 12972x^6 - 12540x^5 + 7601x^4 - 2686x^3 +$
 $491x^2 - 39x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 209x^{10} - 1124x^9 + 3772x^8 - 8218x^7 + 11740x^6 - 10879x^5 + 6347x^4 - 2212x^3 +$
 $421x^2 - 37x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 209x^{10} - 1124x^9 + 3772x^8 - 8218x^7 + 11740x^6 - 10879x^5 + 6346x^4 - 2208x^3 +$
 $417x^2 - 36x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 210x^{10} - 1142x^9 + 3905x^8 - 8741x^7 + 12925x^6 - 12441x^5 + 7494x^4 - 2631x^3 +$
 $481x^2 - 39x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 210x^{10} - 1142x^9 + 3906x^8 - 8753x^7 + 12983x^6 - 12586x^5 + 7694x^4 - 2780x^3 +$
 $534x^2 - 45x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 209x^{10} - 1124x^9 + 3771x^8 - 8205x^7 + 11674x^6 - 10713x^5 + 6130x^4 - 2070x^3 +$

$$\begin{aligned}
& 380x^2 - 33x + 1, \\
& x^{12} - 22x^{11} + 210x^{10} - 1142x^9 + 3906x^8 - 8753x^7 + 12982x^6 - 12579x^5 + 7676x^4 - 2759x^3 + \\
& 523x^2 - 43x + 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 252x^{11} - 1523x^{10} + 5865x^9 - 15051x^8 + 26160x^7 - 30702x^6 + 23858x^5 - 11830x^4 + \\
& 3529x^3 - 575x^2 + 43x - 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1542x^{10} + 6019x^9 - 15748x^8 + 28095x^7 - 34107x^6 + 27645x^5 - 14402x^4 + \\
& 4521x^3 - 766x^2 + 57x - 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1541x^{10} + 6002x^9 - 15626x^8 + 27614x^7 - 32972x^6 + 26008x^5 - 12987x^4 + \\
& 3830x^3 - 596x^2 + 41x - 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1542x^{10} + 6020x^9 - 15762x^8 + 28176x^7 - 34359x^6 + 28106x^5 - 14913x^4 + \\
& 4862x^3 - 897x^2 + 83x - 3, \\
& x^{13} - 23x^{12} + 231x^{11} - 1332x^{10} + 4878x^9 - 11855x^8 + 19410x^7 - 21309x^6 + 15343x^5 - 6962x^4 + \\
& 1880x^3 - 284x^2 + 24x - 1, \\
& x^{13} - 23x^{12} + 231x^{11} - 1332x^{10} + 4879x^9 - 11870x^8 + 19502x^7 - 21607x^6 + 15893x^5 - 7544x^4 + \\
& 2216x^3 - 376x^2 + 32x - 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1541x^{10} + 6002x^9 - 15626x^8 + 27615x^7 - 32981x^6 + 26039x^5 - 13038x^4 + \\
& 3871x^3 - 611x^2 + 43x - 1, \\
& x^{13} - 23x^{12} + 233x^{11} - 1368x^{10} + 5153x^9 - 13021x^8 + 22425x^7 - 26231x^6 + 20423x^5 - 10189x^4 + \\
& 3065x^3 - 505x^2 + 39x - 1, \\
& x^{13} - 24x^{12} + 252x^{11} - 1523x^{10} + 5866x^9 - 15066x^8 + 26251x^7 - 30991x^6 + 24378x^5 - 12369x^4 + \\
& 3847x^3 - 679x^2 + 60x - 2, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 277x^{12} - 1794x^{11} + 7543x^{10} - 21627x^9 + 43227x^8 - 60517x^7 + 58789x^6 - 38703x^5 + \\
& 16577x^4 - 4331x^3 + 623x^2 - 42x + 1, \\
& x^{14} - 26x^{13} + 299x^{12} - 2004x^{11} + 8684x^{10} - 25520x^9 + 51915x^8 - 73349x^7 + 71240x^6 - 46462x^5 + \\
& 19566x^4 - 4998x^3 + 699x^2 - 45x + 1, \\
& x^{14} - 25x^{13} + 276x^{12} - 1774x^{11} + 7370x^{10} - 20778x^9 + 40621x^8 - 55317x^7 + 52002x^6 - 33027x^5 + \\
& 13693x^4 - 3531x^3 + 526x^2 - 39x + 1, \\
& x^{15} - 27x^{14} + 325x^{13} - 2303x^{12} + 10687x^{11} - 34185x^{10} + 77283x^9 - 124595x^8 + 142812x^7 - \\
& 114758x^6 + 62982x^5 - 22638x^4 + 4986x^3 - 605x^2 + 35x - 1, \\
& x^{16} - 30x^{15} + 406x^{14} - 3279x^{13} + 17620x^{12} - 66499x^{11} + 181381x^{10} - 362482x^9 + 532494x^8 - \\
& 571922x^7 + 442965x^6 - 241724x^5 + 89680x^4 - 21412x^3 + 3008x^2 - 211x + 5, \\
& x^{17} - 31x^{16} + 435x^{15} - 3657x^{14} + 20548x^{13} - 81514x^{12} + 235128x^{11} - 500454x^{10} + 789441x^9 - \\
& 919189x^8 + 780461x^7 - 473293x^6 + 198761x^5 - 55359x^4 + 9643x^3 - 971x^2 + 50x - 1, \\
& x^{19} - 34x^{18} + 530x^{17} - 5022x^{16} + 32335x^{15} - 149817x^{14} + 516044x^{13} - 1346309x^{12} + 2685700x^{11} - \\
& 4107313x^{10} + 4799740x^9 - 4247503x^8 + 2803746x^7 - 1349973x^6 + 459380x^5 - 105694x^4 + 15446x^3 - \\
& 1312x^2 + 57x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 561x^{17} - 5459x^{16} + 36045x^{15} - 170995x^{14} + 602002x^{13} - 1602180x^{12} + 3253797x^{11} - \\
& 5055385x^{10} + 5990265x^9 - 5367784x^8 + 3587201x^7 - 1752386x^6 + 608784x^5 - 144820x^4 + 22364x^3 - \\
& 2074x^2 + 102x - 2, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 562x^{17} - 5490x^{16} + 36480x^{15} - 174653x^{14} + 622572x^{13} - 1683908x^{12} + 3490140x^{11} - \\
& 5560315x^{10} + 6790955x^9 - 6306710x^8 + 4391990x^7 - 2246607x^6 + 819883x^5 - 205010x^4 + 33197x^3 - \\
& 3210x^2 + 162x - 3, \\
& x^{19} - 34x^{18} + 530x^{17} - 5022x^{16} + 32335x^{15} - 149818x^{14} + 516067x^{13} - 1346543x^{12} + 2687089x^{11} - \\
& 4112655x^{10} + 4813716x^9 - 4272910x^8 + 2835949x^7 - 1378113x^6 + 475895x^5 - 111922x^4 + 16852x^3 - \\
& 1480x^2 + 65x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 560x^{17} - 5432x^{16} + 35716x^{15} - 168601x^{14} + 590399x^{13} - 1562609x^{12} + 3155931x^{11} - \\
& 4876919x^{10} + 5748184x^9 - 5122367x^8 + 3400560x^7 - 1645505x^6 + 562769x^5 - 130255x^4 + 19170x^3 - \\
& 1634x^2 + 69x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 561x^{17} - 5460x^{16} + 36072x^{15} - 171322x^{14} + 604350x^{13} - 1613309x^{12} + 3290472x^{11} - \\
& 5141552x^{10} + 6135753x^9 - 5543184x^8 + 3734798x^7 - 1835017x^6 + 636489x^5 - 148716x^4 + 21848x^3 - \\
& 1820x^2 + 73x - 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 667x^{19} - 7177x^{18} + 52983x^{17} - 284588x^{16} + 1151004x^{15} - 3578829x^{14} + 8659711x^{13} - \\
& 16405967x^{12} + 24365366x^{11} - 28282682x^{10} + 25479854x^9 - 17617116x^8 + 9200833x^7 - 3552227x^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 984814x^5 - 188443x^4 + 23524x^3 - 1758x^2 + 68x - 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 667x^{19} - 7176x^{18} + 52953x^{17} - 284180x^{16} + 1147673x^{15} - 3560605x^{14} + 8589071x^{13} - \\
& 16205933x^{12} + 23944730x^{11} - 27621392x^{10} + 24703168x^9 - 16940663x^8 + 8770162x^7 - 3356234x^6 + \\
& 923145x^5 - 175690x^4 + 21932x^3 - 1657x^2 + 66x - 1, \\
& x^{21} - 38x^{20} + 667x^{19} - 7177x^{18} + 52983x^{17} - 284589x^{16} + 1151029x^{15} - 3579108x^{14} + 8661547x^{13} - \\
& 16413896x^{12} + 24389035x^{11} - 28332790x^{10} + 25555808x^9 - 17699308x^8 + 9263369x^7 - 3584683x^6 + \\
& 995713x^5 - 190600x^4 + 23733x^3 - 1764x^2 + 68x - 1, \\
& x^{22} - 41x^{21} + 780x^{20} - 9141x^{19} + 73882x^{18} - 436925x^{17} + 1957369x^{16} - 6785074x^{15} + 18431384x^{14} - \\
& 39495678x^{13} + 66883162x^{12} - 89298078x^{11} + 93411216x^{10} - 75773874x^9 + 46973720x^8 - 21823973x^7 + \\
& 7409684x^6 - 1780366x^5 + 290753x^4 - 30684x^3 + 1958x^2 - 68x + 1, \\
& x^{26} - 47x^{25} + 1036x^{24} - 14237x^{23} + 136775x^{22} - 976348x^{21} + 5373366x^{20} - 23351006x^{19} + \\
& 81411511x^{18} - 230121322x^{17} + 530874984x^{16} - 1003098910x^{15} + 1554044082x^{14} - 1971645439x^{13} + \\
& 2041748237x^{12} - 1716463523x^{11} + 1162576984x^{10} - 628064340x^9 + 267174439x^8 - 88044247x^7 + \\
& 22012762x^6 - 4064156x^5 + 534378x^4 - 47549x^3 + 2650x^2 - 81x + 1]
\end{aligned}$$

coef=[1.4338923, 2.3791685, 1.0670872, 1.0283822, 0.0933236, 0.5583063, 0.0829329, 0.0100999, 0.0572444, 0.0013090, 0.0007186, 0.0849735, 0.1862799, 0.0303978, 0.0045486, 0.1091599, 0.0038395, 0.0088677, 0.0025727, 0.0036384, 0.0062433, 0.0026132, 0.0017400, 0.0170124, 0.0015320, 0.0000021, 0.0037592, 0.0022086, 0.0077010, 0.0044824, 0.0024851, 0.0196657, 0.0455162, 0.0039525, 0.0001574, 0.0111271, 0.0026080, 0.0025693, 0.0016778, 0.0048469, 0.0022862, 0.0117032, 0.0126292, 0.0013425, 0.0037429, 0.0063653, 0.0048968, 0.0019928, 0.0185382, 0.0105638, 0.0024603, 0.0021767, 0.0014564, 0.0027321, 0.0147307, 0.0038494, 0.0107454, 0.0034055, 0.0011166, 0.0014229, 0.0003166, 0.0053721, 0.0036493, 0.0012079, 0.0022056, 0.0017564, 0.0017591, 0.0036141, 0.0016779, 0.0146680, 0.0053908, 0.0043565, 0.0022349, 0.0009102];

Polynômes et exposants qui interviennent dans le Théorème 3

$\text{pol}=[x,$
 $x - 1,$
 $x - 2,$
 $x - 3,$
 $x^2 - 3x + 1,$
 $x^2 - 4x + 2,$
 $x^2 - 5x + 5,$
 $x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$
 $x^3 - 6x^2 + 9x - 1,$
 $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2,$
 $x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1,$
 $x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 31x^2 + 12x - 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 46x^4 - 90x^3 + 81x^2 - 27x + 1,$
 $x^6 - 11x^5 + 45x^4 - 84x^3 + 70x^2 - 21x + 1,$
 $x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 113x^3 + 110x^2 - 42x + 3,$
 $x^8 - 15x^7 + 91x^6 - 286x^5 + 495x^4 - 462x^3 + 210x^2 - 36x + 1,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 456x^6 + 1011x^5 - 1324x^4 + 986x^3 - 376x^2 + 57x - 1,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 455x^6 + 1001x^5 - 1286x^4 + 918x^3 - 319x^2 + 39x - 1,$
 $x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 455x^6 + 1001x^5 - 1287x^4 + 924x^3 - 330x^2 + 45x - 1,$
 $x^9 - 16x^8 + 105x^7 - 365x^6 + 726x^5 - 837x^4 + 546x^3 - 190x^2 + 30x - 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 137x^8 - 575x^7 + 1455x^6 - 2278x^5 + 2174x^4 - 1192x^3 + 330x^2 - 36x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 562x^7 + 1388x^6 - 2104x^5 + 1937x^4 - 1036x^3 + 294x^2 - 36x + 1,$
 $x^{10} - 19x^9 + 153x^8 - 681x^7 + 1831x^6 - 3049x^5 + 3094x^4 - 1801x^3 + 526x^2 - 57x + 1,$
 $x^{10} - 18x^9 + 136x^8 - 561x^7 + 1376x^6 - 2049x^5 + 1815x^4 - 899x^3 + 220x^2 - 21x + 1,$
 $x^{11} - 20x^{10} + 172x^9 - 833x^8 + 2499x^7 - 4812x^6 + 5960x^5 - 4627x^4 + 2120x^3 - 508x^2 + 48x - 1,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 189x^9 - 953x^8 + 2953x^7 - 5800x^6 + 7183x^5 - 5402x^4 + 2285x^3 - 479x^2 + 42x - 1,$
 $x^{11} - 20x^{10} + 172x^9 - 832x^8 + 2485x^7 - 4733x^6 + 5730x^5 - 4261x^4 + 1812x^3 - 390x^2 + 36x - 1,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 190x^9 - 970x^8 + 3074x^7 - 6267x^6 + 8239x^5 - 6809x^4 + 3334x^3 - 862x^2 + 93x - 3,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 190x^9 - 969x^8 + 3060x^7 - 6188x^6 + 8008x^5 - 6435x^4 + 3003x^3 - 715x^2 + 66x - 1,$
 $x^{11} - 21x^{10} + 190x^9 - 970x^8 + 3074x^7 - 6268x^6 + 8248x^5 - 6839x^4 + 3379x^3 - 890x^2 + 96x - 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 211x^{10} - 1159x^9 + 4028x^8 - 9235x^7 + 14128x^6 - 14260x^5 + 9170x^4 - 3511x^3 + 706x^2 - 57x + 1,$
 $x^{12} - 23x^{11} + 230x^{10} - 1312x^9 + 4707x^8 - 11040x^7 + 17043x^6 - 17006x^5 + 10495x^4 - 3714x^3 + 674x^2 - 52x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 210x^{10} - 1142x^9 + 3906x^8 - 8752x^7 + 12972x^6 - 12540x^5 + 7601x^4 - 2686x^3 + 491x^2 - 39x + 1,$
 $x^{12} - 22x^{11} + 209x^{10} - 1124x^9 + 3772x^8 - 8218x^7 + 11740x^6 - 10879x^5 + 6347x^4 - 2212x^3 + 421x^2 - 37x + 1,$
 $x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1541x^{10} + 6002x^9 - 15626x^8 + 27614x^7 - 32970x^6 + 25993x^5 - 12948x^4 + 3790x^3 - 584x^2 + 42x - 1,$
 $x^{13} - 24x^{12} + 254x^{11} - 1560x^{10} + 6156x^9 - 16320x^8 + 29512x^7 - 36192x^6 + 29316x^5 - 14880x^4 + 4312x^3 - 608x^2 + 33x - 1,$
 $x^{13} - 24x^{12} + 254x^{11} - 1560x^{10} + 6156x^9 - 16321x^8 + 29526x^7 - 36271x^6 + 29545x^5 - 15239x^4 + 4605x^3 - 718x^2 + 48x - 1,$
 $x^{13} - 24x^{12} + 253x^{11} - 1541x^{10} + 6002x^9 - 15626x^8 + 27614x^7 - 32970x^6 + 25993x^5 - 12947x^4 + 3785x^3 - 577x^2 + 39x - 1,$
 $x^{14} - 26x^{13} + 301x^{12} - 2046x^{11} + 9066x^{10} - 27492x^9 + 58277x^8 - 86662x^7 + 89402x^6 - 62293x^5 + 27973x^4 - 7493x^3 + 1053x^2 - 63x + 1,$
 $x^{14} - 26x^{13} + 301x^{12} - 2047x^{11} + 9085x^{10} - 27647x^9 + 58988x^8 - 88680x^7 + 93080x^6 - 66626x^5 + 31223x^4 - 8992x^3 + 1456x^2 - 122x + 5,$
 $x^{14} - 26x^{13} + 300x^{12} - 2026x^{11} + 8893x^{10} - 26643x^9 + 55671x^8 - 81461x^7 + 82606x^6 - 56585x^5 + 25031x^4 - 6636x^3 + 927x^2 - 54x + 1,$

$$\begin{aligned}
& x^{14} - 26x^{13} + 300x^{12} - 2026x^{11} + 8894x^{10} - 26660x^9 + 55792x^8 - 81931x^7 + 83695x^6 - 58132x^5 + \\
& 26366x^4 - 7304x^3 + 1101x^2 - 72x + 1, \\
& x^{14} - 26x^{13} + 301x^{12} - 2047x^{11} + 9084x^{10} - 27630x^9 + 58867x^8 - 88211x^7 + 92000x^6 - 65108x^5 + \\
& 29923x^4 - 8319x^3 + 1241x^2 - 79x + 1, \\
& x^{14} - 26x^{13} + 301x^{12} - 2047x^{11} + 9085x^{10} - 27647x^9 + 58987x^8 - 88666x^7 + 92999x^6 - 66376x^5 + \\
& 30781x^4 - 8547x^3 + 1219x^2 - 66x + 1, \\
& x^{15} - 28x^{14} + 352x^{13} - 2625x^{12} + 12924x^{11} - 44236x^{10} + 107935x^9 - 189349x^8 + 237734x^7 - \\
& 209871x^6 + 125908x^5 - 48416x^4 + 10777x^3 - 1139x^2 + 33x + 1, \\
& x^{15} - 27x^{14} + 326x^{13} - 2324x^{12} + 10879x^{11} - 35191x^{10} + 80632x^9 - 132027x^8 + 154052x^7 - \\
& 126416x^6 + 71213x^5 - 26493x^4 + 6117x^3 - 790x^2 + 48x - 1, \\
& x^{15} - 29x^{14} + 378x^{13} - 2926x^{12} + 14972x^{11} - 53341x^{10} + 135754x^9 - 249170x^8 + 328913x^7 - \\
& 307762x^6 + 198485x^5 - 84236x^4 + 21843x^3 - 3070x^2 + 193x - 4, \\
& 2x^{16} - 56x^{15} + 707x^{14} - 5322x^{13} + 26616x^{12} - 93276x^{11} + 235448x^{10} - 433306x^9 + 582018x^8 - \\
& 565754x^7 + 390783x^6 - 186196x^5 + 58529x^4 - 11363x^3 + 1233x^2 - 63x + 1, \\
& x^{17} - 31x^{16} + 437x^{15} - 3708x^{14} + 21127x^{13} - 85378x^{12} + 251986x^{11} - 551044x^{10} + 896425x^9 - \\
& 1079825x^8 + 950754x^7 - 598410x^6 + 260352x^5 - 74607x^4 + 13163x^3 - 1305x^2 + 63x - 1, \\
& x^{18} - 34x^{17} + 529x^{16} - 4992x^{15} + 31925x^{14} - 146437x^{13} + 497287x^{12} - 1272275x^{11} + 2471626x^{10} - \\
& 3647120x^9 + 4061161x^8 - 3366491x^7 + 2032793x^6 - 866121x^5 + 248952x^4 - 45346x^3 + 4795x^2 - \\
& 256x + 5, \\
& x^{18} - 34x^{17} + 528x^{16} - 4963x^{15} + 31544x^{14} - 143437x^{13} + 481503x^{12} - 1213705x^{11} + 2313917x^{10} - \\
& 3334790x^9 + 3604893x^8 - 2877688x^7 + 1654278x^6 - 659331x^5 + 172182x^4 - 27080x^3 + 2266x^2 - \\
& 84x + 1, \\
& x^{18} - 33x^{17} + 498x^{16} - 4554x^{15} + 28189x^{14} - 124958x^{13} + 409284x^{12} - 1007364x^{11} + 1876325x^{10} - \\
& 2642570x^9 + 2791017x^8 - 2174929x^7 + 1218246x^6 - 471629x^5 + 119136x^4 - 18083x^3 + 1484x^2 - \\
& 60x + 1, \\
& x^{18} - 33x^{17} + 498x^{16} - 4553x^{15} + 28164x^{14} - 124679x^{13} + 407450x^{12} - 999475x^{11} + 1853001x^{10} - \\
& 2594148x^9 + 2720219x^8 - 2103013x^7 + 1169171x^6 - 450557x^5 + 114150x^4 - 17626x^3 + 1490x^2 - \\
& 60x + 1, \\
& x^{19} - 34x^{18} + 530x^{17} - 5022x^{16} + 32335x^{15} - 149819x^{14} + 516091x^{13} - 1346798x^{12} + 2688671x^{11} - \\
& 4119018x^{10} + 4831131x^9 - 4306014x^8 + 2879727x^7 - 1417775x^6 + 499646x^5 - 120715x^4 + 18630x^3 - \\
& 1634x^2 + 69x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 562x^{17} - 5489x^{16} + 36451x^{15} - 174274x^{14} + 619619x^{13} - 1668614x^{12} + 3434559x^{11} - \\
& 5414455x^{10} + 6510699x^9 - 5911111x^8 + 3983963x^7 - 1943483x^6 + 661726x^5 - 149357x^4 + 20813x^3 - \\
& 1639x^2 + 66x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 562x^{17} - 5489x^{16} + 36452x^{15} - 174300x^{14} + 619921x^{13} - 1670684x^{12} + 3443876x^{11} - \\
& 5443453x^{10} + 6574715x^9 - 6012289x^8 + 4098088x^7 - 2033934x^6 + 710556x^5 - 166354x^4 + 24269x^3 - \\
& 1975x^2 + 75x - 1, \\
& x^{19} - 35x^{18} + 563x^{17} - 5519x^{16} + 36861x^{15} - 177654x^{14} + 638377x^{13} - 1742669x^{12} + 3648829x^{11} - \\
& 5875719x^{10} + 7253069x^9 - 6801186x^8 + 4769689x^7 - 2443500x^6 + 883518x^5 - 214384x^4 + 32353x^3 - \\
& 2691x^2 + 99x - 1, \\
& x^{20} - 37x^{19} + 632x^{18} - 6612x^{17} + 47400x^{16} - 246795x^{15} + 965166x^{14} - 2892046x^{13} + 6713004x^{12} - \\
& 12124670x^{11} + 17022991x^{10} - 18465934x^9 + 15300556x^8 - 9514319x^7 + 4328253x^6 - 1389414x^5 + \\
& 298992x^4 - 40067x^3 + 3002x^2 - 105x + 1, \\
& x^{21} - 39x^{20} + 704x^{19} - 7807x^{18} + 59532x^{17} - 331085x^{16} + 1389998x^{15} - 4498639x^{14} + 11364060x^{13} - \\
& 22548723x^{12} + 35196732x^{11} - 43100438x^{10} + 41119679x^9 - 30214267x^8 + 16810560x^7 - 6912182x^6 + \\
& 2028802x^5 - 403998x^4 + 50487x^3 - 3482x^2 + 105x - 1, \\
& x^{23} - 44x^{22} + 903x^{21} - 11481x^{20} + 101306x^{19} - 658605x^{18} + 3268673x^{17} - 12662170x^{16} + 38818447x^{15} - \\
& 94935208x^{14} + 185859537x^{13} - 291180321x^{12} + 363639771x^{11} - 359312345x^{10} + 277737306x^9 - \\
& 165298619x^8 + 74146250x^7 - 24361920x^6 + 5643634x^5 - 875188x^4 + 84533x^3 - 4581x^2 + 117x - 1, \\
& x^{24} - 45x^{23} + 948x^{22} - 12424x^{21} + 113531x^{20} - 768455x^{19} + 3995112x^{18} - 16325917x^{17} + 53228459x^{16} - \\
& 139754513x^{15} + 296990157x^{14} - 511631264x^{13} + 713401701x^{12} - 801424186x^{11} + 719638138x^{10} - \\
& 510557180x^9 + 281608154x^8 - 118140617x^7 + 36596769x^6 - 8041135x^5 + 1186317x^4 - 109041x^3 + \\
& 5625x^2 - 135x + 1,
\end{aligned}$$

$$x^{24} - 44x^{23} + 905x^{22} - 11562x^{21} + 102829x^{20} - 676256x^{19} + 3409858x^{18} - 13489120x^{17} + 42490999x^{16} - 107569057x^{15} + 219960159x^{14} - 363891604x^{13} + 486366686x^{12} - 522941709x^{11} + 449026045x^{10} - 304650849x^9 + 160959776x^8 - 64945537x^7 + 19500274x^6 - 4208974x^5 + 623403x^4 - 59467x^3 + 3337x^2 - 95x + 1];$$

coef=[4.6456352, 8.5946254, 6.0111582, 0.4100529, 4.6344568, 0.5503144, 0.0423284, 2.7130819, 0.7421889, 0.0284854, 1.1619968, 0.2640164, 0.0896807, 0.7882513, 0.0146863, 0.2201819, 0.1353780, 0.0008343, 0.1454326, 0.0075964, 0.0102756, 0.0819558, 0.0567197, 0.0078528, 0.0763342, 0.0489166, 0.0669211, 0.0463859, 0.0332209, 0.0044479, 0.0250683, 0.0028064, 0.0089175, 0.0271050, 0.0334501, 0.0419131, 0.0112680, 0.0133515, 0.0445066, 0.0161103, 0.0233970, 0.0319903, 0.0210097, 0.0070919, 0.0206115, 0.0187608, 0.0076299, 0.0318351, 0.0787473, 0.0053604, 0.0107109, 0.0559923, 0.0418808, 0.0007305, 0.0124033, 0.0444069, 0.0021143, 0.0260888, 0.0105911, 0.0080545, 0.0457852, 0.0116600];

Références

- [A2] F. Amoroso. *f-transfinite diameter and number theoretic applications*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **43**, (1993), 1179–1198.
- [ABP] J. Aguirre, M. Bilbao, J. C. Peral. *The trace of totally positive algebraic integers*, Math. Comp., **75** (2006), no 253, 385–393.
- [AP1] J. Aguirre and J.C. Peral. *The integer Chebyshev constant of Farey intervals*, Publ. Mat. 2007, Proceedings of the Primeras Jornadas de Teoría de Números, 11–27.
- [AP2] J. Aguirre and J.C. Peral. *The trace problem for totally positive algebraic integers. With an appendix by Jean-Pierre Serre*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **352**, Number theory and polynomials, 1–19, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [B] P. Borwein. *Computational excursions in analysis and number theory*, CMS Books in Mathematics, **10**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [DW] X. Dong and Q. Wu *The absolute trace of totally positive reciprocal algebraic integers*, soumis pour publication .
- [F2] V. Flammang, M. Grandcolas, G. Rhin. *Small Salem numbers*, Number Theory in progress, Vol 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlin, 1999, 165–168.
- [F3] V. Flammang. *On the absolute trace of polynomials having all zeros in a sector*, Experiment. Math. **17** (2008), no 4, 443–450.
- [LW] Y. Liang and Q. Wu. *The trace problem for totally positive algebraic integers*, J. Aust. Math. Soc. **90** (2011), no. 3, 341–354.
- [Mc] J. McKee. *Computing totally positive algebraic integers of small trace*, Math. Comp. **80** (2011), no 274, 1041–1052.
- [McS1] J. McKee, C.J. Smyth, *Salem numbers of trace -2 and traces of totally positive algebraic integers*, Algorithmic number theory, Lecture Notes in Computer Science 3076, 327–337, Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [Sc] I. Schur. *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Z. **1** (1918), 377–402.
- [Si] C.L. Siegel. *The trace of totally positive and real algebraic integers*, Ann. of Maths **46** (1945), 302–312.
- [Sm2] C.J. Smyth. *The mean value of totally real algebraic numbers*, Math. Comp. **42** (1984), 663–681.

[Sm3] C.J. Smyth. *Totally positive algebraic integers of small trace* , Ann. Inst. Fourier, Grenoble **33** (1984), 1–28.

[Wu] Q. Wu. *On the linear independence measure of logarithms of rational numbers*, Math. Comp. **72** (2003), 901–911

UMR CNRS 7502. IECL, Université de Lorraine, site de Metz, Département de Mathématiques,
UFR MIM, Ile du Sauley, CS 50128. 57045 METZ cedex 01. FRANCE
E-mail address : valerie.flammang@univ-lorraine.fr