Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs

Michel Balazard

Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs

Michel Balazard

Abstract

We give an asymptotic formula for the total variation of the sequence of fractional parts of the quotients of a positive real number by the consecutive natural numbers :

$$\sum_{n\geqslant 1}|\{x/(n+1)\}-\{x/n\}| = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)x^{1/2}+O(x^{2/5}).$$

Keywords

Arithmetic functions, fractional part, total variation

MSC classification : 11N37

1 Introduction

La quantité décrite par le titre de cet article est

$$W(x)=\sum_{n\geqslant 1}|\{x/(n+1)\}-\{x/n\}| \quad (x>0),$$

où $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t, et $\lfloor t\rfloor$ sa partie entière. La lettre W est choisie en référence au mathématicien Aurel Wintner (1903-1958). Dans un article de 1946, *Square root estimates of arithmetical sum functions* (cf. [5]), il considéra la fonction $W(x)$ dans le contexte suivant.

Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelles ou complexes dont la fonction sommatoire

$$F(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n) \quad (x>0) \tag{1}$$

est bornée. En particulier, la série

$$C=\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{F(k)}{k(k+1)}=\int_0^\infty F(t)\frac{dt}{t^2}$$

est alors convergente.

En notant $*$ le produit de convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques, posons $g = f * \mathbf{1}$:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On a

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \leqslant x} g(n) \\ &= \sum_{n \geqslant 1} f(n) \lfloor x/n \rfloor \\ &= Cx - \sum_{n \geqslant 1} f(n) \{x/n\} \\ &= Cx + \sum_{n \geqslant 1} F(n) \big(\{x/(n+1)\} - \{x/n\} \big). \end{aligned}$$

On en déduit l'estimation

$$|G(x) - Cx| \leqslant \|F\|_\infty W(x) \quad (x > 0),$$

où $\|F\|_\infty$ désigne la borne supérieure des modules des sommes (1). Dans [5], Wintner démontra que

$$W(x) \asymp x^{1/2} \quad (x \geqslant 1). \tag{2}$$

On a donc $G(x) = Cx + O(x^{1/2})$. En outre, ce résultat est optimal au sens où, quelle que soit la fonction positive $\omega(x)$, définie pour $x > 0$ et telle que

$$\omega(x) = o(x^{1/2}) \quad (x \to \infty),$$

il existe une fonction arithmétique f, dont la fonction sommatoire est bornée, et pour laquelle la relation

$$G(x) = Cx + O(\omega(x)) \tag{3}$$

est fausse. Ce dernier fait découle de la minoration $W(x) \gg x^{1/2}$ et du principe de condensation des singularités (théorème de Banach et Steinhaus, cf. [1] *).

De plus Wintner remarqua que ces résultats se déduisaient uniquement de (2), et non de l'existence de la limite $\lim_{x \to \infty} x^{-1/2} W(x)$, problème qu'il laissa ouvert et qui est l'origine du présent travail.

*. C'est le *uniform boundedness principle* de la littérature en langue anglaise ; Wintner invoqua le « Lebesgue-Toeplitz norm principle ».

Cela étant, on peut se passer complètement de l'introduction de la fonction W et de considérations d'analyse fonctionnelle, aussi bien pour l'estimation $G(x) = Cx + O(x^{1/2})$ que pour l'optimalité de son terme d'erreur. D'une part, le principe de l'hyperbole de Dirichlet donne

$$G(x) = \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} f(n)\lfloor x/n\rfloor + \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} F(x/m) - F(\sqrt{x})\lfloor\sqrt{x}\rfloor,$$

d'où découle simplement l'estimation de $G(x)$. D'autre part, Bayart a construit, dans le contexte de l'étude de l'abscisse de convergence d'un produit de séries de Dirichlet (cf. [2], §2), un exemple d'une fonction arithmétique f dont la fonction sommatoire est bornée, et pour laquelle l'assertion

$$G(x) = Cx + o(x^{1/2}) \quad (x \to \infty)$$

est fausse ; la même fonction f permet donc d'infirmer d'un coup toutes les assertions (3). Cette construction est rappelée au §3.

L'argumentation de Wintner a cependant, entre autres mérites, celui d'attirer l'attention sur la question de l'estimation asymptotique de $W(x)$.

Théorème *Pour $x > 0$, on a*

$$W(x) = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{x} + O(x^{2/5}),$$

où ζ désigne la fonction ζ de Riemann.

La nature de la somme $W(x)$ incite à l'analyse de la répartition conjointe des deux fonctions

$$n \mapsto \lfloor x/n\rfloor \quad \text{et} \quad n \mapsto \lfloor x/(n+1)\rfloor.$$

Nous développons au §2 cette approche. Elle nous conduit à regrouper les termes de $W(x)$ suivant les valeurs d de la différence $\lfloor x/n\rfloor - \lfloor x/(n+1)\rfloor$; le résultat des calculs qui s'ensuivent est l'objet des propositions 1 et 6 (cf. §2.3 et §2.4.7 ci-dessous). Le théorème s'en déduit par sommation au §§2.5-2.6.

La méthode employée est susceptible d'autres applications. Ainsi, des calculs similairesfournissent l'énoncé suivant :

$$\sum_{n\geqslant 1} \big(\{x/(n+1)\} - \{x/n\}\big)^2 = \frac{\zeta(3/2)}{\pi}\sqrt{x} + O(x^{3/7}) \quad (x > 0).$$

2 Démonstration du théorème

Dans toute la suite, la lettre n désignera un nombre entier $\geqslant 1$; les lettres h, k, d désigneront des nombres entiers $\geqslant 0$; la lettre x désignera un nombre réel > 0.

2.1 Réarrangement de la somme $W(x)$

Nous réarrangeons la somme $W(x)$ suivant les valeurs de

$$\begin{aligned} k &= \lfloor x/n \rfloor \\ h &= \lfloor x/(n+1) \rfloor \end{aligned}$$

On a donc $0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x$ et

$$\begin{aligned} k \leqslant x/n &< k+1 \\ h \leqslant x/(n+1) &< h+1, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\max\big(\frac{x}{k+1}, \frac{x}{h+1} - 1\big) < n \leqslant \min\big(\frac{x}{k}, \frac{x}{h} - 1\big). \tag{4}$$

(avec la convention $x/0 = \infty$). Nous désignerons par $I(h, k; x)$ l'intervalle de valeurs de n défini par l'encadrement (4), c'est-à-dire

$$I(h, k; x) = \{1, 2, \ldots\} \cap]x/(k+1), x/k] \cap]x/(h+1) - 1, x/h - 1].$$

Il faut garder à l'esprit que, x étant fixé, la collection des $I(h, k; x)$ non vides constitue une partition de l'ensemble des nombres entiers $\geqslant 1$.

Notons que, pour $n \in I(h, k; x)$, on a

$$\{x/(n+1)\} - \{x/n\} = k - h - x/n(n+1).$$

On a donc

$$W(x) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x} W(h, k; x),$$

où

$$W(h, k; x) = \sum_{n \in I(h,k;x)} |k - h - x/n(n+1)|.$$

Maintenant, si $0 \leqslant d \leqslant x$, nous posons

$$\begin{aligned} E_d(x) &= \{(h, k) : 0 \leqslant h \leqslant k \leqslant x,\ k - h = d\} \\ &= \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x\} \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$\begin{aligned} W_d(x) &= \sum_{(h,k) \in E_d(x)} W(h, k; x) \\ &= \sum_{d \leqslant k \leqslant x} \ \sum_{n \in I(k-d,k;x)} |d - x/n(n+1)|\,, \end{aligned}$$

de sorte que

$$W(x) = \sum_{0 \leqslant d \leqslant x} W_d(x).$$

Nous allons d'abord majorer la contribution à $W(x)$ des grandes valeurs de d, puis nous estimerons la quantité $W_d(x)$, en commençant par le cas diagonal $d = 0$.

2.2 Contribution des grandes valeurs de d

Soit D un nombre réel supérieur à 1. Si $d = \lfloor x/n \rfloor - \lfloor x/(n+1) \rfloor > D$, alors

$$\begin{aligned}\frac{x}{n^2} > \frac{x}{n(n+1)}\\ &= d + \{x/n\} - \{x/(n+1)\}\\ &> D - 1,\end{aligned}$$

donc $n < \sqrt{x/(D-1)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{d > D} W_d(x) &\leqslant \sum_{n < \sqrt{x/(D-1)}} 1\\ &< \sqrt{x/(D-1)}.\end{aligned} \tag{6}$$

2.3 Estimation de $W_0(x)$

Nous avons

$$E_0(x) = \{(k, k) : 0 \leqslant k \leqslant x\}.$$

L'intervalle $I(k, k; x)$ est défini par l'encadrement

$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k} - 1. \tag{7}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}W_0(x) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant x} W(k, k; x)\\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant x} \sum_{x/(k+1) < n \leqslant x/k - 1} x/n(n+1).\end{aligned}$$

Si $k(k+1) > x$, la somme intérieure est vide. Désignons donc par $K = K(x)$ le plus grand nombre entier k tel que $k(k+1) \leqslant x$, c'est-à-dire

$$K(x) = \lfloor \sqrt{x + 1/4} - 1/2 \rfloor.$$

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \sum_{x/(k+1) < n \leqslant x/k-1} x/n(n+1) \\
&= x \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \sum_{x/(k+1) < n \leqslant x/k} \frac{1}{n(n+1)} - x \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor (\lfloor x/k \rfloor + 1)} \\
&= x \sum_{n > x/(K+1)} \frac{1}{n(n+1)} - x \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \varphi(x/k), \qquad (8)
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\lfloor t \rfloor (\lfloor t \rfloor + 1)} \qquad (9) \\
&= t^{-2} + O(t^{-3}) \quad (t \geqslant 1).
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
x \sum_{n > x/(K+1)} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{x}{\lfloor x/(K+1) \rfloor + 1} \\
&= \frac{K+1}{1 + (1 - \{x/(K+1)\})(K+1)/x} \\
&= K + O(1) \\
&= \sqrt{x} + O(1). \qquad (10)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
x \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \varphi(x/k) &= x \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \big(k^2/x^2 + O(k^3/x^3)\big) \\
&= \frac{K^3 + O(K^2)}{3x} + O(K^4/x^2) \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{x} + O(1). \qquad (11)
\end{aligned}$$

La conjonction de (8), (10) et (11) donne le résultat suivant.

Proposition 1 *Pour $x > 0$, on a*

$$W_0(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + O(1). \qquad (12)$$

2.4 Estimation de $W_d(x)$, $d > 0$

2.4.1 Décomposition de l'ensemble $E_d(x)$

Si d est positif, nous allons décomposer l'ensemble $E_d(x)$ défini par (5) en une partition de trois sous-ensembles sur lesquels l'encadrement (4) s'exprimera sans recours aux fonctions max et min.

Si $k > h \geqslant 0$ et $x > 0$, l'inégalité

$$\frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{h} - 1$$

équivaut à

$$\frac{hk}{k-h} \leqslant x.$$

En particulier, on a les implications

$$\frac{x}{k+1} \leqslant \frac{x}{h+1} - 1 \Longrightarrow \frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{h} - 1$$

et

$$\frac{x}{k} > \frac{x}{h} - 1 \Longrightarrow \frac{x}{k+1} > \frac{x}{h+1} - 1.$$

Cela nous incite à considérer les trois parties suivantes de $E_d(x)$ (la définition de chaque $E_{d,i}(x)$ est suivie par la forme que prend l'encadrement (4) lorsque $(k-d, k) \in E_{d,i}(x)$) :

$$E_{d,1}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d+1)(k+1) \leqslant dx\}$$
$$\frac{x}{k-d+1} - 1 < n \leqslant \frac{x}{k} \tag{13}$$

$$E_{d,2}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d)k > dx\}$$
$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k-d} - 1 \tag{14}$$

$$E_{d,3}(x) = \{(k-d, k) : d \leqslant k \leqslant x,\ (k-d)k \leqslant dx < (k-d+1)(k+1)\}$$
$$\frac{x}{k+1} < n \leqslant \frac{x}{k} \tag{15}$$

Celles des trois parties $E_{d,i}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ qui sont non vides forment une partition de $E_d(x)$. Par conséquent, on a

$$W_d(x) = W_{d,1}(x) + W_{d,2}(x) + W_{d,3}(x),$$

où

$$W_{d,i}(x) = \sum_{(h,k) \in E_{d,i}(x)} W(h, k; x) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3).$$

Avant d'évaluer successivement les trois quantités $W_{d,i}(x)$, nous allons aux paragraphes suivants définir et étudier deux fonctions auxiliaires, $K_d(x)$ et $N_d(x)$.

2.4.2 La fonction $K_d(x)$

Pour $x > 0$ et $d \geqslant 0$, nous définissons $K_d(x)$ comme le plus grand nombre entier k tel que

$$(k-d)k \leqslant dx\,,$$

inégalité qui équivaut à

$$\frac{x}{k} \leqslant \frac{x}{k-d} - 1$$

si $k > d$.

On a donc $K_0(x) = 0$ et en général

$$K_d(x) = \lfloor (d + \sqrt{d^2 + 4dx})/2 \rfloor.$$

En utilisant le fait que $t \mapsto (t-d)t$ est strictement croissante sur $[d/2, \infty[$, on démontre les relations

$$\begin{aligned} d &\leqslant K_d(x) \leqslant x + d \\ d + 1 &\leqslant K_d(x) \qquad\qquad (d > 0,\ x \geqslant 2) \\ 2d &\leqslant K_d(x) \leqslant x \qquad\quad (x \geqslant 2d) \qquad (16) \\ \sqrt{dx} + d/2 - 1 &< K_d(x) \leqslant \sqrt{dx} + d \qquad (17) \\ K_d(x) &< K_{d+1}(x). \end{aligned}$$

Nous utiliserons de plus des estimations des sommes $\sum 1$ et $\sum k^2$ portant sur les nombres entiers k de l'intervalle $]K_d(x), K_{d+1}(x)]$.

Proposition 2 *Pour $0 \leqslant d \leqslant x$ et $x \geqslant 1$, on a*

$$K_{d+1}(x) - K_d(x) = \bigl(\sqrt{d+1} - \sqrt{d}\bigr)\sqrt{x} + O(1).$$

Démonstration

Comme fonction de d, la quantité

$$\sqrt{d^2 + 4dx} - \sqrt{4dx} = \frac{1}{\sqrt{1/d^2 + 4x/d^3} + \sqrt{4x/d^3}}$$

est croissante. D'autre part, sa dérivée par rapport à d est

$$\begin{aligned} \frac{d + 2x}{\sqrt{d^2 + 4dx}} - \sqrt{\frac{x}{d}} &= \frac{d\sqrt{d} + 2x\sqrt{d} - \sqrt{x(d^2 + 4dx)}}{\sqrt{d(d^2 + 4dx)}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{x}}. \qquad (18) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
K_{d+1}(x) - K_d(x) &= \bigl(d+1+\sqrt{(d+1)^2+4(d+1)x}\,\bigr)/2 - \bigl(d+\sqrt{d^2+4dx}\,\bigr)/2 + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{4(d+1)x}-\sqrt{4dx}\,\bigr) + O\bigl(\sqrt{(d+1)/x}\,\bigr) + O(1) \quad \text{(d'après (18))}\\
&= \bigl(\sqrt{d+1}-\sqrt{d}\,\bigr)\sqrt{x} + O(1),
\end{aligned}$$

si $d \leqslant x$ et $x \geqslant 1$. □

Notons que la proposition 2 entraîne l'estimation

$$K_{d+1}(x) - K_d(x) \ll \sqrt{x/(d+1)} \quad (0 \leqslant d \leqslant x,\ x \geqslant 1).$$

Proposition 3 *Pour* $0 \leqslant d \leqslant x$ *et* $x \geqslant 1$, *on a*

$$\sum_{K_d(x)<k\leqslant K_{d+1}(x)} k^2 = \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-d\sqrt{d}}{3}\, x^{3/2} + O\bigl((d+1)x\bigr).$$

Démonstration

Si M et N sont des entiers naturels tels que $M \leqslant N$, on a

$$\sum_{M<k\leqslant N} k^2 = \frac{N-M}{6}\bigl(2(N^2+NM+M^2)+3(N+M)+1\bigr).$$

Avec $M = K_d(x)$ et $N = K_{d+1}(x)$, et compte tenu de (17) et de la proposition 2, cela donne,

$$\begin{aligned}
\sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}} k^2 &= \frac{(\sqrt{d+1}-\sqrt{d})\sqrt{x}+O(1)}{6}\bigl(2(2d+1+\sqrt{d(d+1)})x + O\bigl((d+1)^{3/2}\sqrt{x}\bigr)\bigr)\\
&= \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-d\sqrt{d}}{3}\, x^{3/2} + O\bigl((d+1)x\bigr).
\end{aligned}$$ □

Au moyen de la fonction $K_d(x)$, on peut récrire les conditions, quadratiques relativement à k, intervenant dans les définitions des ensembles $E_{d,i}(x)$, sous les formes suivantes, respectivement :

$$k \leqslant K_d(x) - 1 \qquad (i = 1) \tag{19}$$

$$k > K_d(x) \qquad (i = 2) \tag{20}$$

$$k = K_d(x) \qquad (i = 3) \tag{21}$$

2.4.3 La fonction $N_d(x)$

Pour exprimer la quantité $|d - x/n(n+1)|$ sans valeur absolue, nous sommes conduits à définir, pour $d > 0$, $N_d(x)$ comme le plus grand nombre entier tel que

$$n(n+1) \leqslant x/d.$$

On a donc

$$N_d(x) = \lfloor (-1 + \sqrt{1 + 4x/d}\,)/2 \rfloor.$$

Notons les relations suivantes.

$$
\begin{aligned}
1 &\leqslant N_d(x) && (0 < d \leqslant x/2) \\
N_d(x) &\leqslant \sqrt{x/d} && (d > 0, x \geqslant 0) && (22) \\
\sqrt{x/d} - 2 &< N_d(x) && (0 < d \leqslant x) && (23)
\end{aligned}
$$

Établissons maintenant une relation entre les fonctions K_d et N_d (pour ces deux fonctions, nous omettons dorénavant la mention de la variable x afin d'alléger les notations).

Proposition 4 *Pour d entier et x réel tels que $0 < d \leqslant x$, on a*

$$\lfloor x/(K_d + 1) \rfloor \leqslant N_d \leqslant \lfloor x/K_d \rfloor.$$

Démonstration

Par définition de N_d, et comme $t \mapsto t(t+1)$ est strictement croissante pour $t \geqslant 0$, il suffit de vérifier que

$$\frac{x}{K_d + 1}\Big(\frac{x}{K_d + 1} + 1\Big) < \frac{x}{d} \leqslant \frac{x}{K_d}\Big(\frac{x}{K_d} + 1\Big).$$

Or cet encadrement équivaut au suivant :

$$(K_d - d)K_d \leqslant dx < (K_d + 1 - d)(K_d + 1)\,,$$

lequel découle de la définition de K_d. □

2.4.4 Calcul de $W_{d,1}(x)$

En supposant $0 < d \leqslant x/2$, on a d'après (13), (16) et (19) :

$$W_{d,1}(x) = \sum_{d \leqslant k \leqslant K_d - 1} \ \sum_{\frac{x}{k-d+1} - 1 < n \leqslant \frac{x}{k}} |d - x/n(n+1)|.$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k - d + 1} - 1 < \frac{x}{k}\,,$$

autrement dit seulement si $k > K_{d-1}$ (rappelons que $K_0 = 0$). Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont strictement supérieurs à

$$\frac{x}{K_d - d} - 1 \geqslant \frac{x}{K_d} \geqslant N_d,$$

d'après la définition de K_d et la proposition 4.

Dans le calcul qui suit, ainsi qu'au paragraphe suivant, nous écrirons comme au §2.3 :

$$\frac{1}{\lfloor t \rfloor + 1} = \frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \varphi(t)\,,$$

et nous emploierons l'identité « r-télescopique » :

$$\sum_{a<k\leqslant b} (u_k - u_{k-r}) = \sum_{b-r<k\leqslant b} u_k - \sum_{a-r<k\leqslant a} u_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
W_{d,1}(x) &= \sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1} \ \sum_{\frac{x}{k-d+1}-1<n\leqslant\frac{x}{k}} \Big(d - \frac{x}{n(n+1)}\Big) \\
&= \sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1} \bigg(d\big(\lfloor x/k \rfloor - \lfloor x/(k-d+1) \rfloor + 1\big) - x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(k-d+1) \rfloor} - \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor + 1}\Big)\bigg) \\
&= d \sum_{K_d-d<k\leqslant K_d-1} \lfloor x/k \rfloor - d \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \lfloor x/k \rfloor + d(K_d - K_{d-1} - 1) + \\
&\quad + x \sum_{K_d-d<k\leqslant K_d-1} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} - x \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \frac{1}{\lfloor x/k \rfloor} - x \sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_d-1} \varphi(x/k) \qquad (24)
\end{aligned}$$

où φ est définie par (9). Observons que, dans le cas où $d = 1$, les quatre premières sommes $\sum$ du résultat de (24) sont vides.

2.4.5 Calcul de $W_{d,2}(x)$

En supposant toujours $0 < d \leqslant x/2$, on a d'après (14) et (20) :

$$W_{d,2}(x) = \sum_{K_d<k\leqslant x} \ \sum_{\frac{x}{k+1}<n\leqslant\frac{x}{k-d}-1} |d - x/n(n+1)|$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k-d} - 1 \geqslant \frac{x}{k+1}\,,$$

autrement dit seulement si $k \leqslant K_{d+1}-1$. Les nombres entiers n intervenant dans cette somme intérieure sont inférieurs ou égaux à

$$\Big\lfloor \frac{x}{K_d+1-d} - 1\Big\rfloor \leqslant \Big\lfloor \frac{x}{K_d+1}\Big\rfloor \leqslant N_d,$$

d'après la définition de K_d et la proposition 4.

En supposant $d+1 \leqslant x/2$, on a donc

$$\begin{aligned}
W_{d,2}(x) &= \sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}-1} \ \sum_{\frac{x}{k+1}<n\leqslant \frac{x}{k-d}-1} \big(x/n(n+1)-d\big)\\
&= \sum_{K_d<k\leqslant K_{d+1}-1} \Bigg(x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(k+1)\rfloor+1} - \frac{1}{\lfloor x/(k-d)\rfloor}\Big) - d\big(\lfloor x/(k-d)\rfloor - \lfloor x/(k+1)\rfloor - 1\big)\Bigg)\\
&= d \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \lfloor x/k\rfloor - d \sum_{K_d-d<k\leqslant K_d+1} \lfloor x/k\rfloor + d(K_{d+1}-K_d-1)+\\
&\quad + x \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \frac{1}{\lfloor x/k\rfloor} - x \sum_{K_d-d<k\leqslant K_d+1} \frac{1}{\lfloor x/k\rfloor} - x \sum_{K_d+1<k\leqslant K_{d+1}} \varphi(x/k). \qquad (25)
\end{aligned}$$

2.4.6 Calcul de $W_{d,3}(x)$

Pour $0<d\leqslant x$, on a d'après (15) et (21) :

$$\begin{aligned}
W_{d,3}(x) &= \sum_{\frac{x}{K_d+1}<n\leqslant \frac{x}{K_d}} |d - x/n(n+1)|\\
&= W^-_{d,3}(x) + W^+_{d,3}(x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
W^-_{d,3}(x) &= \sum_{\frac{x}{K_d+1}<n\leqslant N_d} \Big(\frac{x}{n(n+1)} - d\Big)\\
W^+_{d,3}(x) &= \sum_{N_d<n\leqslant \frac{x}{K_d}} \Big(d - \frac{x}{n(n+1)}\Big)
\end{aligned}$$

d'après la proposition 4. La somme $W^-_{d,3}(x)$ est vide si $N_d = \lfloor x/(K_d+1)\rfloor$.

On a

$$\begin{aligned}
W^-_{d,3}(x) &= x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(K_d+1)\rfloor+1}-\frac{1}{N_d+1}\Big)-d(N_d-\lfloor x/(K_d+1)\rfloor)\\
W^+_{d,3}(x) &= d(\lfloor x/K_d\rfloor-N_d)-x\Big(\frac{1}{N_d+1}-\frac{1}{\lfloor x/K_d\rfloor+1}\Big)\\
W_{d,3}(x) &= x\Big(\frac{1}{\lfloor x/(K_d+1)\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor x/K_d\rfloor+1}-\frac{2}{N_d+1}\Big)-d(2N_d-\lfloor x/(K_d+1)\rfloor-\lfloor x/K_d\rfloor).
\end{aligned} \tag{26}$$

2.4.7 Calcul et estimation de $W_d(x)$

En ajoutant (24), (25) et (26) et en réduisant, on obtient pour $0<d\leqslant x/2-1$:

$$\begin{aligned}
W_d(x) &= W_{d,1}(x)+W_{d,2}(x)+W_{d,3}(x)\\
&= \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}}\big(d\lfloor x/k\rfloor+x/\lfloor x/k\rfloor\big)-\sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}}\big(d\lfloor x/k\rfloor+x/\lfloor x/k\rfloor\big)+\\
&\quad -x\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}}\varphi(x/k)+d(K_{d+1}-K_{d-1}-2)-\frac{2x}{N_d+1}-2dN_d.
\end{aligned} \tag{27}$$

Pour estimer les deux premières sommes de (27), nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 5 *Pour $0<d\leqslant x/2$ et $K_d-d<k\leqslant K_d$, on a*

$$d\lfloor x/k\rfloor+x/\lfloor x/k\rfloor=2\sqrt{dx}+O(d^{3/2}x^{-1/2}).$$

Démonstration

Posons $q=\lfloor x/k\rfloor$. On a

$$dq+x/q-2\sqrt{dx}=p^2,$$

où

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{dq}-\sqrt{x/q}\\
&= \frac{dq^2-x}{q\big(\sqrt{dq}+\sqrt{x/q}\big)}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
q &= \lfloor x/k\rfloor\\
&= x/k+O(1)\\
&= \frac{x}{\sqrt{dx}+O(d)}+O(1) \quad \text{(d'après (17))}\\
&= \sqrt{x/d}+O(1).
\end{aligned} \tag{28}$$

Par conséquent,

$$dq^2 - x = O(\sqrt{dx})$$
$$p = O(d^{3/4}x^{-1/4})$$

et

$$dq + x/q - 2\sqrt{dx} = O(d^{3/2}x^{-1/2}). \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

Proposition 6 *Pour $d > 0$ et $x > 0$, on a*

$$W_d(x) = f(d)\sqrt{x} + O(d),$$

où

$$f(d) = \frac{8d+2}{3}\sqrt{d+1} - \frac{8d-2}{3}\sqrt{d-1} - 4\sqrt{d}$$

Démonstration

Nous appliquons la proposition 5 en changeant d en $d+1$ et obtenons, si $0 < d \leqslant x/2 - 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) = \\ -\sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \lfloor x/k\rfloor + \sum_{K_{d+1}-d-1<k\leqslant K_{d+1}} \big(2\sqrt{(d+1)x} + O(d^{3/2}x^{-1/2})\big) \\ = (2d+1)\sqrt{(d+1)x} + O(d) + O(d^{5/2}x^{-1/2}),\end{aligned} \tag{29}$$

où l'on a utilisé (28) (avec d remplacé par $d+1$) pour évaluer l'avant-dernière somme.

De même,

$$\begin{aligned}\sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \big(d\lfloor x/k\rfloor + x/\lfloor x/k\rfloor\big) = \\ \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \lfloor x/k\rfloor + \sum_{K_{d-1}-d+1<k\leqslant K_{d-1}} \big(2\sqrt{(d-1)x} + O(d^{3/2}x^{-1/2})\big) \\ = (2d-1)\sqrt{(d-1)x} + O(d) + O(d^{5/2}x^{-1/2}),\end{aligned} \tag{30}$$

résultat valable même si $d = 1$.

Maintenant, d'après la proposition 3, on a

$$\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^2 = \frac{(d+1)\sqrt{d+1} - (d-1)\sqrt{d-1}}{3} x^{3/2} + O(dx).$$

De plus,

$$\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^3 \ll \sqrt{x/d}\cdot\sqrt{(dx)^3}$$
$$= dx^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} \varphi(x/k) &= \frac{1}{x}\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^2 + O\Big(x^{-2}\sum_{K_{d-1}<k\leqslant K_{d+1}} k^3\Big) \\ &= \frac{(d+1)\sqrt{d+1}-(d-1)\sqrt{d-1}}{3}\sqrt{x}+O(d). \end{aligned} \tag{31}$$

Le terme suivant de (27) peut être estimé grâce à la proposition 2. On a

$$d(K_{d+1}-K_{d-1}-2) = (d\sqrt{d+1}-d\sqrt{d-1})\sqrt{x}+O(d). \tag{32}$$

Enfin, en utilisant (22) et (23), on a

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{N_d+1}-2dN_d &= -2\frac{x}{\sqrt{x/d}+O(1)}-2d\big(\sqrt{x/d}+O(1)\big) \\ &= -4\sqrt{dx}+O(d) \end{aligned} \tag{33}$$

En insérant maintenant (29), (30), (31), (32) et (33) dans (27), nous obtenons

$$W_d(x) = f(d)\sqrt{x}+O(d)+O(d^{5/2}x^{-1/2}) \quad (0<d\leqslant x/2-1). \tag{34}$$

Si $d\leqslant x^{1/3}$, le second terme d'erreur est absorbé par le premier. D'autre part, en utilisant l'approximation

$$\sqrt{d\pm 1} = \sqrt{d}\big(1\pm 1/2d-1/8d^2+O(d^{-3})\big)\,,$$

on voit que $f(d)=O(d^{-3/2})$. La majoration uniforme $W_d(x)\ll\sqrt{x/d}$ montre alors que

$$W_d(x)-f(d)\sqrt{x}\ll d \quad (d>x^{1/3}),$$

ce qui permet d'omettre définitivement le second terme d'erreur de (34) et la condition $d\leqslant x/2-1$. □

2.5 Sommation de la série des $f(d)$

Puisque $f(d)=O(d^{-3/2})$, la série $\sum_{d\geqslant 1} f(d)$ converge ; nous allons calculer sa somme.

En écrivant

$$f(d)=\frac{8(d+1)-6}{3}\sqrt{d+1}-\frac{8(d-1)-6}{3}\sqrt{d-1}-4\bigl(\sqrt{d-1}+\sqrt{d}\,\bigr),$$

et en supposant D entier positif, on obtient

$$\sum_{d=1}^{D} f(d)=\frac{8(D+1)-6}{3}\sqrt{D+1}+\frac{8D-6}{3}\sqrt{D}-\frac{2}{3}-8\sum_{d=1}^{D}\sqrt{d}+4\sqrt{D}.$$

Or

$$\frac{8(D+1)-6}{3}\sqrt{D+1}=\frac{8}{3}D^{3/2}+2D^{1/2}+O(D^{-1/2})$$

et la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin donne

$$\sum_{d=1}^{D}\sqrt{d}=\frac{2}{3}D^{3/2}+\frac{1}{2}D^{1/2}+\zeta(-1/2)+O(D^{-1/2})$$

(cf. [4] (13·10·7), p. 333, et [3] chapter 7, (1·2), p. 150, (4·5), p. 156). On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{\infty} f(d)&=-\frac{2}{3}-8\zeta(-1/2)\\&=-\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}\zeta(3/2),\end{aligned}\tag{35}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la fonction ζ :

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s).$$

2.6 Conclusion

Pour $0<x\leqslant 1$, on a $W(x)=x$. Pour $x>1$ et $D\geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}W(x)&=W_0(x)+\sum_{1\leqslant d\leqslant D}W_d(x)+\sum_{d>D}W_d(x)\\&=\frac{2}{3}\sqrt{x}+O(1)+\sum_{1\leqslant d\leqslant D}\bigl(f(d)\sqrt{x}+O(d)\bigr)+O(\sqrt{x/D})\quad\text{(d'après (6) et les propositions 1 et 6)}\\&=\bigl(2/3+\sum_{d=1}^{\infty}f(d)\bigr)\sqrt{x}+O(D^2)+O\bigl(\sqrt{x/D}\,\bigr)\quad(\text{car } f(d)=O(d^{-3/2}))\\&=\frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{x}+O(x^{2/5}),\end{aligned}$$

d'après (35), et en choisissant $D=2x^{1/5}$.

3 Une remarque sur l'optimalité du terme d'erreur $O(\sqrt{x})$

Au §2 de [2], Bayart définit une fonction arithmétique α de la façon suivante. On construit d'abord une suite de nombres entiers par blocs en posant

$$\begin{aligned} M_n &= 2^{4^n} \quad (n \geqslant 1) \\ i_{k,n} &= \lfloor M_n/k \rfloor \quad (1 \leqslant k \leqslant \sqrt{M_n}/2 = 2^{2^{2n-1}-1}) \end{aligned}$$

Le plus petit élément $i_{k,n}$ du n^{e} bloc correspond à $k = \sqrt{M_n}/2$, et vaut $2\sqrt{M_n}$. On montre que les nombres $i_{k,n}$ vérifient l'égalité $\lfloor M_n/i_{k,n} \rfloor = k$; ils forment donc une suite strictement décroissante pour chaque valeur de n.

On pose ensuite

$$\alpha(m) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si existent } n \text{ et } k \text{ tels que } m = i_{k,n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$ on a donc $A(x) = \sum_{n \leqslant x} \alpha(n) \in \{0, 1\}$.

Considérons maintenant la fonction arithmétique β définie par $\beta(n) = (-1)^{n-1}$. De même que pour α, la fonction sommatoire $B(x)$ de β ne prend que les valeurs 0 et 1 ; pour k entier, on a $B(k) = 0$ si k est pair, et $B(k) = 1$ si k est impair.

Posons ensuite $g = \alpha * \beta$. D'après le principe de l'hyperbole de Dirichlet, la fonction sommatoire G de g vérifie

$$G(x) = \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \alpha(n) B(x/n) + \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \beta(n) A(x/n) - B(\sqrt{x}) A(\sqrt{x}),$$

donc

$$|G(x)| \leqslant 2\sqrt{x} + 1 \quad (x > 0) \tag{36}$$

Or pour $x = M_n$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i \leqslant x} \alpha(i) B(x/i) \\ &= \sum_{i \leqslant 2\sqrt{x}-1} + \sum_{2\sqrt{x} \leqslant i \leqslant x} \\ &= S_1 + S_2, \text{ disons.} \end{aligned}$$

Dans S_1, tous les termes correspondants à $i > M_{n-1} = x^{1/4}$ sont nuls ; par conséquent $|S_1| \leqslant x^{1/4}$.

Dans S_2 les termes $\alpha(i)$ non nuls correspondent exactement aux éléments $i_{k,n}$, et on a alors $B(x/i_{k,n}) = B(k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{x}/2 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \\ &= -\sqrt{x}/4. \end{aligned}$$

On a donc

$$G(M_n) = \sum_{i \leqslant M_n} \alpha(i) B(M_n/i) \leqslant -\sqrt{M_n}/4 + M_n^{1/4} \quad (n \geqslant 1). \tag{37}$$

Maintenant, observons que $\beta = \gamma * \mathbf{1}$, où γ est la fonction arithmétique définie par $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = -2$ et $\gamma(n) = 0$ pour $n > 2$, et posons $f = \alpha * \gamma$, de sorte que $g = \alpha * \beta = f * \mathbf{1}$.

Comme la fonction sommatoire de f, à savoir $F(x) = A(x) - 2A(x/2)$, est bornée, nous sommes dans la situation décrite dans l'introduction de cet article. On a donc

$$G(x) = Cx + O(\sqrt{x}), \tag{38}$$

avec $C = \sum_n f(n)/n$. La relation (36) prouve que $C = 0$, et (37) prouve que le $O(\sqrt{x})$ de (38) ne peut pas être remplacé par un $o(\sqrt{x})$.

Références

[1] S. Banach et H. Steinhaus – « Sur le principe de la condensation de singularités. », *Fundam. Math.* **9** (1927), p. 50–61.

[2] F. Bayart – « The product of two Dirichlet series », *Acta Arith.* **111** (2004), p. 141–152.

[3] B. C. Berndt – *Ramanujan notebooks, part 1*, Springer, Berlin, 1985.

[4] G. H. Hardy – *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.

[5] A. Wintner – « Square root estimates of arithmetical sum functions », *Duke Math. J.* **13** (1946), p. 185–193.

BALAZARD, Michel
Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373
13453, Marseille
FRANCE
Adresse électronique : balazard@math.cnrs.fr