



HAL
open science

SUR UNE REPRESENTATION UNITAIRE DES EQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR UNE REPRESENTATION UNITAIRE DES EQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN. 2016. hal-01345530v2

HAL Id: hal-01345530

<https://hal.science/hal-01345530v2>

Preprint submitted on 3 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SUR UNE REPRÉSENTATION UNITAIRE DES ÉQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. On propose de donner une représentation unitaire des équations relativistes d'Einstein et de Dirac. Dans les articles précédents, on a donné une généralisation de l'équation relativiste de Dirac en dehors d'un univers parallélisable. On remarque que dans l'opérateur de Dirac de rang 2 intervient le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita, on est amené à faire l'hypothèse que cet opérateur est proportionnel à l'opérateur énergie-impulsion. On donne les conditions nécessaires pour que le tenseur induit par l'opérateur de Dirac de rang 2 soit un tenseur d'Einstein. Ce développement mathématique de représentation unitaire des équations de Dirac-Einstein permet de construire un pont entre relativité générale et physique quantique.

1. INTRODUCTION

On veut montrer que l'équation relativiste de Dirac

$$i\hbar\partial_0\psi = (mc^2\alpha^0 - i\hbar c\alpha^\nu\partial_\nu)\psi, \quad \{\alpha^\nu : \nu = 1, 2, 3\} \quad (1.1)$$

et l'équation relativiste d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

peuvent être définies par un unique opérateur. On remarque que l'équation 1.1, opère sur les sections ψ du fibré trivial

$$(\mathbf{W} \times \mathbb{C}^4, \pi_1, \mathbf{W}, \mathbb{C}^4)$$

et que l'équation 1.2 est décrite à partir d'une métrique pseudo-riemannienne $g_{\mu\nu}$. On va construire un opérateur qui permet de faire intervenir ces deux notions.

2. SECTION DE DIRAC MÉTRISABLE

Le fibré considéré est le fibré tangent sur l'univers \mathbf{W} , noté $\xi_{\mathbf{W}} = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^4)$, son complexifié est $\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$. On note ζ , l'un des deux fibrés et $\Gamma(\zeta)$ les sections du fibré ζ qui sont les champs réels ou complexes de l'univers \mathbf{W} . Soit

$$T^{p,q}\zeta = (\otimes^p \zeta^*) \otimes (\otimes^q \zeta) \text{ et } \wedge^n \zeta^*$$

le fibré des (p, q) -tenseurs et des n -formes différentielles sur \mathbf{W} , ζ^* est le fibré dual.

Date: 15/06/2016.

1991 Mathematics Subject Classification. 81T10,81T45,83C45,83C05.

Key words and phrases. Section de Dirac, Tenseur métrique, Tenseur énergie-impulsion, Endomorphisme de Dirac, Connexion de Levi-Civita. Tenseur de courbure.

Definition 1. Une section de Dirac γ sur \mathbf{W} est un élément de $\text{Hom}(\Lambda^1\zeta \otimes \zeta, \zeta)$, c'est-à-dire,

$$\gamma(w) : E_w(\Lambda^1\zeta \otimes \zeta) = E_w(\Lambda^1\zeta) \otimes E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \forall w \in \mathbf{W}$$

est bilinéaire et pour tout champ $X \in \Gamma(\zeta)$ et $d \in \Gamma(\Lambda^1\zeta)$

$$w \rightarrow \gamma(d \otimes X)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes X(w)),$$

est une C^∞ -application.

Pour tout section $d \in \Gamma(\Lambda^1\zeta)$, on note γ^d l'endomorphisme de $\Gamma(\zeta)$ défini par

$$\gamma^d : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta), \gamma^d(X) = \gamma(d \otimes X),$$

on se fixe une carte W de \mathbf{W} , $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est le local frame associé à cette carte et $\{d^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual vérifiant $d^\nu \otimes \partial_\mu = \delta_\mu^\nu$. Soit γ^ν l'endomorphisme de $\Gamma_W(\zeta)$ défini par $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$, la famille $\{\gamma^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ est la famille des endomorphismes de Dirac sur la carte W et le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est défini par $\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$.

Remark 1. Si les $\{\gamma^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ sont dans l'algèbre de Clifford, on a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_4,$$

on peut prendre $\gamma^{\mu\nu} = 4g^{\mu\nu}$.

Definition 2. On dit que la section de Dirac est métrisable si la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible.

Pour une section de Dirac métrisable, on définit le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par $(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})^{-1}$.

Lemma 1. La métrique $g_{\mu\nu}$ est indépendante du choix de la carte W .

Proof. La preuve est dans [1]. □

3. LES OPÉRATEURS DE DIRAC

Soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g définie par le tenseur $g_{\mu\nu}$, l'opérateur de Dirac de rang 1 est défini par

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla \text{ avec } H_1(X)(w) = \gamma(w)(\nabla X(w)), \forall w \in \mathbf{W}$$

et tout champ $X \in \Gamma(\zeta)$. Toute connexion ∇ sur \mathbf{W} a une extension [4]

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n \zeta \otimes \zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1} \zeta \otimes \zeta)$$

avec,

$$d_0^\nabla = \nabla, \Lambda^0 \zeta \otimes \zeta = \zeta$$

et

$$d_n^\nabla(\phi \otimes X) = d\phi \otimes s + (-1)^n \phi \wedge \nabla X, \phi \in \Lambda^n \zeta.$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^\alpha\}$ est

$$[\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n] = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1, 2, \dots, n\}} \varepsilon(\tau) \gamma^{\tau(1)} \circ \gamma^{\tau(2)} \circ \dots \circ \gamma^{\tau(n-1)} \circ \gamma^{\tau(n)},$$

et l'anticommutateur est défini par,

$$\{\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n\} = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1, 2, \dots, n\}} \gamma^{\tau(1)} \circ \gamma^{\tau(2)} \circ \dots \circ \gamma^{\tau(n-1)} \circ \gamma^{\tau(n)}.$$

Remark 2. Quand on parle de symétrisé ou d'antisymétrisé de la famille

$$\{\gamma^\alpha, \alpha = 1, \dots, n\},$$

on pose respectivement

$$\mathcal{S}(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n) = \frac{1}{n!} \{\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n\}$$

et

$$\mathcal{A}(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n) = \gamma^1 \wedge \gamma^2 \wedge \dots \wedge \gamma^n = \frac{1}{n!} [\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n],$$

ces définitions interviennent dans la construction des espaces de Fock [3].

Les extensions de rang n d'une section γ sont les éléments γ_n de

$$\text{Hom}(\Lambda^n \zeta \otimes \zeta, \zeta)$$

définis par

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes X) = [\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n](X), X \in \Gamma(\zeta)$$

$\forall \tau = 1, 2, \dots, n, \gamma^\tau = \gamma^{d^\tau}$ et on prolonge γ_n par $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{K})$ -linéarité sur

$$\Lambda^n \zeta \otimes \zeta, \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Definition 3. L'opérateur de Dirac de rang n associé à la section de Dirac métrisable γ est l'endomorphisme de $\Gamma(\zeta)$

$$H_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla,$$

et $H_n(X) = \gamma_n(\nabla_{n-1} X), \forall X \in \Gamma(\zeta)$.

Une équation d'état de rang n associée à la l'opérateur de Dirac H_n est une équation locale de la forme

$$H_n(X) = \lambda X,$$

où λ est une C^∞ -application définie sur une carte W de \mathbf{W} et $X \in \Gamma_W(\zeta)$, λ est une fonction propre locale de l'opérateur H_n .

4. REPRÉSENTATION LOCALE DE H_1 ET H_2

On s'intéresse à la représentation locale des opérateurs

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla \text{ et } H_2 = \gamma_2 \otimes \nabla_1,$$

où $\nabla_1 = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla = R^\nabla$ est la courbure de la connexion ∇ . On se place dans une carte de trivialisatation W de ζ . On pose $\gamma_\beta^{\nu\sigma} = (\gamma^\nu)_\beta^\sigma$ les coefficients de la matrice de γ^ν dans le local frame.

Theorem 1. L'opérateur H_1 de l'équation d'état du premier ordre est

$$H_1 = \gamma^\nu D_\nu, \tag{4.1}$$

γ^ν sont les quatre endomorphismes de Dirac définies par le "local frame" avec $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$, L_ν est l'opérateur de Lie et Γ_ν est l'opérateur de Christoffel. Les équations d'état sur les champs s'écrivent localement,

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu X^\beta + X^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda X^\sigma, 0 \leq \sigma \leq 3.$$

Proof. La preuve est dans [1] □

Remark 3. $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ sont les symboles de Christoffel de la connexion ∇ . Dans le local frame $\{\partial_\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$, si $X = X^\alpha \partial_\alpha$ alors

$$\nabla \partial_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes \partial_\beta,$$

$L_\nu(X) = \mathcal{L}_\nu(X^\alpha) \partial_\alpha$, \mathcal{L}_ν est la dérivée de Lie le long du champ ∂_ν et la matrice de l'opérateur de Christoffel Γ_ν dans le local frame est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$.

La matrice de l'opérateur $H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$ dans le local frame est de la forme (h_ρ^σ) avec

$$h_\rho^\sigma = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_\rho^\sigma R_{\nu\mu}^j = \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\tau} \gamma_\tau^{\mu\sigma} - \gamma_j^{\mu\tau} \gamma_\tau^{\nu\sigma}) R_{\rho\nu\mu}^j,$$

où $R_{\rho\nu\mu}^j$ est le tenseur de courbure de la connexion ∇ défini dans le local frame par

$$[\nabla_{\partial_\nu}, \nabla_{\partial_\mu}] \partial_\sigma = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau + \Gamma_{\nu k}^\tau \Gamma_{\mu\sigma}^k - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu k}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^k) \partial_\tau = R_{\sigma\mu\nu}^\tau \partial_\tau.$$

Theorem 2. Si on pose

$$\mathbf{R}_{\nu\mu} = (R_{\sigma\mu\nu}^\tau),$$

la matrice de l'opérateur H_2 s'écrit

$$\mathbf{H}_2 = \mathcal{A}(\gamma^\nu, \gamma^\mu) \mathbf{R}_{\nu\mu} = \gamma^\nu \gamma^\mu \mathbf{R}_{\nu\mu}. \quad (4.2)$$

Proof. La preuve est dans [2]. \square

5. LES ÉQUATIONS RELATIVISTES GÉNÉRALISÉES DE DIRAC-EINSTEIN

La section de Dirac γ est définie sur les champs **réels**. Pour cette section de Dirac γ , l'équation 4.2 se met sous la forme

$$h_\rho^\sigma = \gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j \quad (5.1)$$

en abaissant l'indice σ on a

$$h_{\sigma\rho} = \gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j, \quad \gamma_{\sigma\tau}^\nu = g_{\sigma\alpha} \gamma_\tau^{\nu\alpha}$$

si l'on fait l'hypothèse que ce tenseur est proportionnel au tenseur énergie-impulsion ou au tenseur de Ricci, il faut que ce tenseur soit symétrique

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j = \gamma_{\rho\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\sigma\nu\mu}^j, \quad (5.2)$$

ensuite on peut écrire l'équation généralisée relativiste sous la forme

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j = \kappa T_{\sigma\rho}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (5.3)$$

Quelles conditions sur les endomorphismes de Dirac a-t-on pour que l'équation 5.3 se ramène à l'équation d'Einstein? Il faut et il suffit que

$$\gamma_{\sigma\tau}^\nu \gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\nu\mu}^j = R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}, \quad \lambda = -\frac{1}{2} R + \Lambda \text{ avec } g^{\sigma\rho} = 4 \text{ Trace}(\gamma^\sigma \gamma^\rho). \quad (5.4)$$

Remark 4. On rappelle que $\gamma_{\sigma\tau}^\nu = g_{\sigma\eta} \gamma_\tau^{\nu\eta}$.

Problem 1. Existe-t-il quatre matrices $\gamma^\nu = (\gamma_\tau^{\nu\sigma})$ dans l'algèbre de Clifford $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$, pour lesquelles les équations 5.2, 5.3 et 5.4 soient vérifiées?. Si la réponse est affirmative, on peut unifier les équations de Dirac-Einstein, sur les champs réels, à partir d'une section de Dirac.

Lemma 2. On a

$$R_\rho^\sigma = g^{\sigma\nu} \delta_\nu^\mu R_{\rho\mu\nu}^j \text{ et } R = g^{\rho\nu} \delta_\nu^\mu R_{\rho\mu\nu}^j = g^{\tau\nu} \delta_\nu^\mu R_{\tau\mu\nu}^j.$$

Theorem 3. *Le tenseur $h_{\sigma\rho}$ est le tenseur de Ricci si*

$$\gamma_{\tau}^{\nu\sigma}\gamma_j^{\mu\tau} = g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu}. \quad (5.5)$$

Proof. Si $\gamma_{\tau}^{\nu\sigma}\gamma_j^{\mu\tau} = g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu}$ alors

$$h_{\rho}^{\sigma} = \gamma_{\tau}^{\nu\sigma}\gamma_j^{\mu\tau} R_{\rho\mu\nu}^j = g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu} R_{\rho\mu\nu}^j = g^{\sigma\nu} R_{\rho\nu},$$

et

$$h_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho}.$$

□

Remark 5. *Les matrices $\{\gamma^{\nu}\}$ vérifiant 5.5 vérifient $\text{Trace}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = 4g^{\nu\mu}$.*

Theorem 4. *Si les matrices de Dirac $\{\gamma^{\nu}\}$ vérifient*

$$[\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, \quad (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^{\sigma} = g^{\sigma\mu}\delta_j^{\nu} - g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu},$$

avec $\text{Tr}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = 4g^{\nu\mu}$ alors le tenseur $h_{\sigma\rho}$ induit par l'opérateur de Dirac de rang 2, s'identifie au tenseur de Ricci.

Proof. On a

$$\begin{aligned} h_{\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{2} [\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}]_j^{\sigma} R_{\rho\nu\mu}^j = \frac{1}{2} (g^{\sigma\mu}\delta_j^{\nu} - g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu}) R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\mu}\delta_j^{\nu} R_{\rho\nu\mu}^j - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu} R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= g^{\sigma\mu}\delta_j^{\nu} R_{\rho\nu\mu}^j, \quad \mathbf{R}_{\nu\mu} = -\mathbf{R}_{\mu\nu} \\ &= g^{\sigma\mu} R_{\rho\nu\mu}^{\nu} = g^{\sigma\mu} R_{\rho\mu} = R_{\rho}^{\sigma} \end{aligned}$$

et

$$h_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho}.$$

□

Si on veut trouver un début d'unification des équations de Dirac-Einstein, il faut prouver l'existence de quatre endomorphismes de Dirac pour lesquels les relations suivantes sont vérifiées

$$\text{Trace}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) = 4g^{\nu\mu}, \quad \{\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}\}_j^{\sigma} = 2g^{\nu\mu}\delta_j^{\sigma} \quad \text{et} \quad [\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}]_j^{\sigma} = g^{\sigma\mu}\delta_j^{\nu} - g^{\sigma\nu}\delta_j^{\mu}, \quad (5.6)$$

sous l'hypothèse de l'existence de telles matrices, l'équation relativiste de Dirac sur les champs **réels** s'écrit

$$H_1(X) = \eta X$$

et l'équation relativiste s'écrit sous forme matricielle

$$H_2 = \left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) G + \kappa T,$$

on va généraliser ces notions aux tenseurs d'Einstein d'ordre λ .

Definition 4. *Un tenseur d'Einstein d'ordre λ est un tenseur qui s'écrit, dans le local frame, sous la forme*

$$R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho},$$

où λ est une C^{∞} -application définie dans une carte de trivialisatation, $R_{\sigma\rho}$ est le tenseur de Ricci et $g_{\sigma\rho}$ est le tenseur métrique.

Definition 5. *Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est inversible s'il existe un tenseur $S^{\mu\nu}$ tel que*

$$S^{\mu\tau} R_{\tau\nu} = \delta_\nu^\mu \text{ ou } R_{\nu\tau} S^{\tau\mu} = \delta_\nu^\mu.$$

Remark 6. *Le tenseur $S^{\mu\tau}$ est unique si il existe.*

Lemma 3. *Si $R_{\mu\nu}$ est inversible il existe un unique tenseur $\varepsilon^{\sigma\mu}$ tel que*

$$\varepsilon^{\sigma\mu} R_{\mu\rho} = g_\rho^\sigma. \quad (5.7)$$

Proof. Si on pose $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_\rho^\mu)$, $\mathcal{R}_\rho^\mu = R_{\mu\rho}$ et $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\mu^\sigma)$, $\mathcal{E}_\mu^\sigma = \varepsilon^{\sigma\mu}$ alors 5.7 s'écrit

$$\mathcal{E}\mathcal{R} = \mathcal{G}, \mathcal{G} = (g_\rho^\sigma),$$

le tenseur $R_{\mu\rho}$ est inversible si et seulement si \mathcal{R} est inversible donc

$$\mathcal{E} = \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1},$$

le tenseur $\varepsilon^{\sigma\mu}$ existe et est unique. \square

Notation 1. *Si le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est inversible, on note $\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda)$ la matrice définie par*

$$(\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu})\delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu})\delta_j^\mu.$$

Theorem 5. *Si le tenseur de Ricci est inversible et les endomorphismes de Dirac vérifient*

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda)$$

alors le tenseur $h_{\sigma\rho}$ induit par l'opérateur de Dirac H_2 de rang 2 est un tenseur d'Einstein d'ordre λ . En particulier, pour

$$\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda,$$

l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho} \text{ ou } H_2 = \kappa T.$$

Proof. On a

$$\begin{aligned} h_\rho^\sigma &= \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\sigma R_{\rho\nu\mu}^j = \frac{1}{2} ((g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu})\delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu})\delta_j^\mu) R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= \frac{1}{2} (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu})\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j - \frac{1}{2} (g^{\sigma\nu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\nu})\delta_j^\mu R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= (g^{\sigma\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu})\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j \\ &= g^{\sigma\mu}\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}\delta_j^\nu R_{\rho\nu\mu}^j = g^{\sigma\mu}R_{\rho\mu} + \lambda\varepsilon^{\sigma\mu}R_{\rho\mu} \\ &= R_\rho^\sigma + \lambda g_\rho^\sigma, \end{aligned}$$

par abaissement de l'indice σ ,

$$h_{\sigma\rho} = R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}.$$

Si $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$, alors

$$h_{\sigma\rho} = G_{\sigma\rho} + \Lambda g_{\sigma\rho},$$

où $G_{\sigma\rho}$ est le tenseur d'Einstein, Λ la constante cosmologique et

$$h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}.$$

\square

6. CONCLUSION

Pour donner une représentation unitaire des équations relativistes de Dirac et d'Einstein à l'aide d'une section de Dirac γ , il faut montrer l'existence de quatre endomorphismes $\{\gamma^\nu\}$ dans l'algèbre de Clifford $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_4$$

avec $g_{\mu\nu}$ est un tenseur métrique, pour lequel le tenseur de Ricci $R_{\rho\mu}$ est inversible, tels que

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu} \left(-\frac{1}{2}R + \Lambda \right), \quad (6.1)$$

avec

$$\varepsilon^{\sigma\mu} R_{\rho\mu} = g_\rho^\sigma.$$

L'équation de Dirac s'écrit

$$H_1(X) = \eta X,$$

pour un champ X de masse spectrale η qui est une fonction propre locale C^∞ de l'opérateur de Dirac H_1 de rang 1 et l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$h_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion et $h_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} h_\nu^\kappa$, (h_ν^κ) est la matrice de l'opérateur de Dirac de rang 2. Si le tenseur de Ricci n'est pas inversible, 6.1 se ramène à

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}.$$

REFERENCES

- [1] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac", hal.archives-ouvertes.fr(2016)
- [2] Jonot J.L., "Sur les opérateurs de Dirac de rang supérieur et l'équation relativiste d'Einstein", hal.archives-ouvertes.fr(2016)
- [3] Jonot J.L., "Quantification des fibrés des états", hal.archives-ouvertes.fr(2015)
- [4] Kobayashi S. and Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, (1996)

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr