



HAL
open science

Sur une notion de robustesse

Marc Ciligot-Travain

► **To cite this version:**

Marc Ciligot-Travain. Sur une notion de robustesse. Annales de l'ISUP, 2012, 56 (2-3), pp.37-48.
hal-01334825

HAL Id: hal-01334825

<https://hal.science/hal-01334825>

Submitted on 21 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
56, fasc. 2-3, 2012, 37-48

SUR UNE NOTION DE ROBUSTESSE

PAR MARC CILIGOT-TRAVAIN*

L.A.N.L.G., Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse

Résumé. Nous présentons et faisons une revue ici d'une notion particulière de robustesse.

Abstract. We present and make here a survey about a particular notion of robustness.

1. Introduction. Ce travail a plusieurs buts. Nous souhaitons d'abord contribuer à la diffusion d'une notion de robustesse qui intéresse, entre autres, l'Aide à la décision (AD), la Recherche Opérationnelle (RO), l'Optimisation, la Conception, la Fiabilité lorsque des éléments d'incertitude interviennent dans les modèles et qui se base sur un principe très général. Cette notion est apparue dans les publications scientifiques de ces différents domaines, apparemment de façon indépendante, à partir des années 60 (le principe étant lui bien sûr probablement plus ancien).

À notre connaissance, toute la généralité d'une partie de cette approche a été mise en valeur pour la première fois dans les travaux de Y. Ben-Haïm, à la fin des années 1990, début 2000 ([6], [7], [8]). On peut toutefois reprocher à ce dernier de n'avoir pas suffisamment fait le lien avec les travaux antérieurs, ce qui a été fait par la suite partiellement par M. Sniedovich (entre autre dans [40], [44]).

Un de nos buts est ici de compléter et reprendre le travail de M. Sniedovich et donc de passer en revue des travaux où cette approche a été abordée et qui ne semblent pas connectés aux travaux de Y. Ben-Haïm, à l'exception de ses travaux en fiabilité non probabiliste. On ne se limitera donc pas forcément aux travaux antérieurs à ceux-ci. Le nombre conséquent de publications concernées fait que nous ne pouvons prétendre à une étude et à une bibliographie exhaustive mais nous avons essayé de faire apparaître toutes les branches concernées, de citer les premiers travaux de ces branches lorsque nous avons pu les identifier et également un certain nombre de travaux emblématiques ou particulièrement instructifs.

Il ne nous semble pas que cette notion de robustesse, même si elle n'est pas sans lien avec la très classique méthode du «pire des cas» (on pourra se référer à [28], [24], [11]) puisse s'y ramener, contrairement à ce qui est affirmé par M. Sniedovich (par exemple dans [41]), encore moins de façon naturelle. Mais nous n'avons pas de certitude à ce sujet et donc n'entrerons pas dans ce débat ici. S'il s'avère que nous avons tort, cette approche de la robustesse offre au moins un point de vue différent qui, à notre avis, mérite d'être considéré en soi.

* Dans le cadre du projet ANR ROLSES.

Classification AMS (2000) : Primary 90B25, 90B50, 93B5, 93B35

Mots-clefs : Robustesse, Robuste, Rayon de stabilité, Marge de stabilité, Marge de sécurité

Dans les sections 2, 3 et 4, nous donnons une description volontairement abstraite et sans exemple de la notion de robustesse qui nous intéresse tout en ayant essayé de limiter au maximum les notions de mathématiques utilisées. Dans la section 5, nous passons en revue les travaux en lien avec cette approche (ce qui fournira des exemples pour les sections précédentes) suivant les critères énoncés ci-dessus. Cette partie là nécessite inévitablement un bagage mathématique légèrement plus élevé.

2. Un modèle d'incertitude. Ensemble de satisfaction. Considérons le modèle minimaliste suivant d'un événement incertain. Tout ce que l'on sait c'est que l'événement incertain u appartient à un ensemble U ($u \in U$). A priori, on ne possède aucune information supplémentaire (par exemple, on ne connaît pas de probabilité associée à cet événement incertain).

Maintenant on répartit les événements incertains $u \in U$ en deux catégories représentées par un ensemble S et son complémentaire (dans U) $S^c := \{u \in U \mid x \notin S\}$, c'est à dire l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à S . On peut donner divers sens ou interprétations à ce découpage de U . Très schématiquement, S représente l'ensemble des événements incertains qui, s'ils se produisent, conduiront à une situation jugée «bonne». Si $u \in S^c$, la situation résultante pourra donc être considérée comme «moins bonne» ou «mauvaise» (mais on ne peut exclure cette possibilité). On appellera S l'*ensemble de satisfaction* et S^c l'*ensemble d'insatisfaction*.

3. Préférences sur les ensembles de satisfaction. Indicateur ou mesure de robustesse. Imaginons que l'on possède un certain pouvoir de décision sur l'ensemble de satisfaction S (qui reste à préciser), on peut naturellement être amené à *comparer* deux choix S_1 et S_2 pour un tel ensemble. A priori, sans information supplémentaire, la seule possibilité raisonnable semble être :

$$(3.1) \quad \text{si } S_1 \text{ contient } S_2 \text{ (i.e. } S_1 \supset S_2 \text{) alors } S_1 \text{ «est préférable à» } S_2.$$

Malheureusement, cette définition est bien souvent trop restrictive car on peut être assez facilement confronté au cas d'ensembles S_1 et S_2 qui ne sont pas comparables pour l'inclusion.

Finalement, dans nombre de situations, on est donc amené à définir d'autres préférences, plus ou moins naturelles, sur les ensembles de satisfaction. On peut considérer que ces définitions se basent sur deux idées :

- (I) Soit on fait un choix, on décide parmi les ensembles de satisfaction possibles, ceci de façon plus ou moins arbitraire.
- (II) Soit on utilise de fait une information supplémentaire qui ne figurait pas dans le modèle initial (on enrichit le modèle initial).

Comme indiqué dans l'introduction, nous allons nous intéresser dans ce travail à deux façons de faire qui, d'une façon assez peu précise (pour le moment), définissent des préférences à partir de comparaison de «taille» des ensembles de satisfaction, étant entendu que plus l'ensemble de satisfaction est «gros», mieux c'est, ce qui, en soi, si

on se base strictement sur le modèle d'incertitude considéré jusqu'à maintenant, n'a rien d'évident si cette comparaison de taille ne repose pas sur une inclusion.

Dans ces deux méthodes, la comparaison des ensembles de satisfaction se base donc sur une mesure de «taille» qui à un ensemble de satisfaction S associe un nombre positif $r(S) \in [0, +\infty]$. On pourra qualifier r de *mesure ou indicateur de robustesse*.

La relation de préférence associée à cet indicateur r est tout simplement :

$$(3.2) \quad S_1 \text{ «est préférable à» } S_2 \text{ si } r(S_1) \geq r(S_2).$$

On impose au minimum que la relation de préférence induite par notre indicateur de robustesse soit compatible avec la relation (3.1) dans le sens où :

$$(3.3) \quad S_1 \supset S_2 \text{ implique } r(S_1) \geq r(S_2).$$

Non présentons ci-dessous les deux méthodes qui nous intéressent volontairement d'une façon abstraite et sans exemples, les exemples étant reportés à la section 5.

3.1. Méthode de Laplace. Principe d'indifférence. Cette méthode utilise une *mesure* particulière sur les parties de U pour définir une relation de préférence entre les ensembles de satisfaction. Une mesure étant une fonction μ qui à toute partie A de U ($A \subset U$) associe un élément $\mu(A) \in [0, +\infty]$ et qui vérifie essentiellement la propriété d'additivité suivante :

$$(3.4) \quad \text{Si } A_1, A_2 \subset U \text{ sont disjoints alors } \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

où $A_1 \cup A_2$ est la réunion¹ des ensembles A_1 et A_2 . Les deux exemples les plus utilisés de mesures sont la *mesure de comptage* ($\#$) qui à une partie associe tout simplement le nombre de ses éléments et la *mesure usuelle n -dimensionnelle* (mesure de Hausdorff \mathcal{H}_n) sur l'espace de la géométrie classique (longueur pour $n = 1$, aire pour $n = 2$, volume pour $n = 3, \dots$). Ces mesures sont «uniformes» ou «invariantes» dans le sens où elle ne différencient pas les points de U (d'où le *principe d'indifférence*).

Dans la méthode de Laplace, si $0 < \mu(U) < +\infty$, l'indicateur de robustesse de l'ensemble de satisfaction $S \subset U$ est donc défini comme le ratio

$$r(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(U)},$$

c'est à dire le «nombre» de cas satisfaisants sur le «nombre» de cas possibles. Nous pensons que typiquement cette méthode contient une part d'arbitraire et est difficilement totalement justifiable du point de vue strictement logique (si l'on n'ajoute aucun élément supplémentaire), elle relève du cas (I) évoqué ci-dessus.

¹C'est à dire l'ensemble constitué des éléments à la fois de A_1 et de A_2 .

3.2. *Méthode du rayon de stabilité.* La méthode du rayon de stabilité nécessite de se donner un élément supplémentaire que l'on qualifiera d' *événement incertain nominal* \bar{u} . On peut le voir, très schématiquement, comme l'événement incertain auquel on s'attend. Cette méthode utilise également une *distance* entre les événements incertains, que l'on notera d , la distance entre deux événements incertains u_1 et u_2 est notée $d(u_1, u_2)$. Le *rayon de stabilité* $\rho(S, \bar{u}, d)$ (que l'on notera éventuellement $\rho(S, \bar{u})$ ou $\rho(S)$ dans la suite) d'un ensemble de satisfaction S (relativement à \bar{u} et à d) étant défini comme la plus petite distance entre \bar{u} et un événement incertain décrivant l'ensemble S^c des événements incertains non satisfaisants, plus mathématiquement :

$$\rho(S) = d(\bar{u}, S^c) := \inf_{u \in S^c} d(\bar{u}, u),$$

c'est la distance de \bar{u} à l'ensemble d'insatisfaction S^c . Si, pour $\alpha > 0$ on note $B(\bar{u}, \alpha)$ la boule (fermée) de centre \bar{u} et de rayon α pour la distance d , i.e. l'ensemble des points u de U qui sont à une distance $d(\bar{u}, u)$ de \bar{u} inférieure ou égale à α , ou encore

$$B(\bar{u}, \alpha) = \left\{ u \in U \mid d(\bar{u}, u) \leq \alpha \right\},$$

alors on peut écrire

$$\rho(S) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 \mid B(\bar{u}, \alpha) \subset S \right\} \in [0, +\infty].$$

C'est (en abusant un peu) le rayon de la plus grosse boule centrée en \bar{u} et contenue dans S .

Nous pensons que cette méthode ajoute une information dans le modèle, il nous semble clair qu'on l'on considère que l'événement incertain u *dévie* de l'événement incertain \bar{u} . Cette méthode, selon nous, relève du cas (II) évoqué ci-dessus.

Dans les travaux de Y. Ben-Haïm, le rayon de stabilité (appelé *robustesse*) est généralisé de la façon suivante : on se donne une d'une famille de parties de U , $(\mathcal{U}(\alpha))_{\alpha \geq 0}$, indexées par $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Cette famille possède la propriété suivante :

$$(3.5) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \implies \mathcal{U}(\alpha_1) \subset \mathcal{U}(\alpha_2).$$

On peut définir, à partir de là, ce qu'il appelle la *robustesse*, par

$$(3.6) \quad \rho(S) = \sup \left\{ \alpha \geq 0 \mid \mathcal{U}(\alpha) \subset S \right\} \in [0, +\infty].$$

4. Stratégie de décision/paramétrage dans l'incertain. On reprend maintenant notre modèle d'incertitude considéré auparavant et nous supposons maintenant qu'il dépend d'un paramètre à fixer ou décision à prendre x appartenant à un ensemble D ($x \in D$).

On peut donc voir les choses de la façon suivante : suite à un paramétrage ou une décision $x \in D$ se produit un événement incertain u appartenant à un ensemble U_x ($u \in U_x$) qui peut donc dépendre de x .

Pour bien comprendre les hypothèses du modèle, on pourra considérer, au moins dans un premier temps, les ensembles U_x comme disjoints les uns des autres.

À tout $x \in D$, on associe un ensemble de satisfaction $S_x \subset U_x$. On souhaite prendre une décision ou fixer le paramètre x de «la meilleure façon possible».

A priori, on notera que si les ensembles U_x sont disjoints, il n'y a pas de comparaison possible, au sens de 3.1, entre un ensemble de satisfaction $S_{x_1} \subset U_{x_1}$ correspondant à une décision x_1 et un ensemble de satisfaction $S_{x_2} \subset U_{x_2}$ correspondant à une décision x_2 .

Maintenant, si on se donne une mesure μ_x sur U_x (qui peut donc dépendre de x), on peut, en suivant la Méthode de Laplace, considérer le ratio

$$r(x) = \frac{\mu_x(S_x)}{\mu_x(U_x)}$$

et si on se donne un élément nominal \bar{u}_x et une distance d_x sur U_x (dépendant donc également éventuellement de x), on peut considérer le rayon de stabilité

$$r(x) = d(\bar{u}_x, S_x^c).$$

Une stratégie de choix de x paraît alors naturelle :

$$(4.1) \quad \text{Maximiser } r(x), \quad x \in D,$$

i.e. chercher la décision ou le paramétrage amenant le meilleur ratio de satisfaction ou le plus grand rayon de stabilité.

5. Passage en revue de travaux.

5.1. *En Recherche opérationnelle et Aide à la décision (RO-AD)*. À notre connaissance, un premier exemple de l'utilisation de la méthode de Laplace avec la mesure de comptage en RO-AD se trouve dans les travaux sur l'aide à la décision de J. Elton, S. K. Gupta et J. Rosenhead (1968). Nous reprenons ici une formulation que l'on trouvera dans [33] et qui fait suite à [18].

Il s'agit de prendre une décision $x \in D = \{x_1, \dots, x_n\}$ auquel fera suite un *scénario* incertain $u \in U_x \subset U = \{u_1, \dots, u_m\}$. L'ensemble des scénarios de l'ensemble $S \subset U$ sont considérés comme satisfaisants.

On pose, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $c_{ij} = 1$ si le scénario satisfaisant $u_j \in S_{x_i} := U_{x_i} \cap S$ est possible après la décision x_i et $c_{ij} = 0$ sinon. Autrement dit, ici, $S_{x_i} = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid c_{ij} = 1\}$. On définit alors

$$(5.1) \quad r(x_i) = \frac{\#S_{x_i}}{\#S} = \frac{1}{\#S} \sum_{j=1}^m c_{ij}.$$

En fait, ici, les scénarios en dehors de S ne jouent aucun rôle. Nous donnons ci-dessous une formulation plus abstraite et plus générale.

Il s'agit de prendre une décision $x \in D$ auquel fera suite un scénario $u \in U_x$ (U_x non vide). Le scénario u_x est considéré comme incertain. On suppose que tous les ensembles sont finis et on note donc S_x l'ensemble des scénarios considérés comme satisfaisant suite à la décision x . On définit alors la notre indicateur de robustesse par

$$(5.2) \quad r(x) = \frac{\#S_x}{\#U_x},$$

c'est, après la décision x , le nombre de scénarios (possibles) satisfaisants sur le nombre de scénarios possibles.

On pourra également consulter les travaux de B. Roy [36], [37] pour une approche similaire.

Un problème très proche de celui considéré ci-dessus donne la première illustration de la méthode de Laplace avec une mesure usuelle. C'est la méthode des *Domain Criterion* de Starr (introduite dans [48], on pourra également consulter [38]). On reprend le modèle d'une décision $x \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$ à laquelle fera suite un scénario incertain $u \in U = \{u_1, \dots, u_m\}$. On suppose que l'incertitude sur les u_j est décrite par une probabilité et on note p_j la probabilité (inconnue, incertaine en quelque sorte) de l'événement incertain u_j . La décision x_i suivie d'un événement incertain u_j donne lieu au coût c_{ij} . Le «coût moyen» de la décision x_i est défini comme $C_i(p_1, \dots, p_m) = \sum_{j=1, \dots, m} p_j c_{ij}$. On pose

$$S_{x_i} = \left\{ (p_1, \dots, p_m) \in \Delta_m \mid \forall k \llbracket 1, n \rrbracket, C_i(p_1, \dots, p_m) \leq C_k(p_1, \dots, p_m) \right\}.$$

C'est l'ensemble des probabilités (vues comme un élément du simplexe² Δ_m) qui conduisent à prendre la décision x_i si on regarde le meilleur coût moyen. On pose alors :

$$r(x_i) = \frac{\mathcal{H}_{m-1}(S_{x_i})}{\mathcal{H}_{m-1}(\Delta_m)},$$

où \mathcal{H}_{m-1} est la mesure usuelle (ici mesure de Hausdorff) $(m-1)$ -dimensionnelle.

On pourra également consulter [15], [16] pour cette approche.

On s'intéresse maintenant au problème de minimisation paramétré par $u \in U$, ensemble,

$$(\mathcal{P}_u) \quad \text{Minimiser } f(u, x), \quad x \in D,$$

où D est un ensemble et $f : U \times D \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ une fonction. On définit alors la multiapplication $M : U \rightrightarrows D$ par

$$(5.3) \quad \forall u \in U, \quad M(u) = \text{Argmin } f(u, \cdot) := \left\{ x \in D \mid \forall z \in D, f(u, z) \geq f(u, x) \right\} \subset D.$$

² $\Delta_m := \{(p_1, \dots, p_m) \mid p_1 + \dots + p_m = 1, p_1 \geq 0, \dots, p_m \geq 0\}$.

On définit $S : D \rightrightarrows U$ par

$$\forall x \in D, \quad S(x) = M^{-1}(x) = \{u \in U \mid x \in M(u)\}$$

autrement dit, c'est l'ensemble des paramètres $u \in U$ tels que x soit optimal pour le problème \mathcal{P}_u .

Cette formulation est en fait équivalente (moyennant une légère restriction) à notre formulation initiale pour le rayon de stabilité, il suffit d'associer à la multiapplication $S : D \rightrightarrows U$, la fonctionnelle ³ $f = \psi_{S^{-1}} : (u, x) \rightarrow \psi_{S^{-1}(u)}(x)$. On a alors $M(u) = \text{Argmin } f(u, \cdot) = S^{-1}(u)$.

Si on regarde du côté du rayon de stabilité, on suppose U muni d'une distance d et on se donne $\bar{x} \in M(\bar{u})$. Alors le rayon de stabilité de \bar{x} est

$$(5.4) \quad \rho(\bar{x}) = d(\bar{u}, S(\bar{x})^c),$$

autrement dit c'est la distance de \bar{u} aux plus proches $u \in U$ (en distance) qui font que \bar{x} n'est plus solution de \mathcal{P}_u .

Cette approche a été considérée dans toute une série de travaux en Optimisation (essentiellement en Optimisation combinatoire) ([29],[30] pour les références les plus anciennes). On pourra se référer à [46] et [47].

Plus récemment, A. Rossi dans sa thèse en 2003, [34], utilise le rayon de stabilité pour un problème de programmation linéaire dont il sélectionne un sous-ensemble de solutions $S(\bar{x})$ (les solutions *équilibrées*) à propos d'un problème d'ordonnancement. On pourra également consulter [35], le chapitre 3 de [12] et enfin [1] où la méthodologie générale est reprise.

Si on change d'indicateur de robustesse, et qu'on utilise l'approche de la méthode de Laplace, il n'est plus nécessaire de se donner \bar{u} et on remplace le rayon de stabilité par :

$$r(\bar{x}) = \frac{\mu(S(\bar{x}))}{\mu(U)}$$

où μ est une mesure invariante convenable sur U . On pourra consulter [51], [52] ainsi que les références bibliographiques de ces travaux pour plus de détails.

5.2. *Conception, Design Centering.* Nous reprenons une formulation (issue de [49]). Dans un processus de fabrication, les paramètres techniques pertinents de l'objet fabriqué sont représentés par un élément u d'un espace métrique (U, d) . Pour que l'objet fabriqué soit retenu, il faut (et il suffit) que u appartienne à un certain ensemble de satisfaction S . Le produit que l'on souhaite obtenir a des spécifications \bar{u} , c'est le paramètre *nominal* mais le paramètre u de l'objet fabriqué, dû aux aléas du processus de fabrication, peut *dévier* de ce paramètre nominal. Ici, la variable de

³où $\psi_{S^{-1}(u)}(x) = 0$ si $x \in S^{-1}(u)$, $+\infty$ sinon.

décision est $x = \bar{u}$ le paramètre nominal. Il semble donc assez naturel de chercher un $x = \bar{u}$ tel que

$$r(x) = d(x, S^c)$$

soit le plus grand possible. On remarquera que S ne dépend pas de x .

On pourra se référer à [13], [17] pour plus de détails et de références bibliographiques, notamment sur les premiers travaux dans ce domaine.

5.3. *Contrôle robuste.* Considérons le système linéaire autonome suivant :

$$(5.5) \quad \dot{z} = Az$$

où A est une matrice réelles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ ($A \in \mathcal{M}_n$). On dira que le système est *asymptotiquement stable* si toutes ses valeurs propres (comme matrice à coefficients complexes) ont des parties réelles strictement négative ou encore, le spectre $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_- := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) < 0\}$.

Considérons l'ensemble des matrices A qui conduisent à un système stable, i.e.

$$\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n \mid \sigma(A) \subset \mathbb{C}_- \right\}.$$

À partir du choix d'une norme quelconque sur \mathcal{M}_n et d'une matrice stable A , on définit le rayon de stabilité de A comme $\rho(A) = d(A, \mathcal{S}^c)$. Il semble que celui-ci ait été introduit de façon indépendante dans les travaux de C. Van Loan, [50], et D. Hinrichsen, A. J. Pritchard [20], [21].

Dans le cas *non structuré*, tous les coefficients de la matrices sont incertains, $D = \mathcal{M}_n = U_x$ ($x = A$), $\bar{u}(A) = A$ pour tout A , $S_x = \mathcal{S}$ est indépendant de x .

Le contrôle robuste amenera plutôt au cas *structuré*. Donnons un exemple. Considérons le système linéaire autonome

$$(5.6) \quad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ y = Cz, \end{cases}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie. On suppose que le contrôle est donné par la boucle $u = Ky$. L'état du système satisfait donc à

$$(5.7) \quad \dot{z} = (A + BKC)z.$$

Ce que l'on souhaite, c'est choisir K de sorte que $d(A + BKC, \mathcal{S}^c)$ soit maximal. Ici, $D = \mathcal{M}_{m,p}$ ($x = K$), ensemble des matrices réelles de tailles $m \times p$. $U_x = \mathcal{M}_n$, indépendant de K , $\bar{u}(K) = A + BKC$ est affine et $S_x = \mathcal{S}$ est indépendant de x .

Pour cette partie, on pourra consulter également les travaux de D. Hinrichsen et A. J. Pritchard [22], D. Hinrichsen et M. Motscha, [19], A. D. B. Paice et F. R. Wirth (pour le cas non linéaire), [32] et l'ouvrage de D. Hinrichsen et A. J. Pritchard, [23].

5.4. *Fiabilité non probabiliste des systèmes.* Si la notion de *marge de sécurité* (safety margin), de *facteur de sécurité* (safety factor) sont très classiques, anciennes et fortement connectées à la notion de rayon de stabilité, il est bien difficile d'en retrouver les premières formalisations mathématiques.

On retrouve l'utilisation du rayon de stabilité dans des travaux sur la fiabilité non probabiliste en mécanique à partir des années 1990 dans les travaux de Y. Ben-Haïm, [2], [3], [9], [4].

L'idée générale est très proche du formalisme que nous avons introduit et sort largement du cadre de la mécanique. Un système est paramétré par $x \in D$ que l'on contrôle et subit également un événement incertain $u \in U$ qui est considéré comme déviant d'un événement nominal \bar{u} . Si $u \in S(x)$ alors le système remplit son rôle et si ce n'est pas le cas, il est défaillant. On se donne une métrique d sur U qui reflète les propriétés qui nous intéressent de la déviation du paramètre et il est alors naturel de chercher le paramètre x qui maximise la distance de \bar{u} à la région de défaillance $S(x)^c$, autrement dit qui maximise le rayon de stabilité $d(\bar{u}, S(x)^c)$.

On pourra consulter l'ouvrage de Y. Kanno, [25], les travaux de Y. Kanno et I. Takewaki [26], [27].

5.5. *Travaux divers.* La notion de rayon de stabilité apparaît également dans divers travaux plus éparses et que nous nous contentons de signaler. Les travaux de W. E. Milne et R. R. Reynolds [31], H. Wilf, [53], en Analyse numérique, de E. Carrizosa et S. Nickel, [14], en localisation optimale de Y. Ben-Haïm et N. Shenhav, [10], dans un problème particulier lié à la conception.

6. Conclusions. Nous avons donc dans ce travail à la fois présenté une notion de robustesse qui, à notre avis, n'a pas reçu encore l'attention et le traitement mathématique qu'elle mérite, et passé en revue les travaux précurseurs non directement reliés à ceux de Y. Ben-Haïm (après sa synthèse dans [8]). Nous pensons que cette méthode offre encore de nombreux développements possibles et espérons pouvoir à l'avenir, comme nous avons commencé à le faire, participer activement à ceux-ci.

À un niveau peut-être plus général, nous espérons avoir également contribué à faire avancer la réflexion scientifique sur cette notion de robustesse à la fois si commune et si insaisissable.

REFERENCES

- [1] A. Aubry, A. Rossi, and M. Jacomino. A generic off-line approach for dealing with uncertainty in production systems optimisation. In *13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, INCOM'2009*, pages 1464–1469, Russian Federation, June 2009.
- [2] Y. Ben-Haim. A non-probabilistic concept of reliability. *Structural Safety*, 14(4):227–245, 1994.
- [3] Y. Ben-Haim. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. *Structural Safety*, 17(2):91–109, 1995.
- [4] Y. Ben-Haim. *Robust reliability in the mechanical sciences*. Robust reliability in the mechanical sciences. Springer, 1996.
- [5] Y. Ben-Haim. Design certification with information-gap uncertainty. *Structural Safety*, 21(3): 269–289, 1999.
- [6] Y. Ben-Haim. Set-models of information-gap uncertainty: axioms and an inference scheme. *J. Franklin Inst.*, 336(7):1093–1117, 1999.
- [7] Y. Ben-Haim. Robust rationality and decisions under severe uncertainty. *J. Franklin Inst.*, 337(2-3):171–199, 2000.
- [8] Y. Ben-Haim. *Information-gap decision theory*. Series on Decision and Risk. Academic Press Inc., San Diego, CA, 2001. Decisions under severe uncertainty.
- [9] Y. Ben-Haim and I. Elishakoff. Discussion on: A non-probabilistic concept of reliability. *Structural Safety*, 17(3):195–199, 1995.
- [10] Y. Ben-Haim and N. Shenhav. The measurement of spatially random phenomena. *SIAM J. Appl. Math.*, 44(6):1150–1163, 1984.
- [11] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski. *Robust optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [12] J. Ch. Billaut, A. Moukrim, and E. Sanlaville, editors. *Flexibility and Robustness in Scheduling*, 2008. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- [13] R. K. Brayton, G. D. Hachtel, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli. A survey of optimization techniques for integrated-circuit design. *Proceedings of the IEEE*, 69(10):1334–1362, oct. 1981.
- [14] E. Carrizosa and S. Nickel. Robust facility location. *Math. Methods Oper. Res.*, 58(2):331–349, 2003.
- [15] H. A. Eiselt and G. Laporte. The use of domains in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 61(3):292–298, 1992.
- [16] H. A. Eiselt, C.-L. Sandblom, and N. Jain. A spatial criterion as decision aid for capital projects: Locating a sewage treatment plant in halifax, nova scotia. *The Journal of the Operational Research Society*, 49(1):23–27, 1998.
- [17] H. E. Graeb. *Analog Design Centering and Sizing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2007.
- [18] S. K. Gupta and J. Rosenhead. Robustness in sequential investment decisions. *Management Science*, 15(2):B18–B29, 1968.
- [19] D. Hinrichsen and M. Motscha. Optimization problems in the robustness analysis of linear state space systems. In *Approximation and optimization (Havana, 1987)*, volume 1354 of *Lecture Notes in Math.*, pages 54–78. Springer, Berlin, 1988.
- [20] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard. Stability radii of linear systems. *Systems Control Lett.*, 7(1):1–10, 1986.
- [21] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard. Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation. *Systems Control Lett.*, 8(2):105–113, 1986.
- [22] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard. Real and complex stability radii: a survey. In *Control of uncertain systems (Bremen, 1989)*, volume 6 of *Progr. Systems Control Theory*, pages 119–162. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [23] D. Hinrichsen and A. J. Pritchard. *Mathematical systems theory I*, volume 48 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2010. Modelling, state space analysis, stability and robustness, Corrected reprint [of MR2116013].
- [24] I. Hlaváček, J. Chleboun, and I. Babuška. *Uncertain input data problems and the worst scenario*

- method, volume 46 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.
- [25] Y. Kanno. *Nonsmooth mechanics and convex optimization*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- [26] Y. Kanno and I. Takewaki. Sequential semidefinite program for maximum robustness design of structures under load uncertainty. *J. Optim. Theory Appl.*, 130(2):265–287, 2006.
- [27] Y. Kanno and I. Takewaki. Robustness analysis of trusses with separable load and structural uncertainties. *Internat. J. Solids Structures*, 43(9):2646–2669, 2006.
- [28] P. Kouvelis and G. Yu. *Robust discrete optimization and its applications*, volume 14 of *Non-convex Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [29] V. K. Leont'ev. Stability of the traveling salesman problem. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 15(5):1298–1309, 1362, 1975.
- [30] V. K. Leont'ev. Stability in combinatorial choice problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 228(1): 23–25, 1976.
- [31] W. E. Milne and R. R. Reynolds. Fifth-order methods for the numerical solution of ordinary differential equations. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 9:64–70, 1962.
- [32] A. D. B. Paice and F. R. Wirth. Analysis of the local robustness of stability for flows. *Math. Control Signals Systems*, 11(4):289–302, 1998.
- [33] J. Rosenhead, M. Elton, and S. K. Gupta. Robustness and optimality as criteria for strategic decisions. *Operational Research Quarterly (1970-1977)*, 23(4):413–431, 1972.
- [34] A. Rossi. *Ordonnancement en milieu incertain, mise en oeuvre d'une démarche robuste*. Productique : Grenoble, 2003.
- [35] A. Rossi, M. Jacomino, and M.-L. Espinouse. Étude de robustesse : configuration d'un parc de machines partiellement multifonctions. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 38/3-4: 373–397, 2004. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00079078/en/>.
- [36] B. Roy. A propos de robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision. In J.-C. Billaut, A. Moukrim, and E. Sanlaville, editors, *Flexibilité et robustesse en ordonnancement*, pages 35–50. Lavoisier, 2005.
- [37] B. Roy. Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. *European Journal of Operational Research*, 200(3):629–638, 2010.
- [38] G. O. Schneller and G. P. Sphicas. Decision making under uncertainty: Starr's domain criterion. *Theory and Decision*, 15(4):321–336, 1983.
- [39] M. Sniedovich. The art and science of modeling decision-making under severe uncertainty. *Decis. Mak. Manuf. Serv.*, 1(1-2):111–136, 2007.
- [40] M. Sniedovich. The mighty maximin. Working Paper No. MS-02-08, 2008.
- [41] M. Sniedovich. Anatomy of a misguided maximin/minimax formulation of info-gap's robustness model. Working Paper No. MS-04-08, 2008.
- [42] M. Sniedovich. A bird's view of info-gap decision theory. *Journal of Risk Finance*, 11(3): 268–283, 2010.
- [43] M. Sniedovich. A classical decision theoretic perspective on worst-case analysis. *Applications of Mathematics*, 56:499–509, 2011.
- [44] M. Sniedovich. Info-gap decision theory: A perspective from the land of the black swan. Technical report, Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne, 2011. Working Technical Report SM-01-11.
- [45] M. Sniedovich. Black swans, new nostradamuses, voodoo decision theories, and the science of decision making in the face of severe uncertainty. *International Transactions in Operational Research*, 19(1-2):253–281, 2012.
- [46] Yu. N. Sotskov, V. K. Leont'ev, and È. N. Gordeev. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Appl. Math.*, 58(2):169–190, 1995. Workshop on Discrete Algorithms (Osnabrück, 1991).
- [47] Yu. N. Sotskov, V. S. Tanaev, and F. Werner. Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments. In *Industrial applications of combinatorial optimization*, volume 16 of *Appl. Optim.*, pages 72–108. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [48] M. K. Starr. *Product design and decision theory / M.K. Starr*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs,

- N.J. ;, 1963.
- [49] P. T. Thach. The design centering problem as a D.C. programming problem. *Math. Programming*, 41(2, (Ser. A)):229–248, 1988.
 - [50] C. Van Loan. How near is a stable matrix to an unstable matrix? In *Linear algebra and its role in systems theory (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 47 of *Contemp. Math.*, pages 465–478. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
 - [51] R. Vetschera. Volume-based sensitivity analysis for single and multiobjective linear programming problems, 1997.
 - [52] R. Vetschera. A recursive algorithm for volume-based sensitivity analysis of linear decision models. *Computers Operations Research*, 24(5):477 – 491, 1997.
 - [53] H. S. Wilf. Maximally stable numerical integration. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8:537–540, 1960.

LABORATOIRE D'ANALYSE NON LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE, EA 2151

UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DE VAUCLUSE, 33 RUE LOUIS PASTEUR, 84000 AVIGNON (FRANCE)

33 RUE PASTEUR, 84000, AVIGNON, FRANCE.

E-MAIL: marc.ciligot@univ-avignon.fr