



**HAL**  
open science

## **К вопросу точной управляемости систем с запаздыванием нейтрального типа**

Rabah Rabah, Grigory M. Sklyar, Pavel Yu. Barkhayev

### **► To cite this version:**

Rabah Rabah, Grigory M. Sklyar, Pavel Yu. Barkhayev. К вопросу точной управляемости систем с запаздыванием нейтрального типа. *Ukrainskii Matematichnyi Zhurnal*, 2016, 68 (6), pp.800–815. <10.1007/s11253-016-1265-7>. <hal-01327164>

**HAL Id: hal-01327164**

**<https://hal.science/hal-01327164v1>**

Submitted on 6 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## К вопросу точной управляемости систем с запаздыванием нейтрального типа

### On exact controllability of neutral time-delay systems

Р. Рабах (R. Rabah), IRCCyN, École des Mines de Nantes, 4 rue Alfred Kastler, BP 20722 Nantes, France. E-mail: rabah.rabah@mines-nantes.fr.

Г. М. Скляр (G. M. Sklyar), Institute of Mathematics, University of Szczecin and Karazin Kharkiv University, Wielkopolska 15, 70-451, Szczecin, Poland. E-mail: sklar@univ.szczecin.pl.

П. Ю. Бархаев (P. Yu. Barkhayev), Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Academy of Sciences of Ukraine and Karazin Kharkiv University, 47 Lenin Ave., 61103 Kharkiv, Ukraine. E-mail: barkhayev@ilt.kharkov.ua.

#### Abstract

The paper is devoted to the problem of exact controllability for a wide class of neutral and mixed time-delay systems. We consider an equivalent operator model in Hilbert space and formulate steering conditions of controllable states as a vector moment problem. The existence of a basis of eigenvectors of the system operator enables the form of the moment problem to be substantially simplified. A change in control by a feedback law modifies the system structure to guarantee the existence of a basis of eigenvectors of the corresponding operator. We prove a criterion of exact controllability and ascertain the precise critical time of controllability.

#### Анотація

Робота присвячена вирішенню задачі точної керованості для досить широкого класу систем з запізненням нейтрального та змішаного типів. Розглядаючи еквівалентну операторну модель в гільбертовому просторі, ми формуємо умови керованості у вигляді деякої векторної проблеми моментів. Вид даної проблеми моментів істотно спрощується при наявності базису простору з власних векторів оператора системи з запізненням. Заміна керування дозволяє перетворити структуру системи, і гарантувати існування базису з власних векторів відповідного оператора. Ми доводимо критерій точної керованості і встановлюємо точний час керування.

#### Аннотация

Данная работа посвящена решению задачи точной управляемости для достаточно широкого класса систем с запаздыванием нейтрального и смешанного типов. Рассматривая эквивалентную операторную модель в гильбертовом пространстве, мы формулируем условия управляемости в виде некоторой векторной проблемы моментов. Вид данной проблемы моментов существенно упрощается при наличии базиса пространства из собственных векторов оператора системы с запаздыванием. Замена управления позволяет преобразовать структуру системы, и гарантировать существование базиса из собственных векторов соответствующего оператора. Мы доказываем критерий точной управляемости и устанавливаем точное время управления.

# 1 Введение

Задача управляемости для линейных систем с запаздывающим аргументом имеет достаточно длительную историю (см., например, [4, 2, 6, 9, 11, 12] и ссылки из этих работ). В данной работе мы рассматриваем задачу точной управляемости для достаточно широкого класса систем нейтрального типа заданных следующим уравнением:

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где  $A_{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  – постоянные матрицы,  $z_t : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$  определяется как  $z_t(s) = z(t+s)$ , оператор запаздывания  $L$  задан соотношением

$$Lf = \int_{-1}^0 A_2(\theta) \frac{d}{d\theta} f(\theta) d\theta + \int_{-1}^0 A_3(\theta) f(\theta) d\theta,$$

и  $A_2, A_3$  являются  $n \times n$ -матрицами с элементами из  $L_2([-1, 0], \mathbb{C})$ ; управление  $u$  также принадлежит классу  $L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ .

Переход от систем с запаздывающим аргументом к эквивалентным моделям в некотором функциональном пространстве является одним из наиболее плодотворных подходов. А именно, системе с запаздыванием сопоставляется бесконечномерная система вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \quad x \in H, \quad (1.2)$$

где линейный оператор  $\mathcal{A}$  является генератором  $C_0$ -полугруппы.

Для линейных систем вида (1.2) с конечномерным фазовым пространством хорошо известна концепция управляемости Калмана: множество достижимости из нуля за время  $T$  совпадает со всем пространством ( $\mathcal{R}_T = H$ ), при этом, если управление не ограничено, то время  $T$  произвольно. Если же фазовое пространство  $H$  бесконечномерно, то данное свойство вообще говоря, не имеет места. Для линейных систем с запаздыванием множество достижимости является подмножеством  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , области определения оператора  $\mathcal{A}$ , поэтому естественным является вопрос попадания на все множество  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Кроме того, время перехода для систем с запаздыванием не может быть произвольно малым, поэтому мы также ставим задачу нахождения минимального времени перехода из точки 0 в произвольное состояние. Следующий критерий управляемости для класса линейных систем нейтрального типа (1.1) был получен соавторами данной работы в статье [14].

**Теорема 1.1** Система нейтрального типа (1.1) является точно управляемой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) не существует таких  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , что  $(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda))^* y = 0$  и  $B^* y = 0$ , где

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda I - \lambda e^{-\lambda} A_{-1} - \lambda \int_{-1}^0 e^{\lambda s} A_2(s) ds - \int_{-1}^0 e^{\lambda s} A_3(s) ds, \quad (1.3)$$

или, что то же самое,  $\text{rank}(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) B) = n$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- (ii) не существует таких  $\mu \in \sigma(A_{-1})$  и  $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , что  $A_{-1}^* y = \bar{\mu} y$  и  $B^* y = 0$ , или, что то же самое,  $\text{rank}(B \ A_{-1} B \ \dots \ A_{-1}^{n-1} B) = n$ .

Более того, если выполнены условия (i) и (ii), то система точно управляема за любое время  $T > n_1$  и неуправляема за любое время  $T \leq n_1$ , где  $n_1$  – первый индекс управляемости пары  $(A_{-1}, B)$ .

Если максимальная величина запаздывания равна  $h$ , а не 1, то критическое время управляемости равно  $T = n_1 h$ .

Отметим, что (1.1) является системой с распределенным запаздыванием для которой, в отличие от ситуации нескольких дискретных запаздываний (см. [2, 9, 3, 10, 13, 20] и ссылки из этих работ), явный вид полугруппы, вообще говоря, нельзя найти, что существенно усложняет дальнейший анализ. Также отметим, что важным достоинством теоремы является указание точного времени управляемости.

Стоит также отметить, что для линейных систем с запаздыванием без нейтрального слагаемого ( $A_{-1} = 0$ ) для точной управляемости необходимо выполнение условия  $\text{rank } B = n$ , которое является очень жестким. Это означает, что понятие точной управляемости является более естественным для систем нейтрального типа.

Для изучения точной управляемости мы используем подход связанный с переходом к проблеме моментов и ее последующим анализом. А именно, условия попадания из нуля в некоторое состояние фазового пространства интерпретируются как векторная тригонометрическая проблема моментов, которая строится по некоторому специальному базису Рисса фазового пространства. Исследуется разрешимость полученной проблемы моментов, используя методы [1] (см. также [24]).

В случае, когда существует базис Рисса фазового пространства состоящий из собственных векторов оператора системы, представление проблемы моментов существенно упрощается (см. [18] и [22]). В нашем случае существование базиса определяется видом матрицы  $A_{-1}$  нейтрального слагаемого системы (1.1), и в общем случае такой базис не существует (см. [15, 16, 19]). Поэтому для произвольной линейной системы с запаздыванием процедура выбора подходящего базиса Рисса довольно сложна. Кроме того, громоздкая форма получаемого базиса делает технически сложными дальнейшие манипуляции с ним ([14]).

Было замечено, что замена управления в исходной системе позволяет перейти к эквивалентной задаче управляемости для системы, у которой структура матрица  $A_{-1}$  гарантирует существование базиса Рисса фазового пространства из собственных векторов. При этом вид соответствующей проблемы моментов становится существенно проще, что позволяет провести более наглядные построения и доказательства.

В данной работе мы доказываем теорему 1.1 для систем (1.1) с матрицей  $A_{-1}$  специального вида, и показываем, что данный факт влечет за собой выполнение теоремы для систем с произвольной матрицей  $A_{-1}$ . Кроме того, мы рассматриваем задачу управляемости для систем так называемого смешанного типа (см., также, [19]), которые не были рассмотрены в работе [14], и показываем, что, если нейтральное слагаемое вырождено ( $\det A_{-1} = 0$ ) и пара  $(A_{-1}, B)$  неуправляема, то система (1.1) также является неуправляемой.

Статья имеет следующую структуру. Во втором разделе мы рассматриваем абстрактное уравнение и обсуждаем эквивалентный переход к системе специального вида, порождающей базис Рисса из собственных векторов. В третьем разделе, используя спектральный базис Рисса, дается представление условия управляемости в виде проблемы моментов. Четвертый раздел посвящен доказательству необходимости условий управляемости, в пятом и шестом разделах мы доказываем достаточность для случаев одномерного и многомерного управлений. Наконец, в седьмом разделе приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.

## 2 Эквивалентные задачи управляемости

Мы рассматриваем операторную модель систем нейтрального типа введенную в [5] (см. также [8]). Фазовым пространством является  $M_2(-1, 0; \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n \times L_2(-1, 0; \mathbb{C}^n)$ , коротко

$M_2$ , и уравнение (1.1) может быть записана следующим образом:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где оператор  $\mathcal{A}$  имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(y, z(\cdot)) \in M_2 : z \in H^1(-1, 0; \mathbb{C}^n), y = z(0) - A_{-1}z(-1)\},$$

и под  $H^1$  мы подразумеваем соболевское пространство функций, которые вместе со своей первой производной лежат в  $L_2$ .

Множество достижимости из начального состояния 0 за время  $T$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_T = \left\{ x : x = \int_0^T e^{At} \mathcal{B}u(t) dt, \quad u(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r) \right\}.$$

В дальнейшем мы покажем, что  $\mathcal{R}_T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$  для всех  $T > 0$ .

**Определение 2.1** Мы будем говорить, что система (2.4) точно управляема из нуля управлениями класса  $L_2$ , если существует такое время  $T_0$  (критическое время), что для всех  $T > T_0$  выполнено

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Данное определение означает, что для некоторого  $T > 0$  множество решений  $\{z(t) : t \in [T-1, T]\}$  системы (1.1), полученное при применении всевозможных управлений, совпадает с пространством  $H^1(T-1, T; \mathbb{C}^n)$ .

**Лемма 2.2** Если система (1.1) является точно управляемой за время  $T$ , тогда для произвольной матрицы  $P \in \mathbb{C}^{n \times r}$  возмущенная система

$$\dot{z}(t) = (A_{-1} + BP)\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu \quad (2.5)$$

является точно управляемой за то же самое время  $T$ .

**Доказательство.** Предположим, что система (1.1) управляема за время  $T$ . Это означает, что для любой функции  $f(t) \in H^1(T-1, T; \mathbb{C}^n)$  существует такое управление  $u(t) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ , что решение уравнения

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu(t), \quad (2.6)$$

с начальным условием  $z(t) = 0, t \in [-1, 0]$  удовлетворяет соотношению  $z(t) = f(t), t \in [T-1, T]$ . Перепишем (2.6) в виде

$$\dot{z}(t) = (A_{-1} + BP)\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bv(t),$$

где  $v(t) = u(t) - P\dot{z}(t-1), t \in [0, T]$ . Так как  $z(t-1) \in H^1(0, T; \mathbb{C}^n)$ , то  $v(t) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ . Следовательно, управление  $v(t)$  переводит состояние  $z(t) = 0, t \in [-1, 0]$  в состояние  $z(t) = f(t), t \in [T-1, T]$  в силу системы (2.5). Это означает, что (2.5) также точно управляема за время  $T$ . ■

Также имеет место следующая эквивалентность выполнения условий теоремы 1.1 для исходной и возмущенной систем.

**Лемма 2.3** Если система вида (1.1) такова, что выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1, то для произвольной матрицы  $P$  и соответствующей возмущенной системы (2.5) также выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1. Обратное также верно.

Доказательство данного утверждения следует из соотношения  $\Delta_{\widehat{A}}^*(\lambda)y = [\Delta_A^*(\lambda) - \lambda e^{-\lambda P^* B^*}]y = 0$ , где  $\widehat{A}$  – оператор, отвечающий системе (2.5), а также инвариантности свойства управляемости пары матриц относительно замены управления обратной связью (см., например, [23]).

**Следствие 2.4** Из доказательства теоремы 1.1 для системы (1.1) с некоторой парой матриц  $(A_{-1}, B)$ , следует, что теорема имеет место также для возмущенных систем (2.5) с произвольной матрицей  $P$ .

Если пара матриц  $(A, B)$  является управляемой, то известно (см., например, [23]), что для произвольного наперед заданного множества  $S = \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{C}$ , существует матрица  $P \in \mathbb{C}^{r \times n}$  такая, что множество  $S$  будет спектром возмущенной матрицы:  $\sigma(A + BP) = S$ . Тогда, если фиксируем  $n$  различных действительных чисел:

$$\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{R}, \quad \mu_i \neq \mu_j, i \neq j, \quad \mu_i \notin \{0, 1\}, \quad (2.7)$$

то найдутся замены управления  $u(t) = P\dot{z}(t-1) + v(t)$ ,  $P \in \mathbb{C}^{r \times n}$ , и фазовых переменных  $z = Cw$ , которые приводят систему к виду

$$\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1) + \int_{-1}^0 \widehat{A}_2(\theta)\dot{w}(t+\theta) d\theta + \int_{-1}^0 \widehat{A}_3(\theta)w(t+\theta) d\theta + \widehat{B}v, \quad (2.8)$$

где  $\widehat{A}_{-1} = C^{-1}(A_{-1} + BP)C$ ,  $\widehat{A}_i(\theta) = C^{-1}A_i(\theta)C$ ,  $\widehat{B} = C^{-1}B$ , и удовлетворяют следующим условиям:

(а) спектр матрицы  $\widehat{A}_{-1}$  равен  $\sigma(\widehat{A}_{-1}) = \{\mu_m\}_{m=1}^n$ ;

(б) пара  $(\widehat{A}_{-1}, \widehat{B})$  приведена к форме Фробениуса (см. [23]), то есть

$$\widehat{A}_{-1} = \text{diag}\{F_1, \dots, F_r\}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \dots & a_{s_i}^i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

и  $\widehat{B} = \text{diag}\{g_1, \dots, g_r\}$ , где  $g_i = (0, 0, \dots, 1)^T$ , размерности  $s_i \times 1$ .

Из приведенных рассуждений и леммы 2.3 получаем следующее утверждение.

**Лемма 2.5** Из доказательства достаточности теоремы 1.1 для семейства систем вида (2.8), удовлетворяющих условиям (а)-(б), следует достаточность условий данной теоремы для произвольных систем вида (1.1).

**Замечание 2.6** При доказательстве теоремы 1.1 в случае одномерного управления ( $r = 1$ ) достаточно предполагать, что система имеет простой спектр (выполнено только условие (а)), тогда как для доказательства общего случая необходима форма (а)-(б).

В работе [14] необходимость условия (ii) доказана в предположении, что матрица  $A_{-1}$  нейтрального слагаемого является невырожденной. В данной статье мы дополняем доказательство, показав, что если пара  $(A_{-1}, B)$  является неуправляемой и  $\det A_{-1} = 0$ , то система (1.1) также не является точно управляемой (теорема 4.6).

Далее, не нарушая общности, будем предполагать, что для пары  $(A_{-1}, B)$  выполнены свойства (а) и (б). По построению  $\det A_{-1} \neq 0$  и будем обозначать через  $\{c_m\}_{m=1}^n$  базис из нормированных собственных векторов  $A_{-1}$ .

### 3 Базисы Рисса в фазовом пространстве и проблема моментов

Обозначим через  $\tilde{\mathcal{A}}$  оператор  $\mathcal{A}$  в случае  $A_2(\theta) = A_3(\theta) \equiv 0$ . Собственные значения  $\tilde{\mathcal{A}}$  имеют вид (см. [16]):

$$\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \{\tilde{\lambda}_m^k = \ln |\mu_m| + 2k\pi i, m = 1, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\},$$

где  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \sigma(A_{-1})$ . В силу того, что спектр матрицы  $A_{-1}$  простой, каждому собственному значению  $\tilde{\lambda}_m^k$  оператора  $\tilde{\mathcal{A}}$  соответствует только один собственный вектор  $\tilde{\varphi}_{m,k} = (0, e^{\tilde{\lambda}_m^k t} c_m)^T$ , и нет корневых векторов. Более того, выполнены следующие оценки

$$0 < \inf_{k \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\varphi}_{m,k}\| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\varphi}_{m,k}\| < +\infty.$$

Спектр оператора  $\mathcal{A}$  имеет следующий вид (см. [16]):

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\ln |\mu_m| + 2k\pi i + \bar{o}(1/k), m = 1, \dots, n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Существует такое число  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $m = 1, \dots, n$  и всех  $k : |k| > N$  в каждом круге  $L_m^k(r^{(k)})$  содержится ровно одно собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ , где  $L_m^k(r^{(k)}) = L_m^k -$  круги с радиусами  $r^{(k)}$  и центрами в  $\tilde{\lambda}_m^k$ , причем выполнено соотношение  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (r^{(k)})^2 < \infty$

([17, теорема 4]). Обозначим данные собственные значения  $\mathcal{A}$  через  $\lambda_m^k$ , а соответствующие собственные вектора через  $\varphi_{m,k}$ ,  $m = 1, \dots, n, |k| > N$ .

Нормируем вектора  $\varphi_{m,k}$  так, чтобы  $P_m^{(k)} \tilde{\varphi}_{m,k} = \varphi_{m,k}$ , где  $P_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m^{(k)}} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda$  являются проекторами на соответствующие собственные подпространства, и  $R(\lambda, \mathcal{A}) -$  резольвента оператора  $\mathcal{A}$ . Семейства  $\{\varphi_{m,k}\}$  и  $\{\tilde{\varphi}_{m,k}\}$  квадратично близки:  $\sum_{|k| > N} \sum_{m=1}^n \|\varphi_{m,k} - \tilde{\varphi}_{m,k}\|^2 < \infty$ , откуда, в частности, следует, что

$$0 < \inf_{|k| > N} \|\varphi_{m,k}\| \leq \sup_{|k| > N} \|\varphi_{m,k}\| < +\infty. \quad (3.10)$$

Можно указать явный вид собственных векторов:  $\varphi_{m,k} = \left( (I - e^{\lambda_m^k} A_{-1}) x_{m,k}, e^{\lambda_m^k \theta} x_{m,k} \right)^T$ , где  $x_{m,k} \in \text{Ker} \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda_m^k)$ .

Вне кругов  $L_m^k$ ,  $|k| > N$ ,  $m = 1, \dots, n$  лежит только конечное число собственных чисел оператора  $\mathcal{A}$ , которые обозначим через  $\hat{\lambda}_s$ ,  $s = 1, \dots, \ell_N$  с учетом кратностей. Соответствующие обобщенные собственные вектора оператора  $\mathcal{A}$  обозначим через  $\hat{\varphi}_s$ . Семейство

$$\{\varphi\} = \{\varphi_{m,k}\} \cup \{\hat{\varphi}_s\} \quad (3.11)$$

образует базис Рисса пространства  $M_2$  ([16]).

Обозначим через

$$\{\psi\} = \{\psi_{m,k}\} \cup \{\widehat{\psi}_s\} \quad (3.12)$$

семейство собственных векторов сопряженного оператора  $\mathcal{A}^*$ , которое биортогонально семейству  $\{\varphi\}$ . Здесь  $\mathcal{A}^*\psi_{m,k} = \overline{\lambda_m^k}\psi_{m,k}$ ,  $m = 1, \dots, n$ ,  $|k| > N$ . Также можно указать явный вид собственных векторов сопряженного оператора:

$$\psi_{m,k} = \left( y_{m,k}, \left[ \overline{\lambda_m^k} e^{-\overline{\lambda_m^k}\theta} I - A_2^*(\theta) + \int_0^\theta e^{\overline{\lambda_m^k}(s-\theta)} \left( A_3^*(s) + \overline{\lambda_m^k} A_2^*(s) \right) ds \right] y_{m,k} \right)^T, \quad (3.13)$$

где  $y_{m,k} \in \text{Ker} \Delta_{\mathcal{A}}^*(\overline{\lambda_m^k})$ .

Семейство (3.12) образует базис  $M_2$ . Полные доказательства фактов на которые мы опирались в данном разделе могут быть найдены в работах [15, 16, 17].

Перейдем к постановке задачи управляемости в виде проблемы моментов. Для этого разложим условие управляемости  $x_T = \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix} = \int_0^T e^{At} \mathcal{B}u(t) dt$  через биортогональные базисы  $\{\varphi\}$  и  $\{\psi\}$ , заданные (3.11) и (3.12). Состояние  $x_T \in M_2$  достижимо за время  $T$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\varphi \in \{\varphi\}} \langle x_T, \varphi \rangle \varphi = \sum_{\varphi \in \{\varphi\}} \int_0^T \langle e^{At} \mathcal{B}u(t), \varphi \rangle dt \cdot \varphi.$$

Здесь и далее под  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  мы подразумеваем скалярное произведение в пространстве  $M_2$ :  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M_2}$ .

Пусть  $\{b_1, \dots, b_r\}$  – произвольный базис образа матрицы  $B$ , и  $\mathbf{b}_d = (b_d, 0)^T \in M_2$ ,  $d = 1, \dots, r$ . Тогда условие управляемости эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{aligned} \langle x_T, \psi \rangle &= \int_0^T \langle e^{At} \mathcal{B}u(t), \psi \rangle dt \\ &= \sum_{d=1}^r \int_0^T \langle e^{At} \mathbf{b}_d, \psi \rangle u_d(t) dt, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $\psi \in \{\psi\}$ ,  $u(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ . Используя представление (3.13) для элементов базиса  $\psi = \psi_{m,k}$ ,  $m = 1, \dots, n$ ,  $|k| > N$ , получим следующее тождество:

$$\langle e^{At} \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} = e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} = e^{\lambda_m^k t} \langle b_d, y_{m,k} \rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad (3.15)$$

где  $y_{m,k} \in \text{Ker} \Delta_{\mathcal{A}}^*(\overline{\lambda_m^k})$ . Введем обозначение:

$$q_{m,k}^d = k \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2}. \quad (3.16)$$

В силу (3.15), равенства (3.14) для  $\psi \in \{\psi_{m,k}, |k| > N, m = 1, \dots, n\}$  имеют вид:

$$k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle = \sum_{d=1}^r \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t) dt. \quad (3.17)$$

Далее, для элементов базиса  $\psi = \widehat{\psi}_s$ ,  $s = 1, \dots, \ell_N$ , верны тождества

$$\langle e^{At} \mathbf{b}_d, \psi \rangle = \langle \mathbf{b}_d, e^{A^*t} \psi \rangle = \widehat{q}_s^d(t) e^{\widehat{\lambda}_s t},$$



где  $\widehat{q}_s^d(t)$  – полиномы подходящих степеней. Следовательно, равенства (3.14) для  $\psi \in \{\widehat{\psi}_s\}$  имеют вид:

$$\langle x_T, \widehat{\psi}_s \rangle = \sum_{d=1}^r \int_0^T e^{\widehat{\lambda}_s t} \widehat{q}_s^d(t) u_d(t) dt. \quad (3.18)$$

Таким образом, состояние  $x_T \in M_2$  достижимо из точки 0 за время  $T > 0$  тогда и только тогда, когда для некоторых управлений  $u_d(\cdot) \in L_2(0, T)$ ,  $d = 1, \dots, r$  выполнены равенства (3.17) и (3.18).

Полученная проблема моментов (3.17)–(3.18) является основным объектом нашего последующего анализа. В конце раздела приведем две оценки играющие важную роль в дальнейших рассуждениях.

**Лемма 3.1** *Существует константа  $\delta_1 > 0$  такая, что*

$$|q_{m,k}^d| \leq \delta_1, \quad m = 1, \dots, n, |k| > N, d = 1, \dots, r. \quad (3.19)$$

**Лемма 3.2** *Существует такая последовательность  $\{\alpha_k\}$ ,  $\sum_{|k|>N} \alpha_k^2 < +\infty$ , что для всех  $m = 1, \dots, n$ ,  $|k| > N$ ,  $d = 1, \dots, r$  и  $t \in [0, T]$  имеет место оценка:*

$$\left| e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} - e^{\widetilde{\lambda}_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m,k} \rangle_{M_2} \right| \leq \frac{\alpha_k}{|k|}. \quad (3.20)$$

Доказательство данных утверждений может быть найдено в работе [14].

## 4 Необходимость условий управляемости

Изучим разрешимость системы равенств (3.17)–(3.18). Следующий классический результат является следствием теоремы Бари (см., например, [7],[24]).

**Лемма 4.1** *Рассмотрим проблему моментов*

$$s_k = \int_0^T g_k(t) u(t) dt, \quad T > 0, k \in \mathbb{N}, \quad (4.21)$$

где  $g_k(\cdot) \in L_2(0, T)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) *Для последовательности  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  проблема (4.21) имеет решение  $u(\cdot) \in L_2(0, T)$  тогда и только тогда, когда  $\{s_k\} \in \ell_2$ , т.е.  $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k^2 < +\infty$ ;*
- (ii) *семейство функций  $\{g_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $t \in [0, T]$  образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки  $\text{Cl Lin}\{g_k(t), k \in \mathbb{N}\}$ .*

Введем следующее обозначение:  $\mathcal{L}(0, T) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl Lin}\{g_k(t), k \in \mathbb{N}\} \subset L_2(0, T)$ . В работе [14] были доказаны следующие два утверждения о разрешимости проблемы моментов.

**Лемма 4.2** *Пусть для некоторого  $T_1 > 0$  функции  $\{g_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , определенные на  $[0, T_1]$ , образуют базис Рисса в  $\mathcal{L}(0, T_1) \subset L_2(0, T_1)$  и  $\text{codim } \mathcal{L}(0, T_1) < +\infty$ . Тогда для всех  $T$ :  $0 < T < T_1$  существует такое бесконечномерное подпространство  $\ell_T \subset \ell_2$ , что проблема моментов (4.21) неразрешима на отрезке  $[0, T]$  для последовательностей  $\{s_k\} \in \ell_T \setminus \{0\}$ .*

**Лемма 4.3** *Рассмотрим проблему моментов*

$$s_k = \sum_{d=1}^r \int_0^T g_k^d(t) u_d(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

в предположении, что  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^T |g_k^d(t)|^2 dt < +\infty$  для всех  $d = 1, \dots, r$ .

Тогда множество  $S_{0,T}$  последовательностей  $\{s_k\}$  для которых проблема (4.22) разрешима является нетривиальным подмножеством  $\ell_2$ , т.е.  $S_{0,T} \neq \ell_2$ .

Следующее утверждение (см. [14]) показывает, что множество  $\mathcal{R}_T$  состояний, достижимых из точки 0 посредством системы (2.4) с управлениями из  $L_2(0, T)$ , всегда является подмножеством  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  (см. также [8]).

**Лемма 4.4** *Если состояние  $x_T = \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix}$  достижимо из точки 0 посредством системы (2.4), тогда оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

$$(C1) \quad \sum_{|k| > N} \sum_{m=1}^n k^2 \left| \left\langle \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix}, \psi_{m,k} \right\rangle \right|^2 < \infty;$$

$$(C2) \quad \sum_{|k| > N} \sum_{m=1}^n k^2 \left\| P_m^{(k)} \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix} \right\|^2 < \infty;$$

$$(C3) \quad \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Перейдем к доказательству необходимости условий (i) и (ii) теоремы 1.1.

**Теорема 4.5** *Если не выполнено условие (i) теоремы 1.1, то есть существуют такие  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , что  $\Delta_{\mathcal{A}}^*(\lambda)y = 0$  и  $B^*y = 0$ , тогда система (1.1) не является точно управляемой ни за какое время  $T > 0$ .*

**Доказательство.** Условие (i) допускает следующую эквивалентную формулировку: не существует собственного вектора  $g$  оператора  $\mathcal{A}^*$ , который принадлежал бы  $\text{Ker } \mathcal{B}^*$ . Данное утверждение следует из явного вида (3.13) собственных векторов сопряженного оператора  $\mathcal{A}^*$ .

Предположим, что существует такой вектор  $g \neq 0$ , что  $\mathcal{A}^*g = \lambda g$  и  $g \in \text{Ker } \mathcal{B}^*$ . Рассмотрим произвольное состояние  $x_T \in \mathcal{R}_T$ . Имеет место равенство

$$\langle x_T, g \rangle = \int_0^T \langle u(t), \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^* t} g \rangle dt = 0.$$

Это означает, что для всех  $T > 0$  множество  $\mathcal{R}_T$  не плотно в  $M_2$  и, следовательно, не может быть равным  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , которое плотно в  $M_2$ , так как  $\mathcal{A}$  является инфинитезимальный генератор полугруппы. Следовательно, система не может быть управляемой. ■

Далее покажем, что управляемость пары  $(A_{-1}, B)$  является необходимым условием управляемости системы (1.1) вне зависимости от того является ли матрица  $A_{-1}$  вырожденной или нет.

**Теорема 4.6** *Пусть не выполнено условие (ii) теоремы 1.1, то есть пара  $(A_{-1}, B)$  не является управляемой. Тогда система (1.1) также не является точно управляемой.*

**Доказательство.** Из условия теоремы следует, что существуют такие  $\mu_0 \in \sigma(A_{-1})$  и  $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , что  $A_{-1}^* v_0 = \bar{\mu}_0 v_0$  и  $B^* v_0 = 0$ .

Рассмотрим вначале случай, когда  $\mu_0 = 0$  – неуправляемое собственное значение  $A_{-1}$ , то есть

$$A_{-1}^* v_0 = 0 \text{ и } B^* v_0 = 0. \quad (4.23)$$

Умножим уравнение (1.1) на вектор  $v_0^*$ :

$$v_0^* \dot{z}(t) = v_0^* A_{-1} \dot{z}(t-1) + \int_{-1}^0 [v_0^* A_2(\theta) \dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)] d\theta + v_0^* B u.$$

Учитывая соотношение (4.23) приходим к следующему равенству:

$$v_0^* \dot{z}(t) = \int_{-1}^0 [v_0^* A_2(\theta) \dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)] d\theta. \quad (4.24)$$

Если предположить, что система (1.1) является точно управляемой за некоторое время  $T > 0$ , тогда множество ее решений при различных допустимых управлениях должно совпадать с пространством  $H^1(T-1, T; \mathbb{C}^n)$ . Последнее означает, что

$$\{v_0^* \dot{z}(t), t \in [T-1, T]\} = L_2(T-1, T; \mathbb{C}).$$

С другой стороны оператор  $Q(z) = \int_{-1}^0 [v_0^* A_2(\theta) \dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)] d\theta$ , действующий из пространства  $H^1(T-2, T; \mathbb{C}^n)$  в пространство  $L_2(T-1, T; \mathbb{C})$  является оператором Фредгольма. Действительно, заменив время  $\tau = t + \theta$ , мы получим

$$Q(z) = \int_{t-1}^t [v_0^* A_2(\tau-t) \dot{z}(\tau) + v_0^* A_3(\tau-t) z(\tau)] d\tau.$$

Таким образом, оператор  $Q$  является компактным и, следовательно, его образ не может совпадать со всем пространством  $L_2(T-1, T; \mathbb{C})$ . Мы пришли к противоречию, которое доказывает неуправляемость в случае  $\mu_0 = 0$ .

Далее, рассмотрим случай, когда неуправляемыми являются только ненулевые собственные значения  $A_{-1}$ . Тогда, не нарушая общности, можно считать, что  $\det A_{-1} \neq 0$ . Действительно, если  $0 \in \sigma(A_{-1})$ , то существует такая матрица  $P$ , что  $A_{-1} + BP$  является невырожденной матрицей (см. [23]). При этом, очевидно, пара  $(A_{-1} + BP, B)$  остается неуправляемой. Тогда используя замену управления мы переходим к эквивалентной задаче управляемости для системы с невырожденным нейтральным слагаемым  $A_{-1} + BP$ .

Выполнение условия  $\det A_{-1} \neq 0$  позволяет выписать моментные равенства (3.17)–(3.18). Рассмотрим некоторый индекс  $m = m_0$ , определяющий неуправляемое собственное значение ( $A_{-1}^* v_0 = \bar{\mu}_{m_0} v_0$ ,  $B^* v_0 = 0$ ,  $v_0 \neq 0$ ), и соответствующее  $m_0$  подмножество равенств (3.17):

$$s_k = k \langle x_T, \psi_{m_0, k} \rangle = \sum_{d=1}^r \int_0^T e^{\lambda_{m_0}^k t} q_{m_0, k}^d u_d(t) dt, \quad |k| > N, \quad (4.25)$$

где  $q_{m_0, k}^d = k \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m_0, k} \rangle_{M_2}$ . Покажем, что существуют  $\{s_k\} \in \ell_2$  для которых проблема моментов (4.25) не разрешима.

При  $m = m_0$  собственные вектора  $\tilde{\mathcal{A}}$  имеют вид  $\tilde{\psi}_{m_0, k} = \left( v_0, \overline{\lambda_{m_0}^k} e^{-\overline{\lambda_{m_0}^k} \theta} v_0 \right)^T$ , откуда следует, что  $\langle \mathbf{b}_d, \tilde{\psi}_{m_0, k} \rangle_{M_2} = \langle b_d, v_0 \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$  для всех  $d = 1, \dots, r$  и всех  $|k| > N$ . Тогда,

используя лемму 3.2, мы получаем следующую оценку

$$\sum_{|k|>N} k^2 \sum_{d=1}^r \int_0^T \left| e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} \right|^2 dt < +\infty. \quad (4.26)$$

Из леммы 4.3 следует, что множество разрешимости системы (4.25) за произвольное время  $T > 0$  является нетривиальным линейным подмногообразием  $\ell_T \subset \ell_2$ ,  $\ell_T \neq \ell_2$ . Другими словами, существуют последовательности  $\{s_k\}_{|k|>N}$  для которых (4.25) не разрешимо. Это означает, что существуют состояния  $x_T$  которые удовлетворяют условию (C1) леммы 4.4, но не достижимы из точки 0 посредством системы (1.1). Таким образом,  $\mathcal{R}_T \neq \mathcal{D}(\mathcal{A})$  для произвольного  $T > 0$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

## 5 Достаточность условий управляемости в случае одномерного управления

В случае систем с одним управлением ( $r = 1$ ,  $B = b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ ) проблема моментов (3.17)–(3.18) принимает следующий вид:

$$\alpha_{m,k} \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle = \int_0^T e^{\lambda_m^k t} u(t) dt, \quad |k| > N, m = 1, \dots, n, \quad (5.27)$$

$$\langle x_T, \hat{\psi}_s \rangle = \int_0^T e^{\hat{\lambda}_s t} \hat{q}_s(t) u(t) dt, \quad s = 1, \dots, \ell_N, \quad (5.28)$$

где  $N$  достаточно велико, семейство (5.27) бесконечно,  $\hat{q}_j$  – полиномы, семейство (5.28) конечно, и  $\alpha_{m,k} = (\langle \mathbf{b}, \psi_{m,k} \rangle_{M_2})^{-1}$ ,  $\mathbf{b} = (b, 0)^T$ .

Из леммы 3.1 и явного вида базиса  $\{\psi\}$  оператора  $\mathcal{A}^*$  следует, что для всех  $m = 1, \dots, n$  и  $k : |k| > N$  верна оценка

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{1}{k} \alpha_{m,k} \right| \leq C_2 < +\infty.$$

Исследуем вопрос базисности семейств  $\{e^{\lambda_m^k t}\}$  и  $\{e^{\hat{\lambda}_s t} \hat{q}_s(t)\}$ . Пусть заданы некоторые, различные по модулю  $2\pi i$ , комплексные числа  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , задано  $N \in \mathbb{N}$ , и пусть множество  $\{\varepsilon_{m,k}, |k| > N, m = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}^n$  таково, что  $\sum_{m,k} |\varepsilon_{m,k}|^2 < +\infty$ . Обозначим через  $\mathcal{E}_N$  следующее (бесконечное) семейство функций:

$$\mathcal{E}_N = \{e^{(\delta_m + 2\pi i k + \varepsilon_{m,k})t}, \quad |k| > N, m = 1, \dots, n\}.$$

Далее, пусть  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  – множество различных комплексных чисел такое, что  $\varepsilon_j \neq \delta_m + 2\pi i k + \varepsilon_{m,k}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $m = 1, \dots, n$ ,  $|k| > N$ , и пусть  $m'_1, \dots, m'_r$  – некоторые натуральные числа. Обозначим через  $\mathcal{E}_0$  следующее (конечное) семейство функций:

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ e^{\varepsilon_j t}, t e^{\varepsilon_j t}, \dots, t^{m'_j - 1} e^{\varepsilon_j t} \right\}_{j=1, \dots, r},$$

и через  $\mathcal{E}$  семейство функций  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N \cup \mathcal{E}_0$ .

**Теорема 5.1** (i) Если  $\sum_{j=1}^r m'_j = (2N + 1)n$ , тогда семейство  $\mathcal{E}$  образует базис Рисса пространства  $L_2(0, n)$ .

(ii) Для  $T > n$ , независимо от количества элементов в  $\mathcal{E}_0$  семейство  $\mathcal{E}$  образует базис Рисса замыкания своей линейной оболочки в пространстве  $L_2(0, T)$ .

Доказательство данной теоремы, основанное на результатах работы [1], можно найти в [14]. Перейдем к доказательству достаточности условий управляемости.

**Теорема 5.2** Пусть  $r = 1$  в системе (1.1) и выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1. Тогда

- (1) система (1.1) является точно управляемой за произвольное время  $T > n$ ;
- (2) оценка времени управляемости является точной, т.е. система (1.1) неуправляема за время  $T \leq n$ .

**Доказательство.** Отметим, что размерности всех собственных пространств  $\mathcal{A}^*$  равны единице. Действительно, в противном случае существовал бы такой собственный вектор  $g$  оператора  $\mathcal{A}^*$ , что  $\langle \mathbf{b}, g \rangle_{M_2} = 0$ . Так как  $g = (y, z(\theta))^T$ , где  $y: \Delta_{\mathcal{A}}^*(\lambda_0)y = 0$ ,  $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A}^*)$ , и так как  $\langle \mathbf{b}, g \rangle_{M_2} = \langle b, y \rangle_{\mathbb{C}^n}$ , мы приходим к противоречию с условием (i).

Рассмотрим задачу (5.27)–(5.28). Из условия (i) следует, что  $\langle \mathbf{b}, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} \neq 0$  для всех  $m$  и  $k$ , а также все полиномы  $\{\widehat{q}_s(t)\}$ ,  $s = 1, \dots, \ell_N$  нетривиальны. По проблеме моментов построим следующие наборы функций:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left\{ e^{\lambda_m^k t}, |k| > N, m = 1, \dots, n \right\}, \\ \Phi_2 &= \left\{ e^{\widehat{\lambda}_s t} \widehat{q}_s(t), s = 1, \dots, \ell_N \right\}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 5.1 при  $T > n$ , и если  $N$  достаточно велико, множество функций

$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$$

образует базис Рисса в  $\text{Cl Lin } \Phi \subset L_2(0, T)$ . Тогда, в силу леммы 4.1, проблема моментов (5.27)–(5.28), разрешима тогда и только тогда, когда правая часть является элементом  $\ell_2$ , или, что то же самое, когда выполнено (C1) из леммы 4.4. В силу того, что (C1) эквивалентно (C3) получаем, что проблема моментов при  $T > n$  разрешима тогда и только тогда, когда  $x_T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , то есть  $\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Для доказательства утверждения (2) напомним, что количество элементов семейства  $\Phi_2$  равно  $\ell_N = (2N + 2)n$ . С другой стороны, из теоремы 5.1 следует, что в  $L_2(0, n)$

$$\text{codim Cl Lin } \Phi_1 = (2N + 1)n.$$

Следовательно, семейство  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  содержит  $n$  функций, которые представимы как линейная комбинация других функций этого семейства. Это означает, что коразмерность  $\mathcal{R}_T$  в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  не равна нулю:  $\text{codim } \mathcal{R}_T = n$ . То есть множество достижимости  $\mathcal{R}_T$  при  $T = n$  не равно  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  и система не является управляемой. При  $T < n$  из леммы 4.2 следует, что коразмерность множества  $\mathcal{R}_T$  в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  бесконечна. ■

## 6 Достаточность условий управляемости в случае многомерного управления

Рассмотрим случай  $\dim B = r > 1$ . Предполагаем, что пара  $(A_{-1}, B)$  приведена к форме Фробениуса, то есть  $A_{-1} = \text{diag}\{F_1, \dots, F_r\}$ ,  $\dim F_i = s_i$ , и  $F_i$  имеют вид (2.9);  $B = \text{diag}\{g_1, \dots, g_r\}$ , где  $g_i = (0, 0, \dots, 1)^T \in \mathbb{C}^{s_i}$ . Хорошо известно, что

$$\max_i \dim F_i = n_1, \quad (6.29)$$

где  $n_1$  – первый индекс управляемости пары  $(A_{-1}, B)$ , т.е. наименьшее натуральное число  $\nu$  удовлетворяющее соотношению  $\text{rank}(B, A_{-1}B, \dots, A_{-1}^{\nu-1}B) = n$ .

Опираясь на представление в форме Фробениуса, перепишем бесконечную часть проблемы моментов (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^1 u_1(t) dt + \sum_{d \neq 1} \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t) dt, \quad m \in S_1, \\ k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^2 u_2(t) dt + \sum_{d \neq 2} \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t) dt, \quad m \in S_2, \\ &\dots \\ k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^r u_r(t) dt + \sum_{d \neq r} \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t) dt, \quad m \in S_r, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где  $S_1 = \{1, \dots, s_1\}$ ,  $S_2 = \{s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2\}$ , ...,  $S_r = \{s_1 + \dots, s_{r-1} + 1, \dots, n\}$ .

Применим теорему 5.1 к множеству функций из (6.30). Фиксируем  $d \in \{1, \dots, r\}$  и выберем произвольное подмножество  $L \subset \{1, \dots, n\}$ .

**Теорема 6.1** Для произвольно выбранных  $d, L$ , для всех  $T > n' = |L|$  множество

$$\Phi_1 = \left\{ e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d, \quad |k| > N; m \in L \right\}$$

образует базис Рисса замыкания своей линейной оболочки  $\text{Cl Lin } \Phi_1$  в  $L_2(0, T)$ .

Если  $T = n'$ , тогда  $\text{codim Cl Lin } \Phi_1 = (2N + 1)n'$  в пространстве  $L_2(0, n')$ .

**Доказательство.** Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{T} : \text{Lin } \Phi_1 \rightarrow \text{Lin } \Phi_1$  определенный на элементах  $\Phi_1$  соотношениями

$$\mathcal{T}(e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d) = e^{\lambda_m^k t}, \quad |k| > N, m \in L.$$

В силу леммы 3.1 семейство  $\{q_{m,k}^d\}$  является равномерно ограниченным. Тогда из теоремы 5.1 следует, что оператор  $\mathcal{T}$  ограничен в смысле  $L_2(0, T)$  и его продолжение на  $L = \text{Cl Lin } \Phi_1$  является ограниченным взаимно однозначным оператором из  $L$  в  $L$ .

Следовательно, так как в силу теоремы 5.1 образы элементов из  $\Phi_1$  образуют базис Рисса пространства  $L$ , то  $\Phi_1$  также является базисом Рисса  $L$  в  $L_2(0, T)$ . ■

Также далее нам потребуется следующий результат (см. [14, теорема 5.5]).

**Теорема 6.2** Пусть для системы (2.4) существует натуральное число  $N$  и время  $T_0 > 0$  такие, что проблема моментов (3.17) для  $T = T_0$  разрешима для всех последовательностей  $\{k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle\}_{|k| > N}$  удовлетворяющих (С1).

Тогда из условия (i) следует, что  $\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при  $T > T_0$ .

Перейдем к доказательству основного результата данного раздела.

**Теорема 6.3** Пусть для произвольной системы вида (1.1) выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1. Тогда система (1.1) является точно управляемой, при этом критическое время управления  $T_0 = n_1$ , где  $n_1$  – первый индекс управляемости пары  $(A_{-1}, B)$ .

**Доказательство.** Предполагаем, что пара  $(A_{-1}, B)$  приведена к форме Фробениуса. Тогда для всех  $i = 1, \dots, r$ , всех  $m \in S_i$ , всех  $d \neq i$  и всех  $|k| > N$  верны соотношения

$$\left\langle \mathbf{b}_d, \tilde{\psi}_{m,k} \right\rangle_{M_2} = \langle b_d, c_m \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0, \quad (6.31)$$

где  $c_m: A_{-1}c_m = \mu_m c_m$ . Тогда для всех  $i = 1, \dots, r$  и  $m \in S_i$  имеет место равенство

$$\sum_{d \neq i} \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t) dt = \sum_{d \neq i} \int_0^T k \left( e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} - e^{\tilde{\lambda}_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \tilde{\psi}_{m,k} \rangle_{M_2} \right) u_d(t) dt. \quad (6.32)$$

Для произвольного  $N \in \mathbb{N}$  проблему моментов (6.30) можно записать в операторном виде

$$\{S_{m,k}\} = Z_N u(\cdot) + Q_N u(\cdot),$$

где последовательность  $\{S_{m,k}\} = \{k \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle\}$  и операторы  $Z_N, Q_N : L_2(0, T; \mathbb{C}^r) \rightarrow \ell_2$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} Z_N u(\cdot) &= \left\{ \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^i u_i(t) dt, |k| > N \right\}, \\ Q_N u(\cdot) &= \left\{ \sum_{d \neq i} \int_0^T k \left( e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} - e^{\tilde{\lambda}_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \tilde{\psi}_{m,k} \rangle_{M_2} \right) u_d(t) dt, |k| > N \right\}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 6.1 для достаточно больших  $N$  и для  $T \geq n_1$  оператор  $Z_N$  является сюръективным, то есть образ пространства  $L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$  есть все  $\ell_2$ . Из леммы 3.2 следует, что при достаточно больших  $N$  операторы  $Q_N$  являются компактными, и, более того,  $\|Q_N\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$ .

Покажем, что существует такое  $N_0 \in \mathbb{N}$ , что для всех  $N > N_0$ :

$$\text{Im}[Z_N + Q_N] = \ell_2.$$

Так как  $\text{Im}Z_N = \ell_2$ , то существует такая константа  $\gamma_N > 0$ , что  $\|Z_N^* x\| \geq \gamma_N \|x\|$  для всех  $x \in \ell_2$  (см, например, [21, Theorem 4.13]). Для  $N > N_0$ , введем обозначение  $\ell_2^N = \{\{S_{m,k}\}_{|k|>N} : \sum_{|k|>N} |s_k|^2 < +\infty\}$ . Тогда  $Z_N = PZ_{N_0}$ , где проекторы  $P : \ell_2^{N_0} \rightarrow \ell_2^N$  определены как

$$P(\{S_{m,k}\}_{|k|>N_0}) = \{S_{m,k}\}_{|k|>N}.$$

Следовательно,  $Z_N^* = Z_{N_0}^* P^*$  и  $\|P^* x\| = \|x\|$ , откуда получаем

$$\|Z_N^* x\| = \|Z_{N_0}^* P^* x\| \geq \gamma_{N_0} \|x\|.$$

Последнее означает, что для всех  $N > N_0$  и всех  $x \in \ell_2$  выполнено  $\|Z_N^* x\| \geq \gamma \|x\|$ , где  $\gamma = \gamma_0$ . Так как  $\|Q_N\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$ , то величину  $\|Z_N - (Z_N + Q_N)\| = \|Q_N\|$  можно сделать как угодно малой, выбирая  $N$ , например, таким что  $\|Q_N\| \leq \frac{\gamma}{2}$ . Тогда

$$\|[Z_N^* + Q_N^*]x\| \geq \|Z_N^* x\| - \|Q_N^* x\| \geq \gamma \|x\| - \frac{\gamma}{2} \|x\| = \frac{\gamma}{2} \|x\|.$$

Следовательно, оператор  $Z_N + Q_N$  является оператором на и его образ равен  $\ell_2$ .

Таким образом, проблема моментов (6.30) разрешима при  $T \geq n_1$  и достаточно больших  $N \in \mathbb{N}$ . Применяя теорему 6.2, получаем, что  $R_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$  при  $T > n_1$ .

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 5.2, можно показать, что коразмерность  $\mathcal{R}_{n_1}$  в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  конечна и не менее, чем  $n_1$ , и, следовательно, система (1.1) неуправляема за время  $T = n_1$ . Для  $T < n_1$  коразмерность  $\mathcal{R}_T$  в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  бесконечна.  $\blacksquare$

## 7 Пример

Рассмотрим трехмерную систему заданную уравнением (1.1) с матрицами

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и функции  $A_2(\theta)$ ,  $A_3(\theta)$  таковы, что  $\text{rank}(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) B) = n$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Применим замены управления и фазовых координат  $u(t) = P\dot{z}(t-1) + v(t)$ ,  $w = Cz$  заданные матрицами:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и приходим к следующей системе:

$$\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1) + \int_{-1}^0 \widehat{A}_2(\theta)\dot{w}(t+\theta) d\theta + \int_{-1}^0 \widehat{A}_3(\theta)w(t+\theta) d\theta + \widehat{B}v, \quad (7.33)$$

где матрицы имеют вид

$$\widehat{A}_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_1, b_2). \quad (7.34)$$

Пусть оператор  $\mathcal{A}$  с собственными значениями  $\lambda_m^k$  отвечает преобразованной системе (7.33)–(7.34), и оператор  $\widetilde{\mathcal{A}}$  с собственными значениями  $\widetilde{\lambda}_m^k$  отвечает системе без возмущения  $\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1)$ . Так как пара  $(\widehat{A}_{-1}, \widehat{B})$  приведена к форме Фробениуса, то собственные вектора  $\widetilde{\psi}_{m,k}$  оператора  $\widetilde{\mathcal{A}}^*$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_1, \widetilde{\psi}_{m,k} \rangle &= 0, & m &= 2, 3 \\ \langle \mathbf{b}_2, \widetilde{\psi}_{m,k} \rangle &= 0, & m &= 1, \quad \mathbf{b}_i = (b_i, 0) \in M_2. \end{aligned}$$

Далее,  $q_{m,k}^d = k\langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle$ , где  $\psi_{m,k}$  являются собственными векторами оператора  $\mathcal{A}^*$ , и бесконечная часть проблемы моментов (3.17) принимает вид:

$$\begin{aligned} k \langle x_T, \psi_{1,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_1^k t} q_{1,k}^1 u_1(t) dt + \int_0^T f_{1,k}^2(t) u_2(t) dt, \\ k \langle x_T, \psi_{2,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_2^k t} q_{2,k}^2 u_2(t) dt + \int_0^T f_{2,k}^2(t) u_1(t) dt, \\ k \langle x_T, \psi_{3,k} \rangle &= \int_0^T e^{\lambda_3^k t} q_{3,k}^2 u_2(t) dt + \int_0^T f_{3,k}^2(t) u_1(t) dt, \quad |k| > N \end{aligned}$$



где функции

$$f_{m,k}^d(t) = k \left( e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle - e^{\tilde{\lambda}_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \tilde{\psi}_{m,k} \rangle \right)$$

в силу леммы 3.2 удовлетворяют оценке  $|f_{m,k}^d(t)| \leq \alpha_k$ ,  $\sum_k \alpha_k^2 < +\infty$ .

Индекс управляемости  $n_1$  пары  $(\hat{A}_{-1}, \hat{B})$  (или пары  $(A_{-1}, B)$ ) равен 2. Условия (i) и (ii) теоремы 1.1 выполнены и, следовательно, система является точно управляемой с критическим временем управляемости  $T_0 = 2$ .

## Вывод

Предложен подход к решению задачи точной управляемости при помощи проблемы моментов. Сложность выбора базиса для построения проблемы моментов преодолена при помощи замены управления и фазовых координат, что позволяет привести более наглядное доказательство критерия точной управляемости. Данный подход открывает новые перспективы для анализа как управляемости, так и стабилизируемости более общего класса систем с нейтральным оператором  $Kf = \sum_{i=1}^r A_{h_i} f(h_i)$ ,  $h_i \in [-1, 0]$ .

## Благодарности

Данное исследование проведено при частичной поддержке PROMEP (Mexico) via "Proyecto de Redes" и Polish Nat. Sci. Center, грант No 514 238 438.

## Список литературы

- [1] Avdonin S. A., Ivanov S. A. Families of exponentials. – Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] Banks H. T., Jacobs M. Q., Langenhop C. E. Characterization of the controlled states in  $W_2^{(1)}$  of linear hereditary systems // SIAM J. Control, 13:611–649, 1975.
- [3] Bartosiewicz Z. A criterion of closedness of an attainable set of a delay system // Systems Control Lett., 3(4):211–215, 1983.
- [4] Bensoussan A., Prato G. Da., Delfour M. C., Mitter S. K. Representation and control of infinite-dimensional systems. – Vol. 1. Birkhäuser, Boston, MA, 1992.
- [5] Burns J. A., Herdman T. L., Stech H. W. Linear functional-differential equations as semigroups on product spaces. // SIAM J. Math. Anal., 14(1):98–116, 1983.
- [6] Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971.
- [7] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.
- [8] Ito K., Tarn T. J. A linear quadratic optimal control for neutral systems. // Nonlinear Anal., 9(7):699–727, 1985.
- [9] Jacobs M. Q., Langenhop C. E. Criteria for function space controllability of linear neutral systems. // SIAM J. Control Optimization, 14(6):1009–1048, 1976.

- [10] Хартовский В. Е., Павловская А. Т. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа. // Автомат. и телемех., (5):59–79, 2013.
- [11] Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions. // SIAM J. Control Optim., 16(4):599–645, 1978.
- [12] Марченко В. М. О полной управляемости систем с запаздыванием. // Проблемы Управления и Теории Информации., 8(5-6):421–432, 1979.
- [13] O'Connor D. A., Tarn T. J. On the function space controllability of linear neutral systems. // SIAM J. Control Optim., 21(2):306–329, 1983.
- [14] Rabah R., Sklyar G. M. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach. // SIAM J. Control Optim., 46(6):2148–2181, 2007.
- [15] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems. // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 337(1):19–24, 2003.
- [16] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space. // J. Differential Equations, 214(2):391–428, 2005.
- [17] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. On strong regular stabilizability for linear neutral type systems. // J. Differential Equations, 245(3):569–593, 2008.
- [18] Rabah R., Sklyar G. M. On exact controllability of linear time delay systems of neutral type. // In Applications of time delay systems, volume 352 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., pages 165–171. Springer, Berlin, 2007.
- [19] Rabah R., Sklyar G. M., Barkhayev P. Yu. Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems. // ESAIM Control Optim. Calc. Var., 18(3):656–692, 2012.
- [20] Rivera Rodas H., Langenhop C. E. A sufficient condition for function space controllability of a linear neutral system. // SIAM J. Control Optim., 16(3):429–435, 1978.
- [21] Rudin W. Functional analysis. – International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.
- [22] Shklyar B. Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials. // Diff. Equ. Appl., 3(2):171–188, 2011.
- [23] Wonham W. M. Linear multivariable control: a geometric approach. – Springer, New York, third ed., 1985.
- [24] Young R. M. An introduction to nonharmonic Fourier series. – Academic Press, New York, 1980.