HAL
open science

Test séquentiel tronqué : niveau de confiance après acceptation

Ludovic d'Estampes, Bernard Garel, Guillaume Saint Pierre

To cite this version:

Ludovic d'Estampes, Bernard Garel, Guillaume Saint Pierre. Test séquentiel tronqué : niveau de confiance après acceptation. Revue de Statistique Appliquée, 2003, LI (3), pp.75-92. hal-01330096

HAL Id: hal-01330096

https://hal.science/hal-01330096v1

Submitted on 9 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Test séquentiel :
Niveau de confiance après acceptation [1].

L. d'Estampes, B. Garel [2] et G. Saint Pierre

Equipe Statistique et Probabilités, LEN7
ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex 7.

RÉSUMÉ

Nous développons ici la notion de niveau de confiance après acceptation lors d'un test séquentiel du rapport des probabilités de Wald. Les notions de borne de confiance et d'intervalle de confiance après acceptation sont bien connues. La notion de niveau de confiance apparaît comme une notion duale de la précédente. Ces concepts sont illustrés dans le cadre d'un problème de fiabilité des systèmes concernant la qualification de systèmes d'atterrissage aux instruments ou Instrument Landing System (ILS).

Mots-clés : *test séquentiel, loi exponentielle, borne et niveau de confiance.*

ABSTRACT

In this paper we develop the notion of confidence level at acceptance, during a probability ratio sequential test of Wald. The notions of confidence limits and confidence interval at acceptance are well known. The notion of confidence level appears as the dual of the former. These concepts are illustrated in a reliability of technical systems problem, namely the Instrument Landing System (ILS) certification.

Keywords : *sequential testing, exponential distribution, confidence bounds and probabilities.*

---

1. Ce travail a été réalisé à la suite du contrat IXI-STNA/AED/01/P15.
2. Tél : 0561588222 ; Fax : 0561588237 ; E-mail : garel@len7.enseeiht.fr

1 Introduction

La notion de test séquentiel du rapport des probabilités a été introduite par Wald durant la seconde guerre mondiale. Mais son livre ne fut publié qu'en 1947 (cf [**?**]).

Contrairement aux tests classiques, le nombre d'observations nécessaires à un test séquentiel n'est pas fixé a priori. En revanche, les risques de première espèce et de seconde espèce sont, quant à eux, fixés.

La technique des tests séquentiels est peu enseignée dans le supérieur. Cependant, elle est très utilisée en fiabilité et plus généralement pour tout problème de certification, comme par exemple celle de médicaments nouveaux. En effet cette technique permet une économie de mesures et par là même de temps, de l'ordre de 50% en moyenne.

L'une des phases de la qualification est un test paramétrique entre deux hypothèses simples associées à deux valeurs possibles du paramètre. Une fois l'hypothèse de qualification acceptée, il est possible de calculer des limites de confiance inférieures et supérieures pour la vraie valeur inconnue du paramètre. Mais les industriels souhaitent en fait pouvoir répondre à la question suivante : avec quelle probabilité le paramètre inconnu dépasse-t-il une valeur déterminée ?

Nous commençons par rappeler brièvement comment se calcule une borne inférieure de confiance dans le cas général. Nous introduisons ensuite la notion de niveau de confiance. Puis nous nous plaçons plus précisément dans le cas où la loi de probabilité supposée des observations est exponentielle et développons la notion de niveau de confiance à l'acceptation lors d'un test séquentiel. Enfin, nous effectuons une étude sur données réelles.

2 Borne de confiance, niveau de confiance

La notion de borne de confiance est, en général, bien présentée dans les manuels et relève des techniques d'estimation.

On souhaite obtenir des précisions sur la valeur d'un paramètre réel θ inconnu. Lorsqu'il existe une fonction pivotale pour θ (cf [**?**, p.223]), le calcul d'une borne ou d'un intervalle de confiance s'effectue très facilement. Dans le cas général, on peut opérer de la façon suivante (cf [**?**]).

Soit Y une variable aléatoire réelle (V.A.R.) dont la loi de probabilité dépend d'un paramètre θ (on peut penser à un estimateur de θ). Notons $y \mapsto g(y, \theta)$ sa densité. Soit γ fixé $\in [0; 1]$, on peut trouver h tel que

$$\mathbb{P}[Y > h] = \int_h^{+\infty} g(y, \theta)\, dy = \gamma.$$

La valeur de h va dépendre évidemment de la valeur de θ. On suppose $\theta \mapsto h(\theta)$ strictement croissante. Notons y la valeur observée de Y.

graphe-h1-h2-eps-converted-to.pdf

Dans le plan $(0;\theta;Y)$, une ligne horizontale passant par le point de coordonnées $(0;y)$ coupe la courbe $h(\theta)$ en un point d'abscisse θ_L. Notons Θ_L la V.A.R. dont les réalisations sont θ_L. On a

$$[\Theta_L < \theta] \Longleftrightarrow [Y < h(\theta)] \ ,$$

d'où

$$\mathbb{P}[\Theta_L < \theta] = \mathbb{P}[Y < h(\theta)] = 1 - \gamma \ .$$

On appelle $]\Theta_L;+\infty[$ l'intervalle de probabilité $1-\gamma$ à droite pour θ et $]\theta_L;+\infty[$ l'intervalle de confiance à $100(1-\gamma)\,\%$ à droite pour θ. La valeur θ_L est alors appelée borne de confiance inférieure à $100(1-\gamma)\,\%$.

Il n'est pas forcément nécessaire de calculer explicitement la fonction h. En effet, θ_L est la valeur de θ telle que $h(\theta_L) = y$ et donc pour laquelle

$$\int_y^{+\infty} g(u,\theta)\,du = \gamma. \tag{1}$$

S'il est possible d'exprimer simplement $\int_y^{+\infty} g(u,\theta)\,du$ et de résoudre l'équation en θ alors la racine θ_L est la borne inférieure souhaitée.

Inversement, étant donnée y une observation de Y et θ_0 une valeur fixée pour θ, l'équation (**??**) peut être résolue en γ. C'est ce que nous proposons et donnons à cet effet la définition suivante.

Définition 1 Soit θ_0 une valeur fixée a priori et $\gamma(\theta_0)$ la solution de (**??**) en γ. On appelle niveau de confiance que θ soit supérieur à θ_0 après observation de y la valeur $1-\gamma(\theta_0)$ ainsi trouvée.

Essayons maintenant de donner une interprétation probabiliste à cette notion nouvelle. On sait que la notion d'intervalle de confiance peut s'interpréter de façon rigoureuse en adoptant un point de vue fréquentiste : si l'on répétait un grand nombre de fois l'expérience et si on notait à chaque fois l'intervalle ainsi trouvé, alors dans $100(1-\gamma)\,\%$ des cas en moyenne, la vraie valeur de θ se trouverait dans cet intervalle. Une autre interprétation est possible dans un contexte bayésien. Mais il faut alors disposer d'une probabilité a priori sur θ (cf [**?**]).

L'interprétation du niveau de confiance défini plus haut ne se fait qu'en revenant à la notion d'intervalle de confiance : si l'on avait cherché une borne inférieure de confiance à $100(1-\gamma_0)\,\%$ après observation de y, on aurait trouvé la valeur θ_0 dont on est parti pour trouver γ_0.

La valeur $1-\gamma_0$ représente donc la probabilité de recouvrement de $]\theta_0;+\infty[$, intervalle de confiance à droite pour θ.

La notion de niveau de confiance apparaît alors comme duale de celle de borne de confiance ou d'intervalle de confiance.

Ces calculs peuvent s'appliquer dans le cas où la loi de probabilité de Y est discrète. Mais dans ce cas, on ne trouvera pas forcément de valeur de θ qui réponde exactement à la question.

3 Test séquentiel tronqué

Nous allons nous placer maintenant dans le cadre des plans de tests séquentiels de la norme américaine (cf [**?**]) concernant le temps moyen de bon fonctionnement (Mean Time Between Failures, MTBF) d'équipements électroniques.

Pour le problème qui nous intéresse, ces équipements électroniques sont des Instrument Landing Systems qui, au sol, sont de deux sortes :

— le «localiser», situé en extrémité de la piste d'atterrissage d'un aéroport et qui sert à déterminer un plan vertical ;

— le «glidepath», situé sur le côté droit de la piste. Il sert à déterminer une surface courbe.

L'intersection du plan et de la surface courbe constitue le rail électronique le long duquel l'avion doit évoluer pour son atterrissage.

Ces équipements étant utilisés pour guider l'avion par des conditions de visibilité réduite (le pilote ne voyant pas la piste jusqu'à une distance pouvant être très

faible), la disponibilité du signal pendant la phase d'approche et d'atterrissage doit être de haut niveau. Les interruptions d'émission ne doivent pas dépasser une certaine probabilité d'émergence réglementaire. Ces éventuelles interruptions d'émission sont qualifiées d'outages et l'on parle de temps moyen entre deux outages (MTBO).

Pour la séquence des outages nous utilisons un modèle de processus de Poisson homogène. Si on note $X_1, \ldots, X_r$ la suite des temps de bon fonctionnement entre deux outages, les VAR X_i, $i = 1, \ldots, r$ sont alors considérées comme indépendantes et de même loi exponentielle de densité

$$x \longmapsto f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \tag{2}$$

Nous rappelons maintenant quelques éléments de la théorie de Wald. On désire tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$, avec $\theta_1 < \theta_0$. Dans le cadre séquentiel la taille de l'échantillon n'est plus fixée. On rajoute des données x_i une par une et on se demande à chaque fois si on peut accepter ou non H_0 ou si d'autres observations sont nécessaires.

L'équivalent séquentiel de la règle de décision de Neyman-Pearson est le théorème de Wald (cf [**?**] ou [**?**])qui nous indique de poursuivre la collecte de données tant que :

$$B < L_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} < A. \tag{3}$$

On stoppe la procédure en choisissant H_0 dès que $L_r \leqslant B$ ou H_1 dès que $A \leqslant L_r$. Cette règle de décision s'appelle le test séquentiel du rapport des probabilités (TSRP). Les constantes A et B sont déterminées à partir des risques α et β.

Le risque α représente la probabilité de refuser l'équipement alors qu'il est opérationnel. Le risque β représente la probabilité d'accepter l'équipement alors que celui-ci est défectueux. La valeur α est généralement qualifiée de risque du producteur alors que β représente le risque de l'acheteur.

Selon la théorie de Wald, les constantes A et B sont approchées respectivement par $\frac{1-\beta}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

A chaque étape m de la procédure du test séquentiel, on peut définir trois régions

— D_m^1 la région de rejet,
— D_m^0 la région d'acceptation,
— D_m la région de continuation.

On remarque que D_{m-1} est l'union disjointe de D_m, D_m^0, D_m^1. Soit θ fixé. Pour tout test séquentiel du rapport des probabilités et tout $m \geqslant 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\theta(\text{continuer la procédure à l'étape } m) \\ &\qquad + \quad \mathbb{P}_\theta(\text{décider } H_0 \text{ avant ou à l'étape } m) \\ &\qquad\qquad + \quad \mathbb{P}_\theta(\text{décider } H_1 \text{ avant ou à l'étape } m) = 1\ . \end{aligned}$$

Soit $(X_1, \ldots, X_m)$ une séquence d'observations. On note $C_m = \mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_m) \in D_m\right)$, $\mathbb{P}_m^0 = \mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_m) \in D_m^0\right)$ et $\mathbb{P}_m^1 = \mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_m) \in D_m^1\right)$.
A l'étape 1, on a $C_1 + \mathbb{P}_1^0 + \mathbb{P}_1^1 = 1$. A l'étape 2, on obtient $C_2 + \mathbb{P}_2^0 + \mathbb{P}_2^1 = C_1$, puis d'une façon générale

$$\mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_m) \in D_m\right) + \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_n) \in D_n^0\right) + \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}_\theta\left((X_1, \ldots, X_n) \in D_n^1\right) = 1.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on montre que le test s'arrête en un nombre fini d'étapes avec la probabilité 1. A la dernière étape, on obtient alors $\mathbb{P}_{m_0}^0 + \mathbb{P}_{m_0}^1 = C_{m_0-1}$.

Wald a introduit ensuite deux notions : la courbe d'efficacité, qui représente la probabilité d'accepter H_0 en fonction de θ, et le nombre moyen d'observations nécessaires pour terminer le test en fonction de θ (ou Average Sample Number, noté ASN). Wald a calculé diverses approximations de ces courbes.

Pour la densité exponentielle (**??**), les inégalités (**??**) s'écrivent

$$B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp\left\{-\sum_{i=1}^{r} x_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\right\} < A$$

où r est le nombre d'outages. A condition de poser $t = \sum_{i=1}^{r} x_i$ et $d = \frac{\theta_0}{\theta_1}$, cette double inégalité peut s'écrire

$$\frac{\ln B}{\ln d} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\ln d} t < r < \frac{\ln A}{\ln d} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\ln d} t.$$

Ces dernières inégalités correspondent exactement au test de Wald et supposent que la dernière observation soit allée jusqu'au temps exact où s'est produit l'outage. Or, si l'on écrit les inégalités en privilégiant le temps, on obtient

$$\frac{r \ln d - \ln A}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} < t < \frac{r \ln d - \ln B}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} .$$

Il est alors possible de prendre une décision dès que l'une des frontières est franchie et l'on obtient une version dite continue du TSRP. Lorsque ce test accepte H_0, il le fait en un temps inférieur à celui du TSRP de Wald. Mais il ne s'agit plus du test de Wald et certaines modifications sont nécessaires.

Les bornes A et B retenues sont alors (cf [**?**]) :

$$A = \frac{(1-\beta)(d+1)}{2\alpha d} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha} .$$

Bien que le test séquentiel s'arrête en un temps fini avec la probabilité 1, il peut aléatoirement nécessiter un nombre d'observations supérieur à celui d'un test classique. On se fixe alors un temps t_0 au delà duquel le test ne doit pas continuer, ainsi qu'un nombre r_0 d'outages qui ne doit pas être dépassé. En général, on se fixe r_0 comme étant la taille d'un test classique de niveau α et de puissance maximale $1-\beta$ pour tester H_0 contre H_1. D'après [**?**], cette valeur r_0 est le plus petit des entiers r tels que

$$\frac{\chi^2_{2r,\alpha}}{\chi^2_{2r,1-\beta}} \geqslant \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{1}{d}$$

où $\chi_{2r,\alpha}$ est la quantile d'ordre α d'un chi-deux à $2r$ degrés de liberté et le bon choix du temps de troncature est

$$t_0 = \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2r_0,\alpha} \ .$$

En général, il est plus commode de travailler en temps standardisé t' qui s'évalue en multiple de θ_1. Le temps $t' = \frac{t}{\theta_1}$ est alors le temps standardisé correspondant au temps réel t. Puis, en posant

$$h'_0 = -\frac{\ln B}{1-\frac{1}{d}},\ h'_1 = \frac{\ln A}{1-\frac{1}{d}},\ s' = \frac{\ln d}{1-\frac{1}{d}},$$

la règle en temps standardisé s'écrit

— si $t' \geqslant rs' + h'_0$, on accepte H_0,
— si $t' \leqslant rs' - h'_1$, on rejette H_0,
— si $rs' - h'_1 < t' < rs' + h'_0$, on continue d'observer l'équipement.

Afin de tenir compte de la troncature, cette règle est complétée par

— on accepte H_0 si le temps $t_0^{'}$ s'est écoulé sans atteindre r_0 outages,
— on accepte H_1 si r_0 outages se sont produits pendant une durée inférieure à $t_0^{'}$.

Dans le cas des tests tronqués, les approximations de la fonction d'efficacité et de la fonction ASN ne sont plus valables. Il est toutefois possible d'en calculer la valeur exacte à l'aide des probabilités $\mathbb{P}^0_m$, $\mathbb{P}^1_m$ et C_m, $m \geqslant 1$. Le calcul à chaque étape de ces probabilités en fonction de θ, s'appelle la méthode directe d'Aroian (cf [**?**]).

Ci-dessous sont représentées graphiquement dans le plan (t',r) les frontières du TSRP dans le cas ordinaire et dans le cas tronqué. La bande de continuation est plus étroite dans le cas tronqué et surtout se termine obligatoirement avant ou en (t'_0, r_0).

OutageTemps2-eps-converted-to.pdf

FIG. 2 – *Test séquentiel classique*

OutageTemps-eps-converted-to.pdf

FIG. 3 – *Test séquentiel tronqué*

4 Calcul d'un niveau de confiance après acceptation pour une loi exponentielle

Nous allons maintenant décrire les méthodes permettant d'obtenir les limites inférieures de confiance standardisées à $100\,(1-\gamma)\,\%$ et les niveaux de confiance lorsque l'hypothèse H_0 a été acceptée.

4.1 Probabilités de continuation

Nous construisons ici la V.A. qui va nous permettre d'exploiter les résultats du paragraphe **??**. Bien que cette construction soit relativement naturelle, elle s'avère essentielle pour une traduction rigoureuse de l'équation (**??**).

On note t'_{A_i} le temps standardisé d'acceptation après i outages et t'_{R_j} le temps standardisé de rejet après j outages. Ces temps sont en fait les abscisses des points d'intersection entre la frontière d'acceptation et la droite $r = i$ pour le premier et entre la frontière de rejet et la droite $r = j$ pour le second. Soient T_A la VA représentant le temps standardisé où le test conduit à accepter l'équipement et $N\,(T_A)$ le nombre d'outages survenus pendant le temps d'observation T_A. Ainsi T_A est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs t'_{A_i} pour i variant de 0 à $r_0 - 1$ lorsque le test se termine par une acceptation et nous lui affectons la valeur $+\infty$ lorsque le test se termine par un rejet.

La fonction $N(\cdot)$ représente la fonction de comptage du processus de Poisson homogène de la séquence des outages. Pour tout $t > 0$, $N(t)$ suit une loi de

Poisson de paramètre $\frac{t}{\theta}$. On estime alors $\theta' = \frac{\theta}{\theta_1}$ par la V.A.R.

$$Y = \frac{T_A}{N(T_A)} 1\!\!1_{[T_A < +\infty]}.$$

Ceci revient à estimer θ' par $\frac{t'_{A_i}}{i}$ quand le test se termine par une acceptation au temps t'_{A_i} après i outages et par 0 si le test se termine par un rejet. Notons $\theta'_{L,\gamma,i}$ la borne inférieure de confiance à $100(1-\gamma)\,\%$ de θ' lorsque le test s'est terminé par une acceptation avec i outages. La borne inférieure $\theta_{L,\gamma,i}$ de confiance à $100(1-\gamma)\,\%$ de θ est égale à $\theta_1 \theta'_{L,\gamma,i}$.

D'après l'équation (**??**), cette borne inférieure de confiance est solution de

$$\sum_{s/\frac{t'_{A_s}}{s} \geqslant \frac{t'_{A_i}}{i}} \mathbb{P}\left(Y = \frac{t'_{A_s}}{s}; \theta'_{L,\gamma,i}\right) + \mathbb{P}\left(Y = 0; \theta'_{L,\gamma,i}\right) 1\!\!1_{\left\{0 \geqslant \frac{t'_{A_i}}{i}\right\}} = \gamma, \tag{4}$$

où $\mathbb{P}(D; \theta')$ est la probabilité de l'événement D lorsque $\theta'\theta_1$ est la vraie valeur du paramètre. Il est facile de montrer que la séquence $\left(\frac{t'_{A_s}}{s}\right)_s$ est décroissante et que

$$\left\{Y = \frac{t'_{A_s}}{s}\right\} = \left\{[N(T_A) = s] \ \cap \ \left[T_A = t'_{A_s}\right]\right\} \ .$$

L'équation (**??**) s'écrit alors

$$\gamma = \sum_{s=0}^{i} \mathbb{P}\left((N(T_A), T_A) = \left(s, t'_{A_s}\right); \theta'_{L,\gamma,i}\right),$$

où $\mathbb{P}\left((N(T_A), T_A) = \left(s, t'_{A_s}\right); \theta'\right)$ désigne la probabilité que le test se termine par une acceptation au temps réel $t'_{A_s} \times \theta_1$ lorsque $\theta' \times \theta_1$ est la vraie valeur du paramètre. Afin de simplifier les notations, nous poserons pour la suite

$$\mathbb{P}\left((N(T_A), T_A) = \left(s, t'_{A_s}\right); \theta'_{L,\gamma,i}\right) = \mathbb{P}\left(\left(s, t'_{A_s}\right); \theta'_{L,\gamma,i}\right) \ .$$

Proposition 1 *Soit $\left(t'_{(k)}\right)_k$ une suite de temps de fin de test standardisés, distincts et rangés dans l'ordre croissant telle que $t'_{(0)} = 0$ et $t'_{(j)} = t'_0$. On a :*

$$\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(k)}\right); \theta'\right) = e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i c'\left(i, t'_{(k)}\right), \tag{5}$$

où les $c'\left(i, t'_{(k)}\right)$ sont des coefficients indépendants de θ'.

Preuve de la proposition 1

*Nous reprenons ici les notations de [**?**]. On pose pour $l = 1...j$*

$$\Delta_l = t'_{(l)} - t'_{(l-1)}.$$

On a alors

$$\left]0, t'_{(k)}\right] = \cup_{l=1}^{k} \left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right] \ \ et \ \sum_{l=1}^{k} \Delta_l = t'_{(k)}.$$

Soit $\left(t'_{(k)}, i\right)$, $k \leqslant j$, *un point de la région de continuation ou de la frontière d'acceptation. Pour une valeur* θ' *du paramètre standardisé, la probabilité que* δ_l *outages surviennent dans l'intervalle de temps* $\left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right]$ *est égale à*

$$\mathbb{P}\left(\delta_l \ outages \ dans \ \left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right]; \theta'\right) = \mathbb{P}\left(N\left(t'_{(l)}\theta_1\right) - N\left(t'_{(l-1)}\theta_1\right) = \delta_l; \theta'\right).$$

Or $N\left(t'_{(l)}\theta_1\right) - N\left(t'_{(l-1)}\theta_1\right)$ *suit une loi de Poisson de paramètre* $\frac{\Delta_l}{\theta'}$. *On obtient donc*

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\delta_l \ outages \ dans \ \left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right]; \theta'\right) = e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{\left(\frac{\Delta_l}{\theta'}\right)^{\delta_l}}{\delta_l!}.}$$

Si maintenant on considère un k-uplet $(\delta_1, ..., \delta_k)$ *d'entiers positifs tels que* $\sum_{l=1}^{k} \delta_l = i$ *et ne conduisant pas à une terminaison du test avant* $t'_{(k)}$ *alors la probabilité qu'il y ait i outages pendant le temps* $t'_{(k)}$ *avec pour chaque l,* δ_l *outages dans l'intervalle* $\left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right]$ *sans que le test ne se termine avant* $t'_{(k)}$ *est égale à*

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left((\delta_1, ..., \delta_k), \ pas \ de \ terminaison \ avant \ t'_{(k)}; \theta'\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\forall l = 1...k, \ \delta_l \ outages \ dans \ \left]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}\right]; \theta'\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\forall l = 1...k, \ N\left(t'_{(l)}\theta_1\right) - N\left(t'_{(l-1)}\theta_1\right) = \delta_l; \theta'\right).
\end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements de N, on obtient alors

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left((\delta_1, ..., \delta_k), \ pas \ de \ terminaison \ avant \ t'_{(k)}; \theta'\right) \\
= \ & \prod_{l=1}^{k} e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{\left(\frac{\Delta_l}{\theta'}\right)^{\delta_l}}{\delta_l!} \\
= \ & \left[\prod_{l=1}^{k} e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^{\delta_l}\right] \left[\prod_{l=1}^{k} \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}\right] \\
= \ & e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^{i} \prod_{l=1}^{k} \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité que i outages surviennent pendant un temps $t'_{(k)}$ pour une valeur θ' du paramètre standardisé est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(k)}\right); \theta'\right) &= \sum_S \mathbb{P}\left(\left(\delta_1, ..., \delta_k\right), \text{ pas de terminaison avant } t'_{(k)}; \theta'\right) \\ &= e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!},\end{aligned}$$

où S désigne l'ensemble des k-uplets tels que $\sum_{l=1}^k \delta_l = i$ et ne conduisant pas à une terminaison du test avant l'instant $t'_{(k)}$.
En posant,

$$c'\left(i, t'_{(k)}\right) = \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!},$$

on obtient la relation voulue.

■

L'équation (**??**) nous permet d'obtenir les coefficients $c'\left(i, t'_{(k)}\right)$ en fonction de $\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(k)}\right); \theta'\right)$ que l'on sait calculer lorsque θ' est fixé (cf section suivante). On est alors en mesure d'écrire l'équation (**??**) sous la forme suivante :

$$\boxed{\gamma = \sum_{s=0}^{i} c'\left(s, t'_{A_s}\right) e^{-\frac{t'_{A_s}}{\theta'_{L,\gamma,i}}} \left(\frac{1}{\theta'_{L,\gamma,i}}\right)^s .} \tag{6}$$

4.2 Calcul des coefficients $c'\left(i, t'_{(k)}\right)$

Nous calculons les probabilités $\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(k)}\right); \theta'\right)$ pour la valeur $\theta' = 1$. Nous en déduisons alors les coefficients $c'\left(i, t'_{(k)}\right)$ par l'équation

$$c'\left(i, t'_{(k)}\right) = e^{t'_{(k)}} \mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(k)}\right); 1\right) .$$

Les paramètres α, β et d ayant été fixés, il est possible de calculer les droites de confiance ainsi que r_0 et t'_0. Les temps standardisés correspondant aux intersections des lignes d'outages avec les frontières d'acceptation et de rejet sont ensuite calculés et rangés en ordre croissant $t'_{(1)} \leqslant t'_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant t'_0$. On complète alors le quadrillage par des verticales passant par ces points d'intersection. Apparaissent

alors dans la bande de continuation des points spécifiques de coordonnées $\left(t'_{(j)}, i\right)$, appelés points de continuation.

Le calcul des probabilités de continuation pour la valeur $\theta' = 1$ se fait à l'aide d'une procédure récursive.

La $j^{\text{ème}}$ étape de cette procédure consiste à calculer aux points d'abscisse $t'_{(j)}$ les probabilités en question. Pour cela, on énumère pour chacun de ces points les trajectoires qui y aboutissent (cf Fig.**??**), afin de calculer leurs probabilités. On part des points d'abscisses $t'_{(j-1)}$ pour lesquels on a fait le calcul des probabilités de continuation à l'étape $j-1$ et on calcule le nombre d'outages nécessaires pour parvenir en $\left(t'_{(j)}, i\right)$.

cprime-eps-converted-to.pdf

FIGURE 4 – Etude des trajectoires

Parmi les points de coordonnées $\left(t'_{(j-1)}, k\right)$, $k \leqslant i$, on sélectionne ceux qui appartiennent à la bande de continuation et on note $\mathcal{K}$ l'ensemble de ces points. La probabilité de continuation en $\left(t'_{(j)}, i\right)$ s'obtient alors par la formule :

$$\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(j)}\right); 1\right) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbb{P}\left(\left(k, t'_{(j-1)}\right); 1\right) e^{-\left(t'_{(j)} - t'_{(j-1)}\right)} \frac{\left(t'_{(j)} - t'_{(j-1)}\right)^{i-k}}{(i-k)!} \quad .$$

L'initialisation de cette procédure consiste à calculer les probabilités de continuation aux points de coordonnées $\left(t'_{(1)}, k\right)$. On peut voir que cela représente en fait la probabilité d'avoir k outages pendant un temps total $t'_{(1)}$.

On peut ensuite calculer les probabilités d'acceptation aux points de coordonnées $\left(t'_{A_i}, i\right)$ pour $i = 1, \ldots, r_0$. Pour chaque t'_{A_i}, il existe un l_i tel que $t'_{A_i} = t'_{(l_i)}$ et on a

$$\mathbb{P}\left(\left(i, t'_{A_i}\right); 1\right) = \mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(l_i)}\right); 1\right) = \mathbb{P}\left(\left(i, t'_{(l_i-1)}\right); 1\right) e^{-\left(t'_{(l_i)} - t'_{(l_i-1)}\right)} \quad .$$

4.3 Borne inférieure de confiance

Une fois l'équipement accepté, on cherche à savoir quelle est la borne inférieure de confiance à $100\,(1-\gamma)\,\%$ pour θ au sens de la section **??**. On est donc amené à résoudre l'équation (**??**) en θ où γ est fixé par l'utilisateur.

Plusieurs méthodes de résolution numérique sont disponibles (Point fixe, Newton, etc). Nous utilisons ici la méthode de bisection (cf [**?**]).

4.4 Niveau de confiance

Ce qui intéresse les ingénieurs, une fois l'équipement accepté, est de savoir quelle confiance ils peuvent avoir dans le fait que le temps moyen entre deux outages dépasse une valeur seuil qu'ils considèrent comme minimale pour la sécurité du fonctionnement des ILS. On retrouve donc la notion de niveau de confiance telle que nous l'avons introduite à la section **??**.

Ce problème est le problème dual du précédent. C'est la même équation (**??**) qui va servir, mais au lieu de la résoudre en θ' on va la résoudre en γ. On effectue donc la somme de i termes dépendant chacun des coefficients $c'\left(s, t'_{A_s}\right)$ dont le calcul est rappelé en **??**.

5 Etude de cas

Les 21 valeurs ci-dessous[3] représentent les temps observés de bon fonctionnement entre deux outages. Elles concernent un localiser expérimental.

Ces données peuvent surprendre par leur variabilité : on trouve un temps de bon fonctionnement de 3 heures faisant suite à un fonctionnement sans interruption de plus d'une année !

175	1505	4488	2382	16	1165	244
9240	3	6126	4708	3148	3447	5
3554	388	7578	5073	215	2622	2802

TABLE 1 – Temps réel, en heures, de bon fonctionnement entre deux outages

Nous savons que le localiser peut détecter des intrus (oiseaux, personnes, véhicules s'interposant entre l'appareil et l'avion) déclenchant alors une interruption de fonctionnement. Toutes les interruptions ne sont donc pas de même nature et ne nécessitent pas le réarmement de l'appareil. Dans le cas présent, nous ignorons la nature réelle des interruptions.

Trois tests séquentiels ont été effectués correspondant à trois types de localisers

— Localiser de catégorie III, MTBO souhaité > 4000 heures,
— Localiser de catégorie II, MTBO souhaité > 2000 heures,
— Localiser de catégorie I, MTBO souhaité > 1000 heures.

On constate que le problème initial concerne des hypothèses composites. Comme on le fait souvent, afin de conserver la simplicité de la procédure, la norme américaine (cf [**?**]) conseille de se ramener à des hypothèses simples. Il est alors d'usage de fixer θ_1 à la valeur minimale souhaitée pour le MTBO et θ_0 à 2 fois θ_1. Ceci évite de qualifier un appareil dont le MTBO serait trop proche de l'objectif minimal.

D'autre part, pour des raisons évidentes de sécurité, il est préférable d'observer les ILS pendant une durée minimale. Celle-ci est en général égale à un an car le fonctionnement des ILS est aussi lié aux conditions climatiques.

Dans tous les cas, nous avons pris $\alpha = \beta = 0,1$ et $d = 2$. Pour le dernier test (localiser de catégorie I), nous avons également envisagé le test avec un temps minimum d'observations de un an.

Les plans de test, les trajectoires correspondantes ainsi que les niveaux de confiance que θ' dépasse 1 pour chacune des acceptations sont fournis figures **??**, **??**, **??** et **??**.

3. These data have been provided by LVNL -Air Traffic Control the Netherlands- and used with their kind permission.

Ces données ont été fournies par LVNL -Air Traffic Control the Netherlands- et sont utilisées avec leur aimable autorisation.

La figure **??** correspond au test de $\theta_0 = 8000$ contre $\theta_1 = 4000$. La qualification est refusée. La figure **??** correspond au test de $\theta_0 = 4000$ contre $\theta_1 = 2000$. Le test se termine par un refus au bout de 9975 heures et 7 outages. La trajectoire complète du processus a cependant été tracée. Les figures **??** et **??** concernent le test de $\theta_0 = 2000$ contre $\theta_1 = 1000$, avec un temps minimum d'observation de un an dans le dernier cas.

Dans ces deux derniers cas, la qualification est obtenue après sept outages. Le niveau de confiance que θ soit supérieur à 1000 est de $92,48\%$ dans le premier cas et de $94,21\%$ dans le second. Notons que pour tous ces plans, les valeurs de α, β et d sont les mêmes. Il est donc normal que les valeurs de troncatures en multiples de θ_1 soient les mêmes et que les niveaux de confiance que θ dépasse θ_1 (ou que θ' dépasse 1) soient identiques pour les trois premiers plans.

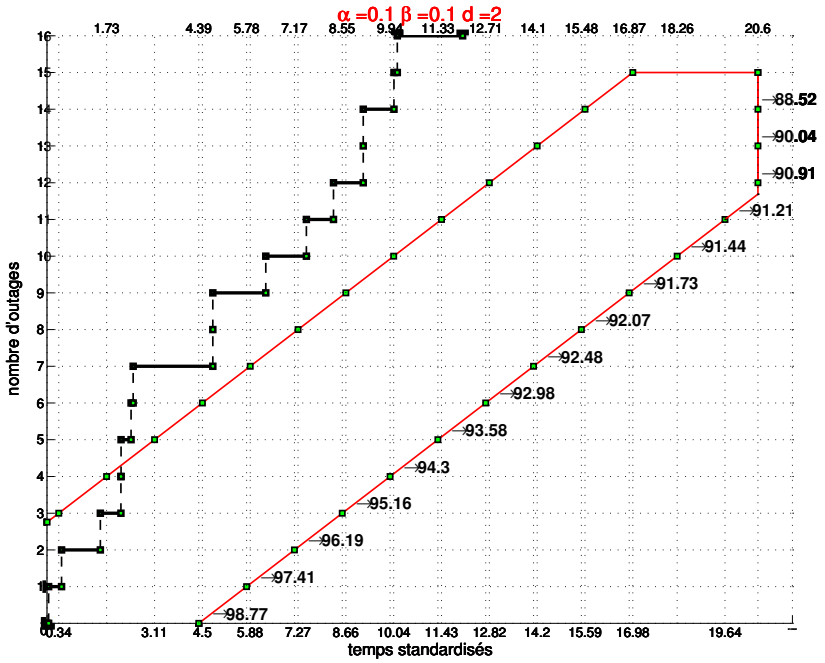

FIGURE 5 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie III avec $\theta_1 = 4000$ heures.

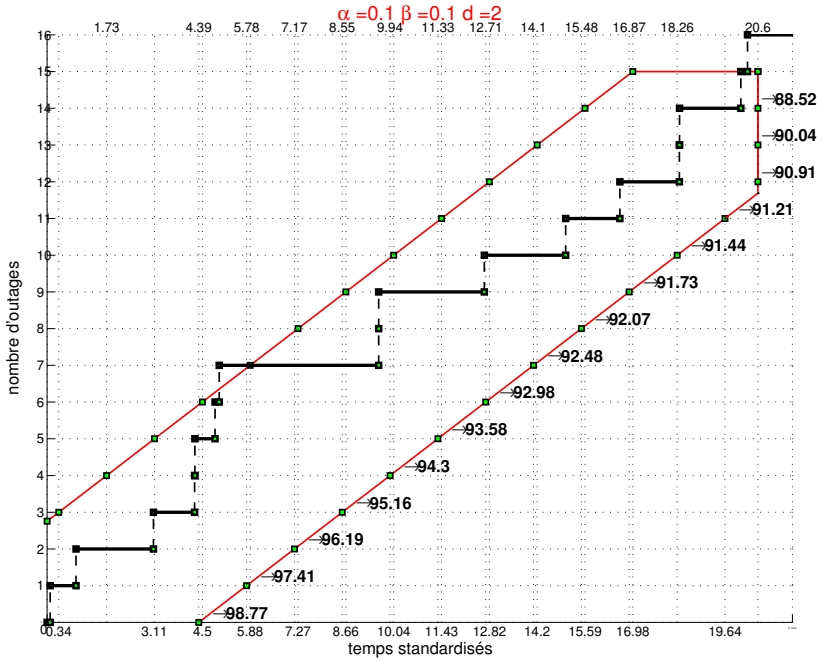

FIGURE 6 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie II avec $\theta_1 = 2000$ heures.

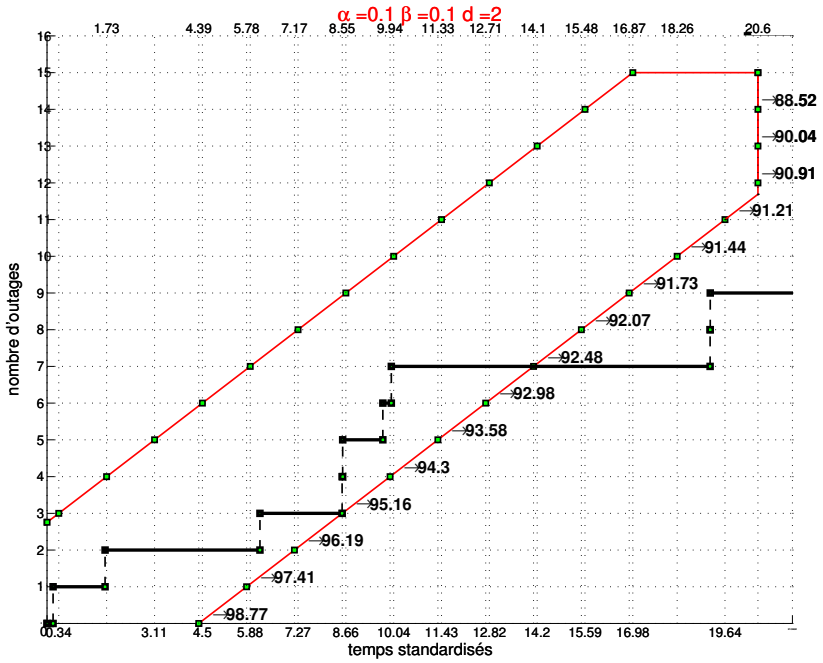

FIGURE 7 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures.

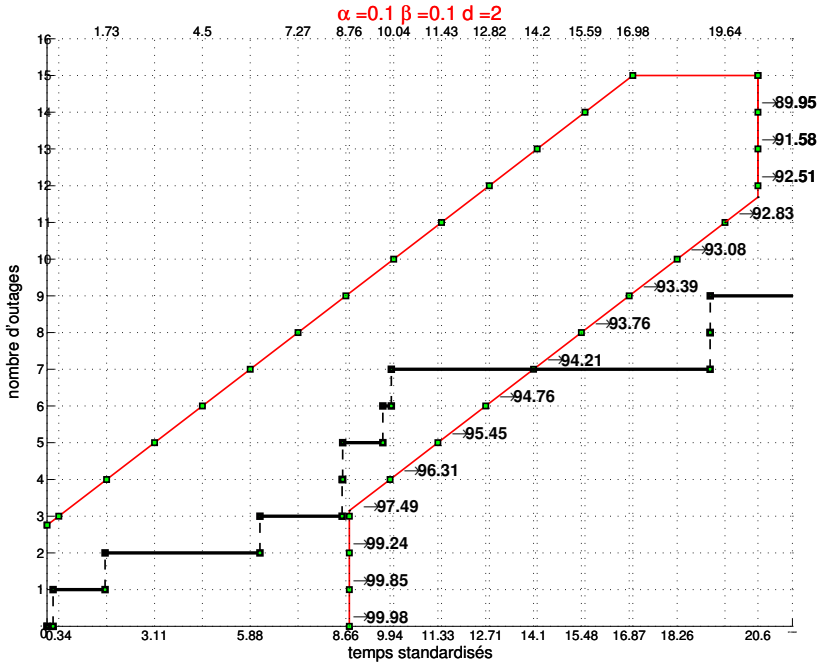

FIGURE 8 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures et un minimum de un an d'observation.

Pour valider les calculs ci-dessus, il faut s'assurer de l'hypothèse de loi exponentielle. Dans le cas présent, la valeur obtenue lors du test du χ^2 conduit à une probabilité excédentaire autour de 8%. L'hypothèse de loi exponentielle est donc acceptée avec des réserves. Notons que lorsque les valeurs 3, 5 et 16 sont écartées, l'ajustement est quasi-parfait. Il est possible que ces données correspondent à la détection d'un intrus. Les temps correspondants pourraient donc être ajoutés aux temps suivants. En l'absence d'information à ce sujet, nous nous sommes refusés à le faire, ce qui aurait changé les réponses aux différents tests.

Notons que l'intervalle de confiance symétrique à 90% sur θ donne $[2034; 4232]$. La borne supérieure est trop peu élevée pour permettre l'acceptation d'un localiser de catégorie II.

Une question se pose alors avec insistance : comment peut-on prendre des décisions aussi importantes avec si peu d'observations ? Dans le cas présent, ceci représente en temps de test une durée minimale de un an et maximale de plusieurs années. Notons que paradoxalement, un appareil parfait ne fournirait aucune observation puisqu'il n'y aurait pas d'interruptions. Sous réserve que les observations suivent bien une loi exponentielle (hypothèse qu'il faut vérifier, avec peut-être des observations en plus grand nombre !), les résultats obtenus sont rigoureux. Il faut toutefois garder à l'esprit la façon dont s'envisage un intervalle de confiance et donc un niveau de confiance.

Pour conclure, précisons qu'il est possible de calculer, de façon analogue, des bornes supérieures après acceptation (cf [**?**]) ou après rejet, et donc des intervalles de confiance ainsi que des niveaux de confiance au sens de la section **??**. Une fois le test effectué, le problème qui se pose quelle que soit la réponse est de savoir que faire du localiser. Nous pensons que ces niveaux de confiance peuvent aider à prendre les décisions.

Les travaux ci-dessus ont été réalisés à l'aide de programmes en Matlab qui seront disponibles sur le web à l'adresse www.enseeiht.fr/len7/index.html.

Remerciements : les auteurs remercient Pierre Cazes et le comité de rédaction pour leur lecture attentive et leurs nombreuses suggestions qui ont permis la rédaction actuelle de ce travail. Ils remercient également Véronique Font membre de la société IXI et Philippe Crébassa pour son accueil au STNA.

Références

[1] Aroian, L.(1968), *Sequential Analysis, Direct Method.* Technometrics, Volume 10, pp 125-132.

[2] Bryant, C. and Schmee, J.(1979). *Confidence Limits on MTBF for Sequential Test Plans of MIL-STD 781.* Technometrics, Volume 21, pp 33-42.

[3] Dvoretsky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J.(1963). *Sequential decision problem for processus with continuous time parameter. Testing hypothesis,* Ann. Math. Stat., Vol 24, pp 254–264.

[4] Epstein, B. and Sobel, M.(1955). *Sequential Life Tests in Exponential Case.* Ann. Math. Stat., Vol 26, pp 82–93.

[5] Ghosh, B.K.(1970). *Sequential Tests of Statistical Hypotheses.* Addison-Wesley publishing company.

[6] Illig, A.(2001). *Probabilités de confiance après décision lors d'un test séquentiel avec un temps de bon fonctionnement de loi exponentielle.* Mémoire de DEA sous la direction de B.Garel.

[7] Lecoutre, B.(1997). *C'est bon à savoir ! Et si vous êtiez un bayésien qui s'ignore.* Modulab, N°18, INRIA (8), pp 81–87.

[8] MIL-HDBK-781A.(04/1998). *Handbook for reliability test methods, plans, and environments for engineering, development, qualification, and production.* Department of Defense (USA).

[9] Mood, A. and Graybill, F.(1963). *Introduction to the theory of Statistics (2nd ed.).* Mc Graw-Hill.

[10] Nougier(1983). *Méthodes de calcul numérique.* Masson.

[11] Siegmund, D.(1985). *Sequential Analysis : tests and confidence intervals.* Springer-Verlag.

[12] Tassi, P.(1985). *Méthodes Statistiques.* Economica.

[13] Wald, A.(1947). *Sequential Analysis.* John Wiley & Sons, New York.