



**HAL**  
open science

# Sur la variation quadratique totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs

Michel Balazard

► **To cite this version:**

Michel Balazard. Sur la variation quadratique totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs. 2016. hal-01329292

**HAL Id: hal-01329292**

**<https://hal.science/hal-01329292>**

Preprint submitted on 8 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la variation quadratique totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs

Michel Balazard

## ABSTRACT

We give an asymptotic formula for the quadratic total variation of the sequence of fractional parts of the quotients of a positive real number by the consecutive natural numbers :

$$\sum_{n \geq 1} (\{x/(n+1)\} - \{x/n\})^2 = \frac{\zeta(3/2)}{\pi} x^{1/2} + O(x^{3/7}).$$

## KEYWORDS

Fractional part, quadratic total variation

MSC classification : 11N37

## 1 Énoncé du résultat

Posons

$$Q(x) = \sum_{n \geq 1} (\{x/(n+1)\} - \{x/n\})^2 \quad (x > 0),$$

où  $\{t\} = t - [t]$  désigne la partie fractionnaire du nombre réel  $t$ , et  $[t]$  sa partie entière. Le présent document est annexe à l'article [1] et a pour objet la démonstration du résultat suivant, mentionné dans [1].

**Théorème** *On a*

$$Q(x) = \frac{\zeta(3/2)}{\pi} x^{1/2} + O(x^{3/7}) \quad (x > 0).$$

La démonstration est similaire à celle du théorème de [1]. Nous reprenons l'ensemble des notations de cet article.

## 2 Démonstration du théorème

Posons donc, pour  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$Q_d(x) = \sum_{n \geq 1} [\lfloor x/n \rfloor - \lfloor x/(n+1) \rfloor = d] \cdot (\{x/n\} - \{x/(n+1)\})^2,$$

où nous avons utilisé la notation d'Iverson :  $[P] = 1$  si la proposition  $P$  est vraie, 0 sinon.

Nous allons évaluer la quantité  $Q_d(x)$  pour tout  $d$ .

### 2.1 Contribution des grandes valeurs de $d$

On a d'abord, comme dans le cas de la fonction  $W$  de [1] :

$$\sum_{d > D} Q_d(x) < \sqrt{x/(D-1)} \quad (1)$$

pour  $D > 1$  et  $x > 0$ .

### 2.2 Estimation de $Q_0(x)$

On a

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \sum_{0 \leq k \leq x} \sum_{x/(k+1) < n \leq x/k-1} x^2/n^2(n+1)^2 \\ &= \Delta_1(x) - \Delta_2(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= x^2 \sum_{0 \leq k \leq K} \sum_{x/(k+1) < n \leq x/k} 1/n^2(n+1)^2 \\ \Delta_2(x) &= x^2 \sum_{0 \leq k \leq K} 1/\lfloor x/k \rfloor^2 (\lfloor x/k \rfloor + 1)^2, \end{aligned}$$

et

$$K = K(x) = \lfloor \sqrt{x + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Si  $x \geq 2$ , on a  $K \geq 1$  et

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= x^2 \sum_{n > x/(K+1)} (n^{-4} + O(n^{-5})) \\ &= x^2 \left( \frac{K^3 + O(K^2)}{3x^3} + O(K^4/x^4) \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{3} + O(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_2(x) &= x^2 \sum_{0 \leq k \leq K} (k^4/x^4 + O(k^5/x^5)) \\
&= \frac{K^5 + O(K^4)}{5x^2} + O(K^6/x^3) \\
&= \frac{\sqrt{x}}{5} + O(1).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Q_0(x) = \frac{2\sqrt{x}}{15} + O(1) \quad (2)$$

### 2.3 Calcul de $Q_d(x)$ pour $d$ positif

Avec des notations correspondant à celles de [1], nous évaluons maintenant

$$\begin{aligned}
Q_{d,1}(x) &= \sum_{K_{d-1} < k \leq K_{d-1}} \sum_{x/(k-d+1)-1 < n \leq x/k} \left( d - \frac{x}{n(n+1)} \right)^2 \\
&= \sum_{K_{d-1} < k \leq K_{d-1}} \left( d^2 (\lfloor x/k \rfloor - \lfloor x/(k-d+1) \rfloor + 1) - 2dx \left( \frac{1}{\lfloor x/(k-d+1) \rfloor} - \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor + 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + x^2 (F(x/(k-d+1)) - F(x/k+1)) \right),
\end{aligned}$$

où

$$F(t) = \sum_{n > t-1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

On se ramène ensuite à des sommes  $(d-1)$ -télescopiques en utilisant la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{\lfloor t \rfloor + 1},$$

et en notant que

$$F(t+1) = F(t) - \varphi(t)^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
Q_{d,1}(x) &= d^2 \sum_{K_{d-d} < k \leq K_{d-1}} \lfloor x/k \rfloor - d^2 \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} \lfloor x/k \rfloor + d^2(K_d - K_{d-1} - 1) \\
&\quad + 2dx \sum_{K_{d-d} < k \leq K_{d-1}} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} - 2dx \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} - 2dx \sum_{K_{d-1} < k \leq K_{d-1}} \varphi(x/k) \\
&\quad - x^2 \sum_{K_{d-d} < k \leq K_{d-1}} F(x/k) + x^2 \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} F(x/k) + x^2 \sum_{K_{d-1} < k \leq K_{d-1}} \varphi(x/k)^2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
Q_{d,2}(x) &= -d^2 \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} \lfloor x/k \rfloor + d^2 \sum_{K_d-d < k \leq K_{d+1}} \lfloor x/k \rfloor - d^2(K_{d+1} - K_d - 1) \\
&\quad - 2dx \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} + 2dx \sum_{K_d-d < k \leq K_{d+1}} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} + 2dx \sum_{K_{d+1} < k \leq K_{d+1}} \varphi(x/k) \\
&\quad + x^2 \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} F(x/k) - x^2 \sum_{K_d-d < k \leq K_{d+1}} F(x/k) - x^2 \sum_{K_{d+1} < k \leq K_{d+1}} \varphi(x/k)^2.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
Q_{d,3}(x) &= \sum_{\frac{x}{K_{d+1}} < k \leq \frac{x}{K_d}} \left( d - \frac{x}{n(n+1)} \right)^2 \\
&= d^2 (\lfloor x/K_d \rfloor - \lfloor x/(K_d+1) \rfloor) - 2dx \left( \frac{1}{\lfloor x/(K_d+1) \rfloor + 1} - \frac{1}{\lfloor x/K_d \rfloor + 1} \right) \\
&\quad + x^2 \left( F(x/(K_d+1) + 1) - F(x/K_d + 1) \right).
\end{aligned}$$

L'addition des formules obtenues pour  $Q_{d,1}$ ,  $Q_{d,2}$  et  $Q_{d,3}$  donne

$$\begin{aligned}
Q_d(x) &= \\
&\left( 2 \sum_{K_d-d < k \leq K_d} - \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} - \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} \right) (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx \lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) \\
&\quad - \left( \sum_{K_d < k \leq K_{d+1}} - \sum_{K_{d-1} < k \leq K_d} \right) (d - x\varphi(x/k))^2. \quad (3)
\end{aligned}$$

## 2.4 Estimation de $Q_d(x)$ pour $d$ positif

### 2.4.1 Estimations complémentaires concernant $K_d$

Les propositions suivantes n'étaient pas utiles pour démontrer le résultat de [1], mais nous en aurons l'usage pour l'estimation de  $Q_d(x)$ .

**Proposition 1** *Pour  $0 \leq d \leq x$ , on a*

$$K_d(x) = \sqrt{dx} + \frac{d}{2} + O(d^{3/2}x^{-1/2}) + O(1).$$

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned}
K_d(x) &= \lfloor (d + \sqrt{d^2 + 4dx})/2 \rfloor \\
&= \sqrt{dx} (1 + d/4x)^{1/2} + d/2 + O(1) \\
&= \sqrt{dx} + \frac{d}{2} + O(d^{3/2}x^{-1/2}) + O(1).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2** Pour  $0 \leq d \leq x$ , on a

$$\sum_{K_d-d < k \leq K_d} k = d\sqrt{dx} + O(d^{5/2}x^{-1/2}) + O(d).$$

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{K_d-d < k \leq K_d} k &= \frac{1}{2}(K_d^2 + K_d - (K_d - d)^2 - K_d + d) \\
&= dK_d - \frac{d^2}{2} + \frac{d}{2} \\
&= d\sqrt{dx} + O(d^{5/2}x^{-1/2}) + O(d),
\end{aligned}$$

d'après la proposition 1.

□

**Proposition 3** Pour  $0 \leq d \leq x$ , on a

$$\sum_{K_d-d < k \leq K_d} k^3 = x(d^2\sqrt{dx} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2)).$$

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{K_d-d < k \leq K_d} k^3 &= \frac{1}{4}(K_d^4 - (K_d - d)^4) + \frac{1}{2}(K_d^3 - (K_d - d)^3) + \frac{1}{4}(K_d^2 - (K_d - d)^2) \\
&= dK_d^3 - \frac{3}{2}d(d-1)K_d^2 + O(d^3K_d) \quad (\text{puisque } d \leq K_d) \\
&= d(d^{3/2}x^{3/2} + \frac{3}{2}d^2x + O(d^{5/2}x^{1/2}) + O(dx)) - \frac{3}{2}d(d-1)(dx + O(d^{3/2}x^{1/2})) + O(d^{7/2}x^{1/2}) \\
&\quad (\text{d'après la proposition 1}) \\
&= x(d^2\sqrt{dx} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2)).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 4** Pour  $0 \leq d \leq x$ , on a

$$\sum_{K_d < k \leq K_{d+1}} k^4 = \frac{(d+1)^2 \sqrt{d+1} - d^2 \sqrt{d}}{5} x^{5/2} + O((d+1)^2 x^2).$$

**Démonstration**

Soit  $P$  le polynôme tel que

$$\sum_{k \leq K} k^4 = P(K) \quad (K \in \mathbb{N}).$$

Le terme de plus haut degré de  $P(K)$  est  $K^5/5$ . Par conséquent, si  $d$  est fixé, on a

$$\sum_{K_d < k \leq K_{d+1}} k^4 \sim \frac{(d+1)^2 \sqrt{d+1} - d^2 \sqrt{d}}{5} x^{5/2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Maintenant, soit

$$Q(X, Y) = \frac{P(X) - P(Y)}{X - Y}.$$

Cette fraction rationnelle est en fait un polynôme de degré 4. Notons  $Q_4(X, Y)$  sa partie homogène de degré 4, et  $R = Q - Q_4$ , de sorte que  $R$  est de degré 3.

La contribution de chaque monôme de  $Q_4$  à la quantité  $Q_4(K_{d+1}, K_d)$  est de la forme  $c(d)x^2 + O((d+1)^{5/2}x^{3/2})$  où la fonction  $c(d)$  dépend du monôme considéré, mais est toujours  $O((d+1)^2)$ . D'autre part,  $R(K_{d+1}, K_d) = O((d+1)^{3/2}x^{3/2})$ . On en déduit que

$$P(K_{d+1}) - P(K_d) = (K_{d+1} - K_d)(C(d)x^2 + O((d+1)^{5/2}x^{3/2})),$$

où  $C(d)$  est la somme des  $c(d)$ . En particulier,  $C(d) = O((d+1)^2)$ . En utilisant maintenant la proposition 2 de [1], on obtient

$$P(K_{d+1}) - P(K_d) = C_1(d)x^{5/2} + O((d+1)^2x^2),$$

pour une certaine constante  $C_1(d)$ , qui vaut nécessairement

$$\frac{(d+1)^2 \sqrt{d+1} - d^2 \sqrt{d}}{5}. \quad \square$$

**2.4.2 Estimation de la fonction  $F$**

Nous utiliserons l'estimation suivante.

**Proposition 5** Pour  $t \geq 1$  on a

$$F(t) = \frac{1}{3\lfloor t \rfloor^3} + O(1/t^5).$$

**Démonstration**

On a l'identité

$$\frac{3}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3(n+1)^3},$$

donc

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n>t-1} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n>t-1} \left( \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) + \sum_{n>t-1} O(n^{-6}) \\ &= \frac{1}{3\lfloor t \rfloor^3} + O(1/t^5). \end{aligned} \quad \square$$

### 2.4.3 Estimation préliminaire concernant les sommants de (3)

La quantité

$$d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)$$

apparaît dans (3). Nous en donnons maintenant une estimation.

**Proposition 6** Pour  $0 < d \leq x/2$ , on a

$$d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k) = 2d\sqrt{dx} + kd - \frac{k^3}{3x} + O(d^{5/2}x^{-1/2}) \quad (K_d - d < k \leq K_d).$$

**Démonstration**

Supposons donc  $0 < d \leq x/2$  et  $K_d - d < k \leq K_d$ . On a d'abord, d'après la proposition 5,

$$x^2 F(x/k) = x^2/3\lfloor x/k \rfloor^3 + O(k^5/x^3),$$

et le terme d'erreur est bien  $O(d^{5/2}x^{-1/2})$  puisque  $k \leq K_d \ll \sqrt{dx}$ .

Ensuite, la proposition 4 de [1] nous donne

$$d^2 \lfloor x/k \rfloor + dx/\lfloor x/k \rfloor = 2d\sqrt{dx} + O(d^{5/2}x^{-1/2}).$$

On a donc

$$d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k) = 2d\sqrt{dx} + dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2/3\lfloor x/k \rfloor^3 + O(d^{5/2}x^{-1/2}).$$



Maintenant

$$\begin{aligned}
dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2/3\lfloor x/k \rfloor^3 &= \frac{dx}{x/k - \{x/k\}} - \frac{x^2}{3(x/k - \{x/k\})^3} \\
&= kd(1 + k\{x/k\}/x + O(k^2/x^2)) - \frac{k^3}{3x}(1 + 3k\{x/k\}/x + O(k^2/x^2)) \\
&= kd - \frac{k^3}{3x} - (k^4/x^2 - k^2d/x)\{x/k\} + O(d^{5/2}x^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
k^4/x^2 - k^2d/x &= k^2(k + \sqrt{dx})(k - \sqrt{dx})/x^2 \\
&\ll d^{5/2}x^{-1/2}
\end{aligned}$$

puisque  $k - \sqrt{dx} \ll d$  (cf. [1], (17)). □

#### 2.4.4 Estimation des trois premières sommes de (3)

**Proposition 7** *Pour  $0 < d \leq x/2$ , on a*

$$\sum_{K_d-d < k \leq K_d} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = \frac{8}{3}d^2\sqrt{dx} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2). \quad (4)$$

#### Démonstration

La proposition 6 nous donne :

$$\sum_{K_d-d < k \leq K_d} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = 2d^2\sqrt{dx} + \sum_{K_d-d < k \leq K_d} (kd - k^3/3x) + O(d^{7/2}x^{-1/2})$$

La proposition découle de cette expression et des propositions 2 et 3. □

**Proposition 8** *Pour  $0 < d+1 \leq x/2$ , on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = \\
\frac{8d^2 + 4d - 1}{3} \sqrt{(d+1)x} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2). \quad (5)
\end{aligned}$$

#### Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = \\ \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} ((d+1)^2 \lfloor x/k \rfloor + 2(d+1)x/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) - \\ \sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} ((2d+1) \lfloor x/k \rfloor + 2x/\lfloor x/k \rfloor). \end{aligned} \quad (6)$$

La première somme du second membre de (6) vaut

$$\frac{8}{3}(d+1)^2 \sqrt{(d+1)x} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2)$$

d'après la proposition 7.

En utilisant l'estimation

$$\frac{x}{k} = \sqrt{x/(d+1)} + O(1) \quad (K_{d+1} - d - 1 < k \leq K_{d+1}),$$

on voit que la seconde somme du second membre de (6) vaut

$$\sum_{K_{d+1}-d-1 < k \leq K_{d+1}} ((2d+1) \lfloor x/k \rfloor + 2x/\lfloor x/k \rfloor) = (4d+3) \sqrt{(d+1)x} + O(d^2).$$

La proposition s'en déduit. □

**Proposition 9** *Pour  $0 \leq d-1 \leq x/2$ , on a*

$$\sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = \frac{8d^2 - 4d - 1}{3} \sqrt{(d-1)x} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2). \quad (7)$$

**Démonstration**

Si  $d = 1$  le résultat est trivial. Si  $d > 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} (d^2 \lfloor x/k \rfloor + 2dx/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) = \\ \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} ((d-1)^2 \lfloor x/k \rfloor + 2(d-1)x/\lfloor x/k \rfloor - x^2 F(x/k)) \\ + \sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} ((2d-1) \lfloor x/k \rfloor + 2x/\lfloor x/k \rfloor). \end{aligned} \quad (8)$$

La première somme du second membre de (8) vaut

$$\frac{8}{3}(d-1)^2\sqrt{(d-1)x} + O(d^{7/2}x^{-1/2}) + O(d^2)$$

d'après la proposition 7.

En utilisant l'estimation

$$\frac{x}{k} = \sqrt{x/(d-1)} + O(1) \quad (K_{d-1} - d + 1 < k \leq K_{d-1}),$$

on voit que la seconde somme du second membre de (8) vaut

$$\sum_{K_{d-1}-d+1 < k \leq K_{d-1}} ((2d-1)\lfloor x/k \rfloor + 2x/\lfloor x/k \rfloor) = (4d-3)\sqrt{(d-1)x} + O(d^2).$$

La proposition s'en déduit. □

#### 2.4.5 Estimation des deux dernières sommes de (3)

En utilisant la proposition 2 de [1], on obtient

$$-d^2(K_{d+1} - 2K_d + K_{d-1}) = -d^2(\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1} - 2\sqrt{d})\sqrt{x} + O(d^2) \quad (9)$$

En utilisant la relation asymptotique

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2} + O(1/t^3) \quad (t \geq 1)$$

et la proposition 3 de [1], on obtient

$$2dx \left( \sum_{K_d < k \leq K_{d+1}} - \sum_{K_{d-1} < k \leq K_d} \right) \varphi(x/k) = \frac{2d}{3}((d+1)\sqrt{d+1} + (d-1)\sqrt{d-1} - 2d\sqrt{d})\sqrt{x} + O(d^2). \quad (10)$$

Enfin, en utilisant la relation asymptotique

$$\varphi(t)^2 = \frac{1}{t^4} + O(1/t^5) \quad (t \geq 1)$$

et la proposition 4, on obtient

$$-x^2 \left( \sum_{K_d < k \leq K_{d+1}} - \sum_{K_{d-1} < k \leq K_d} \right) \varphi(x/k)^2 = -\frac{1}{5}((d+1)^2\sqrt{d+1} + (d-1)^2\sqrt{d-1} - 2d^2\sqrt{d})\sqrt{x} + O(d^2). \quad (11)$$

### 2.4.6 Estimation de $Q_d(x)$

En insérant (4), (5), (7), (9), (10) et (11) dans (3), on obtient la proposition suivante.

**Proposition 10** *Pour  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , on a*

$$Q_d(x) = \vartheta(d)\sqrt{x} + O(d^2).$$

où

$$\vartheta(d) = \frac{32d^2}{5}\sqrt{d} - \frac{48d^2 + 16d - 2}{15}\sqrt{d+1} - \frac{48d^2 - 16d - 2}{15}\sqrt{d-1}.$$

#### Démonstration

Il s'agit de voir que l'on peut omettre le terme d'erreur  $O(d^{7/2}x^{-1/2})$  et la contrainte  $d+1 \leq x/2$ .

Si  $d \leq x^{1/3}$ , ce terme d'erreur est absorbé par le  $O(d^2)$ . D'autre part, en utilisant l'approximation

$$\sqrt{d \pm 1} = \sqrt{d}(1 \pm 1/2d - 1/8d^2 \pm 1/16d^3 + O(d^{-4})),$$

on voit que  $\vartheta(d) = O(d^{-3/2})$ . La majoration uniforme  $Q_d(x) \ll \sqrt{x/d}$  montre alors que

$$Q_d(x) - \vartheta(d)\sqrt{x} \ll d \quad (d > x^{1/3}),$$

ce qui permet encore d'omettre le terme d'erreur  $O(d^{7/2}x^{-1/2})$ . Enfin, l'énoncé de la proposition est trivial si  $d > x/2 - 1$ .  $\square$

## 2.5 Sommation de la série des $\vartheta(d)$

Puisque  $\vartheta(d) = O(d^{-3/2})$ , la série  $\sum_{d \geq 1} \vartheta(d)$  converge; nous allons calculer sa somme.

En écrivant

$$\begin{aligned} \vartheta(d) &= \frac{16}{5}(d^{5/2} - (d+1)^{5/2}) - \frac{16}{5}((d-1)^{5/2} - d^{5/2}) \\ &\quad + \frac{16}{3}((d+1)^{3/2} - (d-1)^{3/2}) - 2(d+1)^{1/2} - 2(d-1)^{1/2}. \end{aligned}$$

et en supposant  $D$  entier positif, on obtient comme dans [1], §2.5,

$$\sum_{d \leq D} \vartheta(d) = -\frac{2}{15} - \frac{16}{5}((D+1)^{5/2} - D^{5/2}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{16}{3}((D+1)^{3/2} + D^{3/2}) - 2((D+1)^{1/2} - D^{1/2}) - 4 \sum_{d=1}^D \sqrt{d} \\ &= -\frac{2}{15} + \frac{\zeta(3/2)}{\pi} + O(D^{-1/2}). \end{aligned} \tag{13}$$

## 2.6 Conclusion

Pour  $x > 0$  et  $D \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q_0(x) + \sum_{1 \leq d \leq D} Q_d(x) + \sum_{d > D} Q_d(x) \\ &= \frac{2}{15} \sqrt{x} + O(1) + \sum_{1 \leq d \leq D} (\vartheta(d) \sqrt{x} + O(d^2)) + O(\sqrt{x/D}) \quad (\text{d'après (2), la proposition 10, et (1)}) \\ &= \left( \frac{2}{15} + \sum_{d=1}^{\infty} \vartheta(d) \right) \sqrt{x} + O(D^3) + O(\sqrt{x/D}) \quad (\text{car } \vartheta(d) = O(d^{-3/2})) \\ &= \frac{\zeta(3/2)}{\pi} \sqrt{x} + O(x^{3/7}), \end{aligned}$$

d'après (13), et en choisissant  $D = x^{1/7}$ .

## Références

- [1] M. BALAZARD – « Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs », à paraître au *Mosc. J. Comb. Number Theory*.

BALAZARD, Michel  
Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373  
13453, Marseille  
FRANCE  
Adresse électronique : [balazard@math.cnrs.fr](mailto:balazard@math.cnrs.fr)