



HAL
open science

Densité de D , complétude de R et analyse réelle - Première approche

Laurent Vivier, Viviane Durand-Guerrier

► **To cite this version:**

Laurent Vivier, Viviane Durand-Guerrier. Densité de D , complétude de R et analyse réelle - Première approche. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. hal-01337887

HAL Id: hal-01337887

<https://hal.science/hal-01337887>

Submitted on 27 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Densité de \mathbf{D} , Complétude de \mathbf{R} et analyse réelle

Première approche

Viviane Durand-Guerrier¹ et Laurent Vivier²

¹Université de Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, France

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

²Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, France,

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Nous présentons ici les premiers résultats d'un travail de recherche en cours visant à étudier la question des interrelations entre la conceptualisation des nombres réels et l'appropriation des principaux concepts de l'analyse en début d'université. Les données analysées proviennent d'un questionnaire préliminaire visant à identifier des connaissances clés relatives à la topologie de l'ordre de \mathbf{R} d'une part, aux limites de la visualisation en analyse d'autre part. Nous présentons brièvement les analyses a priori et a posteriori des quatre questions relatives à ces deux thèmes.

Mots clés : complétude de \mathbf{R} , analyse réelle, topologie de l'ordre, densité versus continuité, conceptualisation.

INTRODUCTION

Dans cette proposition de communication, nous présentons la première étape d'une recherche en cours dont le principal objectif est d'étudier finement les relations entre la conceptualisation du continu (c'est-à-dire l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels comme complété de l'ensemble \mathbf{D} des nombres décimaux ou de l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels) et l'appropriation par les étudiants des principaux concepts d'analyse réelle enseignés dans les programmes de licence. Nous mettons au cœur de nos analyses les aspects mathématiques, épistémologiques, cognitifs et didactiques et leurs interrelations.

Nous avons conduit une étude épistémologique circonscrite de l'élaboration du concept de continu (au sens de la complétude de l'ensemble des nombres réels) à partir en particulier des travaux de Bolzano, Dedekind, Cantor et Cauchy qui nous amène à faire l'hypothèse déjà émise par Bloch et al. (2007, 117) qu'une appropriation adéquate des principaux concepts de l'analyse est liée de manière intrinsèque à une conceptualisation adéquate du concept de nombre réel, en particulier en ce qui concerne la complétude de l'ensemble des nombres réels (Durand-Guerrier, 2012). Or, l'enseignement secondaire français, depuis de nombreuses années, ne propose plus de travail substantiel sur la construction des nombres, ceci s'étant encore accentué depuis 2009 avec la disparition dans les programmes de toute référence explicite aux ensembles de nombres. De ce fait, les connaissances sur les nombres des étudiants arrivant dans l'enseignement supérieur sont extrêmement fragiles (Vivier, 2015, Vergnac et Durand-Guerrier, 2014). Les

études empiriques montrent en particulier une identification de la nature des nombres à leur écriture, une méconnaissance des critères permettant de catégoriser les nombres à partir de leurs écritures décimales et une confusion entre le concept de densité et le concept de continuité pour les ensembles de nombres (Vergnac & Durand-Guerrier, 2014). Bien que de nombreuses recherches aient été conduites sur les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage des nombres réels d'une part (par exemple : Bronner 1997, Bergé 2010), dans l'apprentissage des premiers concepts d'analyse (par exemple : Cornu 1991, Ghedamsi 2008, Gonzales Martin et al, 2014, Vandebrouck, 2011) ou de topologie (Bridoux, 2011), le rôle spécifique joué par les connaissances sur les nombres dans l'apprentissage des principaux concepts et théorèmes de l'analyse¹ a été peu étudié à notre connaissance.

La première étape de notre projet vise à aller au delà de ce constat par l'identification de connaissances dont nous faisons l'hypothèse qu'elles jouent un rôle clé en analyse réelle. Pour répondre à cette question de recherche, nous avons proposé à des étudiants de début d'université un questionnaire dont nous présentons ici les questions relatives à la topologie de l'ordre, à la densité de \mathbf{D} et à la complétude de \mathbf{R} d'une part, aux limites de la visualisation en Analyse d'autre part. Dans cette première étude, nous avons mis l'accent sur la propriété suivante : « l'ensemble \mathbf{D} des nombres décimaux est un ensemble dense dans lui même (entre deux décimaux différents, il y a toujours un décimal différent des deux précédents) qui n'est pas complet vis à vis de l'ordre naturel sur \mathbf{D} (ordre lexicographique). Ce choix est motivé par l'hypothèse selon laquelle la distinction entre la propriété de densité et de continuité est peu visible pour les élèves et les étudiants arrivant à l'université, d'une part parce que dans le curriculum français secondaire, elle ne fait pas l'objet d'un enseignement explicite ; d'autre part parce que la visualisation de cette propriété est problématique, les représentations graphiques non discrètes renvoyant directement à notre intuition du continu porté par le tracé d'une ligne sur une feuille sans lever le crayon (Longo, 2002). Pontille et al (1996) rend compte de travaux d'élèves résolvant un problème de point fixe dans l'ensemble \mathbf{D} des nombres décimaux illustrant cette difficulté : ceux-ci sont en effet confrontés à la question de la représentation graphique de la courbe représentative d'une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1] \cap \mathbf{D}$. En ce qui concerne le point de vue ensembliste sur les nombres décimaux, ceci se traduit par le saut conceptuel du passage des ensembles discrets de nombres décimaux $D_n = \{N/10^n ; N \in \mathbf{N}\}$, dont le nombre de chiffres non nuls après la virgule est borné par un entier donné n , à l'ensemble \mathbf{D} des nombres décimaux, qui n'est ni discret (i.e. pas de successeur), ni continu et qui met en jeu le passage du fini à l'infini potentiel. Plusieurs des questions que nous présentons font

¹ Citons par exemple les concepts de limite, essentiel en analyse, de continuité (lié notamment au théorème des valeurs intermédiaires, aux théorèmes de point fixe,...), de variation et de dérivation (les problèmes d'optimisation), l'accumulation et l'intégration (notamment pour les primitives et le calcul de grandeurs).

$\{2,5\}$ ou $\{d\}$ ou encore $[2,2]$ et $[2,5 ; 2,5]$. Mais il est possible qu'un singleton ne soit pas perçu comme un intervalle d'où une réponse négative à c , ce qui montre une possible compréhension correcte de la densité de \mathbf{D} . Néanmoins, cette nécessité d'avoir deux extrémités différentes peut entraîner des réponses erronées telles que $]0,1 ; 0,3[$ (ou du même type de réponses dans D_n) ou encore $[0,999\dots ; 1]$ ou $[0,4999\dots ; 0,5]$. Cette dernière réponse est correcte puisqu'il s'agit d'un singleton, mais elle peut aussi être proposée en pensant qu'un nombre ayant une infinité de chiffres n'est pas un décimal (une variante possible avec un intervalle semi-ouvert).

Au d , la réponse correcte est « non » ou « impossible » avec un argument de densité : entre deux décimaux il y a toujours un décimal (plusieurs, une infinité) ; cet argument peut être plus ou moins explicite. Mais des réponses peuvent apparaître en cohérence avec la question c : $[0,2 ; 0,3]$, $[0,999\dots ; 1]$ ou $[0,4999\dots ; 0,5]$ (il apparaît ici deux représentations d'un même décimal ce qui devrait permettre de lever l'ambiguïté du c). Un dessin peut être fait pour illustrer ou justifier.

La densité dans le registre des représentations graphiques

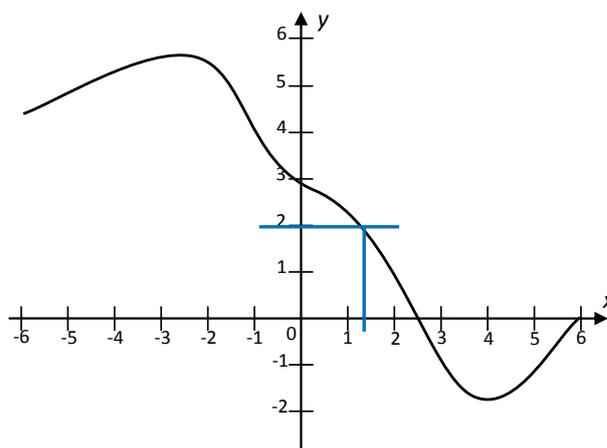
Q5 – On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $[-6 ; 6]$.

L'équation $f(x)=2$ admet une solution :

- a. dans \mathbf{N} b. dans \mathbf{D}
 c. dans \mathbf{Q} d. dans \mathbf{R}

Pour chacune des questions il fallait répondre en cochant une case :

- Vrai Faux On Ne Peut Pas Savoir



Dans cette question, nous cherchons à tester la compréhension de la densité en acte dans le registre des représentations graphiques qui, comme nous l'avons mentionné plus haut, ne permet pas de distinguer visuellement une courbe définie sur un ensemble continu (comme \mathbf{R}) d'une courbe définie sur un ensemble dense.

Graphiquement, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution, dont on peut déterminer une valeur approchée. La tâche est classique, travaillée depuis la classe de troisième (grade 9) en France ; nous faisons l'hypothèse qu'elle ne pose pas de problème et donnera lieu à des traces graphiques. La question qui nous intéresse ici concerne l'existence de solutions selon l'ensemble dans lequel on résout l'équation.

a. Deux réponses correctes possibles : Faux, car on trouve environ 1,2 sur le graphique (distance à \mathbf{N} marquée) et ONPPS car le graphique n'est pas assez précis (il ne démontre rien). La réponse Vrai n'est pas attendue

b. La réponse correcte ONPPS peut être justifiée par la valeur approchée donnée par le graphique ou de manière moins précise comme « on ne connaît pas le nombre » ou « il faudrait connaître $f(x)$ ». La réponse Vrai est possible par une confusion nombre réel/nombre décimal ou par confusion entre un nombre et ses valeurs approchées (« la solution est 1,2 »). A l’opposé, la réponse Faux peut être proposée avec comme justification « la solution est un nombre réel ».

c. On s’attend aux mêmes types de réponses malgré des éventuelles différences de traitement entre décimal (écriture décimale) et fraction (écriture fractionnaire).

d. Seule la réponse Vrai est attendue ; on relèvera si la justification de la réponse fait appel ou non au Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Réponses des étudiants

Pour les items *a* et *b* de Q1, il n’y a, effectivement, aucun problème (sauf pour un étudiant). On relève, surtout pour *b* et *d*, des problèmes de compréhension ou d’écriture pour les intervalles comme prévu. Pour la réussite, on compte 20 étudiants pour l’item *c* et 16 pour l’item *d* (en comptant large), soit moins de la moitié des étudiants, alors que, respectivement, 5 et 7 étudiants ne donnent pas de réponse à ces items. Il est à noter que 10 étudiants avancent des arguments liés à la densité comme « infinité de chiffres/décimales » ou « **D** est dense dans **R** » ou « **D** est dense ».

Pour les réponses incorrectes liées à la densité, ce sont 5 étudiants en *c* et 9 en *d*, soit un quart des étudiants ce qui en fait la cause première d’erreur. On relève 3 étudiants qui répondent dans **D**₀ ou dans **D**₁ à *c* et *d*, de manière cohérente. On trouve aussi des réponses avec des fractions (1 en *c* et 4 en *d*) ainsi que des réponses avec des écritures décimales illimitées (1 en *c* et 2 en *d*).

Pour Q5, la réussite est, comme prévu, plus importante : 26 étudiants répondent correctement, soit plus des deux tiers, et tous les étudiants donnent une réponse. L’argument du TVI est avancé par 11 étudiants (avec, toutefois, souvent des oublis dans les hypothèses et sans mentionner explicitement le théorème) dont 2 étudiants avancent également l’imprécision du graphique (les graduations).

Mais il y a également 6 étudiants qui répondent que la solution est dans **D** ainsi que 2 qui affirment qu’elle est dans **D**₁ (la solution est égale à 1,2 ou 1,3). Il est à noter que sur ces 8 étudiants (presque un quart), il y en a 5 qui ont donné des réponses erronées à Q1 en lien avec la densité.

Finalement, ce sont un tiers des étudiants qui présentent des difficultés à appréhender la densité de **D** dans au moins une des questions posées, que ce soit pour les intervalles – essentiels en analyse – ou pour la résolution graphique d’une équation.

DÉPASSER LA VISUALISATION PREMIÈRE EN ANALYSE

Une des spécificités de la visualisation en analyse est que ce processus doit être contrôlé par des connaissances théoriques. Trois questions du questionnaire étaient

spécialement destinées à tester ce point. Nous en présentons deux ici qui s'appuient sur les signes donnés par un instrument : les questions demandent de contrôler la visualisation première, notamment sur l'égalité de deux nombres, les instruments ne donnant en général qu'une valeur approchée, laissant la valeur exacte à l'interprétation du sujet. Les principales connaissances en jeu sont les approximations décimales d'un nombre réel et les conditions d'application du TVI selon les propriétés de la fonction.

Analyse a priori rapide des questions

Approximation décimale versus valeur exacte d'un nombre réel

Q2 – On a calculé sur un tableur deux nombres réels a et b . Le tableur a une précision de 12 décimales et il donne le même résultat pour a et pour b , à savoir : 2,718281828459.

Que peut-on en déduire sur les nombres a et b ? Entourez la ou les bonnes réponses (les sept réponses proposées étaient données à la suite).

Pour chaque question, nous indiquons les justifications envisagées a priori.

$a=b$: deux nombres égaux jusque la douzième décimale sont égaux ; s'ils avaient été différents, le tableur aurait donné des résultats différents ; égaux car *presque égaux* (on néglige les autres décimales) ; pas d'autres décimales que ce que donne la machine ?

$a \neq b$: deux lettres différentes, donc ils sont différents malgré les 12 premières décimales (cf. deux points A et B en géométrie qui, souvent, suppose implicitement que A et B sont distincts, par contrat implicite) – peu attendu ; il peut aussi y avoir des arguments avec des décimales.

$a > b$ et $a < b$: non attendus car privilégier l'un des nombres ne semble pas naturel.

$|a-b| < 10^{-12}$: réponse correcte, interprétation des décimales en fonction de leurs valeurs et estimation/majoration du reste des décimales (inconnues)

$|a-b| = 10^{-12}$: les deux nombres diffèrent exactement de la valeur de la douzième décimale, pas d'estimation, d'encadrement ou de majoration du reste

Aucune réponse ne convient : pour que les questions soient complètes, que l'on puisse toujours répondre – éventuellement un étudiant qui pense à l'association de deux réponses, notamment pour $|a-b| \leq 10^{-12}$.

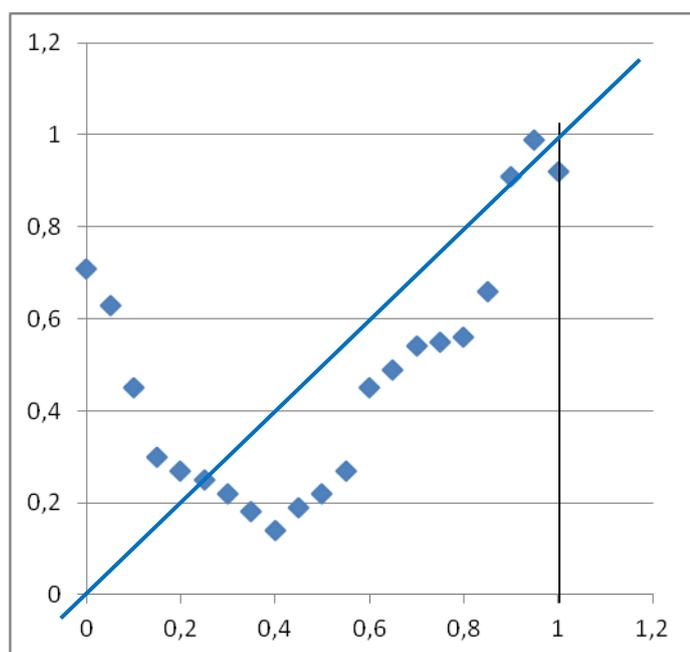
Un dessin possible pour la réponse correcte (aussi pour $|a-b| = 10^{-12}$?)

Utilisation d'une approximation d'une fonction pour étudier ses propriétés

Q4 – On a entré dans un tableur une fonction f qui est définie sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. On obtient la table de valeurs ci-dessous avec un pas de 0,05. Les données ont été placées automatiquement par le tableur dans le graphique ci-dessous.

On rappelle qu'un point fixe d'une fonction f est une solution de l'équation $f(x)=x$.

x	$f(x)$
0,00	0,71
0,05	0,63
0,10	0,45
0,15	0,30
0,20	0,27
0,25	0,25
0,30	0,22
0,35	0,18
0,40	0,14
0,45	0,19
0,50	0,22
0,55	0,27
0,60	0,45
0,65	0,49
0,70	0,54
0,75	0,55
0,80	0,56
0,85	0,66
0,90	0,91
0,95	0,99
1,00	0,92



a- On suppose que f est strictement décroissante sur $[0 ; \sqrt{3}/4]$, strictement croissante sur $[\sqrt{3}/4 ; 19/20]$ et strictement décroissante sur $[19/20 ; 1]$.

b- On suppose que f est continue sur $[0 ; 1]$.

En a et b, il était demandé de cocher une case pour ces trois affirmations :

(1) f n'admet aucun point fixe : Vrai Faux On Ne Peut Pas Savoir

(2) f admet exactement un point fixe : Vrai Faux On Ne Peut Pas Savoir

(3) f admet plusieurs points fixes : Vrai Faux On Ne Peut Pas Savoir

Le graphique est donné (sans les droites $y=x$ ni $x=1$), pour faire gagner du temps à ceux qui voudraient le faire (bien sûr, cela anticipe l'idée de faire un graphique) et éviter les erreurs. D'autre part, un tableur donne facilement un tel graphique.

Les nombres sont donnés avec un format de deux chiffres après la virgule pour faire penser aux approximations faites par le tableur qui ne donne que deux décimales (et avoir un format de nombre différent des autres questions). Au cas a, la valeur $\sqrt{3}/4=0,433\dots$ est choisie pour être vraisemblable et *sérieuse* (avec la racine carrée), tout comme pour $19/20=0,95$, mais le fait de mettre une fraction renvoie moins facilement à une valeur approchée (ce qui veut être testé dans le tableau).

On peut penser que c'est le graphique qui servira d'appui pour les réponses, plus que la table de valeurs, sauf peut-être pour le point fixe approché $(0,25 ; 0,25)$. Néanmoins, la tâche est moins classique que celle de la question 5 et les traces

graphiques sont moins attendues : les points sont-ils reliés ? si oui par une courbe continue ou non ? la droite $y=x$ est-elle tracée ? le carré $[0 ; 1]^2$ est-il délimité ?

Pour le cas a , la réponse correcte est « On Ne Peut Pas Savoir » pour chacune des trois affirmations. Pour le cas b , les réponses correctes sont Faux – Faux – Vrai.

Nous faisons l'hypothèse que la réponse « Faux » à l'affirmation (1), pour les deux cas a et b , sera majoritaire et ceci pour deux raisons : d'une part pour des raisons de cohérence (avec une réponse Vrai en 2) ou 3)), d'autre part parce que la valeur 0,25, du tableau de valeurs, peut sembler correspondre à un point fixe.

En ce qui concerne l'affirmation (3), nous faisons l'hypothèse que certains étudiants utiliseront le TVI pour conclure y compris dans le cas a) ce qui conduit à la réponse Vrai qui n'est pas correcte dans ce cas ; l'utilisation du TVI conduit à la réponse correcte en b). Pour cela, les étudiants peuvent soit s'appuyer sur le graphique, soit localiser trois points fixes avec la table de valeurs ($[0,2 ; 0,3]$; $[0,85 ; 0,9]$; $[0,95 ; 1]$). Nous regarderons si le théorème est mentionné ou bien s'il utilisé *en acte*. Nous regarderons également si la précision « exactement 3 points fixes » apparaît. Nous interprétons la réponse similaire Vrai pour les cas a et b comme une *continuité naturelle*, ce qui ne serait pas surprenant vu que la grande majorité des fonctions rencontrées par les étudiants sont continues.

Réponses des étudiants

Tous les étudiants répondent à Q2, mais seulement 22 répondent correctement ce qui montre une difficulté à percevoir la différence entre valeurs exactes, valeurs approchées et degré d'approximation. Il ne semble pas y avoir de lien avec Q1 qui est centrée également sur les nombres : 11 étudiants répondent correctement à Q1 et à Q2, ce qui répartit les étudiants en 3 sous-groupes équivalents. L'égalité est donnée, sans autre réponse, par 4 étudiants qui présentent une réponse issue d'une visualisation directe. Mais on relève également 3 étudiants qui donnent des réponses contradictoires avec plusieurs cases cochées et surtout 8 étudiants qui affirment qu'« Aucune réponse convient », peut-être parce qu'ils n'arrivent pas à identifier une autre réponse – dont un étudiant qui affirme que la 13^{ème} décimale peut être différente, compté dans les réponses correctes.

Pour la question 4, seuls 5 étudiants répondent correctement aux deux items, ce qui apparaît extrêmement faible (8 répondent correctement en a et 15 en b). La variété des réponses est grande et il est difficile de toutes les indiquer, nous ne donnons que les erreurs les plus courantes. La continuité apparaît comme naturelle pour 6 étudiants, sans prise en compte des hypothèses ; nous faisons l'hypothèse que ceci s'appuie sur la visualisation d'une courbe *nécessairement* continue passant par les points du graphique, en lien avec des pratiques scolaires. La table numérique de valeurs, est une source de réponse, par une visualisation directe, pour beaucoup d'étudiants malgré le fait qu'ils s'agissent de valeurs approchées : à l'affirmation 2, un seul point fixe, 12 étudiants répondent Vrai en a et 6 répondent Vrai en b , dont 4

répondent Vrai au deux items. On peut penser que pour ces étudiants, la réponse s'appuie sur l'identification du *point fixe* (0,25 ; 0,25) dans la table de valeurs.

CONCLUSION

Dans cette communication, nous nous proposons de rendre compte des tous premiers éléments d'un projet de recherche visant à étudier les relations entre conceptualisation des nombres réels et apprentissage de principaux concepts de l'analyse en début d'université. Nous avons centré nos premières analyses sur la prise en compte par les étudiants de la densité de \mathbf{D} dans les réponses à quatre questions soumis à 35 étudiants de première année d'université scientifique. Les premiers résultats montrent que pour près d'un tiers des étudiants, cette propriété de \mathbf{D} n'est pas perçue, soit que les étudiants identifient l'ensemble \mathbf{D} à l'un de ses sous-ensembles D_n , soit qu'ils ne considèrent pas de propriété intermédiaire entre le discret et le continu. Ceci est problématique pour les activités ordinaires en analyse en début d'université. En outre, nous faisons l'hypothèse que ceci est un obstacle à une conceptualisation adéquate des principaux concepts de l'analyse. Cette hypothèse s'appuie sur les résultats de l'analyse épistémologique montrant que l'élaboration de l'ensemble des nombres réels comme complété pour la topologie de l'ordre de \mathbf{Q} ou de \mathbf{D} (selon la construction théorique choisi) est précisément liée au fait que la densité d'un ensemble dans lui-même ne garantit pas la complétude qui est nécessaire pour pouvoir démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Nous nous proposons d'approfondir cette question en complétant les questionnaires par des entretiens et des observations in situ de situations posant explicitement cette question comme la situation du *point fixe* de Pontille et al. (1996). Au cœur de ce problème se trouve la question de l'existence ou non d'un point fixe pour une fonction croissante d'un ensemble ordonné borné dans lui-même. Cette existence est garantie (Théorème de Katsner-Tarski) dès lors que l'ensemble est un treillis complet, ce qui est le cas pour une partie finie de l'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels et pour un intervalle fermé de l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels. Dans l'ensemble \mathbf{D} des nombres décimaux et pour l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels, le théorème n'est pas vérifié : on peut trouver des contre-exemples qui mettent en évidence le fait qu'un ensemble dense en-lui même n'est pas nécessairement continu. Nous faisons l'hypothèse que ce problème est un bon candidat pour construire une situation didactique. Ceci est argumenté dans un texte soumis pour un numéro spécial de la revue IJRUME² et la prochaine étape de notre projet. La question de la visualisation en analyse sera également approfondie notamment avec le modèle des Espaces de Travail Mathématique de Kuzniak.

² Durand-Guerrier V. Conceptualization of the continuum: an educational challenge for undergraduate students, soumis pour le numéro spécial de la revue IJRUME faisant suite au séminaire de Oberwolfach (décembre 2014).

REFERENCES

- Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.
- Bloch, I., Chiocca, C. M., Job, P., & Schneider, M. (2007). Du numérique aux limites: quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse? *Perspectives en Didactique des Mathématiques*, Cédérom, IUFM d'Aquitaine.
- Bridoux, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'Université. Une étude de cas*, Thèse de l'Université Paris VII.
- Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.
- Cornu, B. (1991). Limits. In A. J. Bishop (Managing Ed.) & D. Tall (Vol. Ed.), *Mathematics Education Library: Advanced mathematical thinking*, 11, 153–166.
- Durand-Guerrier, V. (2012) Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques, in M. Ouelbani (éd.) *Des mathématiques à la philosophie. Regards Croisés : Didactique, Histoire et Philosophie*, Faculté des Sciences Humaines et Sociales, Tunis, 163-183.
- Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement des débuts de l'analyse réelle à l'université*, thèse en cotutelle des universités Tunis 1 et Bordeaux 1.
- González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. & Maschietto, M. (2014). Didactic Situation and Didactical Engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16/2, 117-134.
- Longo, G. (2002). Le continu mathématique, de l'intuition à la logique, in J. Petitot, F. Varela, B. Pachoud, J.-M. Roy (eds) *Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives*, Editions CNRS, Paris.
- Pontille M. C. & Feurly-Reynaud, J. & Tisseron, C. (1996). Et pourtant, Ils trouvent, *Repères IREM* n°24, 10-34.
- Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.
- Vergnac & Durand-Guerrier (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique, *Petit x*, 96, 7-28.
- Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels. Point de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches (HDR), Université Paris Diderot.