



**HAL**  
open science

# SUR LES OPERATEURS DE DIRAC DE RANG SUPERIEUR ET L'EQUATION RELATIVISTE D'EINSTEIN

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR LES OPERATEURS DE DIRAC DE RANG SUPERIEUR ET L'EQUATION RELATIVISTE D'EINSTEIN. 2016. hal-01330724v2

**HAL Id: hal-01330724**

**<https://hal.science/hal-01330724v2>**

Preprint submitted on 17 Jul 2016 (v2), last revised 3 Sep 2016 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# SUR LES OPÉRATEURS DE DIRAC DE RANG SUPÉRIEUR ET L'ÉQUATION RELATIVISTE D'EINSTEIN.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans cet article on propose de donner une écriture unitaire des équations de Dirac et de l'équation relativiste d'Einstein à partir d'une section de Dirac métrisable, de tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ . Les fonctions propres locales de l'opérateur de Dirac de rang 1 donnent les équations de Dirac d'un champ de masse la fonction propre et l'opérateur de Dirac de rang 2 de matrice  $(h_{\nu}^{\mu})$ , de tenseur associé  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\tau} h_{\nu}^{\tau}$ , est un tenseur d'Einstein pour lequel  $h_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  où  $T_{\mu\nu}$  représente le tenseur énergie-impulsion.

## 1. LES OPÉRATEURS DE DIRAC DE RANG $n \geq 1$

Soit  $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F})$  est un fibré de Banach ou de Hilbert [6] de l'univers  $\mathbf{W}$ , de fibre  $\mathcal{F}$ , dont la base est une  $C^{\infty}$ -variété  $\mathbf{W}$  de dimension 4. On note

$$\Lambda^n \mathbf{W} = \wedge^n T^* \mathbf{W},$$

le fibré des  $n$ -formes différentielles sur  $\mathbf{W}$  et le fibré des  $(p, q)$ -tenseurs,  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant, est noté

$$T^{p,q} \mathbf{W} = (\otimes^p T^* \mathbf{W}) \otimes (\otimes^q T \mathbf{W}).$$

On munit  $\zeta$  d'une connexion  $\nabla$ ,

$$\nabla : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes \zeta),$$

$\nabla$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire et vérifie la relation de Leibniz

$$\nabla \lambda s = d\lambda \otimes s + \lambda \nabla s,$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.** *Un élément  $\gamma$  de  $\text{Hom}(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes \zeta, \zeta)$  est une section de Dirac du fibré des états  $\zeta$  si,*

$$\gamma(w) : (\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E)_w = \Lambda_w^1 \mathbf{W} \otimes E_w \rightarrow E_w$$

*est un opérateur bilinéaire pour les structures d'espaces vectoriels sur les fibres pour tout  $w \in \mathbf{W}$ .*

L'endomorphisme  $H = \gamma \otimes \nabla$  de  $\Gamma(\zeta)$  est défini par  $\gamma \otimes \nabla(s) = \gamma(\nabla s)$  avec  $\gamma \otimes \nabla(s)(\omega) = \gamma(\omega)(\nabla s(\omega))$ ,  $\omega \in \mathbf{W}$  et  $s \in \Gamma(\zeta)$ , est l'opérateur de Dirac associé à la connexion  $\nabla$  et à la section  $\gamma$ .

---

*Date:* 12/06/2016.

*Key words and phrases.* Section de Dirac, Tenseur métrique, Tenseur énergie-impulsion, Endomorphisme de Dirac, Connexion de Levi-Civita. Tenseur de courbure.

**Definition 2.** Les sections d'endomorphismes de Dirac sont définies par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), d \in \Lambda^1 \mathbf{W} \text{ et } s \in \Gamma(\zeta).$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac  $\{\gamma^{d^i}\}$  est

$$[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}] = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(\tau) \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}\} = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}}.$$

**Remark 1.** Quand on parle de symétrisé ou d'antisymétrisé de la famille

$$\{\gamma^{d^j}, j = 1, \dots, n\},$$

on pose respectivement

$$\mathcal{S}(\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}) = \frac{1}{n!} \{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}\}$$

et

$$\mathcal{A}(\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}) = \gamma^{d^1} \wedge \gamma^{d^2} \wedge \dots \wedge \gamma^{d^n} = \frac{1}{n!} [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}],$$

ces définitions interviennent dans la construction des espaces de Fock [1].

Les extensions de rang  $n$  d'une section  $\gamma$  sont les éléments  $\gamma_n$  de  $\text{Hom}(\Lambda^n \mathbf{W} \otimes \zeta, \zeta)$  définis par

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes s) = [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}](s), s \in \Gamma(\zeta)$$

et on prolonge  $\gamma_n$  par  $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{R})$ -linéarité sur  $\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes E$ . Toute connexion sur  $\nabla$  a une extension [5]

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes \zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W}) \otimes \zeta)$$

avec,

$$d_0^\nabla = \nabla, \Lambda^0(\mathbf{W}) \otimes \zeta = \zeta$$

et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \psi \in \Lambda^n(\mathbf{W}).$$

**Definition 3.** L'opérateur de Dirac de rang  $n$  associé à la connexion  $\nabla$  et  $\gamma$  est l'endomorphisme de  $\Gamma(\zeta)$

$$H_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla,$$

et  $H_n(s) = \gamma_n(\nabla_{n-1}s), \forall s \in \Gamma(\zeta)$ .

Une équation d'état de rang  $n$  associée à la l'opérateur de Dirac  $H_n$  est une équation locale de la forme

$$H_n(s) = \lambda s,$$

où  $\lambda$  est une  $C^\infty$ -application définie sur une carte  $W$  de  $\mathbf{W}$  et  $s \in \Gamma_W(\zeta)$ .

## 2. LES OPÉRATEURS DE DIRAC SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT DE DIMENSION FINIE

On suppose que  $\zeta$  est de dimension finie. Soit  $W$  une carte de l'univers  $\mathbf{W}$  sur laquelle le fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$  et le fibré  $\zeta$  sont trivialisables. On note,  $\{\partial_\mu, 0 \leq \mu \leq 3\}$  une base locale de champs de vecteurs sur  $W$   $\{d^\nu, 0 \leq \nu \leq 3\}$  la base duale

$$d^\nu \otimes \partial_\mu = \delta_\mu^\nu, \quad (d^\nu \otimes \partial_\mu)(w) = d^\nu(w) (\partial_\mu(w)) = \delta_\mu^\nu,$$

en général, on prend pour base  $\{\partial_\mu, 0 \leq \mu \leq 3\}$  le local frame associé à la carte. Sur  $W$  il existe une base locale de sections, notée  $\{e_\alpha, 0 \leq \alpha \leq m-1\}$ ,  $m = \dim \zeta$ . On pose  $s = s^\alpha e_\alpha$  alors on a démontré dans [4] que l'opérateur de Dirac de rang 1, est décrit localement par le théorème suivant.

**Theorem 1.** *L'opérateur  $H_1$  de l'équation d'état du premier ordre est*

$$H_1 = \gamma^\nu D_\nu,$$

$\gamma^\nu$  sont les quatre endomorphismes de Dirac définies par le "local frame" et  $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$ ,  $L_\nu$  est l'opérateur de Lie et  $\Gamma_\nu$  est l'opérateur de Christoffel.

L'équation d'état s'écrit localement,

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda s^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq m-1.$$

Si le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  est fixé par la section de Dirac métrisable, on peut construire à l'aide d'une section de Dirac quelconque  $\gamma$ , un opérateur  $H_2 = \gamma_2 \otimes \nabla_1$ , à partir des matrices de Dirac de la nouvelle section. On veut décrire localement dans une carte l'opérateur  $H_2 = \gamma_2 \otimes \nabla_1$ . Sur le fibré  $\zeta$ , avec les notations précédentes,

$$\gamma_2 ((d^1 \wedge d^2) \otimes s) = \frac{1}{2} [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}] (s) = \frac{1}{2} (\gamma^{d^1} \gamma^{d^2} (s) - \gamma^{d^2} \gamma^{d^1} (s))$$

et

$$\nabla_1 = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla = R^\nabla$$

représente la courbure de la connexion  $\nabla$ . Sur un ouvert de trivialisations  $W$  du fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$  de  $\mathbf{W}$  et  $\zeta$ , pour  $s = s^\alpha e_\alpha$

$$\begin{aligned} R^\nabla (s) &= d_1^\nabla (\nabla s) = d_1^\nabla ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta) \\ &= d((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \wedge \nabla e_\beta \\ &= (d(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \wedge d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^\tau d^\sigma) \otimes e_\tau \\ &= (d(\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) \wedge d^\nu) \otimes e_j - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^j d^\sigma) \otimes e_j \\ &= (\partial_\mu (\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) - (\partial_\mu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta) \Gamma_{\beta\nu}^j) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j \\ &= (\partial_\mu \partial_\nu s^j + (\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j) s^\tau) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j. \end{aligned}$$

La section de Dirac  $\gamma$  de  $\zeta$  a pour représentation locale

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma,$$

et si  $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$ , en posant  $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$ , alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s) = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \partial_\nu s^j + (\partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j) s^\tau \right) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (e_j),$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (e_j) &= \gamma^\mu (\gamma_j^{\nu\sigma} e_\sigma) - \gamma^\nu (\gamma_j^{\mu\sigma} e_\sigma) \\ &= (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) e_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s^\alpha e_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \partial_\nu s^j + \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\alpha \right) e_k.$$

Pour le **local frame**  $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$  associé à la carte  $W$ , on a  $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ , donc

$$(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_\mu \partial_\nu = 0,$$

et si on pose

$$\mathbf{r}_\tau^k = \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right)$$

alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s^\alpha e_\alpha) = \mathbf{r}_\tau^k s^\tau e_k.$$

Pour  $\nabla_{\partial_\mu} e_\sigma = \Gamma_{\mu\sigma}^k e_k$  on a

$$\nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} e_\sigma = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau) e_\tau,$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} - \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu}) e_\sigma &= (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau - \Gamma_{\nu\sigma}^k \Gamma_{\mu k}^\tau) e_\tau \\ &= R_{\nu\mu\sigma}^\tau e_\tau \end{aligned}$$

La courbure de la connexion  $\nabla$  sur le fibré  $\zeta$  est

$$\begin{aligned} R^\nabla (\partial_\nu, \partial_\mu) (e_\sigma) &= \nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} e_\sigma - \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu} e_\sigma \\ &= [\nabla_\nu, \nabla_\mu] (e_\sigma) = R_{\nu\mu\sigma}^\tau e_\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\nu\mu\sigma}^\tau &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau + \Gamma_{\mu\sigma}^k \Gamma_{\nu k}^\tau - \Gamma_{\nu\sigma}^k \Gamma_{\mu k}^\tau \\ &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu k}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^k - (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\tau - \Gamma_{\nu k}^\tau \Gamma_{\mu\sigma}^k) \\ &= \Lambda_{\nu\mu\sigma}^\tau - \Lambda_{\mu\nu\sigma}^\tau \end{aligned}$$

où

$$\Lambda_{\mu\nu\sigma}^\tau = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu k}^\tau \Gamma_{\nu\sigma}^k$$

est un  $(3, 1)$ -tenseur appelé tenseur de Christoffel. Sur une carte de trivialisaton  $W$  de  $\xi_{\mathbf{W}}$  et  $\zeta$ , pour l'opérateur de Dirac de rang 2, on a

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (s^\alpha e_\alpha) = \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\tau e_k,$$

or

$$\Lambda_{\mu\nu\tau}^j = \partial_\mu \Gamma_{\nu\tau}^j - \Gamma_{\nu\beta}^j \Gamma_{\mu\tau}^\beta = \partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j$$

$$H_2 (s^\alpha e_\alpha) = \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \Lambda_{\mu\nu\tau}^j s^\tau e_k \quad (2.1)$$

en permutant les indices  $\mu$  et  $\nu$

$$H_2 (s^\alpha e_\alpha) = \frac{1}{2} (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) R_{\mu\nu\tau}^j s^\tau e_k,$$

la matrice de  $\mathbf{H}_2$  dans la base de sections locales vérifie

$$(H_2)_\alpha^k = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^k R_{\mu\nu\alpha}^j.$$

**Theorem 2.** *Si on pose*

$$R_{\mu\nu\alpha}^j = [\nabla_\nu, \nabla_\mu]_\alpha^j,$$

la matrice de l'opérateur  $H_2$  s'écrit

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu] [\nabla_\nu, \nabla_\mu] = (\gamma^\nu \wedge \gamma^\mu) [\nabla_\nu, \nabla_\mu].$$

**Corollary 1.**

$$\mathbf{H}_2 = [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \nabla_\nu \nabla_\mu = \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu [\nabla_\nu, \nabla_\mu].$$

**Definition 4.** *Les matrices  $\mathbf{R}_{\mu\nu} = [\nabla_\nu, \nabla_\mu]$  sont les matrices de courbure de  $\nabla$ . Le tenseur matriciel  $\mathbf{R}_{\mu\nu}$  est un tenseur à valeurs matricielles dit tenseur de Ricci matriciel.*

L'équation relativiste d'Einstein est représentée par

$$R_{\mu\nu} - \left( \frac{R}{2} + \Lambda \right) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$R$  est la courbure,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\tau\nu}^\tau$  est le tenseur de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion,

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

et  $\Lambda$  est la constante cosmologique. Soit  $\zeta$  un fibré de Banach ou de Hilbert, muni d'une section de Dirac bornée et à trace qui est métrisable et pour laquelle la métrique induite sur une carte vérifie l'équation relativiste d'Einstein. On a vu que si le fibré est de dimension finie, la métrique induite  $g$  est indépendante du choix de la carte [4], on peut énoncer la définition suivante.

**Definition 5.** *Une section de Dirac-Einstein est une section métrisable [4] pour laquelle la métrique induite vérifie l'équation d'Einstein 2.2.*

Sur le fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$ , la seule donnée d'une section de Dirac  $\gamma$  métrisable permet de définir la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  associée à la pseudo-métrique et les opérateurs de Dirac de rang supérieur. Cette section permet également de donner localement une représentation de l'équation de Dirac généralisée sous la forme

$$\gamma \otimes \nabla(X) = \lambda X,$$

$\lambda$  est une fonction propre locale de densité de masse de l'opérateur  $H_1 = \gamma \otimes \nabla$ . On impose à la métrique  $g$  définie par  $\gamma$  de vérifier l'équation relativiste d'Einstein. Si  $W$  est une carte locale, dont le local frame dual est  $\{d^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ , quelles conditions doit-on avoir sur les matrices de Dirac  $\{\gamma^\nu\}$  pour que la métrique  $g$  soit une métrique d'Einstein? On a vu dans [4] sous l'hypothèse d'un univers parallélisable, les endomorphismes de Dirac ont pour représentation matricielle les matrices  $\mathbf{gamma}$ [3] à un coefficient complexe multiplicatif près et pour cette représentation la fonction propre locale de densité de masse est constante et vaut  $\frac{mc}{\hbar}$ . Sous cette hypothèse la métrique est la métrique de Minkowski.

Les quatre endomorphismes de Dirac  $\{\gamma^\nu\}$  sont des sections du fibré  $\text{End}(\xi_{\mathbf{W}})$  de base  $\mathbf{W}$  et de fibre  $\text{End} T_w(\mathbf{W})$ . A chaque  $w \in \mathbf{W}$ ,  $\gamma(w) \in \text{End} T_w(\mathbf{W})$ . Pour un champ  $X$ , on peut écrire

$$(\gamma^d \otimes X)(w) = \gamma^d(w)(X(w)).$$

La matrice de l'opérateur  $H_2$  dans le local frame est donnée par le (1,1)-tenseur

$$h_\rho^\tau = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\tau R_{\mu\nu\rho}^j$$

et

$$h_{\sigma\rho} = g_{\sigma\tau} h_\rho^\tau = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_{\sigma j} R_{\mu\nu\rho}^j [2].$$

On cherche à définir les tenseurs  $h_{\sigma\rho}$  qui sont des tenseurs d'Einstein. On rappelle la définition suivante.

**Definition 6.** *Un tenseur d'Einstein est un tenseur qui s'écrit localement dans le local frame  $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$*

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu},$$

où  $\lambda$  est une  $C^\infty$ -application définie localement sur une carte de trivialisatation du fibré tangent de l'univers  $\mathbf{W}$ ,  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et  $g_{\mu\nu}$  le tenseur métrique.

**Remark 2.** *Dans le cas de l'équation relativiste d'Einstein, on a*

$$\lambda = \frac{1}{2} R - \Lambda,$$

$\Lambda$  est la constante cosmologique et  $R$  est la courbure.

Le tenseur  $h_{\sigma\rho}$  est un tenseur d'Einstein si il vérifie le système d'équations

$$\frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_{\sigma j} R_{\mu\nu\rho}^j = R_{\sigma\rho} - \lambda g_{\sigma\rho}. \quad (2.3)$$

On veut que la matrice de l'opérateur  $H_2$ , dans le local frame, représente toutes les forces en présence dans l'univers, ce qui implique que le tenseur  $h_{\sigma\rho}$  soit proportionnel au tenseur énergie-impulsion. Si ce tenseur est un tenseur d'Einstein, on retombe sur l'équation relativiste d'Einstein.

**Remark 3.** *Ce système d'équations a sens que sur le fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$ .*

### 3. CONCLUSION

On peut définir une géométrisation de l'univers  $\mathbf{W}$  dont le fibré des champs est muni d'une section de Dirac métrisable, notée  $\gamma$ . On procède de la façon suivante, dans une carte  $W$  de l'univers  $\mathbf{W}$  munie du local frame  $\{\partial_\mu, 0 \leq \mu \leq 3\}$  et de son dual  $\{d^\nu, 0 \leq \nu \leq 3\}$ , on définit les endomorphismes de Dirac  $\{\gamma^\nu : 0 \leq \nu \leq 3\}$ . La section de Dirac est métrisable, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  associé est donné par

$$(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} (\gamma^{\mu\nu})^{-1} \text{ avec } g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu} \text{ et } \gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Cette pseudo-métrique définit une connexion de Levi-Civita, notée  $\nabla$ , on en déduit les opérateurs de Dirac de rang 1 et 2,

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla \text{ et } H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla,$$

l'opérateur  $H_1$  définit l'équation de Dirac sur un champ  $X$  de densité de masse  $\lambda$  par

$$H_1 X = \lambda X,$$

ce qui permet de discrétiser les densités de masse  $\lambda$  comme des fonctions propres de l'opérateur  $H_1$ . L'opérateur  $H_2$  a pour représentation matricielle dans le local frame  $\{\partial_\mu, 0 \leq \mu \leq 3\}$

$$h_\rho^\tau = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\tau R_{\mu\nu\rho}^j,$$

où  $R_{\mu\nu\rho}^j$  est le tenseur de courbure de la connexion  $\nabla$ , cet opérateur ne dépend que des quatre endomorphismes fondamentaux  $\{\gamma^\nu : 0 \leq \nu \leq 3\}$ . Les opérateurs de Dirac  $H_2$ , pour lesquels le système d'équations 2.3 est vérifiée, est un opérateur d'Einstein de rang 2. La section  $\varsigma$  est une section de Dirac-Einstein si

$$\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda \text{ et } h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}. \quad (3.1)$$

**Remark 4.** *L'hypothèse ?? sous-entend que le tenseur  $h_{\sigma\rho}$  est symétrique.*

En résumé, la physique de l'univers  $\mathbf{W}$  muni d'une section de Dirac est décrite par les équations

$$\begin{aligned} \gamma^\nu D_\nu X &= \lambda X, \quad X \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}), \\ \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_{\sigma j} R_{\mu\nu\rho}^j &= R_{\sigma\rho} - \lambda g_{\sigma\rho}, \\ \lambda &= \frac{1}{2}R - \Lambda \text{ et } h_{\sigma\rho} = \kappa T_{\sigma\rho}, \end{aligned}$$

$\gamma^\nu$  représente les endomorphismes de Dirac,  $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$  [4],  $R_{\mu\nu\rho}^j$  est le tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  de la pseudo-métrique  $g_{\mu\nu}$  qui est indépendante du choix du local frame. L'existence de quatre endomorphismes  $\zeta^\nu$  vérifiant les systèmes d'équations permettent de donner une représentation unitaire des équations de Dirac et d'Einstein. On peut donner une généralisation de l'équation relativiste d'Einstein sous la forme

$$\frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_{\sigma j} R_{\mu\nu\rho}^j = \kappa T_{\sigma\rho},$$

et sous forme matricielle on a

$$H_2 = \kappa T.$$

#### REFERENCES

- [1] Arai A., "A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)
- [2] Arnold V., "Mathematical Methods of Classical Mechanics". Second Edition, Springer 1989
- [3] Esteban M.J., Séré E., "Les équations de Dirac-Fock". Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
- [4] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac". Hal.archives-ouvertes.fr/hal-01325248
- [5] Kobayashi S. and Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, (1996)
- [6] Tumpach A.B., "Variétés kaehlériennes et hyperkaélériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)

*E-mail address:* jean-louis.jonot@ac-versailles.fr