



HAL
open science

Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i -acycliques. Suites spectrales basiques.

Alberto Arabia

► To cite this version:

Alberto Arabia. Espaces de configuration généralisés. Espaces topologiques i -acycliques. Suites spectrales basiques.. 2016. hal-01325863v2

HAL Id: hal-01325863

<https://hal.science/hal-01325863v2>

Preprint submitted on 7 Jun 2016 (v2), last revised 17 Nov 2016 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Espaces de configuration généralisés

Espaces topologiques *i*-acycliques

Suites spectrales basiques

Alberto Arabia (*)

7 juin 2016

Abstract. The *generalized* configuration spaces of a topological space \mathbf{X} are the subspaces $\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m \subseteq \mathbf{X}^m$, defined, for all $\ell \leq m$, as:

$$\begin{cases} \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X}^m \mid \text{Card}\{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} \mathbf{X}^m := \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m \setminus \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m, \quad \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) := \Delta_m \mathbf{X}^m. \end{cases}$$

They are endowed with the action of the symmetric group \mathcal{S}_m permuting coordinates. Our first motivation in this work was to transpose standard problems on classical configuration spaces $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ to the generalized ones and to try to solve them for large families of spaces using uniform methods. Among the questions we considered, the following had quite complete answers with cohomology coefficients in zero characteristic fields.

- Given $a \in \mathbb{N}$, find lower bounds for the representation stability and character polynomiality, in the Church-Farb sense ([8]), of the family $\{\mathcal{S}_m : H(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$.
- Find closed formulas for the character of the representation $\mathcal{S}_m : H(\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m)$.
- Compute the Poincaré polynomial of the quotients of $\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m$ by finite subgroups of \mathcal{S}_m . Show that, for fixed $a \in \mathbb{N}$ the Betti numbers of these spaces are given by ‘*universal*’ polynomials on m and the Betti numbers of \mathbf{X} .
- Prove the degeneracy of the Leray spectral sequences for usual maps between generalized configuration spaces, e.g. the canonical projections $\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.

In our approach to these problems, we used what we call ‘*the fundamental complex of \mathbf{X} for $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$* ’. This is a particular complex of graded \mathcal{S}_m -modules

$$0 \rightarrow H_c^{*- \ell + 1}(\Delta_1 \mathbf{X}^m) \rightarrow \dots \rightarrow H_c^{*-1}(\Delta_{\ell-1} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0,$$

having the remarkable property of being exact whenever the ‘*interior*’ cohomology of \mathbf{X} , *i.e.* the image of the natural map $H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$, vanishes. Moreover, these properties are equivalent when \mathbf{X} is an oriented topological manifold (th. 3.2.3).

We call ‘*i-acyclic*’ any space with null interior cohomology. First examples of such are given by non-compact acyclic spaces, non-compact connected real Lie groups, and, more generally, if \mathbf{X} is *i-acyclic*, by every open subset $U \subseteq \mathbf{X}$, every quotient \mathbf{X}/W by a finite group W , and every cartesian product $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ for arbitrary \mathbf{Y} .

An important part of this article is about what follows the fact that the fundamental complex is an \mathcal{S}_m -module resolution for $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$, and thereafter, that questions about representation stability, character formulas and Betti numbers, may be tracked through recursive methods. Another important part, is devoted to the design of a special spectral sequence that creates a bridge from configuration spaces of *i-acyclic* spaces to those of general spaces, allowing to undertake the generalization of known results of the first category of spaces.

(*) Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact : alberto.arabia@imj-prg.fr.

– For the representation stability problem, we prove the following theorem.

Theorem (8.8.7). *Let \mathbf{X} be an i -acyclic pseudomanifold, connected oriented of dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. For $a, i \in \mathbb{N}$, the family of representations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}$ is stationary for $m \geq 4i$, if $d_{\mathbf{X}} = 2$, and for $m \geq 2i$, if $d_{\mathbf{X}} \geq 3$. The corresponding families of characters and Betti numbers are (hence) polynomial within the same range of integers.*

The theorem was first proved by Church ([7]) in the case of a smooth manifold \mathbf{X} and for the family $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))\}_m$. Our methods are completely different from those of Church, who relies on the work of Totaro ([28]) on the Leray spectral sequence associated to the embedding $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \hookrightarrow \mathbf{X}^m$ and where \mathbf{X} is a smooth manifold.

– For the character formula problem, we generalize Macdonald’s well-known formula for the cohomology of the cartesian product \mathbf{X}^m ([24]), to the case of the usual configuration space $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$.

Theorem (9.5.3). *Let \mathbf{X} be an i -acyclic space. If $\alpha \in \mathcal{S}_m$, we have*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = T^m \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d},$$

where $\chi_c(\mathbf{F}_m)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha : H_c^i(\mathbf{F}_m)) (-T)^i$, and where $(1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m})$ is the type of the permutation α , μ is the Möbius function, $\mathcal{P}_c(_)$ is the Poincaré polynomial of $H_c(_)$, and $(_)!$ denotes the decreasing factorial.

– For the Poincaré polynomial problem, we settled the case of $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ by a simple closed formula, almost immediate consequence of the i -acyclicity property, while for the quotients of $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ by finite subgroups of \mathcal{S}_m , we use the previous character formula (9.5.3). As examples, we worked through the cases of the ‘cyclic’ configuration space $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{C}_m$, where $\mathbf{C}_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, and of the ‘unordered’ configuration space $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathcal{S}_m$. The following equalities hold whenever \mathbf{X} is an i -acyclic space.

$$\text{Theorem (5.2.1): } \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(-T) = T^m \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T)}{T} \right)^m.$$

Theorem (10.2.1):

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T) = \frac{T^m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d},$$

where $\phi(_)$ denotes the Euler’s phi function.

Theorem (10.3.1)

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))(-T) = \frac{T^m}{m!} \sum_{\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})} h_{\lambda} \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d},$$

where h_{λ} is the cardinal of the set of permutations of \mathcal{S}_m whose cycle decomposition is of type $\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})$.

– The particularly simple form of the Poincaré polynomial of $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ suggested a sort of cohomological triviality for the projections $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ and consequently, the degeneration of the associated Leray spectral sequences. We show that this is indeed the case when \mathbf{X} is i -acyclic and locally connected (Th. 11.4.9).

A striking characteristic of i -acyclic spaces is that ‘any’ space \mathbf{M} may be realized as a difference $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\geq 0} \setminus \mathbf{M}_{> 0}$ where both $\mathbf{M}_{\geq 0}$ and $\mathbf{M}_{> 0}$ are i -acyclic. This simple observation leads to the construction of spectral sequences $(\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (7.5.2) converging to $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ and such that the \mathbb{E}_1 page only concerns configuration spaces for i -acyclic spaces. We have (8.9.6-(b)):

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1,m)} \text{ind}_{H_\tau \times G_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma \boxtimes H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})),$$

with $Q := i - (m - (p+1))(d_M - 1)$ and where $\mathcal{Y}(p+1, m)$ is the set of Young diagrams of m boxes and $p+1$ rows, $H_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)}$ and $G_\tau \subseteq \mathcal{S}_{p+1}$ are subgroups of the stabilizer \mathcal{S}_τ of τ in \mathcal{S}_m , the first acting through the alternate representation σ , the second by permuting coordinates. We call ‘basic’ this spectral sequence. The construction makes it compatible with pull-backs and allows transfer of the stability and monotonicity ranks, from the known families $\{\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{> 0}) \rightarrow \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_{> 0})\}_m$, to the general non i -acyclic ones $\{\mathbf{F}_m(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M})\}_m$. We were able in this way to extend theorem 8.8.7, and so Church’s theorem, to oriented pseudomanifolds, in particular, to complex algebraic varieties whether they are smooth or not.

Theorem (8.9.8). *Let \mathbf{M} be a pseudomanifold, connected oriented of real dimension $d_M \geq 2$. Given $a, i \in \mathbb{N}$, the family of representations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{M}^m)\}$ is stationary for $m \geq 4i$, if $d_M = 2$, and for $m \geq 2i$, if $d_M \geq 3$. The corresponding families of characters and Betti numbers are (hence) polynomial on the same range of integers.*

To conclude, we believe that even if there are many questions still to be settled, the usefulness of the fundamental complexes as a combinatorial tool to approach them in the case of i -acyclic spaces, and the usefulness of basic spectral sequences to permeate the broader context of general pseudomanifolds, should be clear following this work.

Résumé. Les espaces de configuration « généralisés » d’un espace topologique \mathbf{X} sont les sous-espaces $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m \subseteq \mathbf{X}^m$ définis, pour $0 < \ell \leq m$, par

$$\begin{cases} \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{X}^m \mid \text{Card}\{z_1, \dots, z_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_\ell \mathbf{X}^m := \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m \setminus \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m, \quad \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) := \Delta_m \mathbf{X}^m. \end{cases}$$

Ils sont munis de l’action du groupe symétrique \mathcal{S}_m par permutation de coordonnées. Notre première motivation dans ce travail a été de transposer certaines questions standard sur les espaces de configuration classiques $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ aux espaces de configuration généralisés, pour ensuite tenter de les résoudre pour des larges familles d’espaces à l’aide de méthodes uniformes. Parmi ces questions, les suivantes ont trouvé des réponses très complètes pour les coefficients de cohomologie dans un corps de caractéristique nulle.

- Pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, trouver des bornes de stabilité de représentation et de polynomialité de caractère, au sens de Church-Farb ([8]), de la famille $\{H(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$.
- Calculer la formule des caractères des représentations $\mathcal{S}_m : H(\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m)$.
- Calculer le polynôme de Poincaré des quotients de $\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m$ par des sous-groupes de \mathcal{S}_m . Montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, les nombres de Betti de ces espaces sont donnés un polynôme « universel » en m et en les nombres de Betti de \mathbf{X} .
- Montrer que la suite spectrale de Leray des fibrations entre espaces de configuration dégénèrent, notamment celles associées aux projections $\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.

Ces questions sont abordées au moyen de ce que nous appelons le « *complexe fondamental de \mathbf{X} pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$* ». Il s'agit d'un complexe de \mathcal{S}_m -modules gradués :

$$0 \rightarrow H_c^{*-\ell+1}(\Delta_1 \mathbf{X}^m) \rightarrow \cdots \rightarrow H_c^{*-1}(\Delta_{\ell-1} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_\ell \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0,$$

qui a la propriété remarquable d'être exact lorsque la cohomologie « *intérieure* » de \mathbf{X} , *i.e.* de l'image de l'application naturelle $H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$, est nulle. Il y a même équivalence de ces propriétés si \mathbf{X} est une variété topologique orientable (th. 3.2.3).

Nous appelons « *i-acyclique* » tout espace sans cohomologie intérieure. Les premiers exemples de tels sont les espaces acycliques connexes non compacts, les groupes de Lie réels connexes non compacts en sont des exemples, et, plus généralement, si \mathbf{X} est *i-acyclique*, tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, tout quotient \mathbf{X}/W par un groupe fini W , et tout produit cartésien $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, où \mathbf{Y} est quelconque, le sont également.

Une large partie de cet article s'intéresse aux conséquences du fait que le complexe fondamental est une résolution par \mathcal{S}_m -modules de $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$. Les questions de stabilité de représentations, de formules de caractères, de nombres de Betti, sont alors susceptibles d'approches récursives. Une autre partie importante est consacrée à la conception d'une suite spectrale particulière qui établit un pont entre les espaces de configuration des espaces *i-acycliques* et ceux des espaces généraux, ce qui permet d'entreprendre la généralisation des résultats connus des premiers.

– Pour la stabilité de représentations, nous prouvons le théorème suivant.

*Théorème (8.8.7). Soit \mathbf{X} une variété topologique ou une pseudovariété *i-acyclique*, connexe orientable et de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\ell, m-a} \mathbf{X}^m; k)\}_m$ est stationnaire pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{X}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{X}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.*

Le théorème est dû à Church ([7]) dans le cas où \mathbf{X} une variété différentielle et pour la famille $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))\}_m$. Notre approche est totalement différente de celle de Church qui s'appuie sur les travaux de Totaro ([28]) sur la suite spectrale de Leray associé au plongement $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \hookrightarrow \mathbf{X}^m$ lorsque \mathbf{X} est une variété différentielle.

– Pour le problème de la formule des caractères, nous étendons la formule bien connue de Macdonald pour la cohomologie des produits cartésiens \mathbf{X}^m ([24]), au cas des espaces de configuration $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$.

*Théorème (9.5.3). Soit \mathbf{X} un espace *i-acyclique*. Si $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = T^m \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)^{\underline{\mu_d}}}{dT^e} \right),$$

où $\chi_c(\mathbf{F}_m)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha : H_c^i(\mathbf{F}_m)) (-T)^i$, et où $(1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m})$ est le type de la permutation α , μ est la fonction de Möbius, $\mathcal{P}_c(_)$ est le polynôme de Poincaré de $H_c(_)$, et $(_)^{\underline{}}$ est la factorielle décroissante.

– Pour le problème des polynômes de Poincaré, le cas de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ relève d'une formule fermée très simple conséquence de la *i-acyclité* de \mathbf{X} , tandis que les cas plus généraux des quotients de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ par des sous-groupes finis de \mathcal{S}_m sont traités via la formule des caractères 9.5.3. C'est ainsi que nous traitons le cas de l'espace des configurations « *cycliques* » $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{C}_m$, où $\mathbf{C}_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, et celui des configurations « *non ordonnées* » $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathcal{S}_m$.

Notons, $\mathcal{P}_c(_)$ le polynôme de Poincaré de $H_c(_)$, $\phi(_)$ la fonction indicatrice d'Euler, μ la fonction de Möbius, et $(_)^\mathbb{Z}$ la factorielle décroissante. Pour tout espace i -acyclique \mathbf{X} , nous prouvons les égalités suivantes.

$$\text{Théorème (5.2.1)} : \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(-T) = T^m \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T)}{T} \right)^m,$$

Théorème (10.2.1) :

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T) = \frac{T^m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

Théorème (10.3.1)

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))(-T) = \frac{T^m}{m!} \sum_{\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d},$$

où h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_m dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})$.

– L'expression simple du polynôme de Poincaré de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ suggérerait l'existence d'une forme de trivialité cohomologique des projections $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, et donc la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées. Nous montrons que c'est en effet le cas lorsque \mathbf{X} est i -acyclique et localement connexe (Th. 11.4.9).

Un fait remarquable des espaces i -acycliques est que 'tout' espace \mathbf{M} peut être réalisé comme différence $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\geq 0} \setminus \mathbf{M}_{> 0}$, où $\mathbf{M}_{\geq 0}$ et $\mathbf{M}_{> 0}$ sont i -acycliques. Cette observation simple conduit à la construction de suites spectrales $(\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (7.5.2) qui convergent vers $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ et dont la page \mathcal{E}_1 concerne seulement des espaces de configuration pour des espaces i -acycliques. Nous avons (8.9.6-(b)) :

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1,m)} \text{ind}_{H_\tau \times G_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma \boxtimes H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})),$$

où $Q := i - (m - (p+1)) (d_{\mathbf{M}} - 1)$, $\mathcal{Y}(p+1, m)$ est l'ensemble des diagrammes de Young à m boîtes et $p+1$ lignes, $H_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)}$ et $G_\tau \subseteq \mathcal{S}_{p+1}$ sont des sous-groupes du stabilisateur \mathcal{S}_τ de τ dans \mathcal{S}_m , le premier agissant via la représentation par la signature σ , le second agissant sur $\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0})$ par permutation de coordonnées. Nous appelons ces suites spectrales « basiques ». La construction est compatible aux images inverses et permet le transfert des rangs de monotonie et stabilité, déjà connus pour les familles $\{\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{> 0}) \rightarrow \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_{> 0})\}_m$, au cas des familles non i -acycliques $\{\mathbf{F}_m(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M})\}_m$. C'est ainsi que nous avons été en mesure de généraliser le théorème 8.8.7, et donc aussi celui de Church, aux pseudovariétés orientées, en particulier, aux variétés algébriques complexes qu'elles soient lisses ou non.

Théorème (8.9.8). *Soit \mathbf{M} une pseudovariété connexe orientée de dimension réelle $d_{\mathbf{M}} \geq 2$. Pour tout $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{M}^m)\}_m$ est stationnaire pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{M}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{M}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.*

En conclusion, nous pensons que même s'il reste beaucoup de questions ouvertes, l'utilité des complexes fondamentaux en tant qu'outil d'approche combinatoire dans le cas des espaces i -acycliques, et l'utilité des suites spectrales basiques pour s'infiltrer dans le contexte plus large des pseudovariétés générales, devrait être clair d'après ce travail.

Table des matières

0. Introduction	7
1. Espaces i-acycliques	16
1.1 Généralités sur les espaces topologiques considérés	16
1.2 Espaces i -acycliques et \cup -acycliques	18
1.3 Caractérisations de la i -acyclicité	19
2. Espaces de configuration généralisés	22
2.1 Définitions et notations	22
2.2 Fibrations des espaces de configuration généralisés	23
2.3 Sous-espaces $\mathbf{F}_p(\mathbf{X})$ et décomposition de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$	24
2.4 Sur la dimension cohomologique et la finitude de $\Delta_{\gamma\ell} \mathbf{X}^m$	25
3. Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux	26
3.1 Théorème de scindage pour $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{X}^m$	26
3.2 Complexe fondamental de $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{X}^m$	29
3.3 Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{F}^\lambda(\mathbf{X})$	30
3.4 Sous-espaces $\mathbf{F}^q(\mathbf{X})$ et sous-groupes $\mathcal{S}^q \subseteq \mathcal{S}_m$	33
3.5 Complexe fondamental de $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{F}^q(\mathbf{X})$	34
4. Rappels sur les nombres de Stirling	35
4.1 Factorielles croissantes et décroissantes	35
4.2 Nombres de Stirling de première espèce	35
4.3 Nombres de Stirling de deuxième espèce	37
4.4 Nombres de Stirling non signés et cardinaux	38
5. Cohomologie des espaces de configuration, cas i-acyclique	39
5.1 Généralités sur le polynôme de Poincaré	39
5.2 Polynômes de Poincaré de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ et de $\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m$	40
5.3 Polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{X}^m$	43
5.4 Polynôme universel pour $\Delta_{\leq\ell} \mathbf{X}^m$	44
6. Représentations du groupe symétrique	44
6.1 Notations pour les décompositions et les diagrammes de Young	44
6.2 Décomposition ouverte \mathcal{S}_m -stable de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$	46
6.3 Foncteurs d'induction $\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et \mathbf{I}_ℓ^m	47
6.4 Expression de $\chi_c(\Delta_{\gamma\ell} \mathbf{X}^m; *)$ en termes de $\chi_c(\mathbf{X}^\ell; *)$	48
6.5 Opérateurs d'inductions itérées $\mathbf{I}(\sigma)$ et Θ_ℓ^m	48
7. Cohomologie des espaces de configuration, cas général	49
7.1 Cohomologie de Borel-Moore	49
7.2 Le morphisme "image-inverse" en cohomologie de Borel-Moore	50
7.3 Approche de $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ à l'aide d'espaces i -acycliques	54
7.4 Une suite spectrale pour $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_X^m \setminus \mathbf{M}_x^m))$	55
7.5 La suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$	62
7.6 Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$	65
7.7 Suivi de $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ par la suite spectrale basique	74
8. Stabilité de la famille $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\gamma m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$	78
8.1 Stabilité et polynomialité de caractères	78
8.2 Catégorie des \mathbf{FI} -modules	79
8.3 Caractères polynomiaux et stabilité des \mathbf{FI} -modules	82
8.4 Rang de stabilité, de monotonie et poids des \mathbf{FI} -modules	84

8.5 Stabilité des familles de représentations.	89
8.6 Détermination du rang d'un \mathbf{FI} -module	91
8.7 Foncteurs d'induction dans $\text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$	94
8.8 Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{X}^m)\}_m$	102
8.9 Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$	105
9. Calcul du caractère de \mathcal{S}_m-module de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$	111
9.1 Série de caractères de \mathcal{S}_m	111
9.2 Séries de caractères de $\mathbf{F}^q(\mathbf{X})$	112
9.3 Séries de traces pour un m -cycle	112
9.4 Séries des traces pour une puissance d'un m -cycle	114
9.5 Séries des traces pour une permutation générale	116
9.6 Comparaison entre $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ et $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus a))$	119
9.7 Comparaison entre $\chi_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))$ et $\chi_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))$	120
10. Quotients d'espaces de configuration généralisés	121
10.1 Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{?l}\mathbf{X}^m)/\mathbf{H}$	121
10.2 Espaces de configurations cycliques $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X})$	122
10.3 Espaces de configurations non-ordonnées $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X})$	123
11. Suites spectrales de Leray	125
11.1 Cohomologie à support π -propre	125
11.2 Localisation du théorème de scindage	128
11.3 Constance des faisceaux de cohomologie à support π -propre	131
11.4 Dégénérescence des suites spectrales de Leray	135
12. Appendice sur les espaces i-acycliques	142
12.1 Espaces de configuration généralisés	142
12.2 Variétés toriques affines	143
12.3 Groupes de Lie non-compacts	144
12.4 Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$	144
12.5 Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$	144
12.6 Ouverts non i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$	147
12.7 Courbes algébriques i -acycliques	147
12.8 Bouquet d'espaces i -acycliques	149
12.9 Sommes amalgamées d'espaces i -acycliques	149
12.10 La bouteille de Klein épointée	152
12.11 Revêtements non i -acycliques à base i -acyclique	154
12.12 Fibrations non i -acycliques à fibre et base i -acycliques	155
Notations	158

0. Introduction

Une des motivations à l'origine de ce travail a été la recherche de larges classes d'espaces \mathbf{X} pour lesquels les nombres de Betti des espaces de configuration $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X}^m \mid \text{Card}\{x_1, \dots, x_m\} = m\}$, sont décrits par une même formule fermée ne dépendant que de m et du polynôme de Poincaré de \mathbf{X} .

Pour tout espace \mathbf{X} , le produit $\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ contient $\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})$ comme sous-espace ouvert. Son complémentaire, le fermé :

$$\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})) = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \mid x_0 \in \{x_1, \dots, x_m\}\},$$

se décompose en réunion disjointe des sous-espaces fermés :

$$\Delta_{(0,i)}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})) = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \mid x_0 = x_i\},$$

où $i = 1, \dots, m$, chacun étant homéomorphe à $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$. On a donc

$$H_c(\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}))) \sim H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))^m.$$

D'autre part, la décomposition ouverte-fermée

$$\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X}) \sqcup \Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})), \quad (\diamond)$$

donne lieu à la suite exacte longue de cohomologie ⁽¹⁾ à support compact

$$\rightarrow H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) \xrightarrow{\iota} H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \xrightarrow{\rho} H_c(\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}))) \rightarrow \quad (*)$$

dont on déduit aussitôt la relation de récurrence entre caractéristiques d'Euler des cohomologies à support compact $\chi_c(\mathbf{F}_{m+1}) = (\chi_c(\mathbf{X}) - m) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_m)$ dont on déduit l'égalité

$$\chi_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) = \chi_c(\mathbf{X})^{\underline{m+1}},$$

où $(\underline{\quad})^{\underline{m+1}}$ désigne la factorielle décroissante (4.1). Mais bien sûr, cette égalité ne nous renseigne pas sur chaque nombre de Betti de $\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})$ séparément, ce pourquoi il faudrait une certaine forme de scindage de la suite (*). C'est précisément ce qui arrive lorsque \mathbf{X} est un groupe de Lie \mathbf{G} réel connexe et *non compact*. Dans ce cas, le morphisme de restriction

$$\rho : H_c(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})) \rightarrow H_c(\Delta_m(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})))$$

est toujours nul et la suite courte

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))^m[-1] \rightarrow H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) \rightarrow H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow 0, \quad (\ddagger)$$

extraite de (*) est exacte. En effet, le morphisme ρ est somme des restrictions

$$\rho_i : H_c(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})) \rightarrow H_c(\Delta_{(0,i)}(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G}))),$$

et l'application $\varphi_i : \mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})$, $(g, \bar{x}) \mapsto (g \cdot x_i, \bar{x})$, est un difféomorphisme qui échange les inclusions :

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G}) \\ \cup \\ \Delta_{(0,i)}(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})) \end{array} \right) \xleftrightarrow{\varphi_i} \left(\begin{array}{c} \mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G}) \\ \cup \\ \{e\} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G}) \end{array} \right),$$

de sorte que chaque ρ_i est nulle, si et seulement si, le morphisme de restriction $H_c(\mathbf{G} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{G})) = H_c(\mathbf{G}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{G})) \rightarrow H_c(\{e\}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{G}))$ l'est. Or, si \mathbf{G} est connexe non compact, le morphisme $H_c(\mathbf{G}) \rightarrow H_c(\{e\})$ est bien nul.

¹ A coefficients dans \mathbb{Q} .

L'exactitude de (‡) donne maintenant la relation de récurrence ⁽²⁾

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}))(T) = (\mathcal{P}_c(\mathbf{G})(T) + mT) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{G}))(T),$$

dont on déduit l'égalité

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}_c(\mathbf{G})(T) + iT), \quad (\dagger)$$

et, par dualité de Poincaré,

$$\mathcal{P}(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}(\mathbf{G})(T) + iT^{\dim \mathbf{G}-1}), \quad (\dagger\dagger)$$

qui est le type de formule fermée que nous cherchons.

Bien que l'efficacité de cette procédure soit limitée aux espaces non compacts, elle nous a paru suffisamment intéressante pour rechercher une propriété sous-jacente pouvant expliquer le scindage de la suite (*) sans faire appel à la structure de groupe de \mathbf{X} . Cela nous a conduit à nous intéresser aux espaces i -acycliques.

Les espaces de configuration généralisés. Dans nos recherches nous avons aussi été guidés par une autre nécessité : celle de trouver un cadre aussi symétrique que possible pour préserver l'action du groupe des permutations \mathcal{S}_m sur les coordonnées de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$, ce qui n'était pas le cas de la décomposition (\diamond). Cela nous a emmené à introduire les espaces de configuration « généralisés » suivants. On pose, pour $0 < \ell \leq m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X}^m \mid \text{Card} \{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} \mathbf{X}^m := \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m \setminus \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m, \quad \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) := \Delta_m \mathbf{X}^m. \end{cases}$$

On a la décomposition ouverte-fermée \mathcal{S}_m -stable :

$$\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m = \Delta_{\ell} \mathbf{X}^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m \quad (\diamond\diamond)$$

et la suite courte de \mathcal{S}_m -modules (à priori non exacte)

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0, \quad (\dagger\dagger)$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support compact associée à ($\diamond\diamond$).

Nous disposons ainsi, pour tout espace topologique \mathbf{X} , des décompositions (\diamond) et ($\diamond\diamond$) est des suites courtes (‡) et (‡‡) et nous nous sommes demandés, à quelle condition sur \mathbf{X} , peut-on garantir l'exactitude de ces deux suites ? Le théorème « de scindage » 3.1.1 y répond par l'implication (A) \Rightarrow (B) des propriétés suivantes.

(A) La cohomologie « intérieure » de \mathbf{X} , *i.e.* l'image de l'application naturelle $H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$, est nulle.

² On note $\mathcal{P}_c(\mathbf{M}) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H_c^i(\mathbf{M}) T^i$ (resp. $\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbf{M}) T^i$) le polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support compact (resp. ordinaire) de \mathbf{M} .

(B) Pour tous $0 < \ell \leq m$, les suites courtes (\ddagger) et $(\ddagger\ddagger)$ sont exactes.

Ces propriétés qui sont même équivalentes lorsque \mathbf{X} est, de plus, une variété topologique orientable.

Les espaces i -acycliques. À partir du théorème de scindage 3.1.1, l'article va se concentrer sur les espaces vérifiant la propriété (A), ce que nous avons appelé « les espaces i -acycliques ».

Il existe des familles assez grandes de tels espaces, par exemple :

- Les espaces acycliques (p.e. contractiles) non compacts.
- Les groupes de Lie réels \mathbf{G} tels que $H_c^0(\mathbf{G}) = 0$.
- Les quotients des espaces i -acycliques par des groupes finis.
- Les ouverts des espaces i -acycliques.
- Tout produit $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, où \mathbf{X} est i -acyclique et \mathbf{Y} est quelconque.

Le complexe fondamental de \mathbf{X} pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$. Dans la section 3.2.2, les suites courtes $(\ddagger\ddagger)$ sont concaténées pour construire le complexe de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$0 \rightarrow H_c(1)[- \ell + 1] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\ell - 1)[-1] \rightarrow H_c(\ell) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0$$

où l'on a noté $H_c(a) := H_c(\Delta_a \mathbf{X}^m)$. Nous l'appelons « le complexe fondamental de \mathbf{X} pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$ », son intérêt repose dans l'énoncé suivant.

Théorème (3.2.3)

- a) Les complexes fondamentaux d'un espace i -acyclique sont exacts.
- b) Une variété topologique orientable est i -acyclique, si et seulement si, ses complexes fondamentaux sont exacts.

La i -acyclicité apparaît donc comme très caractéristique du fait que les complexes fondamentaux sont des résolutions de \mathcal{S}_m -module de $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$. De telles résolutions permettent, lorsque $H_c(\mathbf{X})$ est de dimension finie, de remmener la détermination des caractères et des polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$ à ceux des espaces $\Delta_a \mathbf{X}^m$ pour $a \leq \ell$. Ces résolutions constituent alors un outil essentiel pour l'étude récursive de propriétés communes aux espaces de configuration généralisés (on en verra plusieurs exemples), et à priori aussi pour l'élaboration d'algorithmes de calcul.

Les polynômes de Poincaré de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$ et de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$. Les observations et raisonnements des paragraphes préliminaires, basés sur le scindage des suites longues de cohomologie, s'appliquent clairement sans modification lorsque l'espace \mathbf{X} est i -acyclique et donnent lieu à l'énoncé suivant.

Proposition (5.2.1). *Si \mathbf{X} est i -acyclique et que $H_c(\mathbf{X}) < +\infty$, le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ est le polynôme*

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T) + i \cdot T.$$

À partir de là, le passage de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ à $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$ est assez simple dans la mesure où $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$ admet une décomposition ouverte en parties homéomorphes à $\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X})$, indexée par les partitions de l'intervalle $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides. La proposition suivante établit alors que $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m)$ seul dépend de $\mathcal{P}_c(\mathbf{X})$, le lien étant donné par un certain polynôme « universel » de $\mathbb{Z}[P, T]$.

Proposition (5.2.5). *Si \mathbf{X} est i -acyclique et tel que $H_c(\mathbf{X}) < +\infty$, le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m)$ s'obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$ le polynôme homogène de degré ℓ de $\mathbb{Z}[P, T]$:*

$$\mathbf{Q}_{\ell, m}(P, T) = |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \prod_{i=0, \dots, \ell-1} (P + iT).$$

Ici, $\mathfrak{P}_\ell(m)$ désigne l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides. Le nombre $|\mathfrak{P}_\ell(m)|$ est donné par le nombre de Stirling de seconde espèce :

$$|\mathfrak{P}_\ell(m)| = \left\{ \begin{matrix} m \\ \ell \end{matrix} \right\} := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m.$$

Le polynôme de Poincaré de $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell, m})$ est ensuite obtenu, grâce aux complexes fondamentaux, comme somme alternée des $\mathcal{P}(H_c(\Delta_a \mathbf{X}^m)[\ell - a])$.

Proposition (5.3.1). *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(\mathbf{X}), T]$, de degré ℓ , donné par la somme alternée (cf. 2.3.3)*

$$\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{\ell-a}(\mathbf{X})) \cdot T^a.$$

Le caractère de $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$. Pour tout $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$ stable sous l'action de \mathcal{S}_m et tel que $\dim H_c(\mathbf{Z}) < \infty$, on note $\chi_c(\mathbf{Z}; i)$ le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\mathbf{Z}, \mathbb{Q})$. Les résolutions fondamentales donnent aussitôt le résultat suivant.

Théorème (6.3.3). *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique.*

a) *Le caractère $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i)$ du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ vérifie*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i) = \chi_c(\mathbf{X}^m; i) + \chi_c(\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m; i).$$

b) *Le caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i)$ du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ vérifie*

$$\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i) = \sum_{0 \leq a < \ell} \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell-a}(m)} (-1)^a \mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \chi_c(\mathbf{F}_{\ell-a}(\mathbf{X}); i - a).$$

où $\mathcal{Y}_\ell(m)$ désigne l'ensemble des décompositions de m en ℓ entiers positifs non nuls, et $G_\lambda = \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{S}_\lambda$ est le sous-groupe $\mathcal{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_r}$ de \mathcal{S}_a lorsque $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r})$, auquel cas $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$.

Le caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ apparaît ainsi comme combinaison des caractères $\chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))$ pour $a \leq \ell$. D'autre part, le caractère $\chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))$ est somme de $\chi_c(\Delta_{\leq a-1} \mathbf{X}^a)$, avec (donc) $a - 1 < \ell$, et de $\chi_c(\mathbf{X}^a) = \chi_{S_a}(H_c(\mathbf{X})^{\otimes a})$, caractère bien connu d'après Macdonald ([24]) (cf. 9.5.4). On a donc tous les éléments pour un algorithme de calcul des caractères de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ et $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$, à partir uniquement de la connaissance de $\chi_c(\mathbf{X}^\ell)$ pour $\ell \leq m$.

Cette observation nous a conduit à introduire certains opérateurs d'induction dans les groupes de Grothendieck des catégories de représentations des groupes symétriques

$$\Theta_\ell^m, \mathbf{I}_\ell^m : K(\text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell])) \rightsquigarrow K(\text{Mod}(k[\mathcal{S}_m]))$$

grâce auxquels on a :

Théorème 6.5.1-(a). *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique tel que $\dim H_c(\mathbf{X}) < \infty$.*

a) *Pour tout $m \geq \ell > 0$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i) &= \sum_{0 \leq a < m} \Theta_{m-a}^m(\chi_c(\mathbf{X}^{m-a}; i-a)) \\ \text{ii)} \quad \chi_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m; i) &= \mathbf{I}_\ell^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell} \Theta_{\ell-a}^\ell(\chi_c(\mathbf{X}^{\ell-a}; i-a)) \right) \\ \text{iii)} \quad \chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i) &= \sum_{0 \leq b < \ell} (-1)^b \mathbf{I}_{\ell-b}^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell-b} \Theta_{\ell-b-a}^{\ell-b}(\chi_c(\mathbf{X}^{\ell-b-a}; i-b-a)) \right) \end{aligned}$$

A partir de là, nous avons deux voies de recherche. L'étude de la polynomialité des familles de caractères $\{\chi(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m, i)\}_m$ et la détermination explicite au moins des caractères $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$. Nous avons choisi de consacrer la section 8 à la première question et la section 9 à la seconde.

Les familles de représentation de $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$. Dans les recherches sur les espaces de configuration, bien de questions se posent pour des familles dénombrables de tels espaces. Par exemple, le résultat pionnier d'Arnold (1970 [1]) qui établit que pour $i \in \mathbb{N}$, la suite $\{\text{Betti}_i(\mathbf{F}_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m)\}_m$ est stationnaire, et, bien plus récemment, celui de Church (2012 [7]) qui généralise profondément le résultat d'Arnold et qui montre que ce sont plutôt les multiplicités des composantes irréductibles des représentations dans les familles $\{\mathcal{S}_m : H(\mathbf{X}^m)\}_m$ et $\{\mathcal{S}_m : H^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))\}_m$ qui sont stationnaires (cf. 8.4) lorsque \mathbf{X} est une variété différentielle connexe orientable et que $d_{\mathbf{X}} \geq 2$.

Les complexes fondamentaux sont particulièrement commodes pour aborder ces questions de nature qualitative. Ils nous indiquent aussi que la direction à suivre pour les généraliser doit concerner, pour $a \in \mathbb{N}$, les familles d'espaces de configuration généralisés $\{\mathcal{S}_m : \Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m\}_m$. Les cas cités correspondant alors à $a = 0$. La section 8 est entièrement consacrée à ces questions. Nous y rappelons la théorie des **FI**-modules de Church-Frab ([9]) et nous prouvons la généralisation suivante des résultats de Church ([7]).

Théorème (8.8.7). *Soit \mathbf{X} une pseudovariété i -acyclique, connexe orientable et de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$ est stable pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{X}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{X}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.*

Pour y parvenir, nous avons dû introduire certains foncteurs d'induction (ou de décalage) dans la catégorie de \mathbf{FI} -modules qui sont des généralisations naturelles des foncteurs $\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$, déjà mentionnés dans 6.3.3-(b). Ces foncteurs ont pris sur les liens qui relient les termes des familles de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$ et $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c(\mathbf{F}_{m-a}(\mathbf{X}))\}_{m-a}$. Ils sont introduits et étudiés dans la section 8.7. Pour toute décomposition $\lambda \vdash 2a$ comportant a termes non nuls, on définit le foncteur

$$\mathbf{Ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq 2a}$$

qui associe à une famille de \mathcal{S}_{m-a} -modules une famille de \mathcal{S}_m -modules. On définit ensuite le foncteur

$$\mathbf{I}^a := \sum_\lambda \mathbf{Ind}_\lambda(_)_{\geq 2a} : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq 2a}$$

dont la propriété fondamentale est que lorsqu'il est appliqué à la famille $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c(\mathbf{F}_{m-a}(\mathbf{X}))\}_{m-a}$, il donne la famille $\{\mathcal{S}_m : H_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$. Mais ce qui est vraiment important à comprendre, c'est la manière dont ce foncteur modifie le « rang de monotonie et stabilité » (8.4) d'une famille de représentations $\mathcal{V} := \{\mathcal{S}_m : V_m\}_m$, *grosso modo*, le plus grand intervalle $[[N, +\infty]] \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sur lequel les multiplicités des composantes irréductibles de V_m sont constantes au sens de Church-Farb. On note $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V})$ la borne inférieure d'un tel intervalle. Notre principal résultat dans cette direction est le suivant.

Théorème (8.7.9)

- a) *Le foncteur $\mathbf{I}^a : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq 2a}$ est covariant, additif, exact.*
- b) *Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le \mathbf{FI} -module $\mathbf{I}^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d + a, 2a)$.*
- c) *On a $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{I}^a \mathcal{V}) \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), a) + |\lambda| + a$.*

Le théorème 8.8.7 du paragraphe précédent, en est le corollaire premier.

Suites spectrales basiques. Dans le but d'étendre le théorème 8.8.7 des espaces i -acycliques aux espaces généraux, nous avons introduit « les suites spectrales basiques ». Le chapitre 7 leur est consacré. Associée à un espace localement compact de dimension finie \mathbf{M} , elle converge vers $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ et a la propriété remarquable de ne faire intervenir que des espaces de configuration associés à l'espace $\mathbf{M}_{>0} := \mathbf{M} \times \mathbb{R}$ clairement i -acyclique.

Théorème (7.5.2, 8.9.6-(b)). Soit \mathbf{M} une pseudovariété orientée de dimension $d_{\mathbf{M}}$. La suite spectrale $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)$ converge, en tant que suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules, vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))[1-m]$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1,m)} \text{ind}_{H_{\tau} \times G_{\tau}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \boxtimes H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})),$$

avec $q = i + (m - (p+1))$, $Q = i - (m - (p+1))(d_{\mathbf{M}} - 1)$, et où $\mathcal{Y}(p+1, m)$ est l'ensemble des diagrammes de Young à m boîtes et $p+1$ lignes, $H_{\tau} \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)}$ et $G_{\tau} \subseteq \mathcal{S}_{p+1}$ sont des sous-groupes du stabilisateur \mathcal{S}_{τ} de τ dans \mathcal{S}_m , le premier agissant par la représentation par la signature σ , le second par permutation des coordonnées sur $\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})$.

Une propriété remarquable de ces suites spectrales est qu'elles sont compatibles aux morphisme d'image-inverse (7.7.1), ce qui nous a permis de généraliser le théorème 8.8.7), et donc celui de Church, aux pseudovariétés orientées, en particulier, aux variétés algébriques complexes.

Théorème (8.9.8). Soit \mathbf{M} une pseudovariété connexe orientée de dimension $d_{\mathbf{M}} \geq 2$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille de représentations $\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ est stationnaire pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{M}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{M}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.

Le calcul explicite du caractère de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$. Dans la section 9, nous suivons la démarche de Macdonald ([24]) et introduisons la « série des caractères » de $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$ en posant, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$,

$$\chi_c(\mathbf{Z})(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}(\alpha : H_c^i(\mathbf{Z})) T^i,$$

et nous menons à terme le calcul des séries $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)$.

Théorème (9.5.3). Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = T^m \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d},$$

où $(1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m})$ est le type de la permutation α , où μ est la fonction de Möbius et où $(-)_x$ est la factorielle décroissante (cf. 4.1).

Les polynômes de Poincaré des espaces quotients $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{H}$. Le théorème 9.5.3 s'applique aussitôt pour donner les dimensions des sous-espaces invariants $H_c^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))^{\mathbf{H}}$, quel que soit le sous-groupe $\mathbf{H} \subseteq \mathcal{S}_m$. Les polynômes de Poincaré des quotients $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{H}$ en résultent.

La section 10 illustre le procédé en déterminant le polynôme de Poincaré de l'espace des configurations « cycliques » $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{C}_m$, où $\mathbf{C}_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, et celui de l'espace des configurations « non ordonnées » $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathcal{S}_m$. Pour \mathbf{X} i -acyclique, on a les égalités :

– Théorème (10.2.1) :

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T) = \frac{T^m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu(d/e) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

– Théorème (10.3.1)

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))(-T) = \frac{T^m}{m!} \sum_{\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d},$$

où h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_m dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})$.

La dégénérescence des suites spectrales de Leray. Pour $1 \leq a, b \in \mathbb{N}$, nous notons $\pi_a : \mathbf{X}^{b+a} \rightarrow \mathbf{X}^a$ la projection sur les a dernières coordonnées. L'application $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ est une fibration ⁽³⁾ de fibres de la forme $\mathbf{X} \setminus \mathbf{a}$ où \mathbf{a} désigne un sous-ensemble de \mathbf{X} de cardinal a .

Lorsque \mathbf{X} est i -acyclique et que $H_c(\mathbf{X}) < +\infty$, l'expression du polynôme de Poincaré dans 5.2.1 montre que l'on a

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})) = \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X})) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus \mathbf{a})),$$

ce qui suggère une certaine forme de trivialité cohomologique pour la fibration π_a . C'est en effet le cas et c'est le sujet de la section 11.

Notons, plus généralement, pour $0 < a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, par $\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m$ l'ouvert des m -uplets de $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$ dont les dernières a coordonnées sont deux à deux distinctes, *i.e.* posons

$$\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m := \Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m \cap (\mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{F}_a(\mathbf{X})),$$

où $? \in \{=, \leq\}$. L'application $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ est alors une fibration localement triviale. La section 11.4 est consacrée à l'étude des suites spectrales de Leray associées à π_a . Cela nous a emmené à nous intéresser également à la cohomologie à support π_a -propre que nous notons $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$, et aussi au faisceaux de cohomologie à support π_a -propre :

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(k_{\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m}),$$

Le principal résultat concernant ces faisceaux est le suivant.

³ Localement triviale si \mathbf{X} est une variété topologique

Théorème (11.3.2). *Soit \mathbf{X} i -acyclique localement connexe.*

- c) *Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$ sont constants sur les composantes connexes de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.*

À partir de là, l'étude des suites spectrales de Leray pour les cohomologies $H_c(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$ se simplifie et nous montrons le théorème suivant qui termine l'article.

Théorème (11.4.9). *Soient $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique localement connexe. Notons*

$$(\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)_c, d_r) \quad \text{et} \quad (\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)_{\pi!}, d_r) \quad (\mathbb{E}_r).$$

les suites spectrales de Leray associées à la fibration $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ qui convergent respectivement vers $H_c(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$. Alors, les termes $\mathbb{E}_2(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m)$ sont les somme directes :

$$\begin{cases} \bigoplus_{C \in \Pi_0 U} \mathbb{E}_2^{p,q}(C \Delta_{? \ell, m}^{[a]})_c = H_c^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_c^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) \\ \bigoplus_{C \in \Pi_0 U} \mathbb{E}_2^{p,q}(C \Delta_{? \ell, m}^{[a]})_{\pi!} = H^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) \end{cases}$$

où C désigne une composante connexe de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ et où F_C désigne une fibre de π_a au-dessus de C . De plus, les suites spectrales (\mathbb{E}_r) sont dégénérées.

Exemples et contrexemples d'espaces i -acycliques. L'appendice 12 donne des exemples d'espaces i -acycliques et des contrexemples pour certaines propriétés qu'on aurait souhaité avoir mais qui ne sont pas vraies.

1. Espaces i -acycliques

1.1. Généralités sur les espaces topologiques considérés

Dans ce travail, on entend par *espace topologique* tout espace $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$, métrisable, localement compact et dénombrable à l'infini. De tels espaces sont alors à base dénombrable, séparables et (totalement) paracompacts. Tout fermé et tout ouvert de \mathbf{X} est alors également métrisable, localement compacts et dénombrables à l'infini. Les *pseudovariétés* (dénombrables à l'infini) constituent une large famille d'exemples de tels espaces.

1.1.1. Cohomologies. On désignera par k un corps de caractéristique arbitraire sauf mention explicite du contraire. On note $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ le faisceau constant sur \mathbf{X} de fibre k , puis $\text{Mod}(\underline{k}_{\mathbf{X}})$ la catégorie des faisceaux de k -espaces vectoriels sur \mathbf{X} . Les espaces de cohomologie respectivement : ordinaire, à support compact et à support dans une partie localement fermée $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$, notés $H(\mathbf{X}; k)$, $H_c(\mathbf{X}; k)$, et $H_{\mathbf{Z}}(\mathbf{X}, k)$, sont les foncteurs dérivés des foncteurs

$\Gamma(\mathbf{X}; _)$, $\Gamma_c(\mathbf{X}; _)$, $\Gamma_Z(\mathbf{X}; _)$: $\text{Mod}(\underline{k}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \text{Vec}(k)$ de sections globales respectivement à support : arbitraire, compact et dans \mathbf{Z} . On a donc

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{X}; k) &:= \mathbb{R}^i \Gamma(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{X}}), & H_c^i(\mathbf{X}; k) &:= \mathbb{R}^i \Gamma_c(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{X}}), \\ H_Z^i(\mathbf{X}; k) &:= \mathbb{R}^i \Gamma_Z(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{X}}). \end{aligned}$$

1.1.2. Résolution Φ -molle canonique. La résolution du faisceau constant $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ de référence sera celle des faisceaux de « germes de cochaînes d'Alexander-Spanier »⁽⁴⁾, noté $(\underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k), d_*)$. Les faisceaux $\underline{\mathcal{A}}^i(\mathbf{X}; k)$ sont Φ -mous pour toute famille paracompactifiante Φ (*loc.cit.*), ils sont donc $\Gamma(\mathbf{X}, _)$, $\Gamma_c(\mathbf{X}; _)$ et $\Gamma_Z(\mathbf{X}, _)$ -acycliques. Le complexe des cochaînes d'Alexander-Spanier

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{k}_{\mathbf{X}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}^0(\mathbf{X}; k) \xrightarrow{d_0} \underline{\mathcal{A}}^1(\mathbf{X}; k) \xrightarrow{d_1} \dots$$

est une résolution Φ -molle de $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ et l'on a

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{X}; k) &:= h^i(\Gamma(\mathbf{X}; \underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k))), & H_c^i(\mathbf{X}; k) &:= h^i(\Gamma_c(\mathbf{X}; \underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k))), \\ H_Z^i(\mathbf{X}; k) &:= h^i(\Gamma_Z(\mathbf{X}; \underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k))). \end{aligned}$$

1.1.3. Notons $(\mathcal{K}(\mathbf{X}), \subseteq)$ la famille des parties compactes $K \subseteq \mathbf{X}$ munie de l'ordre d'inclusion. Le morphisme naturel d'homologies singulières

$$\varinjlim_{K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})} H_*(K; k) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathbf{X}, k)$$

est un isomorphisme et induit (par dualité vectorielle) l'isomorphisme de cohomologies ordinaires

$$H^*(\mathbf{X}, k) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})} H^*(K, k),$$

qui fait correspondre à une classe de cohomologie $\omega \in H^*(\mathbf{X}, k)$ la famille de ses restrictions $\{\omega|_K \in H^*(K, k)\}_{K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})}$.

De manière duale, nous disposons pour chaque $K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ d'un morphisme naturel en cohomologie $H_K^*(\mathbf{X}, k) \rightarrow H_c^*(\mathbf{X}, k)$. La limite inductive de ces morphismes

$$\varinjlim_{K \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, k)} H_K^*(\mathbf{X}) \rightarrow H_c^*(\mathbf{X}, k)$$

est alors aussi un isomorphisme.

1.1.4. Suite exacte longue de cohomologies à support compact. Si $\mathbf{X} = \mathbf{U} \sqcup \mathbf{Z}$ est une partition ouverte-fermée, dont on note $j : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{X}$ et $i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$ les inclusions, on dispose de la suite longue de cohomologie à support compact

$$H_c(\mathbf{U}) \xrightarrow{j_!} H_c(\mathbf{X}) \xrightarrow{i^*} H_c(\mathbf{Z}) \longrightarrow$$

où $j_!$ désigne le « prolongement par zéro » et i^* la « restriction ».

⁴[18], §2.5, exemple 2.5.2, p. 134, puis §3.7, exemple 3.7.1, p. 157.

1.1.5. Isomorphismes de Künneth. Si $p : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ et $q : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ sont les projections canoniques, les morphismes

$$\boxtimes : \underline{\mathcal{A}}^a(\mathbf{X}; k) \otimes \underline{\mathcal{A}}^b(\mathbf{Y}; k) \rightarrow \underline{\mathcal{A}}^{a+b}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; k)$$

induits par le cup-produit de cochaînes $\boxtimes : \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \boxtimes \beta := p^*(\alpha) \cup q^*(\beta)$ ⁽⁵⁾ induisent des isomorphismes gradués ⁽⁶⁾

$$H(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \simeq H(\mathbf{X}) \otimes H(\mathbf{Y}) \text{ et } H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \simeq H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{Y}).$$

Le cup-produit en cohomologie résulte alors du morphisme de restriction à la diagonale, soit des composées

$$\begin{aligned} \cup : H(\mathbf{X}) \otimes H(\mathbf{X}) &\xrightarrow{\boxtimes} H(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \xrightarrow{\delta_{\mathbf{X}}^*} H(\Delta_{\mathbf{X}}) \\ \cup : H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{X}) &\xrightarrow{\boxtimes} H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \xrightarrow{\delta_{\mathbf{X}}^*} H_c(\Delta_{\mathbf{X}}) \end{aligned}$$

1.2. Espaces i -acycliques et \cup -acycliques

1.2.1. i -acycllicité. Pour tout espace \mathbf{X} , on notera $\epsilon_{\mathbf{X}} : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$ le morphisme induit par l'inclusion $\Gamma_c(\mathbf{X}; _) \subseteq \Gamma(\mathbf{X}; _)$. L'image de $\epsilon_{\mathbf{X}}$ dans $H(\mathbf{X})$, notée $H_1(\mathbf{X})$, est « la cohomologie intérieure de \mathbf{X} », on pose donc

$$H_1(\mathbf{X}) := \text{im}(\epsilon_{\mathbf{X}} : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})).$$

On dira que \mathbf{X} est « i -acyclique » lorsque $H_1(\mathbf{X}) = 0$.

1.2.2. (Totale) \cup -acycllicité. Le plongement diagonal $\delta_{\mathbf{X}} : \Delta_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ induit des morphismes de restriction rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\boxtimes} & H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{X}}^*} & H_c(\Delta_{\mathbf{X}}) \\ \downarrow \epsilon_{\mathbf{X}} \otimes \epsilon_{\mathbf{X}} & & \downarrow \epsilon_{\mathbf{X} \times \mathbf{X}} & & \downarrow \epsilon_{\Delta_{\mathbf{X}}} \\ H(\mathbf{X}) \otimes H(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\boxtimes} & H(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{X}}^*} & H_c(\Delta_{\mathbf{X}}) \end{array}$$

On dira que \mathbf{X} est « \cup -acyclique » lorsque $\delta_{\mathbf{X}}^* : H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \rightarrow H_c(\Delta_{\mathbf{X}})$ est nul, autrement dit, lorsque le cup-produit $\cup : H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H_c(\mathbf{X})$ est nul. Plus généralement, \mathbf{X} sera dit « totalement \cup -acyclique » lorsque le cup-produit $\cup : H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{U}) \rightarrow H_c(\mathbf{U})$ est nul pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$.

1.2.3. Premières propriétés d'espaces i -acycliques

Les conditions d'acycllicité ci-dessus sont des conditions de non compacité pour les espace topologiques, aussi, leur étude nous place d'emblée dans un cadre complémentaire de celui des espaces compacts.

⁵ *Mutatis mutandis* dans le cas des variétés différentiables en remplaçant $\underline{\mathcal{A}}$ par le faisceau des formes différentielles $\underline{\Omega}$ et le cup-produit \cup par le produit extérieur de formes différentielles \wedge .

⁶ L'isomorphisme de Künneth en cohomologie ordinaire exige une hypothèse de finitude de cohomologie sur l'un des deux espaces.

1.2.4. Proposition

- a) Un espace contractile non compact est i -acyclique.
- b) i -acyclique \Rightarrow totalement \cup -acyclique.
- c) Sur une variété topologique orientable, i -acyclique $\Leftrightarrow \cup$ -acyclique ⁽⁷⁾.
- d) Sur une variété topologique orientable dimension n , la dualité de Poincaré induit une dualité entre $H_1^k(\mathbf{X})$ et $H_1^{n-k}(\mathbf{X})$.
- e) Un ouvert \mathbf{U} d'un espace i -acyclique \mathbf{X} , est i -acyclique. Et de même en remplaçant i -acyclique par totalement \cup -acyclique.
- f) Un produit cartésien $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ est i -acyclique si et seulement si l'un des facteurs l'est.

Démonstration. (a) Comme \mathbf{X} est contractile, $H_1^i(\mathbf{X}) = 0$ pour tout $i > 0$ et la condition de i -acyclicité est réduite à montrer que $H_c^0(\mathbf{X}) = 0$, ce qui est équivalent à la non-compacité de \mathbf{X} .

(b) Si ω et ϖ sont des cocycles à support compact d'un espace i -acyclique, on a $\omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α (à support fermé), mais alors $\omega \cup \varpi = d\alpha \cup \varpi = d(\alpha \cup \varpi)$ où $\alpha \cup \varpi$ est clairement à support compact.

(c) Supposons que pour $\omega \in H_c(\mathbf{X})$ on ait $\epsilon_{\mathbf{X}}(\omega) \neq 0$. Il existe alors, par dualité de Poincaré, une classe $\varpi \in H_c(\mathbf{X})$ telle que $\int_{\mathbf{X}} \omega \cup \varpi = 1$, mais alors $\omega \cup \varpi \neq 0$ dans $H_c(\mathbf{X})$ et \mathbf{X} n'est pas \cup -acyclique.

(d) Les classes de $H_1^k(\mathbf{X})$ sont celles de $H^k(\mathbf{X})$ qui peuvent être représentées par un cocycle à support compact dans \mathbf{X} . Maintenant, si $\epsilon_{\mathbf{X}}\omega \in H_1^k(\mathbf{X})$ est non nulle, il existe $\varpi \in H_c^{n-k}(\mathbf{X})$ telle que $\int_{\mathbf{X}} \epsilon_{\mathbf{X}}(\omega) \cup \varpi = 1$. L'accouplement $\int_{\mathbf{X}} : H_1^k(\mathbf{X}) \times H_1^{n-k}(\mathbf{X}) \rightarrow k$ est donc parfait.

(e) Résulte du fait que $\epsilon_{\mathbf{U}} : H_c(\mathbf{U}) \rightarrow H(\mathbf{U})$ est la composée de

$$\begin{array}{ccccc} H_c(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \epsilon_{\mathbf{U}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H(\mathbf{U}) \\ \parallel & & & & \parallel \\ H_c(\mathbf{U}) & \xrightarrow{j} & H_c(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{X}}} & H(\mathbf{X}) & \xrightarrow{r} & H(\mathbf{U}) \end{array}$$

où j désigne le prolongement par zéro et r est le morphisme de restriction.

(f) La condition est suffisante d'après la factorisation de Künneth :

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}} & H(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \\ \parallel & & \uparrow \kappa \\ H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{Y}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{X}} \otimes \epsilon_{\mathbf{Y}}} & H(\mathbf{X}) \otimes H(\mathbf{Y}) \end{array}$$

où $\kappa(\alpha \otimes \beta) = p_{\mathbf{X}}^*(\alpha) \cup p_{\mathbf{Y}}^*(\beta)$. La nécessité résulte de l'injectivité de κ . \square

1.3. Caractérisations de la i -acyclicité

1.3.1. Théorème. Pour un espace \mathbf{X} , il y a équivalence entre

- a) \mathbf{X} est i -acyclique.

⁷ Voir 12.10, p. 152, pour un contreexemple si la variété n'est pas orientable.

- b) Pour tout espace \mathbf{Y} et toute application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, le morphisme image-inverse $f^* : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{Y})$ est nul.
- c) Pour tout espace compact \mathbf{K} et toute application continue $f : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{X}$, le morphisme image-inverse $f^* : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{K})$ est nul.
- d) Étant donné \mathbf{Z} et \mathbf{Y} et une application continue $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, notons $p_2 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$, $(x, m) \mapsto m$, et $f_2 := p_2 \circ f$. Soit $j : V \hookrightarrow \mathbf{Y}$ un plongement ouvert, notons $f'_2 : f^{-1}(V) \rightarrow V$ la restriction de f_2 , et considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \\ & \searrow^{f'_2} & & \searrow^{f_2} & \downarrow^{p_2} \\ & & V & \hookrightarrow j & \mathbf{Y} \end{array}$$

Alors, si f et f'_2 sont propres et si $j_! : H_c(V) \rightarrow H_c(\mathbf{Y})$ est surjective, on a

$$(f^* : H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \rightarrow H_c(\mathbf{Z})) = 0.$$

Démonstration. (a \Leftrightarrow b) Évident. (a \Leftrightarrow c) Le morphisme $f^* : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{K})$ se factorise à travers $\epsilon_{\mathbf{X}}$ puisque l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathbf{X}) & \xrightarrow{f^*} & H_c(\mathbf{K}) \\ \epsilon_{\mathbf{X}} \downarrow & & \parallel \epsilon_{\mathbf{K}} \\ H(\mathbf{X}) & \xrightarrow{f^*} & H(\mathbf{K}) \end{array}$$

L'implication a \Rightarrow c en résulte. Réciproquement, soit $(\mathcal{K}(\mathbf{X}), \subseteq)$ l'ensemble des parties compactes de \mathbf{X} , muni de l'ordre d'inclusion. La famille des morphismes

$$H_c(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{X}}} H(\mathbf{X}) \xrightarrow{(_) |_{\mathbf{K}}} H(\mathbf{K})$$

avec $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ induit alors un morphisme sur la limite projective

$$H_c(\mathbf{X}) \xrightarrow{\epsilon_{\mathbf{X}}} H(\mathbf{X}) \xrightarrow{\varprojlim (_) |_{\mathbf{K}}} \varprojlim_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}(\mathbf{X})} H(\mathbf{K})$$

dont la composée est nulle lorsque (b) est vérifié. L'espace \mathbf{X} est donc i -acyclique puisque le morphisme $\varprojlim (_) |_{\mathbf{K}}$ est bijectif.

(a \Rightarrow d) Soient $p_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ la projection canonique et $f_1 := p_1 \circ f$. Pour prouver (d), il suffit, par Künneth, de montrer que pour tous cocycles à support compact $\omega \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{X})$ et $\varpi \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{Y})$, le cocycle

$$f_1^* \omega \cup f_2^* \varpi \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{Z}). \quad (*)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support compact de \mathbf{Z} .

Or, il existe par hypothèse $\tau \in \mathcal{Z}_c(V)$ qui représente ϖ dans $H_c(\mathbf{Y})$. On peut donc remplacer dans (*) $f_2^* \varpi$ par $f_2^* \tau$, et affirmer que $f_2^* \tau$ est à support compact dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans \mathbf{Z} .

Cela étant, comme \mathbf{X} est i -acyclique, on a $f_1^*\omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de \mathbf{Z} (à support non nécessairement compact), et alors

$$f_1^*\omega \cup f_2^*\tau = d(\alpha \cup f_2^*\tau),$$

où $\alpha \cup f_2^*\tau$ est une cochaîne à support compact de \mathbf{Z} puisqu'il en est ainsi de $f_2^*\tau$. Par conséquent, $f^*(\omega \otimes \varpi) = 0 \in H_c(\mathbf{Z})$.

(d \Rightarrow c) Dans (d), on prend \mathbf{Z} compact, $\mathbf{Y} := \{\text{pt}\}$ et $V := \mathbf{Y}$. \square

1.3.2. Complémentaires des parties finies dans un espace i -acyclique

Pour $a \in \mathbb{N}$, la notation « $\mathbf{X} \setminus a$ » sera un raccourci pour « \mathbf{X} privé de a points ». On prendra garde du fait que s'il est vrai que lorsque \mathbf{X} est une variété topologique connexe de dimension > 1 , le groupe d'homéomorphismes agit a -transitivement (quel que soit $a \in \mathbb{N}$) et donc que le type d'homéomorphie de $\mathbf{X} \setminus a$ est uniquement déterminé, au delà de ce cas, on ne peut pas dire grand chose de l'espace $\mathbf{X} \setminus a$. Cependant, si $H_c^0(\mathbf{X}) = 0$, p.e. si \mathbf{X} est i -acyclique, la suite

$$0 \longrightarrow H_c(F)[-1] \longrightarrow H_c(\mathbf{X} \setminus F) \longrightarrow H_c(\mathbf{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout $F \subseteq \mathbf{X}$ fini (1.3.1-(c)) et la famille

$$\{\text{Betti}_{c,i}(\mathbf{X} \setminus F) \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ seul dépend de } \#F.$$

On a encore mieux. Lorsque \mathbf{X} est en plus localement connexe, les groupes $H_c(\mathbf{X} \setminus \{x_1, \dots, x_a\})$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ sont largement isomorphes.

L'idée est la suivante. Notons \mathcal{K} la famille des compacts connexes de \mathbf{X} . Pour tous $z \in Z \in \mathcal{K}(x_1, y_1)$, on dispose du morphismes de suites courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c(Z)[-1] & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X} \setminus Z) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X}) \longrightarrow 0 \\ & & \rho_z \downarrow & & \rho \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H_c(z)[-1] & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X} \setminus z) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Lorsque \mathbf{X} est i -acyclique, les lignes de ce diagramme sont exactes (1.3.1-(c)). Le morphisme ρ est alors un isomorphisme en degrés $i \leq 1$ et induit pour $i \geq 2$ un isomorphisme canonique :

$$\tilde{\rho} : \frac{H_c^i(\mathbf{X} \setminus Z)}{H_c^{i-1}(Z)} \xrightarrow{\cong} H_c^i(\mathbf{X} \setminus z)$$

Cette construction est naturelle par rapport à la l'inclusion de compacts et les hypothèses de connexité en cours font que \mathcal{K} est un système inductif filtrant dont la réunion des éléments couvre \mathbf{X} tout entier. On en déduit un isomorphisme canonique

$$\varprojlim_{Z \in \mathcal{K}} \frac{H_c^i(\mathbf{X} \setminus Z)}{H_c^{i-1}(Z)} \xrightarrow{\cong} H_c^i(\mathbf{X} \setminus x),$$

quel que soit $x \in \mathbf{X}$. L'énoncé suivant découle par un raisonnement inductif des ces observations.

1.3.3. Proposition. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique, connexe et localement connexe. Étant données deux familles $\bar{x} := \{x_1, \dots, x_a\}$, $\bar{y} := \{y_1, \dots, y_a\}$ d'éléments deux à deux distincts de \mathbf{X} , telle qu'il existe une famille de compacts connexes deux à deux disjoints $\{K_i \supseteq \{x_i, y_i\}\}_{i=1, \dots, a}$ ⁽⁸⁾, il existe un isomorphisme canonique

$$H_c(\mathbf{X} \setminus \bar{x}) \cong H_c(\mathbf{X} \setminus \bar{y}).$$

1.3.4. Commentaire. Prendre garde du fait que, à priori, l'isomorphisme de 1.3.3 dépend de l'ordre des éléments des familles \bar{x}, \bar{y} . On verra plus tard dans quel degré cette dépendance peut davantage être précisée (11.3.3).

2. Espaces de configuration généralisés

2.1. Définitions et notations

Nous rappelons quelques notations habituelles et nous introduisons d'autres nouvelles.

N-1) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout sous-ensemble $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, on note

$$\begin{cases} \Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z} := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{Z} \mid \text{Card} \{z_1, \dots, z_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} \mathbf{Z} := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{Z} \mid \text{Card} \{z_1, \dots, z_m\} = \ell\}, \end{cases}$$

On désignera par $\Delta_{? \ell}$ l'un quelconque de ces opérateurs.

N-2) $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$ et même $\Delta_{? \ell, m}$ remplacera la notation $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$.

N-3) L'« espace des configurations (ordonnées) de n éléments de \mathbf{X} », traditionnellement noté $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ est, par définition :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) := \Delta_m \mathbf{X}^m, & \text{si } m > 0, \\ \mathbf{F}_0(\mathbf{X}) = \{\text{pt}\}. \end{cases}$$

N-4) Pour $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, et $0 < a \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{[a]} &:= \mathbf{Z} \cap (\mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{F}_a(\mathbf{X})) \\ &= \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{Z} \mid \text{Card} \{z_{m-a+1}, \dots, z_m\} = a\}. \end{aligned}$$

N-5) Pour $0 < a \leq m \in \mathbb{N}$, on note

$$\pi_a = \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^a, \quad (\text{resp. } p_a = \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^a)$$

la projection sur les a dernières coordonnées $\pi_a(\bar{x}) := (x_{m-a+1}, \dots, x_m)$ (resp. les a premières coordonnées $\pi_a(\bar{x}) := (x_1, \dots, x_a)$). Les restrictions de π_a seront notées par abus de la même manière, par exemple dans l'écriture, pour tout $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$,

$$\pi_a : \mathbf{Z}^{[a]} \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X}).$$

⁸ Par exemple, s'il existe un chemin reliant \bar{x} à \bar{y} dans $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ (cf. 2.1-(N-3)) dont les brins sont deux à deux disjoints, condition dont on pourra se dispenser (11.3.3).

2.1.1. Terminologie et conventions. Les espaces que nous venons d'introduire seront génériquement appelés *espaces de configuration (ordonnés) généralisés*. Plus spécifiquement, l'ensemble $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z}$ pourra éventuellement être appelé *espace des configurations dans \mathbf{Z} de cardinal majoré par ℓ* , et de manière analogue pour tous les autres.

2.2. Fibrations des espaces de configuration généralisés

L'espace \mathbf{X}^m est muni de la topologie produit et toute partie $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$ est munie de la topologie induite. La proposition suivante généralise celle de Fadell et Neuwirth ([13]) pour l'application $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.

2.2.1. Proposition. *Si \mathbf{X} une variété topologique et $a \leq \ell \leq m$, l'application*

$$\pi_a : \Delta_{\leq \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$$

est une fibration localement triviale.

Démonstration. Soit \mathbf{G} le groupe des homéomorphismes $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ dont le support $|\phi| := \overline{\{x \in \mathbf{X} \mid \phi(x) \neq x\}}$ est compact. Soit $d_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une distance. Munissons \mathbf{G} de la distance $d_{\mathbf{G}}(\phi, \phi') := \sup_{x \in \mathbf{X}} d_{\mathbf{X}}(\phi(x), \phi'(x))$. Le groupe \mathbf{G} , muni de la topologie associée à $d_{\mathbf{G}}$, est un groupe topologique et pour chaque $x \in \mathbf{X}$, l'application d'évaluation

$$\text{ev}_x : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{X}, \quad \phi \mapsto \phi(x)$$

est continue.

Pour $\bar{x} \in \mathbf{F}_a$, notons $\mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon)$ le produit des boules ouvertes $\prod_{i=1}^a \mathcal{B}(x_i, \epsilon)$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $\mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon) \subseteq \mathbf{F}_a$ et l'application $\prod \text{ev}_{x_i} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}_a$ admet des sections locales continues $\sigma : \mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon) \rightarrow \mathbf{G}$, soit

$$\sigma(\bar{y})(\bar{x}) = \bar{y}, \quad \mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{G} \xrightarrow{\prod \text{ev}_{x_i}} \mathbf{F}_a$$

$\searrow \subseteq \nearrow$

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon) \times \pi_a^{-1}(\bar{x}) &\longrightarrow \pi_a^{-1}(\mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon)) \subseteq \Delta_{\leq \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m, \\ \bar{y} \times \bar{w} &\longmapsto \sigma(\bar{y})(\bar{w}) \end{aligned}$$

avec $\bar{w} = (\bar{x}, x_{a+1}, \dots, x_m)$ et $\sigma(\bar{y})(\bar{w}) = (\bar{y}, \sigma(\bar{y})(x_{a+1}), \dots, \sigma(\bar{y})(x_m))$ est alors un homéomorphisme et une trivialisaton de π_a au-dessus de $\mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon)$.

De manière entièrement analogue, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon) \times \pi_a^{-1}(\bar{x}) &\longrightarrow \pi_a^{-1}(\mathcal{B}(\bar{x}, \epsilon)) \subseteq \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}), \\ \bar{y} \times \bar{w} &\longmapsto \sigma(\bar{y})(\bar{w}) \end{aligned}$$

est une trivialisaton locale de π_a . La fibre $\pi_a^{-1}(\bar{x})$ est canoniquement homéomorphe au sous-espace $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus \{x_1, \dots, x_a\}) \subseteq \mathbf{X}^b$. \square

2.2.2. Remarque à propos des fibres de π_a . Si \mathbf{X} est une variété topologique connexe de dimension > 1 , il existe des homéomorphismes $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ tels que $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$ de sorte que $\phi(\pi_a^{-1}(\bar{x})) = \pi_a^{-1}(\bar{y})$, et les fibres de $\pi_a : \Delta_{\leq \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{F}_a$ sont alors deux à deux homéomorphes (cf. 1.3.2). Par contre, si \mathbf{X} n'est pas connexe, cette propriété peut être en défaut. Par exemple, si $\mathbf{X} = \mathbf{U} \sqcup \mathbf{V}$ est une réunion disjointe d'ouverts non vides, les fibres de $\pi_2 : \mathbf{F}_3(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_2(\mathbf{X})$ en $(x, y) \in \mathbf{F}_2(\mathbf{X})$ sont de la forme :

$$\mathbf{U} \setminus \{x, y\} \sqcup \mathbf{V}, \quad \mathbf{U} \sqcup \mathbf{V} \setminus \{x, y\}, \quad \mathbf{U} \setminus \{x\} \sqcup \mathbf{V} \setminus \{y\}$$

suivant que $(x, y \in \mathbf{U})$, que $(x, y \in \mathbf{V})$, ou que $(x \in \mathbf{U}$ et $y \in \mathbf{V})$.

Il est facile de trouver des exemples pour \mathbf{U} et \mathbf{V} tels que, non seulement il n'y a pas d'homéomorphisme entre ces trois types de fibres, mais il n'y a pas, non plus, d'isomorphisme entre leurs cohomologies. Lorsque \mathbf{X} est i -acyclique de type fini ⁽⁹⁾, il y a une légère amélioration, puisque, on verra, les nombres de Betti des fibres sont constants (cf. 5.1.4). Par exemple, si $\mathbf{U} = \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times^1$, on a $H_*(\pi_a^{-1}(u, v)) = k(0)^2 \oplus k(1)^3$ quel que soit (u, v) , mais, malgré cela, les algèbres de cohomologie ne sont toujours pas isomorphes. Dans cet exemple, on a

$$\begin{cases} H(\mathbf{U} \setminus \{u, v\}) \oplus H(\mathbf{V}) = \frac{k[X, Y]}{(X, Y)^2} \oplus \frac{k[Z]}{(Z)^2} \\ H(\mathbf{U}) \oplus H(\mathbf{V} \setminus \{u, v\}) = k \oplus \frac{k[X, Y, Z]}{(X, Y, Z)^2} \end{cases}$$

et l'on remarque que dans la première $\text{Annul}_{H^0}(H^1) = 0$, tandis que dans la seconde $\text{Annul}_{H^0}(H^1) = k \cdot (1, 0)$.

Tout ceci indique que même dans le cas où \mathbf{X} est une variété topologique i -acyclique, les faisceaux localement constants :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a!} \underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m} \\ \mathcal{H}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a*} \underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m} \end{cases}$$

de fibres respectives $H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ et $H(\pi_a^{-1}\bar{x})$, ont peu de chances d'être des faisceaux constants sur $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$. A ce sujet, on verra dans la section 11.3, consacrée à leur étude, que ces faisceaux sont constants sur toute composante connexe de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ (cf. th. 11.3.2-(c)).

2.3. Sous-espaces $\mathbf{F}_p(\mathbf{X})$ et décomposition de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$

2.3.1. Partitions d'un ensemble. Pour tout ensemble E et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_\ell(E)$ l'ensemble des partitions de E en ℓ parties non vides. On pose ensuite $\mathfrak{P}(E) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}_\ell(E)$.

⁹ On dira que \mathbf{X} est de type fini lorsque $H_c(\mathbf{X})$ et $H(\mathbf{X})$ sont de dimension finie.

Une partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ définit une relation d'équivalence ' $\sim_{\mathfrak{p}}$ ' sur E par

$$(x \sim_{\mathfrak{p}} y) \Leftrightarrow (\exists I \in \mathfrak{p})(\{x, y\} \subseteq I).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_{\ell}(m) := \mathfrak{P}_{\ell}(\llbracket 1, m \rrbracket)$.

2.3.2. Les sous-espaces $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})$. Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)$, on notera $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})$ l'ensemble des m -uplets (x_1, \dots, x_m) tels que $(x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \sim_{\mathfrak{p}} j)$. On a $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}) \sim \mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})$.

2.3.3. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace topologique. On a la décomposition en parties ouvertes :*

$$\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m = \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)} \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}) \quad (*)$$

(cf. notation 2.1-(N-3)) où où $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})$. En particulier,

$$H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) = H_c(\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X}))^{|\mathfrak{P}_{\ell}(m)|},$$

où le nombre $|\mathfrak{P}_{\ell}(m)|$ est le nombre de Stirling de seconde espèce (cf. 4.4) :

$$|\mathfrak{P}_{\ell}(m)| = \left\{ \begin{matrix} m \\ \ell \end{matrix} \right\} := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m.$$

De plus,

a) Si $\{\mathbf{C}_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est la famille des composantes connexes de \mathbf{X} . On a la décomposition en parties ouvertes

$$\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X}) = \coprod_{\epsilon: \llbracket 1, \ell \rrbracket \rightarrow \mathfrak{A}} \mathbf{F}(\mathbf{C}_{\epsilon_1} \times \dots \times \mathbf{C}_{\epsilon_{\ell}}) = \coprod_{\epsilon: \llbracket 1, \ell \rrbracket \rightarrow \mathfrak{A}} \prod_{\alpha \in \text{im}(\epsilon)} \mathbf{F}(\epsilon^{-1}(\alpha), \mathbf{C}_{\alpha}).$$

b) Si \mathbf{X} est une variété topologique connexe de dimension > 1 , l'espace $\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})$ est connexe et la décomposition (*) est la décomposition de $\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m$ en composantes connexes.

2.4. Sur la dimension cohomologique et la finitude de $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$

Pour tous $\ell, m \in \mathbb{N}$, et pour tout $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, l'espace $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z}$ admet la décomposition ouverte-fermée $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z} = \Delta_{\ell} \mathbf{Z} \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z}$, d'où, la suite exacte longue de cohomologie à support compact

$$\dots \rightarrow H_c^*(\Delta_{\ell} \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z}) \rightarrow \dots$$

2.4.1. Définition. Pour tout espace \mathbf{X} , on appellera « dimension cohomologique de \mathbf{X} (sur k) », notée $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$, le sup des $d \in \overline{\mathbb{N}}$ tels que $H_c^d(U; k) \neq 0$, où U parcourt les ouverts de \mathbf{X} .

2.4.2. Proposition. *Soient $0 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Si \mathbf{X} est localement compact, acyclique, contractile, il en est de même de $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$. De plus,*

a) $\dim_{\text{ch}}(\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m) = \ell \cdot \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$.

b) Si l'espace \mathbf{X} est tel que $\dim_k H_c(\mathbf{X}, k) < +\infty$, on a

$$\dim_k H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m, k) < +\infty, \text{ pour tous } \ell, m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. (a) Par induction sur m . Le cas $m = 1$ est trivial. Supposons maintenant l'assertion satisfaite pour tout couple $(\ell \leq m')$ avec $m' \leq m$.

Pour tout $\ell < m + 1$, la description de $\Delta_{\ell} \mathbf{X}^{m+1}$ en termes de $\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})$ (2.3.3), donne aussitôt l'égalité

$$\dim_{\text{ch}}(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^{m+1}) = \ell \cdot \dim_{\text{ch}} \mathbf{X}, \quad \forall \ell < m + 1.$$

Ensuite, supposons $\dim_{\text{ch}}(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m) = (\ell - 1) \cdot \dim_{\text{ch}} \mathbf{X}$. Pour tout ouvert U de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^{m+1}$, on fait appelle à la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_c^{d-1}(U \cap \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^{m+1}) \rightarrow H_c^d(U \cap \Delta_{\ell} \mathbf{X}^{m+1}) \rightarrow H_c^d(U) \rightarrow \cdots \quad (*)$$

et, de ce qui précède, on déduit que :

– pour $\ell < m + 1$, on a $H_c^d(U) = 0$ pour tout $d > \ell$, et donc

$$\dim_{\text{ch}}(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^{m+1}) = \ell \cdot \dim_{\text{ch}} \mathbf{X}, \quad \forall \ell < m + 1.$$

– pour $\ell = m + 1$, on a $\Delta_{\leq m+1} \mathbf{X}^{m+1} = \mathbf{X}^{m+1}$, donc

$$\dim_{\text{ch}}(\Delta_{\leq m+1} \mathbf{X}^{m+1}) = m + 1.$$

ce qui reporté dans la suite (*), montre que l'on a

$$\dim_{\text{ch}}(\Delta_{m+1} \mathbf{X}^{m+1}) = m + 1.$$

(b) On raisonne par induction sur ℓ . Si $\ell \leq 1$, l'assertion est claire, quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Dans le cas général, on suppose la proposition établie pour $\ell - 1$ et tout $m \in \mathbb{N}$. La suite exacte longue

$$\rightarrow H_c^*(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m) \rightarrow .$$

nous permet alors d'affirmer que l'on a $\dim H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) < +\infty$, si et seulement si, $\dim H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) < +\infty$, soit, si et seulement si $\dim H_c(\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})) < +\infty$ d'après (*) dans 2.3.3. Or, la décomposition $\mathbf{X}^{\ell} = \mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X}) \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^{\ell}$ donne lieu à la suite exacte longue

$$\rightarrow H_c^*(\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})) \rightarrow H_c^*(\mathbf{X})^{\otimes \ell} \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^{\ell}) \rightarrow ,$$

et $\dim H_c(\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})) < +\infty$ si et seulement si, $\dim H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^{\ell}) < +\infty$, ce qui fait partie de l'hypothèse inductive. \square

3. Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux

3.1. Théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$

Dans ce travail, en parlant d'une suite exacte longue, on dira qu'elle est « scindée » lorsque un morphisme sur trois est nul. La suite exacte longue se

scinde alors en une famille dénombrable de suites exactes courtes.

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{(0)} C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \xrightarrow{(0)} C^3 \longrightarrow C^4 \longrightarrow C^5 \xrightarrow{(0)} C^6 \longrightarrow \dots \\ \dots &\twoheadrightarrow C^{-1} \quad C^0 \twoheadrightarrow C^1 \twoheadrightarrow C^2 \quad C^3 \twoheadrightarrow C^4 \twoheadrightarrow C^5 \quad C^6 \twoheadrightarrow \dots \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne les deux résultats de scindage de suites longues de cohomologie à support compact, qui ont motivé ce travail. Nous verrons que lorsque \mathbf{X} est localement connexe, un tel scindage est intimement lié à la dégénérescence des suites spectrales de Leray (cf. 11.3.2) associées aux fibrations $\pi_a : \Delta_{\ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{F}_a$ de 2.2.

3.1.1. Théorème de scindage

a) Pour $m \in \mathbb{N}$, si \mathbf{X} est i -acyclique alors le morphisme de restriction

$$H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X}))) \quad (\ddagger)$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition $\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m = (\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) \sqcup (\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m))$ est scindée et les suites courtes extraites :

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))[-1]^m \rightarrow H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) \rightarrow H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow 0,$$

sont exactes.

b) Pour $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, si \mathbf{X} est i -acyclique, le morphisme de restriction

$$H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m) \quad (\ddagger\ddagger)$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition $(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) = ((\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m)) \sqcup (\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m)$ est scindée et les suites extraites :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0,$$

sont exactes.

c) Si \mathbf{X} est une variété topologique orientable, la i -acyclité de \mathbf{X} est une propriété équivalente à celle de l'annulation des morphismes (\ddagger) et $(\ddagger\ddagger)$.

Démonstration. (a) L'ensemble $\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$ est l'ensemble des $(m+1)$ -uplets d'éléments de \mathbf{X} de la forme (y, x_1, \dots, x_m) avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et où $y \in \{x_1, \dots, x_m\}$. On comprend donc que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) & \xhookrightarrow{f} & \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m \\ & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & \mathbf{F}_m \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée), l'application $f_2 := p_2 \circ f$ est un revêtement trivial de fibre $\llbracket 1, m \rrbracket$. Les hypothèses de 1.3.1-(d) sont clairement vérifiées et le morphisme (\ddagger) est bien nul.

(b) On raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Si $m \leq 1$, on a $\ell - 1 \leq 0$ et l'assertion est évidente. Supposons maintenant $m \geq 2$ et l'assertion établie pour des valeurs de m inférieures. Comme on a la factorisation :

$$\Delta_{\leq \ell-1, m} \subseteq \mathbf{X} \times \Delta_{\leq \ell-1, m-1} \subseteq \Delta_{\leq \ell, m},$$

l'assertion résultera de montrer que le morphisme de restriction

$$H_c(\mathbf{X} \times \Delta_{\leq \ell-1, m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1, m})$$

est nul. On considère pour cela le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1, m-1}) & \hookrightarrow & \Delta_{\leq \ell-1, m} & \xrightarrow{f} & \mathbf{X} \times \Delta_{\leq \ell-1, m-1} \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & \Delta_{\ell-1, m-1} & \xrightarrow{j} & \Delta_{\leq \ell-1, m-1} \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte). La restriction f'_2 de $f_2 := p_2 \circ f$ est propre puisque $f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1, m-1})$ est le sous-ensemble de $\Delta_{\leq \ell, m}$ des m -uplets (y, x_1, \dots, x_{m-1}) tels que $\text{Card}\{x_1, \dots, x_{m-1}\} = \ell - 1$ et $y \in \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$, de sorte que f'_2 est une fibration triviale de fibre $\llbracket 1, \ell - 1 \rrbracket$ au-dessus de chaque composante ouverte-fermée \mathbf{F}_p de $\Delta_{\ell-1, m-1}$ (cf. 2.3.3-(b)). Enfin, le morphisme $j_! : H_c(\Delta_{\ell-1, m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1, m-1})$ est surjectif par hypothèse de récurrence. Les hypothèses de 1.3.1-(d) sont donc vérifiées et l'on conclut que $f^* = 0$. Par conséquent, le morphisme (\ddagger) est bien nul.

(c) En prenant $m = 1$ dans (a), ou $m = \ell = 2$ dans (b), l'espace \mathbf{X} est \cup -acyclique donc i -acyclique d'après 1.2.4-(c). \square

3.1.2. Remarques

a) La preuve de 3.1.1-(a) montre plus généralement, pour \mathbf{X} i -acyclique et pour toute partie localement fermée $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, l'annulation du morphisme de restriction

$$H_c(\mathbf{X} \times \Delta_m \mathbf{Z}) \rightarrow H_c(\Delta_m(\mathbf{X} \times \Delta_m \mathbf{Z})), \quad (\ddagger)$$

et donc l'exactitude de la suite courte

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_m \mathbf{Z})[-1]^m \rightarrow H_c(\Delta_{m+1}(\mathbf{X} \times \Delta_m \mathbf{Z})) \rightarrow H_c(\mathbf{X} \times \Delta_m \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

b) Dans l'assertion (b), l'hypothèse $\ell \leq m$ est critique. En effet, lorsque $\ell > m$, on a $\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m = \Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m = \mathbf{X}^m$ et le morphisme (\ddagger) est l'identité. Dans un tel cas, on a aussi $\Delta_{\ell-1, m-1} = \emptyset$ et l'argument à la fin de la démonstration précédente basé sur la surjectivité de $j_!$ ne s'applique pas.

3.1.3. Remarque et corollaire. Notons $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ le complémentaire dans \mathbf{X} d'un singleton $\{\bullet\}$. Lorsque \mathbf{X} est i -acyclique, il en est de même de $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ et nous

avons grâce à 3.1.1-(a) un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_c(\mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))[-1]^m & \rightarrow & H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})) & \rightarrow & H_c(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))[-1]^m & \rightarrow & H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) & \rightarrow & H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow 0 \end{array}$$

qui permet de montrer, par induction sur $m \geq 1$, que le prolongement par zéro $H_c(\mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ est un morphisme surjectif.

Notons aussi que

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \setminus \mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) := \coprod_{i=1, \dots, m} \mathbf{F}_m^{i=\bullet}(\mathbf{X}) =: \mathbf{F}_m^\bullet(\mathbf{X}),$$

où $\mathbf{F}_m^{i=\bullet}(\mathbf{X})$ désigne l'ensemble des $\bar{x} \in \mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ avec $x_i = \bullet$. On a une identification évidente $\mathbf{F}_m^{i=\bullet}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ et $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \setminus \mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ se voit comme réunion disjointe fermée de m copies de $\mathbf{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$. On a ainsi montré le corollaire suivant.

Corollaire. *Si \mathbf{X} est i -acyclique, la suite de \mathcal{S}_m -modules gradués*

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m^\bullet(\mathbf{X}))[-1] \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow 0$$

est exacte.

3.1.4. À propos des hypothèses d'acyclicité. Dans le théorème de scindage 3.1.1, l'hypothèse d' i -acyclicité n'est pas optimale même lorsque \mathbf{X} est une variété topologique. En effet, dans 12.10 nous montrons que la bouteille de Klein époutée vérifie bien les assertions (a) et (b) bien qu'elle n'est pas i -acyclique. On y montre aussi qu'elle n'est pas « *totale*ment \cup -acyclique » (1.2), mais elle est bien \cup -acyclique. En somme, la i -acyclicité est une condition suffisante et la \cup -acyclicité est une condition nécessaire, mais en dehors du cas où \mathbf{X} est une variété topologique orientable, nous ne connaissons pas de condition cohomologique sur \mathbf{X} qui soit à la fois nécessaire et suffisante pour ce théorème.

3.2. Complexe fondamental de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$

3.2.1. Action du groupe symétrique. L'espace \mathbf{X}^m est muni de l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_m par permutation des coordonnées. On pourra noter cette action par ' $\mathcal{S}_m : \mathbf{X}^m$ ', et de même pour celles induites sur des sous-espaces \mathcal{S}_m -stables $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, leurs cohomologies $\mathcal{S}_m : H_c^i(\mathbf{Z})$, $\mathcal{S}_m : H^i(\mathbf{Z})$, ... Les espaces de configuration généralisés $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$ et leurs cohomologies sont ainsi munis de l'action \mathcal{S}_m . Les suites exactes longues de cohomologie à associées à la décomposition ouverte-fermée

$$\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m = \Delta_\ell \mathbf{X}^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m,$$

sont des suites exactes longues de \mathcal{S}_m -modules gradués.

3.2.2. Définition. Soit $\ell \leq m \in \mathbb{N}$. Le *complexe fondamental* de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$ est, par définition, la suite des morphismes de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$0 \rightarrow H_c(1)[- \ell + 1] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\ell - 1)[-1] \rightarrow H_c(\ell) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0 \quad (\star)$$

avec $H_c(a) := H_c(\Delta_a \mathbf{X}^m)$, où le morphisme $H_c(a - 1)[-1] \rightarrow H_c(a)$ est la composée des morphismes

$$H_c(\Delta_{a-1, m})[-1] \xrightarrow{\iota_{a-1}[-1]} H_c(\Delta_{\leq a-1, m})[-1] \xrightarrow{c_a} H_c(\Delta_{a, m}),$$

où ι est le prolongement par zéro et où c est le morphisme de liaison de la suite longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $\Delta_{\leq a, m} = \Delta_{a, m} \sqcup \Delta_{\leq a-1, m}$ (cf. 2.4).

La suite (\star) est un complexe puisque, par construction, $\iota_a \circ c_a = 0$.

3.2.3. Théorème

- a) *Les complexes fondamentaux d'un espace i -acyclique sont exacts.*
- b) *Une variété topologique orientable est i -acyclique, si et seulement si, ses complexes fondamentaux sont exacts.*

Démonstration. (a) Immédiat d'après 3.1.1-(b), et (b) s'ensuit par 3.1.1-(c). \square

3.3. Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{F}^\lambda(\mathbf{X})$

Nous étendons dans cette section le théorème de scindage 3.1.1-(b) qui établit l'annulation du morphisme de restriction

$$H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m),$$

à d'autres espaces que \mathbf{X}^m , à savoir : aux produits $\mathbf{F}^\lambda := \mathbf{F}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathbf{F}_{\lambda_r}$, et aux espaces $\mathbf{F}^\mathfrak{q} \subseteq \mathbf{X}^m$ où \mathfrak{q} est une partition de $[[1, m]]$ (cf. 3.4).

Ces généralisations seront utilisées dans la section 9 lors de la détermination du caractère de la représentation de $\mathcal{S}_m : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$, notamment pour expliciter la trace de l'action sur $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ d'une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$ dont la décomposition en produit cycles disjoints est de type λ (cf. 9.5.3).

On va considérer les suites (peut être vides) de nombres entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ avec $\lambda_i > 0$ et $r \geq 0$. Lorsque $r > 0$, on note $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ et on pose

$$\mathbf{F}^\lambda(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_{\lambda_1}(\mathbf{X}) \times \cdots \times \mathbf{F}_{\lambda_r}(\mathbf{X}).$$

Lorsque λ est la suite vide $()$, on conviendra que $|()| = 0$ et que $\mathbf{F}_{()}(\mathbf{X}) = \{\text{pt}\}$. Par cette convention, l'opération de concaténation des suites est compatible au produit d'espaces, *i.e.* $\mathbf{F}_{\lambda \vee \lambda'} = \mathbf{F}_\lambda \times \mathbf{F}_{\lambda'}$. On remarquera, pour $m = |\lambda| > 0$, les égalités évidentes

$$\mathbf{F}^{\lambda=(1, \dots, 1)}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^m, \quad \Delta_m \mathbf{F}^\lambda(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_m(\mathbf{X}).$$

3.3.1. Théorème de scindage. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique.

a) Pour tout $a \geq 0$ et tout $\ell \leq 1 + a + |\lambda|$, la décomposition ouverte-fermée $\Delta_\ell(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) = \Delta_\ell(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda) \sqcup \Delta_\ell((\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a)) \times \mathbf{F}^\lambda)$ donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie dont la suite courte extraire

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_\ell(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_\ell(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_\ell(\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a) \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow 0$$

est exacte.

b) Pour tout $\ell \leq |\lambda|$, le morphisme de restriction

$$H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^\lambda))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition ouverte-fermée $\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^\lambda) = \Delta_\ell(\mathbf{F}^\lambda) \sqcup \Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^\lambda)$ est scindée et les suites courtes extraites :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^\lambda))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell(\mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow 0,$$

sont exactes.

Démonstration. L'assertion (a) est évidente si $a = 0$. Pour $a > 0$, notons $m := 1 + a + |\lambda|$ et considérons l'inclusion

$$\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}^a \times \mathbf{X}^{|\lambda|} = \mathbf{X}^m.$$

Nous avons montré dans 2.3.3 que $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$ se décompose en réunion disjointe des sous-espaces ouverts $\mathbf{F}_\mathbf{p}(\mathbf{X})$ où $\mathbf{p} := \{I_1, I_2, \dots, I_\ell\}$ désigne une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides. Une telle partition \mathbf{p} définit sur $\llbracket 1, \ell \rrbracket$ une relation d'équivalence en posant $(i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j)$ (cf. 2.3.1). L'ensemble $\mathbf{F}_\mathbf{p}$ est alors l'ensemble des (x_1, \dots, x_m) tels que $(x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j)$. Il s'ensuit que $\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbf{F}_{\lambda_r}$ est la réunion des $\mathbf{F}_\mathbf{p}$ tels que la relation $(i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j)$ n'est pas vérifiée lorsque i, j sont des coordonnées correspondantes à une même composante \mathbf{F}_a ou \mathbf{F}_{λ_i} . On obtient ainsi une partition de $\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda$ en sous-espaces ouverts et fermés de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$. Ces mêmes remarques s'appliquent clairement à $\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda$ qui est alors aussi un sous-espace ouvert et fermé de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$, de même donc que son complémentaire $\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a) \times \mathbf{F}^\lambda$. On en déduit la décomposition directe

$$H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) = H_c(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda) \oplus H_c(\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a) \times \mathbf{F}^\lambda),$$

qui implique aussitôt l'assertion (a).

(b) *Remarque préliminaire.* Montrons que si $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$ est telle que

$$(H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{Z}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z})) = 0, \quad \forall \ell \leq m, \quad (*)$$

alors, on a aussi

$$(H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z}))) = 0, \quad \forall \ell \leq m + 1. \quad (**)$$

En effet, l'inclusion $\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z}) \subseteq \Delta_{\leq \ell}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z})$ se factorise en

$$\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z}) \xrightarrow{f} \mathbf{X} \times \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z} \xrightarrow{\hookrightarrow} \Delta_{\leq \ell}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z})$$

et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1} \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{X} \times \mathbf{Z}) & \xrightarrow{f} & \mathbf{X} \times \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z} \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & \Delta_{\ell-1} \mathbf{Z} & \xrightarrow{j} & \Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z} \end{array}$$

où $f_2 := p_2 \circ f$. On raisonne alors comme dans la preuve de 3.1.1-(b). L'application $j : H_c(\Delta_{\ell-1} \mathbf{Z}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{Z})$ est surjective par l'hypothèse (*) et la restriction f'_2 de f_2 est propre. Les hypothèses de 1.3.1-(d) sont donc vérifiées. Il s'ensuit que $f^* = 0$, et ceci implique aussitôt (**).

Prouvons (b) par induction sur le nombre r des termes de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. $r \leq 1$. Si $r = 0$, on a $\ell \leq 0$ et donc $\Delta_{\ell-1}(_) = \emptyset$. Si $r = 1$, \mathbf{F}^λ est de la forme \mathbf{F}_a , mais alors $\ell \leq a$ et $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{F}_a \neq \emptyset$ seulement si $\ell = a$, auquel cas $\Delta_{\ell-1} \mathbf{F}_a = \emptyset$. $r > 1$. Supposons (b) établie pour toute suite λ comportant $r \geq 1$ termes. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et montrons, par induction sur l'entier a , que $\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda$ vérifie également (b).

Le cas $a = 1$ était l'objet de la remarque préliminaire. Supposons maintenant que $\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda$ vérifie (b) et montrons qu'il en est de même de $\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda$.

Pour $\ell \leq 1 + a + |\lambda|$, on considère le diagramme commutatif \mathcal{D}_ℓ suivant où l'on a omis d'écrire le symbole $H_c(_)$ pour gagner de la place.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \mathcal{D}_\ell \\ \otimes & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda)[-1] & \xrightarrow{\gamma} & \Delta_\ell(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda) & \longrightarrow & \Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda) & \rightarrow \otimes \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \otimes & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda)[-1] & \xrightarrow{\gamma} & \Delta_\ell(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) & \longrightarrow & \Delta_{\leq \ell}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) & \rightarrow \otimes \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & \\ \otimes & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell-1}(a\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda)[-1] & \longrightarrow & \Delta_\ell(a\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) & \xrightarrow{\beta} & \Delta_{\leq \ell}(a\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) & \rightarrow \otimes \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \end{array}$$

On y a noté $a\mathbf{F}_a$, l'espace qui consiste en a copies de l'espace \mathbf{F}_a , ce qui correspond très exactement à $\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a)$. Le diagramme \mathcal{D}_ℓ se prolonge indéfiniment par ses quatre côtés via les suites longues de cohomologie à support compact. Dans ce prolongement, le nombre ℓ reste bien sûr constant et seuls les degrés cohomologiques changent. Les quatre flèches marquées ' \otimes ' y sont nulles. Cela résulte, pour la colonne et la ligne centrales, respectivement par l'assertion (a) et par la remarque préliminaire.

Lorsque $\ell \leq a + |\lambda|$, l'hypothèse inductive s'applique et les flèches ' \otimes ' sont nulles. Le morphisme β est surjectif et on en déduit la surjectivité de α . Les flèches ' \otimes ' sont donc nulles. Comme ces propriétés sont également vérifiées

sur le diagramme $\mathcal{D}_{\ell-1}$ et que les flèches ‘ \otimes ’ de $\mathcal{D}_{\ell-1}$ sont les flèches ‘ \ominus ’ de \mathcal{D}_ℓ , on conclut que ces dernières sont nulles. À partir de là, une chasse au diagramme élémentaire prouve que les flèches ‘ \otimes ’ sont également nulles, ce qui prouve l’assertion (b) pour l’espace $\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda$ et pour $\ell \leq a + |\lambda|$.

Soit maintenant $\ell = 1 + a + |\lambda|$. Les flèches de la première colonne de $\mathcal{D}_{1+a+|\lambda|}$ marquées ‘ \ominus ’ sont nulles puisqu’elles coïncident avec les flèches ‘ \otimes ’ du diagramme $\mathcal{D}_{a+|\lambda|}$ dont la nullité a déjà été établie. On en déduit l’injectivité de γ , et donc la nullité des flèches ‘ \otimes ’. Ceci prouve l’assertion (b) pour l’espace $\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda$ et pour $\ell = 1 + a + |\lambda|$.

La récurrence par rapport à a est terminée et l’assertion (b) est vérifiée par $\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \leq a + |\lambda|$. Ceci à son tour termine la récurrence par rapport au nombre r dans $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. L’assertion (b) est par conséquent vérifiée par \mathbf{F}^λ pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \leq |\lambda|$. C.Q.F.D \square

3.3.2. Remarque. On prendra garde du fait que l’analogie de 3.3.1-(a) pour l’opérateur $\Delta_{\leq \ell}$, *i.e.* l’exactitude des suites

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}_{1+a} \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow \\ \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\Delta_a(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a) \times \mathbf{F}^\lambda)) \rightarrow 0,$$

n’est pas vrai pour $\ell = 1 + a + |\lambda|$. En effet, dans ce cas, le morphisme de droite est le morphisme de restriction $H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda) \rightarrow H_c(a\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}^\lambda)$ qui est nul d’après 3.1.1-(a). On remarquera que la démonstration du théorème prouve cependant que la suite en question est bien exacte pour $\ell \leq a + |\lambda|$.

3.4. Sous-espaces $\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$ et sous-groupes $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$

3.4.1. Les sous-espaces $\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$. Soit $\mathfrak{q} = \{I_1, \dots, I_r\}$ une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en parties non vides, notons $\lambda_i := |I_i|$ et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, fixons arbitrairement une bijection $\varphi_i : I_i \rightarrow \llbracket 1, \lambda_i \rrbracket$. Notons ensuite $\varphi : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ la bijection

$$t \in I_i \mapsto \varphi(t) = \sum_{j < i} \lambda_j + \varphi_i(t),$$

et soit $\Phi : \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^m$ l’homéomorphisme $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(m)})$. L’ensemble

$$\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}) := \Phi^{-1}(\mathbf{F}^\lambda(\mathbf{X})) = \Phi^{-1}(\mathbf{F}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathbf{F}_{\lambda_m}),$$

est indépendant de l’indexation des parties $I_i \in \mathfrak{q}$ et des choix des bijections φ_i , il dépend uniquement de la partition \mathfrak{q} .

3.4.2. Commentaire à propos des notations. On prendra garde de la différence entre les notations $\mathbf{F}_p(\mathbf{X})$ et $\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$. Bien que dans les deux cas, \mathfrak{p}

et \mathfrak{q} désignent des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$, on a ⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}) &\Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j) ((i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)) \\ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}) &\Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j) ((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)) \end{aligned}$$

3.4.3. Sous-groupe $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$. Pour toute partie $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, notons

$$\mathcal{S}_I := \text{Fix}_{\mathcal{S}_m}(\llbracket 1, m \rrbracket \setminus I) = \{\alpha \in \mathcal{S}_m \mid \alpha(j) = j \quad \forall j \notin I\},$$

puis, si $\mathfrak{q} = \{I_1, \dots, I_r\}$ est une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$, posons

$$\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} := \mathcal{S}_{I_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{I_r}.$$

On a $\mathcal{S}_I \sim \mathcal{S}_{|I|}$ et $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \sim \mathcal{S}_{|I_1|} \times \dots \times \mathcal{S}_{|I_r|}$.

L'action de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ sur \mathbf{X}^m laisse clairement stables les sous-espaces $\Delta_{? \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})$, quel que soit ℓ . La section suivante 3.5 étend les résultats de la section 3.2 qui concernaient les \mathcal{S}_m -espaces $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$, au cas des $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ -espaces $\Delta_{? \ell} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$.

3.4.4. Définition. Deux partitions $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, m \rrbracket)$ sont dites « transverses », et l'on note, $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$, si l'on a $(\forall i \neq j) (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j \Rightarrow i \not\underset{\mathfrak{q}}{\sim} j)$ (cf. 3.4.2). On note

$$\mathfrak{q}^{\pitchfork} := \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, m \rrbracket) \mid \mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}\}.$$

La relation de transversalité est une relation symétrique.

3.4.5. Proposition

- a) Pour $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(m)$, on a $\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}) := \coprod_{\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}} \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})$.
- b) Le sous-groupe $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$ (3.4.3) fixe \mathfrak{q} et laisse stable $\mathfrak{q}^{\pitchfork}$.

Démonstration. (a) On rappelle que l'on a, par définition (3.4.2),

$$\begin{cases} ((x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \iff (\forall i \neq j) ((i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)), \\ ((x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}) \iff (\forall i \neq j) ((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)). \end{cases}$$

L'inclusion $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}$ est alors immédiate si $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$. Réciproquement, un élément $\bar{x} \in \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}$ définit la partition $\mathfrak{p}_{\bar{x}}$ qui regroupe dans une même partie les indices des coordonnées identiques, i.e. $(i \underset{\mathfrak{p}_{\bar{x}}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)$, or $(x_i = x_j) \Rightarrow (i \not\underset{\mathfrak{q}}{\sim} j)$. Par conséquent, $\mathfrak{p}_{\bar{x}} \pitchfork \mathfrak{q}$ et $\bar{x} \in \mathbf{F}_{\mathfrak{p}_{\bar{x}}} \subseteq \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}$.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$, si $\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$, on a $\alpha \cdot \mathfrak{p} \pitchfork \alpha \cdot \mathfrak{q}$. D'autre part, si $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$, l'égalité $\alpha \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ est évidente. \square

3.5. Complexe fondamental de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$

3.5.1. Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$. Compte tenu de l'homéomorphisme $\mathbf{F}^{\lambda} \sim \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}$ de 3.4.1, le corollaire suivant du théorème 3.3.1 est immédiat.

¹⁰ On rappelle que si \mathfrak{p} est une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$, on écrit $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$, si et seulement si, il existe $I \in \mathfrak{p}$ tel que $\{i, j\} \subseteq I$.

3.5.2. Corollaire. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour toute partition \mathfrak{q} de $\llbracket 1, m \rrbracket$ et pour tout $\ell \leq m$, le morphisme de restriction

$$H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition ouverte-fermée $\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}) = \Delta_{\ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}) \sqcup \Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})$ est scindée et les suites courtes extraites :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})) \rightarrow 0,$$

sont exactes.

3.5.3. Définition. Soit \mathfrak{q} une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ et soit $\ell \leq m$. Le complexe fondamental de \mathbf{X} associé à $\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})$ est, par définition, la suite des morphismes de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ -modules gradués

$$0 \rightarrow H_c(1)[- \ell + 1] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\ell - 1)[-1] \rightarrow H_c(\ell) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}))) \rightarrow 0$$

avec $H_c(a) := H_c(\Delta_a(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}))$, obtenue par concaténation des suites courtes du corollaire 3.5.2 (cf. 3.2.2).

3.5.4. Théorème. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Le complexe fondamental de $\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})$ est un complexe de $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ -modules gradués exact.

Démonstration. Conséquence immédiate du corollaire 3.5.2. □

4. Rappels sur les nombres de Stirling

Pour les notions de cette section de rappels, nous renvoyons à la référence [20] pour plus de détails.

4.1. Factorielles croissantes et décroissantes

Pour $n \in \mathbb{N}$, les « n -ièmes factorielles croissantes et décroissantes » d'un élément x d'un anneau, notées respectivement $x^{\overline{n}}$ et $x^{\underline{n}}$, sont définies par

$$\begin{cases} x^{\overline{0}} := 1, & \text{et } x^{\overline{n}} := x(x+1)(x+2) \cdots (x+(n-1)), \\ x^{\underline{0}} := 1, & \text{et } x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2) \cdots (x-(n-1)). \end{cases}$$

On a clairement

$$x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n) \quad \text{et} \quad x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n).$$

4.2. Nombres de Stirling de première espèce

Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$, le sous-module $\mathbb{Z}^n[X]$ des polynômes de degré majoré par n admet les trois bases suivantes

$$\mathcal{B} := \{x^0, x^1, \dots, x^n\}, \quad \underline{\mathcal{B}} := \{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \dots, x^{\underline{n}}\}, \quad \overline{\mathcal{B}} := \{x^{\overline{0}}, x^{\overline{1}}, \dots, x^{\overline{n}}\},$$

Le développement des polynômes $X^{\underline{n}}$ et $X^{\overline{n}}$ en somme de monômes donne les coefficients des matrices de passage de \mathcal{B} vers les deux autres bases. On

note ces matrices respectivement par $(\underline{s}(i, j))$ et $(\bar{s}(i, j))$. On a donc

$$X^i = \sum_{i \geq j \geq 0} \underline{s}(i, j) X^j \quad \text{et} \quad X^{\bar{i}} = \sum_{i \geq j \geq 0} \bar{s}(i, j) X^j.$$

Les matrices $(\underline{s}(i, j))$ et $(\bar{s}(i, j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On voit clairement que $\bar{s}(i, j) \geq 0$ et que $(-1)^{i-j} \underline{s}(i, j) \geq 0$.

On étend la définition de $\underline{s}(i, j)$ et $\bar{s}(i, j)$ à tous les indices $i, j \in \mathbb{N}$, par la valeur 0 lorsque $j > i$. Ainsi, les sommations ci-dessous peuvent être indexées tout simplement indexées par ' $j \geq 0$ '.

4.2.1. Définition. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\bar{s}(i, j) \in \mathbb{N}$ sont « les nombres de Stirling de première espèce (non signés) », et les entiers relatifs $\underline{s}(i, j) \in \mathbb{Z}$ sont « les nombres de Stirling de première espèce (signés) ».

4.2.2. Lemme. Les nombres de Stirling de première espèce vérifient les propriétés suivantes.

a) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\underline{s}(i, j) = (-1)^{i-j} \bar{s}(i, j)$. En particulier, si D désigne la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^i)$, on a

$$(\underline{s}(i, j)) = D(\bar{s}(i, j))D^{-1}$$

b) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{s}(i, i) = 1$ et $\bar{s}(i, i) = 1$.

c) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{s}(0, i) = \underline{s}(i, 0) = 0$ et $\bar{s}(0, i) = \bar{s}(i, 0) = 0$.

d) Pour tous $i, j \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \underline{s}(i, j) = \underline{s}(i-1, j-1) - (i-1) \underline{s}(i-1, j), \\ \bar{s}(i, j) = \bar{s}(i-1, j-1) + (i-1) \bar{s}(i-1, j). \end{cases}$$

e) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{s}(i, 1) = (-1)^{i-1} (i-1)!$ et $\bar{s}(i, 1) = (i-1)!$.

Démonstration. (a) Évident puisque $X^{\bar{i}} = (-1)^i (-X)^i$. (b,c) Pour tout $i > 0$, les polynômes X^i sont clairement de coefficient constant 0 et de coefficient principal 1. (d) Résulte de ce que pour $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} X^i &= X^{i-1}(X - (i-1)) = \left(\sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) X^j \right) (X - (i-1)) \\ &= \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) X^{j+1} - \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) (i-1) X^j = \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i, j) X^j. \end{aligned}$$

(e) Pour $i > 0$, on a

$$(\underline{s}(i, 1) = (X-1) \cdots (X-(i-1)))|_{X=0} = (-1)(-2) \cdots (-i+1).$$

Les égalités concernant les coefficients $\bar{s}(i, j)$ résultent ensuite de (a). \square

4.3. Nombres de Stirling de deuxième espèce

Les coefficients des matrices $(\underline{S}(i, j)) := (\underline{s}(i, j))^{-1}$ et $(\bar{S}(i, j)) := (\bar{s}(i, j))^{-1}$ vérifient :

$$X^i = \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i, j) X^j = \sum_{j \geq 0} \bar{S}(i, j) X^j, \quad \forall i \geq 0.$$

Les matrices $(\underline{S}(i, j))$ et $(\bar{S}(i, j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On verra que $\underline{S}(i, j) \geq 0$ et que $(-1)^{i-j} \bar{S}(i, j) \geq 0$.

4.3.1. Définition. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\underline{S}(i, j) \in \mathbb{N}$ sont « les nombres de Stirling de seconde espèce (non signés) », et les entiers relatifs $\bar{S}(i, j) \in \mathbb{Z}$ sont « les nombres de Stirling de seconde espèce (signés) ».

4.3.2. Lemme. Nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient les propriétés suivantes

a) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\bar{S}(i, j) = (-1)^{i-j} \underline{S}(i, j)$. En particulier, si D désigne la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^i)$, on a

$$(\bar{S}(i, j)) = D(\underline{S}(i, j))D^{-1}$$

b) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{S}(i, i) = 1$ et $\bar{S}(i, i) = 1$.

c) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{S}(0, i) = \underline{S}(i, 0) = 0$ et $\bar{S}(0, i) = \bar{S}(i, 0) = 0$.

d) Pour tous $i, j \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \underline{S}(i, j) = \underline{S}(i-1, j-1) + j \underline{S}(i-1, j), \\ \bar{S}(i, j) = \bar{S}(i-1, j-1) - j \bar{S}(i-1, j). \end{cases}$$

e) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\underline{S}(i, j) \geq 0$ et $(-1)^{i-j} \bar{S}(i, j) \geq 0$.

f) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{S}(i, 1) = 1$ et $\bar{S}(i, 1) = (-1)^{i+1}$.

Démonstration. (a) Évident d'après 4.2.2-(a). (b,c) Évidents. (d) Résulte de ce que pour $j \geq 0$, on a $X^i X^j = X^{i+j} + j X^i$ et alors

$$\begin{aligned} X^i &= X^{i-1} X = \left(\sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j) X^j \right) X \\ &= \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j) X^{j+1} + \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j) j X^j = \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i, j) X^j. \end{aligned}$$

(e) La positivité de $\underline{S}(i, j)$ résulte inductivement de (d) à partir de la positivité de $\underline{S}(0, j)$ et $\underline{S}(1, j)$, ce qui a été établi dans (b) et (c). (f) La question (b) fixe le cas $i = 1$, pour $i > 1$, on a $\underline{S}(i, 1) = \underline{S}(i-1, 0) + \underline{S}(i-1, 1) = \underline{S}(i-1, 1)$, d'après (c) et (d), et par induction, $\underline{S}(i, 1) = \underline{S}(1, 1) = 1$. \square

4.3.3. Remarques

- *Valeurs initiales des nombres de Stirling.* Les nombres de Stirling ont été indexés par les couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Dans tous les cas, les coefficients de la colonne ($j = 0$) et la ligne ($i = 0$) sont nuls sauf pour $i = j = 0$ où

ils valent 1. Tous les autres termes découlent de ces « valeurs initiales » via les quatre règles de récurrence (d) des lemmes 4.2.2 et 4.3.2.

- On remarquera aussi les égalités suivantes qui concernent les sous-matrices de nombres de Stirling d'indices non nuls.

$$\begin{cases} (\underline{S}(i, j)_{i, j \geq 1})^{-1} = (\underline{s}(i, j)_{i, j \geq 1}) \\ (\overline{S}(i, j)_{i, j \geq 1})^{-1} = (\overline{s}(i, j)_{i, j \geq 1}) \end{cases}$$

4.4. Nombres de Stirling non signés et cardinaux

Pour tous $i, j \geq 0 \in \mathbb{N}$, on définit :

- $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] :=$ cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments qui sont produits d'exactly j cycles.
- $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} :=$ cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i éléments en j parties non vides.

On remarquera l'égalité $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ qui dit qu'il y a une unique partition de l'ensemble vide en 0 parties non vides, et l'égalité $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1$ qui dit qu'il y a une unique permutation qui soit produit de 0 cycles.

4.4.1. Proposition. *Pour tous $i \geq j \geq 0 \in \mathbb{N}$, on a*

- $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \underline{S}(i, j)$. Lorsque $i \geq 1$, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^i$.
- $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] = \overline{s}(i, j) = (-1)^{i-j} \underline{s}(i, j)$.

Démonstration. On a bien $1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ et $0 = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ j \end{smallmatrix} \right]$ pour tous $i, j \neq 0$. Les familles des nombres en question ont donc bien les même valeurs initiales que les nombres de Stirling.

Pour $i \geq j \geq 1$, on trie les partitions de $\mathfrak{P}_j(\llbracket 1, i \rrbracket)$ en deux parties suivant qu'elles contiennent ou non le singleton $\{i\}$. Les cardinaux de ces parties sont respectivement $\left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\}$ et $j \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\}$. On a donc

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\} + j \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\},$$

ce qui correspond à la récurrence 4.3.2-(d) pour les nombres $\underline{S}(i, j)$.

De même, en triant les permutations de $\llbracket 1, i \rrbracket$, suivant que $\{i\}$ est fixé ou non, on obtient deux classes de cardinaux $\left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right]$ et $(i-1) \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right]$, on a donc :

$$\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right] + (i-1) \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right],$$

ce qui correspond à la récurrence 4.2.2-(d) pour les nombres $\overline{s}(i, j)$.

Enfin, on rappelle que la formule dans (a) provient du dénombrement des surjections de $\llbracket 1, i \rrbracket \twoheadrightarrow \llbracket 1, j \rrbracket$ (modulo les permutations de $\llbracket 1, j \rrbracket$). Cet ensemble est le complémentaire F_* dans l'ensemble F de toutes les applica-

tions de $\llbracket 1, i \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, j \rrbracket$ de l'ensemble des applications qui ne sont pas surjectives. Notons F_t le sous-ensemble des applications de F qui n'atteignent pas la valeur $t \in \llbracket 1, j \rrbracket$. Notons $F_{t_1, \dots, t_k} := F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_k}$. On a alors

$$|F_*| = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq j} |F_{t_1, \dots, t_k}| = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} (j-k)^i,$$

et la formule découle aussitôt. \square

5. Cohomologie des espaces de configuration, cas i -acyclique

5.1. Généralités sur le polynôme de Poincaré

5.1.1. Polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué

Le *polynôme de Poincaré* d'un k -espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$ de dimension finie est le polynôme $\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T]$ défini par

$$\mathcal{P}(V^*)(T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k(V^i) T^i.$$

Le lemme suivant est classique.

5.1.2. Lemme

- a) Si $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte courte d'espaces vectoriels gradués, on a $\mathcal{P}(V_2) = \mathcal{P}(V_1) + \mathcal{P}(V_3)$.
- b) $\mathcal{P}(V[-1])(T) = T \cdot \mathcal{P}(V)$ ⁽¹¹⁾.
- c) $\mathcal{P}(V_1 \otimes_k V_2) = \mathcal{P}(V_1) \cdot \mathcal{P}(V_2)$.
- d) $\mathcal{P}(\text{Homgr}_k(V_1, V_2))(T) = \mathcal{P}(V_1)(1/T) \cdot \mathcal{P}(V_2)(T)$

5.1.3. Polynômes de Poincaré d'un espace topologique

Les polynômes de Poincaré pour la cohomologie ordinaire et à support compact d'un espace topologique \mathbf{X} de type fini ⁽⁹⁾ sont notés

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}, k)(t) := \mathcal{P}(H(\mathbf{X}, k)) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_c(\mathbf{X}, k)(t) := \mathcal{P}(H_c(\mathbf{X}, k)).$$

Le corps k sera omis de ces notations lorsque son indication sera superflue.

5.1.4. Remarque et notation. Lorsque $H_c^0(\mathbf{X}) = 0$, les nombres de Betti compacts de $\mathbf{X} \setminus F$ seul dépendent du cardinal $i := \#F$ de la partie finie $F \subseteq \mathbf{X}$ (1.3.2). Ceci nous emmène à introduire la notation $\mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)$, p.e. dans (c) du lemme qui suit.

¹¹ On rappelle que $V[-1]^i := V^{i-1}$, par convention.

5.1.5. Lemme. Si \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des espaces topologiques de type fini, on a

- a) $\mathcal{P}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathcal{P}(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{Y})$ et $\mathcal{P}_c(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathcal{P}_c(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{Y})$.
b) (Dualité de Poincaré) Si de plus \mathbf{X} est une variété topologique orientable, de dimension $d_{\mathbf{X}}$ et de type fini, on a

$$\mathcal{P}(\mathbf{X})(T) = \mathcal{P}_c(\mathbf{X})(1/T) \cdot T^{d_{\mathbf{X}}}.$$

- c) Si $H_c^0(\mathbf{X}) = 0$ n'est compacte (p.e. si \mathbf{X} est i -acyclique), on a (5.1.4)

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)(T) = \mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T) + i \cdot T,$$

et donc

$$\frac{\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)(T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T)}{T} \right)^{\overline{m}}.$$

Démonstration. (c) Comme $H_c^0(\mathbf{X}) = 0$, la suite exacte longue

$$\rightarrow H_c(\mathbf{X} \setminus F_i) \rightarrow H_c(\mathbf{X}) \xrightarrow{\rho} H_c(F_i) \rightarrow$$

est scindée ($\rho = 0$) pour tout sous-ensemble fini F_i de \mathbf{X} de cardinal i . On conclut ensuite par 5.1.2-(a,b). \square

5.2. Polynômes de Poincaré de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ et de $\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m$

La proposition suivante est une application immédiate du théorème de scindage 3.1.1-(a). Elle donne une formule fermée pour les polynômes de Poincaré de deux espaces de configuration fréquemment étudiés.

Mise en garde. La donnée d'un espace i -acyclique \mathbf{X} présuppose que $\dim H_c(\mathbf{X}) < \infty$.

5.2.1. Proposition. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique.

- a) Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ est le polynôme

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)(T) = \prod_{i=0}^{m-1} (\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T) + i \cdot T),$$

soit,

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(T) = T^m \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T)}{T} \right)^{\overline{m}}.$$

- b) L'espace $\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m$ est « la diagonale épaisse de \mathbf{X}^m », son polynôme de Poincaré est le polynôme $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m)$ homogène de degré $m - 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(\mathbf{X}), T]$, vérifiant :

$$\frac{\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m)(T)}{T^{m-1}} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T)}{T} \right)^{\overline{m}} - \left(\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(T)}{T} \right)^m.$$

Démonstration. (a) La suite exacte courte de 3.1.1-(a) et le lemmes 5.1.2 et 5.1.5 donnent aussitôt la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{m+1}) &= \mathcal{P}_c(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m) + m \cdot T \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m) \\ &= (\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) + m \cdot T) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m) = \mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus m) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m)\end{aligned}$$

qui permet de conclure.

(b) Montrons la surjectivité du morphisme de prolongement par zéro

$$H_c(\mathbf{F}_m) \twoheadrightarrow H_c(\mathbf{X}^m). \quad (*)$$

Immédiat si $m = 1$, on raisonne par induction. Si $H_c(\mathbf{F}_{m-1}) \rightarrow H_c(\mathbf{X}^{m-1})$ est surjectif, le morphisme

$$H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_{m-1}) \twoheadrightarrow H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{X}^{m-1}),$$

l'est aussi (par Künneth), et, composé à $H_c(\mathbf{F}_m) \twoheadrightarrow H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_{m-1})$, surjectif d'après 3.1.1-(a), on conclut que (*) l'est aussi.

Cela étant établi, \mathbf{F}_m est ouvert dans \mathbf{X}^m et son complémentaire est la diagonale épaisse $\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m$. La suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition ouverte fermée $\mathbf{X}^m = \mathbf{F}_m \sqcup \Delta_{\leq m-1, m}$ est donc scindée au niveau du morphisme (*), d'où la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{< m, m})[-1] \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\mathbf{X}^m) \rightarrow 0,$$

dont résulte l'assertion (b). \square

5.2.2. Remarque. Dans cette proposition, si \mathbf{X} est en plus une variété topologique orientable et de dimension $d_{\mathbf{X}}$, l'ouvert $\mathbf{F}_m \subseteq \mathbf{X}^m$ (de dimension $md_{\mathbf{X}}$) l'est également et la dualité de Poincaré (5.1.5-(b)) s'applique pour donner l'égalité analogue à 5.2.1-(a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(T) &= \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}(\mathbf{X} \setminus i)(T) = \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}(\mathbf{X})(T) + i \cdot T^{d_{\mathbf{X}}-1} \\ &= T^{(d_{\mathbf{X}}-1)m} \left(\frac{\mathcal{P}(\mathbf{X})(T)}{T^{d_{\mathbf{X}}-1}} \right)^{\overline{m}}.\end{aligned}$$

5.2.3. Remarque. Soient $1 \leq a \leq m \in \mathbb{N}$ et $\pi_a : \mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{F}_a$ la projection sur les a dernières coordonnées. Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{F}_a$, notons $\mathbf{UF}_m := \pi_a^{-1}(U)$. La même preuve de 3.1.1-(a) montre que la suite

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{UF}_m)[-1]^m \rightarrow H_c(\mathbf{UF}_{m+1}) \rightarrow H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{UF}_m) \rightarrow 0, \quad (\diamond)$$

est exacte. On en déduit, comme pour 5.2.1-(a), que l'on a

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{UF}_{b+a}) = \mathcal{P}_c(\mathbf{UF}_{b-1+a}) \cdot (\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) + (b-1+a)T)$$

et par itération (cf. 11.2.8) :

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X})) = \mathcal{P}_c(U) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)).$$

Il est intéressant d'observer qu'une condition nécessaire pour l'exactitude des suites (\diamond) pour tout $U \subseteq X$, est que X soit totalement \cup -acyclique. En effet, dans un tel cas et si m , le morphisme $H_c(X) \otimes H_c(U) \rightarrow H_c(U)$ doit être nul. Nous ignorons si la totale \cup -acyclicité suffit à l'exactitude des suites (\diamond) lorsque, par exemple, X est une variété topologique non orientable.

5.2.4. Remarque. Lorsque X est une variété topologique, les applications $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ sont des fibrations localement triviales de fibres isomorphes à $F_b(Y)$ où Y est le complémentaire d'un sous-ensemble fini de X de cardinal a . Par conséquent

$$\mathcal{P}_c(\pi_a^{-1}C) = \mathcal{P}_c(C) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus a)), \quad (*)$$

pour toute composante connexe C de F_a , ce qui suggère une certaine forme de trivialité cohomologique pour les fibrations en question.

Cette remarque est à l'origine de l'étude de la section 11.4, destinée à prouver la dégénérescence des suites spectrales de Leray de ces fibrations lorsque X est i -acyclique (mais pas forcément de type fini). Plus précisément, on y montre que si C est une composante connexe de $F_a(X)$ et si $\bar{x} \in C$, le terme \mathbb{E}_2 de la suite spectrale de Leray pour la cohomologie à support compact de la fibration $\pi_a : \pi_a^{-1}C \rightarrow C$ est

$$\mathbb{E}_2 = H_c(C) \otimes H_c(\pi_a^{-1}\bar{x}) \Rightarrow H_c(\pi_a^{-1}C).$$

On observera déjà à ce niveau que si X est en plus de type fini, l'égalité $(*)$ s'applique et force l'annulation des différentielles d_r , pour $r \geq 2$ de la suite spectrale (\mathbb{E}_r, d_r) en question. En effet, autrement il faudrait s'attendre à une chute stricte de la dimension de \mathbb{E}_∞ par rapport à celle de \mathbb{E}_2 , ce qui n'est pas le cas.

5.2.5. Corollaire. *Soit X un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell X^m)$ s'obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_c(X)$ le polynôme homogène $\mathcal{Q}_{\ell,m}(P, T) \in \mathbb{Z}[P, T]$, de degré ℓ :*

$$\mathcal{Q}_{\ell,m}(P, T) = T^\ell \cdot |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \left(\frac{P}{T}\right)^\ell.$$

Démonstration. Clair d'après 2.3.3 et 5.2.1-(a). □

5.2.6. Commentaire. Notre approche pour l'étude des polynômes de Poincaré des espaces de configuration associés à une variété topologique orientable X repose sur l'annulation du morphisme de restriction à la diagonale $\delta_X^* : H_c(X \times X) \rightarrow H_c(X)$. Cela restreint sa portée, mais n'exclut pas qu'elle puisse être appliquée dans d'autres cas, et même pour X compact.

Par exemple, lorsque X est un groupe de Lie compact connexe K de dimension d_K , il est avantageux de profiter de l'action diagonale libre de K

sur $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$. Notons $\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \setminus \{e\}$. On a la bijection

$$\Psi : \mathbf{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{F}(n, \mathbf{K}), \quad (\bar{x}, g) \mapsto (x_1g, \dots, x_{n-1}g, g),$$

et ceci donne aussitôt l'égalité

$$H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{K})) = H_c(\mathbf{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\mathbf{K}})) \otimes H_c(\mathbf{K})$$

où $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ n'est plus compact. On peut alors se demander si $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ est \cup -acyclique.

Comme \mathbf{K} est compact, le prolongement par zéro $H_c(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) \rightarrow H(\mathbf{K})$ identifie $H_c(\overset{\circ}{\mathbf{K}})$ à $H^+(\mathbf{K})$ et nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) \otimes H_c(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) & \xrightarrow{\rho_{\overset{\circ}{\mathbf{K}}}} & H_c(\Delta_{\overset{\circ}{\mathbf{K}}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(\mathbf{K}) \otimes H(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\rho_{\mathbf{K}}} & H(\Delta_{\mathbf{K}}) \end{array}$$

où $\rho_{\mathbf{K}}$ est le cap-produit. Si $\rho_{\overset{\circ}{\mathbf{K}}} = 0$, nous devons avoir

$$H^+(\mathbf{K}) \wedge H^+(\mathbf{K}) = 0,$$

mais ceci n'est possible, par dualité de Poincaré, que si le groupe de Lie \mathbf{K} à la même homologie qu'une sphère. Lorsque le corps des coefficients est \mathbb{Q} , cela arrive seulement dans trois cas $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{K} = 1$ et $\mathbf{K} = 3 \simeq \text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$. Dans ces cas la proposition 5.2.1-(a) s'applique et on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{K})) &= \mathcal{P}_c(\mathbf{K}) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{m-1}(\overset{\circ}{\mathbf{K}})) = \mathcal{P}_c(\mathbf{K}) \cdot T^{m-1} \cdot \left(\frac{\mathcal{P}_c(\overset{\circ}{\mathbf{K}})}{T} \right)^{\overline{m-1}} \\ &= (T^{d_{\mathbf{K}}} + 1) \cdot T^{m-1} \cdot (T^{d_{\mathbf{K}}-1})^{\overline{m-1}}. \end{aligned}$$

5.3. Polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$

Une application immédiate de l'exactitude du complexe fondamental est dans la détermination du polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ lorsque \mathbf{X} est de type fini. L'assertion suivante généralise la proposition 5.2.1.

5.3.1. Corollaire. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(\mathbf{X}), T]$, de degré ℓ , donné par la somme alternée (cf. 2.3.3)*

$$\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{\ell-a}(\mathbf{X})) \cdot T^a,$$

avec comme termes de plus bas et plus haut degrés en T :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) &= |\mathfrak{P}_{\ell}(\mathbf{X})| \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{X})^{\ell} \cdot T^0 + \dots \\ &\dots + \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot (\ell - a - 1)! \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{X}) \cdot T^{\ell-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Résulte d'appliquer le théorème 3.2.3, l'explicitation du corollaire 5.2.5 et le fait que le terme de plus haut degré en T de $\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{\ell-a}(\mathbf{X}))$ est $(\ell - a - 1)! \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{X}) \cdot T^{\ell-a-1}$ d'après 5.2.1-(a). \square

5.4. Polynôme universel pour $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$

Le corollaire 5.3.1 montre que lorsque \mathbf{X} est i -acyclique, le polynôme de Poincaré de $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ s'obtient en évaluant un certain polynôme homogène de l'anneau $\mathbb{Z}[P, T]$, degré ℓ , en $P = \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$. Ce polynôme est indépendant de \mathbf{X} et il est unique.

Définition. Le « polynôme universel pour la cohomologie à support compact des espaces $\Delta_{\leq \ell, m}$ », noté $\mathbf{Q}_{\leq \ell, m}(P, T)$, est le polynôme de $\mathbb{Z}[P, T]$, homogène de degré total ℓ , donné par

$$\mathbf{Q}_{\leq \ell, m}(P, T) := T^\ell \sum_{a=1, \dots, \ell} (-1)^{\ell-a} \cdot |\mathfrak{P}_a(m)| \cdot \left(\frac{P}{T}\right)^{\bar{a}},$$

$$\text{où } |\mathfrak{P}_a(m)| := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m. \text{ (Cf. 2.3.3.)}$$

5.4.1. Remarque. Il peut y avoir beaucoup de simplifications dans l'expression donnant ces polynômes. Par exemple, sachant que $\Delta_{\leq m} \mathbf{X}^m = \mathbf{X}^m$, on peut anticiper l'égalité

$$\mathbf{Q}_{\leq m, m}(P, T) = P^m,$$

ce qui est loin d'être une évidence à partir de la définition.

5.4.2. Un exemple de polynômes universels

Voici les six polynômes universels pour $m = 6$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\leq 1, 6}(P, T) &= P T^0 \\ \mathbf{Q}_{\leq 2, 6}(P, T) &= 31 P^2 T^0 + 30 P T \\ \mathbf{Q}_{\leq 3, 6}(P, T) &= 90 P^3 T^0 + 239 P^2 T + 150 P T^2 \\ \mathbf{Q}_{\leq 4, 6}(P, T) &= 65 P^4 T^0 + 300 P^3 T + 476 P^2 T^2 + 240 P T^3 \\ \mathbf{Q}_{\leq 5, 6}(P, T) &= 15 P^5 T^0 + 85 P^4 T + 225 P^3 T^2 + 274 P^2 T^3 + 120 P T^4 \\ \mathbf{Q}_{\leq 6, 6}(P, T) &= P^6 T^0. \end{aligned}$$

6. Représentations du groupe symétrique

Dans 3.2.2 nous avons muni les espaces $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$ de l'action de \mathcal{S}_m . Nous allons maintenant explorer en détail la structure de \mathcal{S}_m -espace de $\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$. Mais avant cela, il nous faut plus de notations.

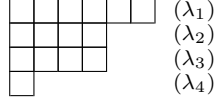
6.1. Notations pour les décompositions et les diagrammes de Young

- Une « décomposition » λ d'un entier $m \geq 0$, noté $\lambda \vdash m$, est la donnée d'une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0)$ telle que $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell$. On note alors $|\lambda| = m$ et $\ell(\lambda) := \ell$.

- Étant données des familles entiers positifs $\{d_1 > \dots > d_r\}$ et $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$, telle que $m = \sum_i \mu_i d_i$, on notera de manière équivalente

$$(d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r}) = (\underbrace{d_1, \dots, d_1}_{\mu_1}, \underbrace{d_2, \dots, d_2}_{\mu_2}, \dots, \underbrace{d_r, \dots, d_r}_{\mu_r})$$

- Un « *diagramme de Young* » est un empilement vertical de juxtapositions horizontales de boites dont le nombre, λ_i , décroît. Par exemple



La suite $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ est une décomposition de $m := |\lambda|$. On identifie ainsi décompositions et diagrammes. On note $\mathcal{Y}_\ell(m)$ l'ensemble des diagrammes à m boites et à ℓ lignes, soit donc

$$\mathcal{Y}_\ell(m) := \{(\lambda \vdash m) \ \& \ (\ell(\lambda) = \ell)\}.$$

- Un « *tableau de Young standard* » est un diagramme de Young λ dont on remplit les boites par les entiers $1, 2, \dots, |\lambda|$. On note $\tau(\lambda)$ le tableau obtenu par une numérotation successive, de gauche à droite et de haut en bas, tel qu'indiqué dans la figure ci-contre.

$$\tau(\lambda) := \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} & \boxed{10} & & \\ \boxed{11} & \boxed{12} & \boxed{13} & \boxed{14} & & \\ \boxed{15} & & & & & \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note \mathcal{P}_λ le sous-groupe de \mathcal{S}_m des permutations qui conservent les lignes de $\tau(\lambda)$. On a

$$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}.$$

- Un diagramme $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$ décompose l'intervalle $\llbracket 1, m \rrbracket$ suivant les ℓ sous-intervalles définis par les lignes de $\tau(\lambda)$. On note $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathfrak{P}_\ell(|\lambda|)$ la partition ainsi déterminée. Le sous-groupe

$$\mathcal{S}_\lambda := N_{\mathcal{S}_m} \mathcal{P}_\lambda$$

où $N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$ désigne le normalisateur de \mathcal{P}_λ dans \mathcal{S}_m , est le sous-groupe des éléments de \mathcal{S}_m qui fixent la partition \mathfrak{p}_λ .

6.1.1. Lemme. *On fait agir \mathcal{S}_m avec son action naturelle sur $\mathfrak{P}_\ell(m)$. Pour $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, on note $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de \mathcal{S}_m qui fixe \mathfrak{p} . Chaque orbite de \mathcal{S}_m rencontre une unique partition de la forme \mathfrak{p}_λ . On a*

$$\mathfrak{P}_r(m) = \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot \mathfrak{p}_\lambda \simeq \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_\lambda.$$

où λ parcourt l'ensemble $\mathcal{Y}_\ell(m)$ des décompositions de m en ℓ entiers $\neq 0$.

- a) Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r})$, avec $d_i > d_{i+1}$, on a

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\mathfrak{p}_\lambda} = N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda) \quad \text{et} \quad G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_r},$$

b) Le groupe $G_\lambda = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_r}$ relève à un sous-groupe de \mathcal{S}_λ et l'on a

$$\mathcal{S}_\lambda = (\mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_r}) \rtimes \mathcal{P}_\lambda.$$

6.2. Décomposition ouverte \mathcal{S}_m -stable de $\Delta_\ell \mathbf{X}^m$

Par le lemme 6.1.1 la décomposition ouverte de $\Delta_{\ell,m}$ de 2.3.3 s'écrit

$$\Delta_\ell \mathbf{X}^m = \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot \mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X}).$$

La proposition suivante est de vérification immédiate.

6.2.1. Proposition. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r}) \in \mathcal{Y}_\ell(m)$.

a) Le groupe $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$ est le sous-groupe de \mathcal{S}_m des permutations qui agissent comme l'identité sur $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X})$. Son normalisateur \mathcal{S}_λ est le sous-groupe de \mathcal{S}_m qui laisse stable $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X})$.

Soit la surjection canonique de groupes

$$\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_\ell} \subseteq \mathcal{S}_\ell$$

et considérons $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X})$ muni de sa structure de G_λ -espace.

b) L'application $\phi_\lambda : \mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_\ell(\mathbf{X})$, $\phi_\lambda : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_\ell)$ avec $y_k := x_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}$, est un isomorphisme de G_λ -espaces.

c) L'application

$$\Psi_\lambda : \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_\lambda} \mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{S}_m \cdot \mathbf{F}_{\mathfrak{p}_\lambda}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}^m, \quad (\alpha, \bar{x}) \mapsto \alpha \cdot \phi^{-1}(\bar{x}),$$

est un isomorphisme de \mathcal{S}_m -espaces.

6.2.2. Caractères de \mathcal{S}_m associés à $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$

Pour toute partie $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}^m$, de type fini et stable sous l'action du groupe \mathcal{S}_m , les espaces $H_c^i(\mathbf{Z}, k)$ et de $H^i(\mathbf{Z}, k)$ sont les \mathcal{S}_m -modules de dimension finie, leurs caractères seront respectivement notés :

$$\begin{cases} \chi_c(\mathbf{Z}; i) : \mathcal{S}_m \rightarrow k, & \chi_c(\mathbf{Z}; i)(\alpha) := \text{tr}(\alpha : H_c^i(\mathbf{Z}; k)) \\ \chi(\mathbf{Z}; i) : \mathcal{S}_m \rightarrow k, & \chi(\mathbf{Z}; i)(\alpha) := \text{tr}(\alpha : H^i(\mathbf{Z}; k)). \end{cases}$$

Mise en garde. Dans toutes les sections concernant les représentations des groupes symétriques, on supposera que $\text{car}(k) = 0$ (cf. 8.3.5).

6.2.3. Commentaire. Lorsque \mathbf{X} est une variété topologique orientable (de dimension $d_{\mathbf{X}}$), l'ouvert $\mathbf{F}_m \subseteq \mathbf{X}^m$ (de dimension $md_{\mathbf{X}}$) est également une variété orientable et les espaces $H^i(\mathbf{F}_m)$ et $H_c^{md_{\mathbf{X}}-i}(\mathbf{F}_m)$ sont en dualité, de même donc que les représentations respectives de \mathcal{S}_m . Ainsi, la connaissance de $\chi_c(\mathbf{F}_m, *)$ détermine $\chi(\mathbf{F}_m, *)$. En dehors de ces cas, nos méthodes ne s'appliquent pas à l'étude de la cohomologie ordinaire $H(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m)$, ni en tant qu'espace vectoriel ni, a fortiori, en tant que \mathcal{S}_m -module.

6.3. Foncteurs d'induction $\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et \mathbf{I}_ℓ^m

Pour $0 < \ell \leq m$, et tout $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note

$$\boxed{\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{|\lambda|}])} \quad (\mathbf{Ind})$$

le foncteur $\text{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \circ \text{Res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell}$ où \mathcal{S}_λ agit à travers de la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda$ de 6.2.1-(a). On considère ensuite le foncteur

$$\boxed{\mathbf{I}_\ell^m := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])} \quad (\mathbf{I})$$

(Remarquer que l'on a $\mathbf{I}_m^m = \text{id}$.) On notera par la même notation l'opérateur linéaire $\mathbf{I}_\ell^m : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]$ défini sur les fonctions centrales par la formule d'induction des caractères.

6.3.1. Proposition. *Pour $0 \leq \ell \leq m$, on a un isomorphisme de \mathcal{S}_m espaces :*

$$\Delta_\ell \mathbf{X}^m \cong \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_\lambda} \mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}).$$

En particulier, on a

$$\chi_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m; i) = \mathbf{I}_\ell^m(\chi_c(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}); i)) \quad \text{et} \quad \chi(\Delta_\ell \mathbf{X}^m; i) = \mathbf{I}_\ell^m(\chi(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}); i)).$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 6.1.1 et 6.2.1-(c). \square

6.3.2. Présentation de \mathcal{S}_m -module de $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$. Nous pouvons à présent rassembler les résultats précédents pour donner une présentation de la représentation de \mathcal{S}_m sur $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ lorsque \mathbf{X} est i -acyclique.

6.3.3. Théorème. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique tel que $\dim H_c(\mathbf{X}) < \infty$.*

a) *Le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ vérifie*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i) = \chi_c(\mathbf{X}^m; i) + \chi_c(\Delta_{\leq m-1} \mathbf{X}^m; i).$$

b) *Le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ vérifie*

$$\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \mathbf{I}_{m-a}^m(\chi_c(\mathbf{F}_{\ell-a}(\mathbf{X}); i - a)).$$

Démonstration. Par 3.2.3, la suite de \mathcal{S}_m -modules

$$0 \rightarrow H_c^{i-\ell+1}(\Delta_{1,m}) \rightarrow \dots \rightarrow H_c^{i-1}(\Delta_{\ell-1,m}) \rightarrow H_c^i(\Delta_{\ell,m}) \rightarrow H_c^i(\Delta_{\leq \ell,m}) \rightarrow 0$$

est exacte. On a donc l'égalité

$$\chi_c(\Delta_{\leq \ell,m}; i) = \sum_{0 \leq a \leq \ell} (-1)^a \chi_c(\Delta_{\ell-a,m}; i - a)$$

à laquelle on applique la proposition 6.3.1. \square

6.4. Expression de $\chi_c(\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m; *)$ en termes de $\chi_c(\mathbf{X}^\ell; *)$

Le théorème 6.3.3 peut être la base d'un algorithme de calcul pour le caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i)$. En effet, l'égalité (b) l'exprime comme combinaison de caractères induits des $\chi_c(\mathbf{F}_{\ell'}(\mathbf{X}), i')$ pour $\ell' \leq \ell$ et $i' \leq i$, et l'égalité (a) exprime chaque $\chi_c(\mathbf{F}_{\ell'}(\mathbf{X}), i')$ comme la somme du caractère $\chi_c(\mathbf{X}^{\ell'}, i')$, connu d'après Macdonald [24] (cf. aussi 9.5.4), et du caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell' - 1} \mathbf{X}^{\ell'}, i')$, avec (donc) $\ell' - 1 < \ell$. Dans la suite, on précise davantage cette idée.

6.5. Opérateurs d'inductions itérées $\mathbf{I}(\sigma)$ et Θ_ℓ^m

Pour toute suite d'entiers positifs $\sigma = (m_0 > m_1 > \dots > m_{t-1} > m_t)$ strictement décroissante, on pose

$$\begin{cases} \text{si } t = 0, & \mathbf{I}((m_0)) := \text{id} : k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \\ \text{si } t > 0, & \mathbf{I}(\sigma) := \mathbf{I}_{m_1}^{m_0} \circ \dots \circ \mathbf{I}_{m_t}^{m_{t-1}} : k_c[\mathcal{S}_{m_t}] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \end{cases} \quad (\mathbf{I}(\sigma))$$

et l'on définit pour $\ell \leq m$, l'opérateur d'inductions itérées :

$$\boxed{\Theta_\ell^m := (-1)^{m-\ell} \sum_{\sigma: m \searrow \ell} (-1)^{|\sigma|-1} \mathbf{I}(\sigma) : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]} \quad (\Theta)$$

où la sommation est indexée par l'ensemble des suites strictement décroissantes qui partent de m et aboutissent à ℓ .

On remarquera que l'on a $\Theta_m^m = \text{id}$.

6.5.1. Théorème Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique tel que $\dim H_c(\mathbf{X}) < \infty$.

a) Pour tout $m \geq \ell > 0$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \text{i)} & \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta_{m-a}^m (\chi_c(\mathbf{X}^{m-a}; i-a)) \\ \text{ii)} & \chi_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m; i) = \mathbf{I}_\ell^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell} \Theta_{\ell-a}^\ell (\chi_c(\mathbf{X}^{\ell-a}; i-a)) \right) \\ \text{iii)} & \chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m; i) = \sum_{0 \leq b < \ell} (-1)^b \mathbf{I}_{\ell-b}^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell-b} \Theta_{\ell-b-a}^{\ell-b} (\chi_c(\mathbf{X}^{\ell-b-a}; i-b-a)) \right) \end{aligned}$$

b) Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} des espaces i -acycliques à cohomologies à support compact de dimensions finies. On a

$$(\chi_c(\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m, *) = \chi_c(\Delta_{? \ell} \mathbf{Y}^m, *)) \iff (\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) = \mathcal{P}_c(\mathbf{Y})).$$

Démonstration. (a-i) On procède par récurrence sur m . Lorsque $m = 1$, on a $\mathbf{F}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, $a = 0$, la somme est réduite à un seul terme et l'égalité est immédiate. Dans le cas général, l'égalité du théorème 6.3.3-(b) pour $\ell = m$

donne l'égalité :

$$\chi_c(\mathbf{F}_m; i) = \chi_c(\mathbf{X}^m; i) - \sum_{m > m-a > 0} (-1)^a \mathbf{I}_{m-a}^m (\chi_c(\mathbf{F}_{m-a}; i-a))$$

où l'on peut remplacer, par hypothèse inductive,

$$\begin{aligned} \chi_c(\mathbf{F}_{m-a}; i-a) &= \chi_c(\mathbf{X}^{m-a}; i-a) + \\ &+ \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a} (\chi_c(\mathbf{X}^{m-a-b}; i-a-b)). \end{aligned}$$

On exprime ainsi $\chi_c(\mathbf{F}_m; i)$ comme somme de deux termes.

$$\left\{ \begin{array}{l} A := \chi_c(\mathbf{X}^m; i) + \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \mathbf{I}_{m-a}^m (\chi_c(\mathbf{X}^{m-a}; i-a)) \\ B := \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \mathbf{I}_{m-a}^m \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a} (\chi_c(\mathbf{X}^{m-a-b}; i-a-b)) \end{array} \right.$$

Le terme A contient $\Theta_m^m = \mathbf{I}((m))$ et les opérateurs $(-1)^{a+1} \mathbf{I}((m, m-a))$ qui interviennent dans le développement de Θ_{m-a}^m pour $a > 0$. Le terme B , quant à lui, contient exactement tous les opérateurs qui manquent encore pour reconstruire le second membre de (a-i). En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \mathbf{I}_{m-a}^m \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a} &= \sum_{a > 0 \text{ et } \sigma: m-a \searrow m-a-b > 0} (-1)^{a+1} \mathbf{I}_{m-a}^m (-1)^b (-1)^{|\sigma|-1} \mathbf{I}(\sigma) \\ &= (-1)^{a+b} \sum_{\sigma: m \searrow m-(a+b) \text{ et } |\sigma| \geq 2} (-1)^{|\sigma|} \mathbf{I}(\sigma). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de l'égalité (a-i). La formule (a-ii) en découle aussitôt puisque $\chi_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^m; i) = \mathbf{I}_\ell^m (\chi_c(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}); i))$ (6.3.1), et (a-iii) en résulte par application directe de 6.3.3-(b).

(b) L'implication \Rightarrow est immédiate en prenant $m = \ell = 1$. Pour la réciproque, il suffit, grâce à (a), de montrer que les caractères $\chi_c(\mathbf{X}^m; i)$ sont déterminés par $\mathcal{P}_c(\mathbf{X})$. Or, ceci est clair d'après le travail de Macdonald [24] (eq. 4.5) (*cf.* aussi 9.5.4 pour la formule explicite). \square

7. Cohomologie des espaces de configuration, cas général

7.1. Cohomologie de Borel-Moore. Comme nous l'avons déjà indiqué dans 6.2.3, l'utilisation des complexes fondamentaux limite la portée de nos méthodes sur au moins deux aspects : les espaces \mathbf{X} sont i -acycliques et la cohomologie est à support compact. Ce sont des limitations assez contraignantes en particulier lors de l'étude du comportement asymptotique de la

cohomologie de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ suivant les tours de projections

$$\cdots \leftarrow \mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{X}) \xleftarrow{p_{m-1}} \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \xleftarrow{p_m} \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X}) \leftarrow \cdots$$

où $p_m : \mathbf{F}_{m+1} \rightarrow \mathbf{F}_m$ désigne la projection sur les m premières coordonnées, plus précisément pour l'étude des tours de représentations des groupes symétriques : les « **FI**-modules » (cf. 8.8.3)

$$\cdots \longrightarrow H(\mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{X})) \xrightarrow{p_{m-1}^*} H(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \xrightarrow{p_m^*} H(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{X})) \longrightarrow \cdots$$

Lorsque \mathbf{X} est une variété i -acyclique orientable la limitation est artificielle grâce à la dualité de Poincaré, mais elle ne l'est pas dans le cas général, notamment si \mathbf{X} est une pseudovariété orientable, qu'elle soit i -acyclique ou non. Dans le but d'inclure ce type d'espaces dans nos énoncés, nous allons remplacer la cohomologie ordinaire par la « **cohomologie de Borel-Moore** ».

L'« **homologie de Borel-Moore** » d'un espace localement compact \mathbf{M} , notée $H_*^{\text{BM}}(\mathbf{M})$, est classiquement définie comme le dual de sa cohomologie à support compact. Lorsque \mathbf{M} est de dimension cohomologique finie $d_{\mathbf{M}}$ (2.4.1), par exemple si \mathbf{M} est une pseudovariété de dimension $d_{\mathbf{M}}$, on définit sa « **cohomologie de Borel-Moore** » par l'égalité

$$H_{\text{BM}}^i(\mathbf{M}) := H_c^{d_{\mathbf{M}}-i}(\mathbf{M}; k)^\vee$$

7.2. Le morphisme “image-inverse” en cohomologie de Borel-Moore

On étend dans cette section l'opération d'image-inverse de la cohomologie ordinaire au contexte de la cohomologie de Borel-Moore. Nous nous concentrerons sur deux cas particulièrement importants pour les espaces de configuration, à savoir : l'action de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ et la projection $p_m : \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{F}_m(\mathbf{M})$.

7.2.1. Rappel du cas des variétés topologiques. Supposons \mathbf{M} et \mathbf{N} des variétés topologiques *orientées* de dimensions respectives $d_{\mathbf{M}}$ et $d_{\mathbf{N}}$. Notons $\langle _, _ \rangle_{\mathbf{M}}$ l'accouplement de la dualité de Poincaré sur \mathbf{M} (resp. \mathbf{N}), à savoir

$$\langle _, _ \rangle_{\mathbf{M}} : H(\mathbf{M}) \times H_c(\mathbf{M}) \rightarrow k, \quad \langle \nu, \mu \rangle_{\mathbf{M}} := \int_{\mathbf{M}} \nu \wedge \mu.$$

Pour toute application $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ continue, l'adjoint pour la dualité de Poincaré de l'opération image-inverse $f^* : H(\mathbf{N}) \rightarrow H(\mathbf{M})$ est le morphisme

$$f_! : H_c(\mathbf{M}) \rightarrow H_c(\mathbf{N})[-d_{\mathbf{M}} + d_{\mathbf{N}}]$$

caractérisé par l'égalité

$$\langle f^*(\nu), \mu \rangle_{\mathbf{M}} = \langle \nu, f_!(\mu) \rangle_{\mathbf{N}}, \quad \forall \nu \in H(\mathbf{N}), \forall \mu \in H_c(\mathbf{M}).$$

On dira alors que le couple $(f^*, f_!)$ est un « *couple adjoint* » (sous-entendu pour la dualité de Poincaré).

On a trois cas fondamentaux.

[ad-1] L'application $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbf{M}$ est un plongement ouvert et \mathbf{U} est muni de l'orientation induite. Alors, $f_! : H_c(\mathbf{U}) \rightarrow H_c(\mathbf{M})$ est le morphisme de prolongement par zéro et l'on a

$$(f^*, f_!) \text{ est un couple adjoint,}$$

[ad-2] L'application $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ est localement triviale de fibre F . Alors $f_!$ est l'« intégration sur les fibres » ([5] p. 61) et l'on a encore :

$$(f^*, f_!) \text{ est un couple adjoint.}$$

[ad-3] L'application $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ est un homéomorphisme. Alors

$$f_! : H_c(\mathbf{M}) \rightarrow H_c(\mathbf{M})$$

est induit par l'image-directe des cochaînes à support compact.

Soit $\mathbf{M} = \coprod_{\mathbf{a} \in \Pi_0(\mathbf{M})} \mathbf{M}_{\mathbf{a}}$ la décomposition en composantes connexes. On note par $f : \Pi_0(\mathbf{M}) \rightarrow \Pi_0(\mathbf{M})$ la bijection induite et $f_{\mathbf{a}} : \mathbf{M}_{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbf{M}_{f(\mathbf{a})}$ la restriction de f . Chaque $f_{\mathbf{a}}$ est un homéomorphisme de pseudovariétés connexes et orientées. On note $\sigma_{\mathbf{M}}(f_{\mathbf{a}})$ le scalaire défini par l'action de $f_{\mathbf{a}}!$ sur la classe fondamentale $[\mathbf{M}_{\mathbf{a}}]$ de $\mathbf{M}_{\mathbf{a}}$, *i.e.* tel que :

$$f_!([\mathbf{M}_{\mathbf{a}}]) = \sigma_{\mathbf{M}_{\mathbf{a}}}(f) \cdot [\mathbf{M}_{f(\mathbf{a})}].$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle f^*(\nu), \mu \rangle_{\mathbf{M}} &= \sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbf{M}_{\mathbf{a}}} f^*(\nu_{f(\mathbf{a})}) \wedge f_!(\mu_{\mathbf{a}}) d([\mathbf{M}_{\mathbf{a}}]) \\ &= \sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbf{M}_{\mathbf{a}}} f^*(\nu_{f(\mathbf{a})}) \wedge f_!(\mu_{\mathbf{a}}) \sigma_{\mathbf{M}}(f_{\mathbf{a}}) d(f_{\mathbf{a}}^{-1}[\mathbf{M}_{f(\mathbf{a})}]) \\ &= \sum_{\mathbf{a}} \langle \nu_{f(\mathbf{a})}, \sigma_{\mathbf{M}}(f_{\mathbf{a}}) f_!(\mu_{\mathbf{a}}) \rangle_{\mathbf{M}_{f(\mathbf{a})}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(f^*, \sum_{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{M}}(f_{\mathbf{a}}) \cdot f_{\mathbf{a}}!) \text{ est un couple adjoint.} \quad (\diamond)$$

Lorsque \mathbf{M} est connexe la somme est réduite à un seul terme et l'adjoint à droite de f^* est juste $\sigma_{\mathbf{M}}(f) \cdot f_!$.

7.2.2. Le cas des pseudovariétés orientées. Pour un espace localement compact \mathbf{M} de dimension cohomologique $d_{\mathbf{M}}$ (2.4.1), nous avons envisagé le remplacement de sa cohomologie ordinaire par sa cohomologie de Borel-Moore $H_{\text{BM}}(\mathbf{M})$, ceci implique que l'on remplace l'accouplement $\langle _, _ \rangle_{\mathbf{M}}$ par celui de la dualité vectorielle $(_, _) : V^{\vee} \times V \rightarrow k$. Dans ce cas, les adjonctions (ad 1,2,3) vont nous servir à définir les opérateurs d'image-inverse en cohomologie de Borel-Moore.

Dans le cas particulier des espaces de configuration, nous sommes ainsi conduits aux définitions suivantes.

7.2.3. Définitions. Si M est une pseudovariété orientée ⁽¹²⁾ de dimension d_M , on dispose des opérateurs suivants en cohomologie de Borel-Moore.

- a) **Image-inverse associée aux projections $p_b : F_{b+a}(M) \rightarrow F_b(M)$**
 L'application $p_b : F_{b+a}(M) \rightarrow F_b(M)$, $p_b(x_1, \dots, x_{b+a}) = (x_1, \dots, x_b)$, est composée de l'inclusion ouverte $\iota : F_{b+a}(M) \subseteq F_b(M) \times M^a$ et de la projection $p(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}$

$$\begin{array}{ccc} F_{b+a}(M) & \xrightarrow{\iota} & F_b(M) \times M^a \\ & \searrow p_b & \downarrow p \\ & & F_b(M) \end{array}$$

On définit « l'intégration sur les fibres » ⁽¹³⁾

$$p_b! : H_c(F_{b+a}(M)) \rightarrow H_c(F_b(M))[-a d_M]$$

par l'égalité

$$p_b! := p_! \circ \iota_!$$

où $\iota_! : H_c(F_{b+a}(M)) \rightarrow H_c(F_b(M) \times M^a)$ est le prolongement par zéro, et $p_! : H_c(F_b(M)) \otimes H_c(M^a) \rightarrow H_c(F_b(M))[-a d_M]$, $\omega \otimes \varpi \mapsto \omega \int_M \varpi$.

En dualisant, on obtient l'opérateur d'« image-inverse » pour la cohomologie de Borel-Moore

$$p_b^* := p_b!^\vee : H_{BM}(F_b(M)) \rightarrow H_{BM}(F_{b+a}(M)).$$

- b) **Action de \mathcal{S}_m sur $H_{BM}(F_m(M))$.** L'action de $g \in \mathcal{S}_m$ par image-inverse sur $H_{BM}(F_m(M))$ est donnée par l'égalité (\diamond) dans 7.2.1-[ad-3]. L'espace $F_m(M)$ est un ouvert de M^m et l'action de \mathcal{S}_m est la restriction de son action sur M^m , le scalaire $\sigma_{F_m(M)}(g_{\mathfrak{a}!})$ coïncide alors avec $\sigma_{M^m}(g_{\mathfrak{b}!})$ pour une certain $\mathfrak{b} \in \Pi_0(M^m)$. Or, le scalaire $\sigma_{M^m}(g_{\mathfrak{b}!})$ est indépendant de \mathfrak{b} . En effet, on a $\sigma_{M^m}(g_{\mathfrak{b}!}) = \text{sgn}(g)^{\dim M}$, où $\text{sgn}(_)$ est la signature. On pose alors,

$$\sigma_{M^m}(g) := \text{sgn}(g)^{\dim M}$$

de sorte que l'on a

$$g^* = \sigma_{M^m}(g) \cdot (g_!)^\vee,$$

où $g_! : H_c(F_m(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))$ est l'image-directe et où $(_)^\vee$ désigne l'adjoint pour la dualité vectorielle. Le lemme suivant est immédiat.

¹² C'est-à-dire munie d'une section globale du faisceau $\mathcal{H}^{-d_M}(\underline{\mathcal{D}}_M^\bullet(k))$, où $\underline{\mathcal{D}}_M^\bullet(k)$ est le complexe dualisant de M dans $\text{Faisc}_k(M)$.

¹³ C'est la raison de nous restreindre aux pseudovariétés *orientables*; la notion dimension étant moins critique car remplaçable par celle de dimension cohomologique (finie) (2.4.1).

7.2.4. Lemme. *L'application $\mathcal{S}_m \ni g \mapsto \sigma_{\mathbf{M}^m}(g)$ est un caractère multiplicatif de \mathcal{S}_m . On a*

$$\sigma_{(\mathbf{M} \times \mathbf{X})^m}(g) = \sigma_{\mathbf{M}^m}(g) \cdot \sigma_{\mathbf{X}^m}(g), \quad \forall g \in \mathcal{S}_m.$$

7.2.5. Commentaires

- a) Si \mathbf{M} est lisse et orientée, on a $H^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \simeq H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ par dualité de Poincaré, et les différentes définitions d'images-inverses concordent.
- b) L'opérateur $p_{b!}$ est défini même si $p_b : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{F}_b(\mathbf{M})$ n'est pas localement triviale, donc même lorsque la pseudovariété \mathbf{M} n'est pas lisse. L'hypothèse d'orientabilité sur \mathbf{M} est par contre indispensable.
- c) Lorsque \mathbf{M} est une pseudovariété *connexe* orientée de dimension $d_{\mathbf{M}}$, on a $H_c^{d_{\mathbf{M}}}(\mathbf{M}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et donc $H_{\text{BM}}^0(\mathbf{M}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \simeq H^0(\mathbf{M}; \mathbb{Z})$. De plus, si $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ est un homéomorphisme, l'image-inverse f^* opère comme l'identité sur $H_{\text{BM}}^0(\mathbf{M}; \mathbb{Z})$.

7.2.6. Ingérence de la représentation signature dans $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$.

Dans les prochaines sections nous serons confrontés à une situation qui comporte une subtilité qui mérite d'être signalée.

Soient \mathbf{M} et \mathbf{X} deux pseudovariétés orientées. On fixe $x \in \mathbf{X}$ et on pose $\mathbf{M}_{\mathbf{X}} := \mathbf{M} \times \mathbf{X}$ et $\mathbf{M}_x := \mathbf{M} \times \{x\}$. Le morphisme de restriction fermée $\rho : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x))$ est clairement un morphisme de \mathcal{S}_m -modules, mais il faut prendre garde du fait que si son dual vectoriel agit bien en cohomologie de Borel-Moore

$$\rho^\vee : H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x)) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}})),$$

il n'est pas, tel quel, un morphisme de \mathcal{S}_m -modules pour l'action image-inverse définie dans 7.2.3-(b)! La proposition suivante montre comment corriger cet énoncé.

7.2.7. Proposition et notation. *Soient \mathbf{M} et \mathbf{X} deux pseudovariétés orientées et connexes. Le dual vectoriel du morphisme de restriction*

$$\rho : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x))$$

est un morphisme de \mathcal{S}_m -modules entre

$$\rho^\vee : H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x)) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}})) \otimes (\sigma(k)_m)^{\otimes \dim \mathbf{X}},$$

où $\sigma(k)_m$ désigne la « représentation par signature » de \mathcal{S}_m .

Démonstration. Par définition, la représentation de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}))$ est la représentation duale de celle de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}))$ tordue par le caractère $\sigma_{(\mathbf{M} \times \mathbf{X})^m} = \sigma_{\mathbf{M}^m} \cdot \sigma_{\mathbf{X}^m}$ (7.2.4) tandis que pour celle de $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x))$, il faut tordre par $\sigma_{\mathbf{M}^m}$. La différence est donc le caractère $\sigma_{\mathbf{X}^m}$ qui est trivial si $\dim \mathbf{X}$ est paire est qui est le caractère signature autrement. \square

7.3. Approche de $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ à l'aide d'espaces i -acycliques

Dans les sections 3 et 5 (resp. la section 9), les méthodes pour la détermination du polynôme de Poincaré (resp. du caractère de \mathcal{S}_m -module) de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ s'appliquent lorsque \mathbf{M} est i -acyclique (5.2.1, 5.2.2), mais pas lorsque \mathbf{M} est général, ce pour quoi il faut une nouvelle idée, comme par exemple, celle que nous donnons à continuation qui permet d'approcher $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$, où \mathbf{M} est un espace localement compact *quelconque*, à l'aide d'une suite spectrale dont les termes sont de la forme $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}))$ avec $\ell \leq m$, et, surtout, où \mathbf{X} est i -acyclique, suite qu'on appellera « la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ » (cf. thm. 7.5.2).

7.3.1. L'idée est basée sur le fait que :

⊢ *Tout espace localement compact \mathbf{M} peut être réalisé comme fermé dans un espace i -acyclique, de complémentaire (donc) également i -acyclique.*

En effet, si \mathbf{X} est i -acyclique et si $x \in \mathbf{X}$, l'espace \mathbf{M} s'identifie au fermé $\mathbf{M}_x := \mathbf{M} \times \{x\}$ de l'espace i -acyclique $\mathbf{M}_\mathbf{X} := \mathbf{M} \times \mathbf{X}$ (1.2.4(f)). On note alors $V := \mathbf{X} - x$ et $\mathbf{M}_V := \mathbf{M} \times V$ et l'on remarque que dans la suite longue de cohomologie à support compact :

$$\rightarrow H_c(\Delta_m(\mathbf{M}_\mathbf{X}^m \setminus \mathbf{M}_x^m)) \xrightarrow{\iota} H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_\mathbf{X})) \xrightarrow{\rho} H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x)) \rightarrow$$

le morphisme ρ est nul. En effet, le prolongement par zéro

$$H_c(\mathbf{M}_V) \rightarrow H_c(\mathbf{M}_\mathbf{X})$$

est surjectif et les arguments de la remarque 3.1.3 s'appliquent et établissent la surjectivité du prolongement par zéro

$$\tilde{\iota} : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_V)) \twoheadrightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_\mathbf{X})).$$

La surjectivité de ι en résulte, car $\text{im}(\iota) \supseteq \text{im}(\iota')$, et la nullité de ρ s'ensuit.

Ces arguments et la proposition 7.2.7 prouvent la proposition suivante.

7.3.2. Proposition. *Soient \mathbf{M} et \mathbf{X} des espaces localement compacts. On suppose que \mathbf{X} est i -acyclique et l'on fixe $x \in \mathbf{X}$.*

a) *La suite courte de \mathcal{S}_m -modules*

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_m(\mathbf{M}_\mathbf{X}^m \setminus \mathbf{M}_x^m)) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_\mathbf{X})) \rightarrow 0$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support compact, est exacte.

b) On suppose \mathbf{M} et \mathbf{X} des pseudovariétés orientées de dimensions cohomologiques finies $d_{\mathbf{M}}$ et $d_{\mathbf{X}}$. La suite courte de \mathcal{S}_m -modules ⁽¹⁴⁾

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}))[md_{\mathbf{X}} - 1] \rightarrow \\ H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^m \setminus \mathbf{M}_x^m))[md_{\mathbf{X}} - 1] \rightarrow \\ H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_x)) \otimes (\sigma(k)_m)^{\otimes \dim \mathbf{X}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

extraite de la suite longue de cohomologie de Borel-Moore, est exacte.

Le polynôme de Poincaré de $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ est donc déterminé par celui de $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}))$, déjà connu, et par celui de $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^m \setminus \mathbf{M}_x^m))$, qui fera l'objet d'étude des sections suivantes.

7.4. Une suite spectrale pour $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^m \setminus \mathbf{M}_x^m))$

7.4.1. Rappel : cochaînes simpliciales, ordonnées et alternées. Étant donné une famille finie d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ d'un espace topologique \mathbf{X} , on rappelle que l'on dispose classiquement de trois notions de p -cochaînes de Čech pour le foncteur des sections locales. A savoir,

– Le groupe des « p -cochaînes simpliciales (non ordonnées) »

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, _) := \bigoplus_{(i_0, \dots, i_p)} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, _)$$

où (i_0, \dots, i_p) est une suite d'éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, m \rrbracket$.

– Le groupe des « p -cochaînes (simpliciales) ordonnées »

$$\check{C}_{<}^p(\mathcal{U}, _) := \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, _)$$

– Le groupe des « p -cochaînes (simpliciales) alternées » $\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _)$. C'est le sous-groupe des p -cochaînes $\omega \in \check{C}^p(\mathcal{U}, _)$ vérifiant pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_{\llbracket 0, p \rrbracket}$:

$$\omega_{i_0, \dots, i_p} = \text{sgn}(\alpha) \omega_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}}. \quad (*)$$

Remarquons en passant que l'application « d'antisymétrisation »

$$\varepsilon_p : \check{C}_{<}^p(\mathcal{U}, _) \rightarrow \check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _) \quad (\varepsilon)$$

définie, suivant la même égalité (*), par

$$\varepsilon_p(\omega)_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}} := \text{sgn}(\alpha) \omega_{i_0, \dots, i_p},$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_{\llbracket 0, p \rrbracket}$ et tout $1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m$, est bijective.

¹⁴L'énoncé est valable plus généralement pour les espaces localement compacts de dimensions cohomologiques finies (2.4.1), sauf pour ce qui concerne les structures de \mathcal{S}_m -modules que nous n'avons pas définies dans cette généralité.

Dans les trois cas, l'opérateur cobord $\delta_p : \check{C}_?^p(\mathcal{U}, -) \rightarrow \check{C}_?^{p+1}(\mathcal{U}, -)$

$$(\delta\omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \omega_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{p+1}} \Big|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

a un sens et respecte chaque type de cochaîne. L'antisymétrisation

$$\varepsilon_* : (\check{C}_<^*(\mathcal{U}, -), \delta_*) \rightarrow (\check{C}_\varepsilon^*(\mathcal{U}, -), \delta_*),$$

est alors un isomorphisme de complexes.

L'assertion suivante est classique (cf. [18], §I.3.8, p. 58.).

7.4.2. Proposition. *Les inclusions de complexes*

$$(\check{C}_<^*(\mathcal{U}, -), \delta_*) \subseteq (\check{C}^*(\mathcal{U}, -), \delta_*) \supseteq (\check{C}_\varepsilon^*(\mathcal{U}, -), \delta_*). \quad (\diamond)$$

induisent des isomorphismes en cohomologie :

$$\check{H}_<^*(\mathcal{U}, -) \xrightarrow{\cong} \check{H}^*(\mathcal{U}, -) \xleftarrow{\cong} \check{H}_\varepsilon^*(\mathcal{U}, -)$$

Les complexes (\diamond) sont donc interchangeable pour les besoins du calcul de la cohomologie de Čech.

7.4.3. Remarque. On prendra garde du fait que bien qu'on parle de permutation d'indices des cochaînes de Čech, il n'y a en général pas d'action du groupe symétrique tout simplement parce qu'il n'y a en général aucun rapport entre $\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, -)$ et $\Gamma(U_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}, -})$. Le paragraphe suivant traite le cas où une telle action existe.

7.4.4. Faisceaux et complexes de Čech \mathcal{S}_m -équivariants

Revenons sur le cas de l'espace $\Delta_m(\mathbf{M}_X^m \setminus \mathbf{M}_x^m)$ de 7.3.2. Munissons-le du recouvrement $\mathcal{U}^m = \{U_1^m, \dots, U_m^m\}$, où :

$$U_i^m := \Delta_m(\mathbf{M}_X \times \dots \times \widehat{\mathbf{M}_V^i} \times \dots \times \mathbf{M}_X) \subseteq \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_X),$$

avec $V := \mathbf{X} - x$. Notons ensuite

$$U^m := U_1^m \cup \dots \cup U_m^m, \quad U_{i_0, \dots, i_p}^m := U_{i_0}^m \cap \dots \cap U_{i_p}^m,$$

et même $U_{(i_0, \dots, i_p)}$: une copie de U_{i_0, \dots, i_p} paramétrée par l'uplet (i_0, \dots, i_p) .

Faisceaux équivariants. Le groupe \mathcal{S}_m agit sur U^m par permutation des coordonnées, et nous avons $g \cdot U_{i_0, \dots, i_p}^m = U_{g(i_0), \dots, g(i_p)}^m$, pour tout $g \in \mathcal{S}_m$. Nous aurons aussi besoin de la notion de « faisceau \mathcal{S}_m -équivariant sur U^m ». Sans trop entrer dans les détails, on dit qu'un faisceau \mathcal{G} sur U^m est \mathcal{S}_m -équivariant s'il est muni d'une famille d'isomorphismes

$$\{\phi_{g,V} : \Gamma(gV; \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{G})\}_{(g,V)},$$

indexée par les couples (g, V) où $g \in \mathcal{S}_m$ et V est un ouvert de U^m , telle que la relation cocyclique $\phi_{h,gV} \circ \phi_{g,V} = \phi_{hg,V}$ est satisfaite pour tous $h, g \in \mathcal{S}_m$ et tout ouvert V de U^m .

L'exemple fondamental pour nous est donné par les faisceaux des germes de cochaînes de Borel-Moore $\underline{\Omega}_{\text{BM}}$ que nous allons introduire dans 7.4.6. Définis comme d'habitude sur k des cofaisceaux des cochaînes d'Alexander-Spanier à support compact $\underline{\Omega}_{\text{c}}$, les faisceaux $\underline{\Omega}_{\text{BM}}$ héritent naturellement de l'action duale de l'action topologique de \mathcal{S}_m sur $\underline{\Omega}_{\text{c}}$. On a vu pourtant (cf. 7.2.3-(b)) que cette action ne convient pas et qu'elle doit être tordue par un certain caractère linéaire de \mathcal{S}_m .

7.4.5. Proposition. Munissons $U_{m-p, \dots, m}^m = \Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{m-(p+1)} \times \mathbf{M}_V^{p+1})$ de l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ par permutation de coordonnées.

a) L'application

$$\begin{aligned} \Phi_p : \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}} U_{m-p, \dots, m}^m &\longrightarrow \prod_{(i_0, \dots, i_p)} U_{(i_0, \dots, i_p)}^m \\ (g, x) &\longmapsto g(x) \in U_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m \end{aligned}$$

où (i_0, \dots, i_p) est une suite d'éléments deux à deux distincts de $[[1, m]]$, est un homéomorphisme.

Soit maintenant \mathcal{G} un faisceau \mathcal{S}_m -équivariant sur U^m . On note $\sigma \mapsto g \star \sigma$ l'action de $g \in \mathcal{S}_m$ sur une section locale $\sigma \in \mathcal{G}$.

b) Le morphisme image-directe défini par l'homéomorphisme Φ_p , à savoir

$$\begin{aligned} \Phi_{p!} : \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}) &\longrightarrow \check{C}^p(U^m; \mathcal{G}) = \bigoplus_{(i_0, \dots, i_p)} \Gamma(U_{(i_0, \dots, i_p)}^m; \mathcal{G}) \\ (g, \sigma) &\longmapsto g \star \sigma \in \Gamma(U_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m; \mathcal{G}), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il induit sur $\check{C}^p(U^m; \mathcal{G})$ l'action $\omega \mapsto g \diamond \omega$ de \mathcal{S}_m :

$$(h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_p} := h \star (\omega_{h^{-1}(i_0), \dots, h^{-1}(i_p)}).$$

Cette action est compatible au cobord des cochaînes simpliciales et le complexe de Čech augmenté :

$$0 \rightarrow \Gamma(U^m; \mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \dots$$

est un complexe de \mathcal{S}_m -modules.

c) Le complexe des cochaînes alternées $(\check{C}_\varepsilon^*(U^m; \mathcal{G}), \delta_*)$ est un sous-complexe de \mathcal{S}_m -modules du complexe des cochaînes simpliciales $(\check{C}^*(U^m; \mathcal{G}), \delta_*)$. L'antisymétrisation $\varepsilon_* : (\check{C}_<^*(U^m; \mathcal{G}), \delta_*) \rightarrow (\check{C}_\varepsilon^*(U^m; \mathcal{G}), \delta_*)$ transfère cette structure et munit chaque groupe $\check{C}_<^p(U^m; \mathcal{G})$ de l'action $\omega \mapsto g \star \omega$ de \mathcal{S}_m . En particulier, le complexe de cochaînes ordonnées de Čech augmenté :

$$0 \rightarrow \Gamma(U^m; \mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}_<^0(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}_<^1(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \dots$$

est un complexe de \mathcal{S}_m -modules.

De plus, l'application

$$\begin{aligned} \Psi_p : \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}) \otimes \sigma(k)_{p+1} &\rightarrow \check{C}_{<}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}) = \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} \Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}^m; \mathcal{G}) \\ (g, \sigma) &\longmapsto g \diamond \sigma \in \Gamma(g(U_{m-p, \dots, m}^m); \mathcal{G}) \end{aligned}$$

où ' \diamond ' désigne l'action ' \star ' de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ tordue par le caractère signature $\sigma(k)_{p+1}$ de \mathcal{S}_{p+1} , est un isomorphisme de \mathcal{S}_m -modules.

Démonstration. (a) L'application Φ_p est définie sur la réunion disjointe de copies de $U_{m-p, \dots, m}^m$ indexées par les éléments $\bar{g} \in \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_{m-(p+1)}$. Pour chaque $g \in \mathcal{S}_m$, la restriction de Φ_p à $(\bar{g}, U_{m-p, \dots, m}^m)$ est un homéomorphisme sur $U_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m$. On conclut que Φ_p est bijective en remarquant que le cardinal $|\mathcal{S}_m / \mathcal{S}_{m-(p+1)}|$ est précisément celui de l'ensemble des $(p+1)$ -uplets (i_0, \dots, i_p) d'éléments deux à deux distincts de $[[1, m]]$.

(b) résulte de (a) et des identités :

$$\begin{aligned} \delta(h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} &= \sum_{j=0}^{p+1} (h \diamond \omega)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{p+1}} \Big|_{U_{(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \\ &= \sum_{j=0}^{p+1} \left(h \star (\omega_{h^{-1}(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{p+1})}) \right) \Big|_{U_{(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \\ &= h \star \left(\sum_{j=0}^{p+1} \omega_{h^{-1}(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{p+1})} \Big|_{U_{h^{-1}(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \right) \\ &= (h \diamond \delta \omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} . \end{aligned}$$

(c) Soit $\omega \in \check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_{[[0, p]]}$ et $h \in \mathcal{S}_m$, on a :

$$\begin{aligned} (h \diamond \omega)_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}} &= h \star (\omega_{h^{-1}(i_{\alpha(0)}), \dots, h^{-1}(i_{\alpha(p)})}) \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) h \star (\omega_{h^{-1}(i_0), \dots, h^{-1}(i_p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\alpha) (h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_p} , \end{aligned}$$

et $\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$ est bien un sous- \mathcal{S}_m -module de $\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$.

Le sous-espace $\varepsilon_p(\Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}))$ est stable sous $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ dont l'action est tordue par le caractère signature de \mathcal{S}_{p+1} . Le morphisme de \mathcal{S}_m -modules Ψ_p est donc bien défini et il est surjectif puisque $\varepsilon_p(\Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}))$ engendre clairement $\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$ en tant que \mathcal{S}_m -module. Le fait que Ψ_p est bijectif résulte alors du fait que $|\mathcal{S}_m / (\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1})|$ est également le cardinal de l'ensemble des parties $I \subseteq [[1, m]]$ telles que $|I| = p+1$. \square

7.4.6. Suite spectrale de Borel-Moore d'un \mathbf{G} -espace. Nous rappelons maintenant, pour un \mathbf{G} -espace donné, les bases théoriques de la construction de la suite spectrale de \mathbf{G} -modules associée à un recouvrement \mathbf{G} -stable et pour la cohomologie de Borel-Moore .

Faisceaux de germes de cochaînes de Borel-Moore

Soit \mathbf{M} un espace localement compact de dimension cohomologique $d_{\mathbf{M}}$ muni de l'action d'un groupe fini \mathbf{G} . Dans 1.1.2 nous avons rappelé que le complexe des cochaînes d'Alexander-Spanier $(\underline{\mathcal{A}}^*(\mathbf{M}; k), d_*)$ constitue une résolution Φ -molle du faisceau constant $\underline{k}_{\mathbf{M}}$. Chaque faisceau $\underline{\mathcal{A}}^i(\mathbf{M}; k)$ est \mathbf{G} -équivariant et la résolution en question est, en fait, une résolution de faisceaux \mathbf{G} -équivariants. Il s'ensuit que pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{M}$, le complexe des « cochaînes (d'Alexander-Spanier) à support compact »

$$(\Omega_c^*(U), d) := \Gamma(U; (\underline{\mathcal{A}}^*(\mathbf{X}; k), d_*))$$

calcule la cohomologie à support compact $H_c^*(U)$, et, si de plus U est stable sous l'action de \mathbf{G} , c'est un complexe de \mathbf{G} -modules pour l'action d'image-directe topologique.

Maintenant, pour toute injection ouverte $\iota_{V \subseteq U} : V \subseteq U$, le prolongement par zéro

$$\iota_{V \subseteq U}! : (\Omega_c^*(V), d_*) \rightarrow (\Omega_c^*(U), d_*)$$

est un morphisme injectif de complexes et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega_c^*(U), d_*) \\ \uparrow & & \uparrow \iota_{V \subseteq U} \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega_c^*(V), d_*) \end{array}$$

définit un complexe $(\underline{\Omega}_{\mathbf{M},c}^*, d_*)$ de pré-cofaisceaux flasques sur \mathbf{M} qui sont en fait des cofaisceaux puisque les $\underline{\mathcal{A}}^i(\mathbf{M}; k)$ sont c -mous (cf. [6] V.1.6, p. 282).

Le « complexe des cochaînes de Borel-Moore de U » est ensuite défini par dualité :

$$(\Omega_{\mathbf{BM}}^*(U), d_*) := ((\Omega_c^*(U), d_*)^\vee)[-d_{\mathbf{M}}].$$

Lorsque U est \mathbf{G} -stable, chaque $\underline{\Omega}_{\mathbf{M},\mathbf{BM}}^i(U)$ est naturellement muni de l'action duale de \mathbf{G} . Lorsque \mathbf{M} est une pseudovariété orientée, on notera '★' l'action de \mathbf{G} qui tient compte de la définition 7.2.3-(b), i.e. de l'action duale tordue par les scalaires $\sigma_{\mathbf{M}}$. Dans tous les cas, le complexe ci-dessus est un complexe de \mathbf{G} -modules.

Le complexe $(\Omega_c^*(U), d_*)$ calcule la cohomologie de Borel-Moore $H_{\mathbf{BM}}^*(U)$ et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega_{\mathbf{BM}}^*(U), d_*) \\ \uparrow & & \downarrow \iota_{V \subseteq U}^* \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega_{\mathbf{BM}}^*(V), d_*) \end{array}$$

où $\iota_{V \subseteq U}^*$ est le dual de $\iota_{V \subseteq U}!$, est le complexe $(\underline{\Omega}_{\mathbf{M},\mathbf{BM}}^*, d_*)$ des « faisceaux (flasques) de germes de cochaînes de Borel-Moore » sur \mathbf{M} . C'est un complexe de faisceaux \mathbf{G} -équivariants.

Bicomplexe de cochaînes Čech-Borel-Moore

Soit $\mathcal{U}^m = \{U_1^m, \dots, U_m^m\}$ une famille \mathbf{G} -stable d'ouverts de \mathbf{M} , c'est à dire telle qu'il existe une action de \mathbf{G} sur $[[1, m]]$ vérifiant $g(U_i^m) = U_{g(i)}^m$. On pose alors

$$U^m := U_1^m \cup \dots \cup U_m^m, \quad U_{i_0, \dots, i_p}^m := U_{i_0}^m \cap \dots \cap U_{i_p}^m,$$

et l'on considère le bicomplexe $(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{c, \bullet}^*, \partial_\bullet, d_*)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \partial_0 \downarrow & & \partial_0 \downarrow & & \partial_0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \epsilon \downarrow & & \epsilon \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^0(U^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^1(U^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^2(U^m) \xrightarrow{d_2} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (\check{C}_c)$$

dont les colonnes sont les complexes de « chaînes de Čech à valeurs dans un cofaisceau » et sont exactes puisque les cofaisceaux $\underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^i$ sont flasques ⁽¹⁵⁾.

En dualisant, on obtient un bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \delta_0 \uparrow & & \delta_0 \uparrow & & \delta_0 \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \epsilon \uparrow & & \epsilon \uparrow & & \epsilon \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^0(U^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^1(U^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^2(U^m) \xrightarrow{d_2} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (\check{C}_{\text{BM}})$$

qui est un fait un bicomplexe de \mathbf{G} -modules puisque l'analogie du théorème 7.4.5 est vérifié pour les données en cours.

On appellera « bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de \mathcal{U}^m », le bicomplexe du premier quadrant

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet, *} := (\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^*), \delta_\bullet, d_*).$$

¹⁵ Cf. Bredon [6] chap. VI.— Cosheaves and Čech Homology, corollary VI.4.5, p. 426.

Filtration régulière de $H_{\text{BM}}^*(U^m)$ et suite spectrale

En raison de l'exactitude des colonnes de (\check{C}_{BM}) , le morphisme d'augmentation ϵ induit un quasi-isomorphisme de complexes de \mathbf{G} -modules

$$\epsilon_* : (\Omega_{\text{BM}}^*(U^m), d_*) \rightarrow \mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$$

où 'tot' désigne le complexe simple associé. On a donc un isomorphisme de \mathbf{G} -modules

$$h^i(\epsilon_*) : H_{\text{BM}}^i(U^m) \simeq h^i(\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}))$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},k}^{\bullet,*}$ le sous-bicomplexe de $\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$ défini par

$$\begin{cases} \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},k}^{i,*} = 0, & \text{si } i < k, \\ \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},k}^{i,*} = \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{i,*}, & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

On a la filtration décroissante de bicomplexes de \mathbf{G} -modules

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*} = \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},0}^{\bullet,*} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},1}^{\bullet,*} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},2}^{\bullet,*} \supseteq \dots$$

induisant une filtration positivement graduée décroissante et régulière du complexe $\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ de même donc que pour $H_{\text{BM}}^*(U^m)$ pour lequel on pose

$$H_{\text{BM}}^*(U^m)_k := h(\epsilon_*)^{-1}(h^*(\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM},k}^{\bullet,*}))).$$

On notera $\mathcal{F}H_{\text{BM}}^*(U^m)$ et $\mathcal{F}\mathbf{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ ces objets filtrés.

7.4.7. Remarque. Dans ce qui précède nous aurions tout aussi bien pu considérer les cochaînes de Čech ordonnées ou alternées, ce qui aurait fourni les bicomplexes de \mathbf{G} -modules $\check{C}_{<}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$ et $\check{C}_{\epsilon}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$.

La proposition suivante est bien connue (16).

7.4.8. Proposition. *La suite spectrale de \mathbf{G} -modules $\mathcal{I}\mathcal{E}(\mathcal{U}^m) := (\mathcal{I}\mathcal{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ associée au complexe de \mathbf{G} -modules gradué filtré $\mathcal{F}\mathbf{tot}^*(\check{C}_{?}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ converge vers le bigradué de $\mathcal{F}H_{\text{BM}}^*(U^m)$. On a*

$$\mathcal{I}\mathcal{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} := \check{C}_{?}^p(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(-))$$

et

$$\mathcal{I}\mathcal{E}(\mathcal{U}^m)_2^{p,q} := \check{H}^p(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(-)) \implies \mathbf{Gr}^{p,q}(\mathcal{F}H_{\text{BM}}^*(U^m)). \quad (\mathcal{I}\mathcal{E})$$

Le théorème suivant est maintenant corollaire immédiat de 7.4.8 et de 7.4.5.

¹⁶ Cf. Godement [18] chap. I.4, thm. 4.2.2.

7.4.9. Théorème. Soient \mathbf{M} et \mathbf{X} des espaces localement compacts de dimensions cohomologiques finies. Le \mathcal{S}_m -module $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^m \setminus \mathbf{M}_x^m))$ est l'aboutissement de la suite spectrale $\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)$ de 7.4.8 pour le recouvrement $\mathcal{U}^m := \{U_1^m, \dots, U_m^m\}$, où

$$U_i^m := \Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}} \times \cdots \times \overline{\mathbf{M}_{\mathbf{X}-x}^i} \times \cdots \times \mathbf{M}_{\mathbf{X}}) \subseteq \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}).$$

L'identification de 7.4.5-(c) pour le groupe des p -cochaînes ordonnées

$$\check{C}_{<}^p(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{U^m, \text{BM}}^*) = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m; \underline{\Omega}_{U^m, \text{BM}}^*) \otimes \sigma(k)_{p+1},$$

munit $(\check{C}_{<}^*(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$ d'une structure de complexe de \mathcal{S}_m -modules. Les termes $(\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ de la suite spectrale $\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)$ héritent d'une structure de complexe de \mathcal{S}_m -modules et la suite spectrale converge au sens de suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué $H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^m \setminus \mathbf{M}_x^m))$ muni de filtration régulière de la proposition 7.4.8. Dans le cas particulier où $r = 1$, on a

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma(k)_{p+1},$$

et $d_1 : \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p-1,q} \rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q}$ un morphisme de \mathcal{S}_m -modules.

7.4.10. Remarque. Le même énoncé est valable pour le complexe des cochaînes non ordonnées $(\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$, auquel cas on a

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m),$$

en raison de l'égalité $\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _) = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(U_{m-p, \dots, m}^m, _)$ de 7.4.5-(b).

7.5. La suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(M))$

Dans cette partie, nous nous restreignons à une situation qui simplifie remarquablement les considérations précédentes. C'est le cas où l'espace \mathbf{X} est l'espace $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, +\infty[$, puis $x := 0$ et $V := \mathbb{R}_{> 0}$. Dans la suite, \mathbf{M} sera localement compact de dimension cohomologique finie $d_{\mathbf{M}}$ (2.4.1), et l'on notera

$$\mathbf{M}_{\geq 0} := \mathbf{M} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbf{M}_0 := \mathbf{M} \times \{0\}, \quad \mathbf{M}_{> 0} := \mathbf{M} \times \mathbb{R}_{> 0}.$$

Les espaces $\mathbf{M}_{\geq 0}$ et $\mathbf{M}_{> 0}$ sont i -acycliques et l'on a

$$\mathbf{M} \simeq \mathbf{M}_0 = (\mathbf{M}_{\geq 0} \setminus \mathbf{M}_{> 0}).$$

On aura remarqué que ces choix renferment l'égalité $H_c(\mathbb{R}_{\geq 0}) = 0$, et donc le fait que l'on aura (5.2.1-(a))

$$H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0})) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

7.5.1. La proposition 7.3.2 se simplifie et donne des isomorphismes de \mathcal{S}_m -modules

$$H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \simeq H_c(\Delta_m(\mathbf{M}_{\geq 0}^m \setminus \mathbf{M}_0^m))[1], \quad (\diamond)$$

et lorsque \mathbf{M} est une pseudovariété orientée ⁽¹⁷⁾

$$\boxed{H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \simeq H_{\text{BM}}(\Delta_m(\mathbf{M}_{\geq 0}^m \setminus \mathbf{M}_0^m))[m-1] \otimes \sigma(k)_m} \quad (\diamond\diamond)$$

où l'apparition du caractère signature a été justifiée dans 7.2.7.

Avec ces données, la suite spectrale de 7.4.9 convenablement modifiée par le caractère $\sigma(k)_m$, converge vers $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))[1-m]$, on l'appellera « la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ ».

7.5.2. Théorème (suite spectrale basique). *Soit \mathbf{M} une pseudovariété orientée de dimension $d_{\mathbf{M}}$ ⁽¹⁸⁾. La suite $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m) := \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma(k)_m$ converge, en tant que suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules, vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))[1-m]$ muni de filtration régulière induite par l'isomorphisme $(\diamond\diamond)$ ci-dessus. De plus,*

a) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\boxed{\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma(k)_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))}$$

avec $q = i + (m - (p+1))$. Dans cette écriture, le groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ opère sur $H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m)$ par image-inverse (7.2.3-(b)) et le caractère $\sigma(k)_{m-(p+1)}$ affecte uniquement l'action du sous-groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}$.

b) On a une décomposition canonique

$$\boxed{\Xi_{p+1}^m : H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \simeq \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}^{q-(m-(p+1))d_{\mathbf{M}}}(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))}$$

où $\mathcal{F}(p+1, m)$ désigne l'ensemble des applications $f : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que

$$\begin{cases} f(x) > x, & \text{si } x < m - p, \\ f(x) = x, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $|\mathcal{F}(p+1, m)| = (m-1)!/p!$.

c) Pour avoir $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \neq 0$, il est nécessaire que l'on ait

$$(m - (p+1))d_{\mathbf{M}} \leq q \leq m d_{\mathbf{M}}.$$

¹⁷ Dans le cas général où \mathbf{M} n'est pas une pseudovariété, on a toujours un isomorphisme d'espaces vectoriels, mais on perd l'aspect représentation de \mathcal{S}_m (cf. note ⁽¹⁴⁾).

¹⁸ Comme dans la note précédente, si l'on néglige l'aspect représentations, l'énoncé est valable plus généralement pour les espaces localement compacts de dimension finie.

d) Pour $i \in \mathbb{N}$ donné, les termes de $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q}$, pour $r \geq 1$, qui contribuent à $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ sont tels que

$$m - (p+1) \leq \left\lfloor \frac{i}{d_{\mathbf{M}} - 1} \right\rfloor.$$

Indications. (a) Le foncteur $(-) \otimes \sigma(k)_m$ étant exact, la convergence de $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)$ vers $H_{\text{BM}}(U^m) \otimes \sigma(k)_m$ est assurée. Ensuite, l'égalité classique (19)

$$\begin{aligned} \left(\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma(k)_{p+1} \right) \otimes \sigma(k)_m &= \\ &= \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \left(H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma(k)_{p+1} \otimes \text{Res}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma(k)_m \right) \end{aligned}$$

explique le changement de $\sigma(k)_{p+1}$ en $\sigma(k)_{m-(p+1)}$ dans l'énoncé 7.4.9. L'égalité $p + q = i + (m - 1)$ découle quant à elle de 7.5.1-(\diamond).

(b) On remarque que dans la mesure où $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0})) = 0$, le morphisme de liaison dans la suite longue de cohomologie à support compact 2.4 pour $\mathbf{Z} := \mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{M}_{> 0}^b)$, à savoir

$$H_c(\Delta_{\leq a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{M}_{> 0}^b))) \rightarrow H_c(\Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{M}_{> 0}^b))[1],$$

est un isomorphisme. Comme d'autre part, la projection sur les dernières coordonnées

$$\pi_{a-1+b} : \Delta_{\leq a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{M}_{> 0}^b)) \twoheadrightarrow \Delta_{a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{M}_{> 0}^b).$$

est un revêtement trivial à $(a - 1 + b)$ nappes paramétrées par les applications de $\mathcal{F}(a + b, a - 1 + b)$, on a un isomorphisme canonique

$$\Delta_{a-1+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{M}_{> 0}^b)^{a-1+b}[-1] \simeq \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{M}_{> 0}^b)^{a+b},$$

et par induction

$$H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{M}_{> 0})) \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!} [-a] \simeq H_c(\Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{M}_{> 0}^b))$$

où $\frac{(a+b-1)!}{(b-1)!} = |\mathcal{F}(b, a+b)|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H_c(U_{m-p, \dots, m}^m) &= H_c(\Delta_m(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{M}_{> 0}^{p+1})) \\ &= \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_c(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0}))[-(m - (p+1))], \end{aligned}$$

et par dualité, l'isomorphisme annoncé dans (b)

$$H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m) \xrightarrow[\simeq]{\Xi_{p+1}^m} \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0}))[-(m - (p+1)) d_{\mathbf{M}}]. \quad (\dagger)$$

(c) Comme $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0})) = 0$ pour tout $i \notin \llbracket 0, (p+1)d_{\mathbf{M}} \rrbracket$, puisque $H_c^i(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{> 0})) = 0$ si $i < p+1$ (5.2.1-(a)), on comprend aussitôt, par (\dagger),

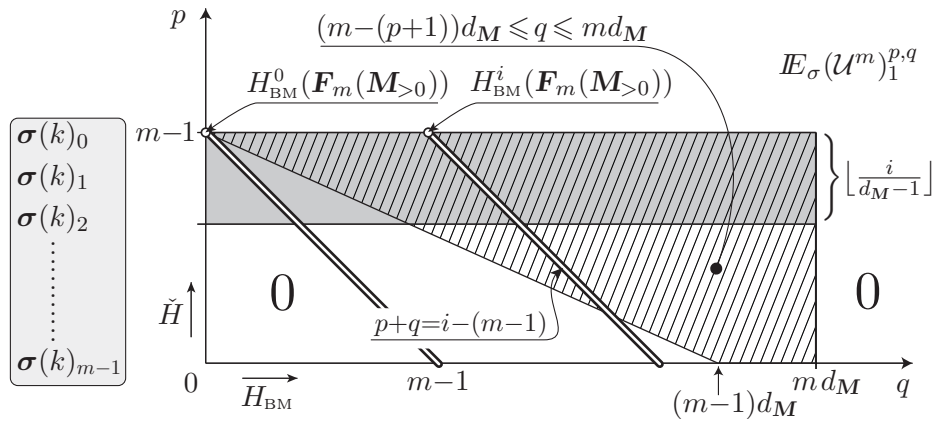
¹⁹ Étant donnée une inclusion de groupes $H \subseteq G$, un H -module V et un G -module W , on a $\text{ind}_H^G V \otimes_k W \cong \text{ind}_H^G (V \otimes_k \text{res}_H^G W)$.

que pour que l'on ait $H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \neq 0$, il faut que

$$q \in \llbracket (m-(p+1))d_{\mathbf{M}}, md_{\mathbf{M}} \rrbracket,$$

d'où (c). A partir de là, si l'on fixe $i \in \mathbb{N}$, la majoration (d) résulte de l'égalité $q = i + m - (p+1)$. \square

7.5.3. Termes non nuls de la suite spectrale basique. La figure suivante illustre les assertions 7.5.2-(c,d). Les termes $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q}$ non nuls pour $r \geq 1$ sont dans la région hachurée, et, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, ceux qui contribuent à $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$ sont dans la région à la fois hachurée et grisée.



Le tableau à gauche rappelle que l'action d'image-inverse de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ sur les termes de la ligne p est tordue par le caractère $\sigma(k)_{m-(p+1)}$.

7.6. Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))$

7.6.1. On rappelle que l'on note $p_m : \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{F}_m(\mathbf{M})$ la projection sur les m premières coordonnées. Nous supposons que \mathbf{M} est une pseudovariété orientée de dimension finie $d_{\mathbf{M}}$ de sorte que le morphisme d'intégration sur les fibres $p_{m!} : H_c(\mathbf{F}_{m+1}) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m)$ est défini, ainsi que son dual, le morphisme d'image-inverse $p_m^* : H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{m+1})$ (cf. 7.2.3-(a)).

Dans cette partie nous préparons le terrain pour l'étude ultérieure en 8.8.3 de certaines propriétés asymptotiques des familles des morphismes d'image-inverse en cohomologie de Borel-Moore

$$\{H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \xrightarrow{p_m^*} H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}))\}_{m \in \mathbb{N}}.$$

Notre but est la construction d'un morphisme de suites spectrales (cf. 7.6.7)

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*) : (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r),$$

induisant par passage à la limite, les bi-gradués des morphismes p_m^* pour les filtrations du théorème 7.5.2, ce qui sera atteint dans le théorème 7.7.1.

7.6.2. Compatibilité des opérations d'intégration sur les fibres. En accord avec les notations de 7.4.4, où nous avons introduit l'ouvert

$$U^{m+1} := \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}) \setminus \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_0)$$

et son recouvrement $\mathcal{U}^{m+1} := \{U_1^{m+1}, \dots, U_{m+1}^{m+1}\}$, on note maintenant

$$\begin{aligned} W^{m+1} &:= (\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{\geq 0}) \setminus (\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0) \times \mathbf{M}_0) \\ &= (U^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}) \cup (\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{> 0}) \end{aligned}$$

et son recouvrement $\mathcal{W}^{m+1} := \{W_1^{m+1}, \dots, W_{m+1}^{m+1}\}$, avec

$$\begin{cases} W_i^{m+1} := U_i^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}, & \text{si } i \leq m, \\ W_{m+1}^{m+1} := \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{> 0}. \end{cases}$$

On a donc :

$$U^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \pitchfork U^{m+1} := \{W_i^{m+1} \cap U^{m+1} = U_i^{m+1}\}.$$

Le diagramme suivant, où les flèches verticales désignent les morphismes de prolongement par zéro, est un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow H_c(U^{m+1}) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_{\geq 0})) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_0)) \xrightarrow{c_{m+1}} \\ \downarrow \iota_U! & & \downarrow & & \downarrow \iota_{\mathbf{F}}! \\ \longrightarrow H_c(W^{m+1}) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{\geq 0}) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0) \times \mathbf{M}_0) \xrightarrow{c'_{m+1}} \end{array}$$

et comme la colonne centrale est nulle, il en résulte le diagramme commutatif où les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_c(U^{m+1})[1] \\ \downarrow \iota_{\mathbf{F}}! & \oplus & \downarrow \iota_U! \\ H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0) \times \mathbf{M}_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_c(W^{m+1})[1] \end{array} \quad (\dagger)$$

D'autre part, pour $m \geq 1$, l'ouvert $W^{m+1} \subseteq \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{\geq 0}$ est réunion de deux ouverts $H_c(_)$ -acycliques

$$W^{m+1} = W_U^{m+1} \cup W_{\mathbf{F}}^{m+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_U^{m+1} := (U^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}) \\ W_{\mathbf{F}}^{m+1} := (\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{> 0}) \end{cases} \quad (\dagger\dagger)$$

Le morphisme de liaison dans la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support compact relative à $\{W_U^{m+1}, W_{\mathbf{F}}^{m+1}\}$ est donc un isomorphisme :

$$H_c(W^{m+1}) \xrightarrow[\simeq]{c_{\text{MV}}} H_c(U^m \times \mathbf{M}_{> 0})[1].$$

7.6.3. Proposition. Soit \mathbf{M} une pseudovariété orientée de dimension $d_{\mathbf{M}}$. Pour tout $m \geq 1$, le diagramme suivant où les flèches horizontales sont des

isomorphismes, est commutatif au signe près.

$$\begin{array}{ccc}
H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_c(U^{m+1})[1] \\
\downarrow \iota_{\mathbf{F}!} & \text{(I)} & \downarrow \iota_U! \\
H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0)) \otimes H_c(\mathbf{M}_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_c(W^{m+1})[1] \xrightarrow[\simeq]{c_{\text{MV}}} H_c(U^m) \otimes H_c(\mathbf{M}_{>0})[2] \\
\downarrow \text{id} \otimes f_{\mathbf{M}_0} & \text{(II)} & \downarrow \text{id} \otimes f_{\mathbf{M}_{>0}} \\
H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0))[-d_{\mathbf{M}}] & \xrightarrow[\simeq]{c_m[-d_{\mathbf{M}}]} & H_c(U^m)[1][-d_{\mathbf{M}}]
\end{array}$$

Plus précisément, (I) est commutatif et dans (II) on a

$$\int_{\mathbf{M}_{>0}} (c_{\text{MV}} \circ c'_{m+1})(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_m \left(\int_{\mathbf{M}_0} \alpha \otimes \beta \right) \quad (\diamond)$$

Démonstration. La commutativité de (I) a été justifiée dans (†). Pour le sous-diagramme (II), on utilise le fait que les cofaisceaux $\underline{\Omega}_{\mathbf{c}}(_)$ sont flasques. Quitte à prendre des recouvrements assez fins, un cocycle $\tilde{\omega} \in \Omega_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0)) \otimes \Omega_{\mathbf{c}}(\mathbf{M}_0)$ s'exprime comme la restriction $\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ de

$$\tilde{\omega} = \sum_i \tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i, \quad \text{avec } \tilde{\alpha}_i \in \Omega_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0})) \text{ et } \tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathbf{c}}(\mathbf{M}_{\geq 0}).$$

On a donc $c'_{m+1}(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i) = \sum_i d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i + \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i$, avec $d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathbf{c}}(W_U^{m+1})$ et $\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathbf{c}}(W_{\mathbf{F}}^{m+1})$. Et alors, par le morphisme de liaison de Mayer-Vietoris c_{MV} relatif à $\{W_U^{m+1}, W_{\mathbf{F}}^{m+1}\}$, on a

$$(c_{\text{MV}} \circ c'_{m+1})(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i) = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} d\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_{\mathbf{c}}(U) \otimes \Omega_{\mathbf{c}}(\mathbf{M}_{>0}),$$

de sorte que

$$\int_{\mathbf{M}_{\geq 0}} (c_{\text{MV}} \circ c'_{m+1})(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i) = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|+|\beta_i|} d\tilde{\alpha}_i \int_{\mathbf{M}_0} \beta_i,$$

puisque, avec les conventions en cours, $\int_{\mathbf{M}_{>0}} d\tilde{\beta} = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbf{M}_0} \beta$.

On conclut par le fait que si $\alpha \in \mathcal{Z}_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0))$, on a $c_m(\alpha) = d\tilde{\alpha}$. \square

7.6.4. Remarque pour le cas $m = 0$. L'énoncé de 7.6.3 doit être modifié pour $m = 0$, puisqu'alors les morphismes c_{MV} et c_m sont nuls. En effet, dans ce cas $\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) = \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0) = \{\text{pt}\}$, et alors $U^m = \emptyset$. Donc, $c_m = 0$ et le premier terme de l'égalité (††) est vide, ce qui entraîne la nullité de c_{MV} .

On a aussi $\iota_{\mathbf{F}} = \text{id}$, $\iota_U = \text{id}$ et $c_{m+1} = c'_{m+1}$, et le diagramme de la proposition se résume à

$$\begin{array}{ccc}
H_c(\mathbf{M}_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_1} & H_c(\mathbf{M}_{>0})[1] \\
\downarrow f_{\mathbf{M}_0} & \swarrow f_{\mathbf{M}_{>0}} & \\
H_c(\text{pt})[-d_{\mathbf{M}}] & &
\end{array} \quad \text{où} \quad \int_{\mathbf{M}_{>0}} c'_1(\beta) = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbf{M}_0} \beta.$$

7.6.5. Renormalisation des morphismes de liaison. Revenons sur le diagramme de la proposition 7.6.3.

Pour $m \geq 1$, notons

$$q_{m!} : H_c(U^{m+1}) \rightarrow H_c(U^m)[-d_M], \quad q_{m!} := \left(\text{id} \otimes \int_{\mathbf{M}_{>0}} \right) \circ c_{\text{MV}} \circ \iota_{U!},$$

et remplaçons $c_m : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0)) \rightarrow H_c(U^m)[1]$ par

$$\gamma_m : H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0)) \rightarrow H_c(U^{m+1})[1], \quad \gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m + \frac{m(m-1)}{2}d_M} c_m(\omega).$$

7.6.6. Proposition. Soit \mathbf{M} une pseudovariété orientée de dimension d_M .

a) Pour $m \geq 1$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_{m+1}} & H_c(U^{m+1})[1] \\ p_{m!} \downarrow [-d_M] & \oplus & [-d_M] \downarrow q_{m!} \\ H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_m} & H_c(U^m)[1] \end{array}$$

Les morphismes γ sont compatibles aux actions des groupes symétriques.

b) Le diagramme suivant obtenu en dualisant et concaténant ceux de (a), et où l'on note \mathbf{F}_i pour $\mathbf{F}_i(\mathbf{M}_0)$, est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_1) & \xrightarrow{p_1^*} & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_2) & \xrightarrow{p_2^*} & \cdots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{m+1}) & \longrightarrow \\ \gamma_1^* \uparrow [0] & & \gamma_2^* \uparrow [-1] & & & & \gamma_m^* \uparrow [1-m] & & \gamma_{m+1}^* \uparrow [-m] & \\ H_{\text{BM}}(U^1) & \xrightarrow{q_1^*} & H_{\text{BM}}(U^2)[1] & \xrightarrow{q_2^*} & \cdots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(U^m)[m-1] & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(U^{m+1})[m] & \longrightarrow \end{array}$$

Les morphismes γ sont compatibles aux actions des groupes symétriques lorsque l'on tord $H_{\text{BM}}(U^m)$ par $\sigma(k)_m$ (cf. 7.5.1-(\diamond)). Les suites horizontales sont alors des \mathbf{FI} -modules (cf. 8.2.1) et la famille $\{\gamma_m^*\}$ est un isomorphisme de \mathbf{FI} -modules.

Démonstration. (a) Notons $Q(m) = \frac{m(m-1)}{2}d_M$. Compte tenu de l'égalité (\diamond) de 7.6.3, on a

$$\begin{aligned} (q_{m!} \circ \gamma_{m+1})(\omega) &= (-1)^{|\omega|m + Q(m+1)} c_m(p_{m!}(\omega)) \\ &= (-1)^{(|\omega| - d_M)m + Q(m)} c_m(p_{m!}(\omega)) = (\gamma_m \circ p_{m!})(\omega) \end{aligned}$$

La compatibilité par rapport aux actions des groupes symétriques est claire.

(b) On verra dans 8.2.1 que la condition pour que les suites horizontales soient des \mathbf{FI} -modules est que pour tous $m < n$, on ait

$$(p_{n-1}^* \circ \cdots \circ p_m^*)(H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0))) \subseteq H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_n(\mathbf{M}_0))^{1_m \times \mathcal{S}_{n-m}}$$

et de même pour la deuxième ligne. C'est évident pour la première ligne, et donc aussi pour la seconde qui en est isomorphe. \square

7.6.7. L'image-inverse sur les suites spectrales basiques. Nous allons relever le morphisme $q_m^* : H_{\text{BM}}(U^m) \rightarrow H_{\text{BM}}(U^{m+1})[1]$, pour $m \geq 1$, de 7.6.6 en un morphisme $\mathbb{E}(q_m^*) : \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0]$ de suites spectrales basiques, de sorte que nous aurons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}(U^m) & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(U^{m+1})[1] \\ \uparrow & \oplus & \uparrow \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0] \end{array}$$

répondant ainsi à la principale motivation de cette section 7.6 (cf. 7.6.1).

Les morphismes q_m^* sont les duals des morphismes $q_m!$ qui ont été définis comme la composée de trois morphismes

$$\begin{array}{ccc} & H_c(W^{m+1}) & \xrightarrow{\text{cMV}} H_c(U^m \times \mathbf{M}_{>0})[1] \\ & \nearrow \iota_U! & \searrow p_{m!} := \int_{\mathbf{M}_{>0}} \\ H_c(U^{m+1}) & \xrightarrow{q_m!} & H_c(U^m)[-d_{\mathbf{M}}] \end{array}$$

Dans ce qui suit, nous montrerons que le dual de chacun de ces morphismes admet un relèvement spectral. Rappelons maintenant quelques notations.

- L'ouvert $U^{m+1} \subseteq \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}_{\geq 0})$ est muni du recouvrement (7.4.4)

$$\mathcal{U}^{m+1} = \{U_1^{m+1}, \dots, U_{m+1}^{m+1}\} \quad \text{où} \quad (\bar{x} \in U_i^{m+1} \Leftrightarrow x_i \notin \mathbf{M}_0).$$

- L'ouvert $W^{m+1} \subseteq \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{\geq 0}$ est muni du recouvrement (7.6.2)

$$\mathcal{W}^{m+1} := \{W_1^{m+1}, \dots, W_{m+1}^{m+1}\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} W_i^{m+1} := U_i^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}, & \text{si } i \leq m, \\ W_{m+1}^{m+1} := \mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{>0}. \end{cases}$$

On décompose W^{m+1} en réunion de deux ouverts $H_c(_)$ -acycliques

$$W^{m+1} = W_U^{m+1} \cup W_{\mathbf{F}}^{m+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_U^{m+1} := (U^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}) \\ W_{\mathbf{F}}^{m+1} := (\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_{\geq 0}) \times \mathbf{M}_{>0}) \end{cases} \quad (\dagger\dagger)$$

Relèvement spectral de ι_U^* . Comme le recouvrement \mathcal{U}^{m+1} est la trace sur U^{m+1} du recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , i.e.

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \pitchfork U^{m+1} := \{W_i^{m+1} \cap U^{m+1} = U_i^{m+1}\},$$

la naturalité de bicomplexes de cochaînes de Čech-Borel-Moore vis-à-vis des restrictions ouvertes, induit un morphisme de bicomplexes de degré (0,0)

$$(\iota_U^*)_{\bullet, *} : \check{C}_{<}(\mathcal{W}^{m+1})_{\text{BM}}^{\bullet, *} \rightarrow \check{C}_{<}(\mathcal{U}^{m+1})_{\text{BM}}^{\bullet, *}$$

et donc un morphisme de suites spectrales

$$(\iota_{U,r}^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1}))_r, d_r \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1}))_r, d_r.$$

Proposition A (relèvement de i_U^*). *Le morphisme*

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{W}; \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(-)) \xrightarrow{(\iota_{U,1}^*)^{p,q}} \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(-)),$$

en fonction de $p \geq 0$ et de $1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m+1$, prend les valeurs suivantes.

▷ Si $p = 0$, on a $(\iota_{U,1}^*)_{0,q} = 0$ puisque les W_i^{m+1} sont $H_{\text{BM}}(-)$ -acycliques.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{0,q})_{i_0} & \xrightarrow{(\iota_{U,1}^*)_{0,q}=0} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{0,q})_{i_0} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(W_{i_0}^{m+1}) = 0 & & H_{\text{BM}}^q(U_{i_0}^{m+1}) \end{array}$$

▷ Si $p > 0$ et $i_p < m+1$, on a aussi $(\iota_{U,1}^*)_{p,q} = 0$ puisque

$$W_{i_0, \dots, i_p}^{m+1} = U_{i_0, \dots, i_p}^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}$$

est $H_{\text{BM}}(-)$ -acyclique.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p} & \xrightarrow{(\iota_{U,1}^*)_{p,q}=0} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_p}^m \times \mathbf{M}_{\geq 0}) = 0 & & H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_p}^{m+1}) \end{array}$$

▷ Si $p > 0$ et $i_p = m+1$, on a

$$W_{i_0, \dots, i_p=m+1}^{m+1} = U_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times \mathbf{M}_{> 0},$$

et $\iota_{U,1}^*$ s'identifie à la restriction de $(U_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times \mathbf{M}_{> 0})$ à $U_{i_0, \dots, i_{p-1}, m+1}^{m+1}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p=m+1} & \xrightarrow{(\iota_{U,1}^*)_{p,q}} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p=m+1} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times \mathbf{M}_{> 0}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_{p-1}, m+1}^{m+1}) \end{array}$$

Relèvement spectral de c_{MV}^* . On commence par un scholie sur les bi-complexes $\check{C}_{<}^{\bullet,*}(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^*)$ de cochaînes de Čech ordonnées, relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ et à valeurs dans le complexe de faisceaux de cochaînes de Borel-moore $(\underline{\Omega}_{\text{BM}}^*, d_*)$ (7.4.6), ce que nous noterons plus simplement

$$\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}) := \check{C}_{<}^{\bullet,*}(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\text{BM}}^*).$$

Soient $\mathcal{U}' := \{U_1, \dots, U_m\}$ et $\mathcal{U}'' := \{U_{m+1}\}$ dont on remarquera tout de suite que $\check{C}^p(\mathcal{U}') = 0$ si $p \geq m$, et $\check{C}^p(\mathcal{U}'') = 0$ si $p \geq 1$.

Définissons les restrictions de cochaînes de Čech ρ', ρ'' :

$$\begin{aligned} \rho : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) &\longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U}'') \\ \omega &\longmapsto (\rho'(\omega), \rho''(\omega)) \end{aligned}$$

par

$$\begin{cases} \rho'(\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \omega_{i_0, \dots, i_p} \in \Omega^*(U_{i_0, \dots, i_p}), & \text{où } 1 \leq i_0, \dots, i_p \leq m, \\ \rho''(\omega)_0 = \omega_{m+1} \in \Omega^*(U_{m+1}). \end{cases}$$

Posons ensuite $\mathcal{U}''' := \{U_1 \cap U_{m+1}, \dots, U_m \cap U_{m+1}\}$, et définissons

$$c : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}''') \longrightarrow \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}) \quad (\diamond)$$

par

$$c(\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \begin{cases} \omega_{i_0, \dots, i_{p-1}}, & \text{si } i_p = m+1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition. *La suite*

$$0 \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}''') \xrightarrow{c} \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{(\rho', \rho'')} \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}'') \rightarrow 0 \quad (\ddagger)$$

est une suite exacte courte de morphismes de bicomplexes. Les morphismes qu'elle induit sur les cohomologies des complexes simples associés coïncident alors avec les morphismes de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $\cup \mathcal{U} = (\cup \mathcal{U}') \cup (\cup \mathcal{U}'')$, soit

$$\rightarrow H_{\text{BM}}^*(\cup \mathcal{U}''') \xrightarrow{c_{\text{MV}}} H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}) \xrightarrow{\rho} H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}') \oplus H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}'') \rightarrow H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}''') \rightarrow$$

En particulier, le morphisme de liaison c_{MV} est l'aboutissement du morphisme des suites spectrales $(c_r) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}'''), d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}''')[1, 0], d_r)$ induit par le morphisme de bicomplexes (\diamond) et dont la restriction aux termes \mathbb{E}_1 est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{U}''')_1^{p,q} &= \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_p} \cap U_{m+1}) \\ (c_1)_{p,q} \downarrow & \\ \mathbb{E}(\mathcal{U})_1^{p+1,q} &= \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_{p+1}}) \end{aligned}$$

où, si $\omega \in (\mathbb{E}(\mathcal{U}''')_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p}$, on a

$$((c_1)_{p,q}(\omega))_{k_0, \dots, k_{p+1}} = \begin{cases} \omega, & \text{si } (k_0, \dots, k_{p+1}) = (i_0, \dots, i_p, m+1) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le fait que ρ est un morphisme de bicomplexes surjectif de bidegré $(0, 0)$ est immédiat. Son noyau $\ker^\bullet(\rho)$ est le sous-bicomplexe de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U})$ vérifiant

$$\ker^0(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall p > 0) \left(\omega \in \ker^p(\rho) \Leftrightarrow \omega_{i_0, \dots, i_p} = 0, \text{ si } i_p \leq m \right),$$

où l'on reconnaît l'image de $c : \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U})$. La suite (\ddagger) est donc bien une suite exacte courte de bicomplexes.

Notons $U := \cup \mathcal{U}$, $U' := \cup \mathcal{U}'$, $U'' := \cup \mathcal{U}''$, $U''' := \cup \mathcal{U}'''$.

La suite courte de Mayer-Vietoris de bicomplexes

$$0 \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U'') \xrightarrow{\beta} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U''') \rightarrow 0$$

est exacte puisque le faisceau $\underline{\Omega}_{\text{BM}}^*$ est flasque.

Comme on a $\mathcal{U} \pitchfork U' \supseteq \mathcal{U}'$ et $\mathcal{U} \pitchfork U'' \supseteq \mathcal{U}''$, on dispose de morphismes de restriction de cochaînes de Čech r', r'' et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\alpha} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U'') & \xrightarrow{\beta} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \pitchfork U''') \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow r' & & \downarrow r'' \\ 0 & \rightarrow & \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') & \xrightarrow{c} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) \xrightarrow{\rho} \check{C}^\bullet(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U}'') & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où r' et r'' induisent des quasi-isomorphismes au niveau des complexes simples associés. Il en résulte un isomorphisme canonique en cohomologie

$$\xi_* : h^* \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \pitchfork U''')) \rightarrow h^* \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}'''))$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^{*-1} \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \pitchfork U''')) & \xrightarrow{\gamma} & h^* \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})) \\ \downarrow \xi_{*-1} & \oplus & \downarrow \text{id} \\ h^{*-1} \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}''')) & \xrightarrow{c} & h^* \mathbf{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})) \end{array}$$

où γ correspond au morphisme de liaison $c_{\text{MV}} : H_{\text{BM}}(U''') \rightarrow H_{\text{BM}}(U)[1]$ de la suite longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $U = U' \cup U''$. À partir de là la suite de la proposition est claire. \square

Cette proposition, appliquée au recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , fournit le relèvement spectral du morphisme de liaison $c_{\text{MV}}^* : H_{\text{BM}}(U^m \times \mathbf{M}_{>0}) \rightarrow H_{\text{BM}}(W^{m+1})[1]$

Proposition B (relèvement de c_{MV}^*). *On munit W^{m+1} du recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , et $U^m \times \mathbf{M}_{>0}$ du recouvrement $\mathcal{U}^m \times \mathbf{M}_{>0}$ et l'on note $(\mathcal{IE}(\mathcal{W}^{m+1})_r, d_r)$ et $(\mathcal{IE}(U^m \times \mathbf{M}_{>0})_r, d_r)$ les suites spectrales correspondantes. Alors, il existe un morphisme de suites spectrales*

$$(c_{\text{MV},r}^*) : (\mathcal{IE}(U^m \times \mathbf{M}_{>0})_r, d_r) \rightarrow (\mathcal{IE}(W^{m+1})_r, d_r)[1, 0]$$

convergeant vers le bigradué du morphisme de liaison

$$c_{\text{MV}}^* : H_{\text{BM}}(U^m \times \mathbf{M}_{>0}) \rightarrow H_{\text{BM}}(W^{m+1})[1].$$

L'action de $(c_{\text{MV},r}^*)$ sur \mathcal{IE}_1 est donnée par le plongement canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{IE}(U^m \times \mathbf{M}_{>0})_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_p}^m \times \mathbf{M}_{>0}) \\ \downarrow (c_{\text{MV},1})_{p,q} & & \parallel \\ \mathcal{IE}(W^{m+1})_1^{p+1,q} & \longleftarrow & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(W_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}) \end{array}$$

Ces observations conduisent à l'énoncé suivant.

7.6.8. Proposition. *Soit M une pseudovariété orientée de dimension d_M . Il existe un morphisme de suites spectrales basiques*

$$\mathbb{E}(q_m^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1, 0],$$

qui est compatible aux actions des groupes symétriques et qui rend le diagramme suivant commutatif ⁽²⁰⁾.

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^{m+1})[1] \\ \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0] \end{array}$$

De plus, l'action de $\mathbb{E}(q_m^*)$ sur les termes $\mathbb{E}(_)_1$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)_{1;p,q}} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} \\ \parallel & & \uparrow \\ \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathcal{U}_{i_0, \dots, i_p}^m) & \xrightarrow{\bigoplus p_m^*} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathcal{U}_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}) \end{array}$$

7.7. Suivi de $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(M))$ par la suite spectrale basique

Si nous combinons la proposition précédente 7.6.8 aux théorèmes 7.6.6 et 7.5.2, nous obtenons les suites de représentations de groupes symétriques

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_1) & \xrightarrow{p_1^*} & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_2) & \longrightarrow \dots \longrightarrow & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{m+1}) \longrightarrow \\ \gamma_1^* \simeq [0] \uparrow & & \gamma_2^* \simeq [-1] \uparrow & & \gamma_m^* \simeq [1-m] \uparrow & & \gamma_{m+1}^* \simeq [-m] \uparrow \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^1) & \xrightarrow{q_1^*} & H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^2)[1] & \longrightarrow \dots \longrightarrow & H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m)[m-1] & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^{m+1})[m] \longrightarrow \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^1) & \xrightarrow{\mathbb{E}_\sigma(q_1^*)} & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^2)[1,0] & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)[m-1,0] & \xrightarrow{\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)} & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})[m,0] \longrightarrow \end{array}$$

où la ligne centrale doit être tordue par les caractères $\sigma(k)_m$ correspondants. L'énoncé suivant est alors corollaire de 7.6.8 et 7.5.2.

7.7.1. Théorème. *Soit M une pseudovariété orientée de dimension d_M .*

a) *Le morphisme de suites spectrales basiques*

$$\mathbb{E}(q_m^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1, 0],$$

²⁰ On rappelle que γ_m^* est la renormalisation donnée dans 7.6.5 du morphisme de liaison $c_m^* : H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}_0))[1-m]$. On a $\gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m + \frac{m(m-1)}{2}d_M} c_m(\omega)$.

défini, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, chaque couple (p, q) tel que $q = i + (m - (p+1))$ et chaque $r \geq 1$, une suite indexée par $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{r;p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_r^m)^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_r^{m+1})^{p+1,q},$$

qui est un **FI**-module. La somme de ces suites pour chaque $r \geq 1$ converge vers le bi-gradué du morphisme de \mathcal{S}_m -modules

$$p_m^* : H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M}))$$

pour les filtrations régulières induites par les isomorphismes γ_m^* et γ_{m+1}^* .

- b) Sur la page $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^*)_1$ les **FI**-modules en question, sont naturellement isomorphes aux **FI**-modules définis par les morphismes

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{1;p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} (p_m^*)$$

qui rendent commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_1^m)^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m}^m) & \Longrightarrow & H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \\ \mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{1;p,q} \downarrow & \text{ind}(p_m^*) \downarrow & \downarrow p_m^* \\ \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_1^{m+1})^{p+1,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m+1}^{m+1}) & \Longrightarrow & H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M})) \end{array}$$

où σ indique que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}$ est tordue $\sigma(k)_{m-(p+1)}$.

- c) Modulo les isomorphismes Ξ de 7.5.2-(b), on a le diagramme commutatif de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -modules

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m}^m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m+1}^{m+1}) \\ \Xi_{p+1}^m \downarrow \simeq & & \uparrow (\Xi_{p+2}^{m+1})^{-1} \\ \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1,m)} H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) & \xrightarrow{\bigoplus p_{p+1}^*} & \bigoplus_{\mathcal{F}^\bullet(p+2,m+1)} H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+2}(\mathbf{M}_{>0})) \quad (\diamond) \end{array}$$

où nous avons noté

$$- Q := q - (m - (p+1)) d_{\mathbf{M}} = i - (m - (p+1)) (d_{\mathbf{M}} - 1).$$

- $\mathcal{F}(p+1, m) :=$ ensemble des applications $f : \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que

$$(x < f(x), \text{ si } x < m - p) \quad \text{et} \quad (f(x) = x, \text{ autrement}).$$

- $\mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1) :=$ ensemble des applications $f : \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ telles que

$$(x < f(x) < m+1, \text{ si } x < m - p) \quad \text{et} \quad (f(x) = x, \text{ autrement}).$$

Démonstration. (a,b) L'identification des morphismes $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{1;p,q}$ comme morphismes induits résulte de 7.5.2 qui montre que l'on a

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_1^{m,p,q}) = \operatorname{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma(k)_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m}^m),$$

et comme $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{1;p,q}$ est un morphisme de \mathcal{S}_m -modules (7.6.8), il est déterminé par sa restriction à $\sigma(k)_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p,\dots,m}^m)$ qui n'est autre que $\operatorname{id} \otimes p_m^*$ où id désigne l'identité sur $\sigma(k)_{m-(p+1)}$. Le fait que l'on obtient ainsi un **FI**-module est alors immédiat. A partir de là, on conclut grâce à la compatibilité des différentielles d_r avec les actions des groupes symétriques et au fait que la catégorie des **FI**-modules est abélienne (8.2).

(c) Compte tenu de 7.5.2-(b), nous avons seulement à justifier la dernière ligne (\diamond) du diagramme, somme directe des duaux des morphismes d'intégration sur les fibres

$$p_m! : H_c(U_{m-p,\dots,m+1}^{m+1}) \rightarrow H_c(U_{m-p,\dots,m}^m)[-d_{M_{>0}}]$$

où,

$$U_{m-p,\dots,m+1}^{m+1} = \Delta_{m+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+2})$$

en notant, pour simplifier, $\mathbf{F}_{p+2} := \mathbf{F}_{p+2}(M_{>0})$.

Avertissement. Tous les diagrammes qui suivent concernent la cohomologie à support compact de leurs termes, même si dans un souci d'allègement de notations, on a omis d'écrire ' $H_c(_)$ '.

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, le morphisme d'intégration sur la dernière coordonnée

$$p! : \Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1}) \rightarrow \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b) \quad (\dagger)$$

est défini dans 7.2.3-(a) à travers l'inclusion ouverte

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\iota} & \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b) \times \mathbf{M}_{>0} \\ & \searrow p! & \swarrow \int_{\mathbf{M}_{>0}} \\ & & \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b)[-d_{M_{>0}}] \end{array}$$

et lorsque $a > 0$, on est conduit à considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\iota} & \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b) \times \mathbf{M}_{>0} & \xrightarrow{\int_{\mathbf{M}_{>0}}} & \\ \downarrow j & & \downarrow j \times \operatorname{id} & & \\ \mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\iota'} & [\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a+b-1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_b)] \times \mathbf{M}_{>0} & & \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \times \operatorname{id} & & \\ \coprod_{\mathcal{F}(a+b,a+b+1)} \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1,a+b)} \Delta_{a+b-1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_b) \times \mathbf{M}_{>0} & \xrightarrow{\int_{\mathbf{M}_{>0}}} & \\ \downarrow c \downarrow [+1] & & \downarrow c \times \operatorname{id} \downarrow [+1] & & \end{array}$$

où les colonnes sont les suites exactes longues de cohomologie à support compact habituelles dans nos théorèmes de scindage (3.1.1). Les termes de la deuxième ligne sont nuls puisque $\mathbf{M}_{\geq 0}$ apparaît en facteur, les flèches de liaison c sont donc des isomorphismes et la question que nous cherchons à comprendre concerne l'interprétation de $p_!$ dans (\dagger) en termes de la dernière ligne du diagramme. Or, la flèche en pointillé n'est pas tout à fait bien définie. En effet, les composantes du fermé

$$\coprod_{\mathcal{F}(a+b, a+b+1)} \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1})$$

sont bien les traces des composantes de

$$\coprod_{\mathcal{F}(a+b-1, a+b)} \Delta_{a+b-1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_b) \times \mathbf{M}_{> 0}$$

sur l'ouvert $\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1})$, que l'on va noter \mathbb{U} dans la suite, à l'exception près de celle indexée par la fonction $f_0 : \llbracket a+b+1 \rrbracket$ définie par $f_0(1) = a+b+1$, composante, par ailleurs, clairement fermée dans l'ouvert $\Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b) \times \mathbf{M}_{> 0}$ que l'on va noter \mathbb{V} dans la suite.

On a donc l'inclusion fermée

$$(\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1}))_{f_0} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$$

et tout cocycle ω d'Alexander-Spanier (faisceau c -mou) à support compact de cette composante se prolonge en une cochaîne ϖ à support compact de $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$. Le morphisme de liaison donne alors $c(\omega) = d\varpi$, ce qui est cocycle à support compact dans $\Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1})$. Or,

$$p_!(c(\omega)) = \int_{\mathbf{M}_{> 0}} \iota(c(\omega)) = \int_{\mathbf{M}_{> 0}} d\varpi = 0,$$

puisque $\varpi \in \mathcal{Z}_c(\mathbb{V})$ et que \mathbb{V} est le domaine de définition de $\int_{\mathbf{M}_{> 0}}$.

Ces remarques prouvent la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mathcal{F}(a+b, a+b+1)} \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1})[-1] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1, a+b)} \Delta_{a+b-1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_b)[-d_{\mathbf{M}_{> 0}}] [-1] \\ \downarrow \simeq c & & \downarrow \simeq c \\ \Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{p_!} & \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b)[-d_{\mathbf{M}_{> 0}}] \end{array}$$

où maintenant ι'' est bien définie. Sa valeur, qui dépend des composantes, vaut

$$\iota'' = \begin{cases} 0 \text{ sur } (\mathbf{M}_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1}))_{f_0}, \\ p_! : \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_{b+1}) \rightarrow \Delta_{a+b-1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{a-1} \times \mathbf{F}_b), \text{ autrement.} \end{cases}$$

L'itération de ces idées conduit au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\mathcal{F}(b+1, a+b+1)} \mathbf{F}_{b+1}[-a] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(b, a+b)} \mathbf{F}_b[-d_{\mathbf{M}_{>0}}] [-a] \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\Delta_{a+b+1}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_{b+1}) & \xrightarrow{p!} & \Delta_{a+b}(\mathbf{M}_{\geq 0}^a \times \mathbf{F}_b)[-d_{\mathbf{M}_{>0}}]
\end{array}$$

où $\iota'' = 0$ sur les composantes indexées par les fonctions $f : \llbracket 1, a+b+1 \rrbracket$ telles que $|f^{-1}(a+b+1)| > 1$, et c'est l'intégration sur les fibres autrement.

En dualisant, on obtient la description de la ligne (\diamond) du diagramme du théorème pour la cohomologie de Borel-Moore. \square

8. Stabilité de la famille $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$

8.1. Stabilité et polynomialité de caractères

Le comportement lorsque $m \mapsto \infty$ des invariants associés aux espaces de configuration $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$, notamment leurs groupes d'homotopie, leurs nombres de Betti, les caractères de leurs (co)homologies en tant que \mathcal{S}_m -modules, ont fait l'objet de très nombreux travaux. Un des résultats pionniers dans cette direction est dû à V.I. Arnold (motivé par les groupes de tresses *circa* 1970). Il concerne la stabilité des nombres de Betti des espaces $\mathbf{BF}_m(\mathbb{R}^2) := \mathbf{F}_m(\mathbb{R}^2)/\mathcal{S}_m$. Arnold montrait ([1,2]) que pour $i \in \mathbb{N}$, le morphisme naturel $H^i(\mathbf{BF}_m(\mathbb{R}^2)) \rightarrow H^i(\mathbf{BF}_{m+1}(\mathbb{R}^2))$ est bijectif pour $m \geq 2(i-1)$. C'est un résultat remarquable que ne révèle pas la connaissance explicite du polynôme de Poincaré de $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ (voir thm. 10.3.1). Parallèlement, le même phénomène pour l'espace $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ n'est pratiquement jamais vérifié, déjà si nous appliquons la formule de la remarque 5.2.2 lorsque $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\mathcal{P}(\mathbf{F}_m(\mathbb{R}^2))(T) = (1+T)(1+2T) \cdots (1+(m-1)T)$$

d'où $\text{Betti}_1(\mathbf{F}_m(\mathbb{R}^2)) = m(m-1)/2$ (polynomiale en m tout de même!).

Il faut attendre les années 2011 pour comprendre le lien entre ces phénomènes grâce à la percée considérable de T. Church et B. Farb ([7,8]). En s'intéressant, non pas à la suite $(\text{Betti}_i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})))_m$, mais à la suite des caractères $(\chi(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i))_m$, Church et Farb découvrent que pour chaque variété connexe orientable \mathbf{X} t.q. $\dim \mathbf{X} \geq 2$, il existe un polynôme $P(\mathbf{X}; i)(X_1, \dots, X_r)$, où X_i est le nombre des cycles de longueur i qui interviennent dans la décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, tel que l'on a ⁽²¹⁾

$$(\chi(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i))_m = P(\mathbf{X}; i)(X_1, \dots, X_r), \quad \forall m \gg 0.$$

On dit alors que la suite des caractères $(\chi(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); i))_m$ « stationne » ou qu'elle est « polynomiale ».

Ils montrent en fait beaucoup mieux, ils montrent que la suite des multiplicités des composantes irréductibles des représentations $\mathcal{S}_m : H^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ est

²¹ C'est trivialement faux si \mathbf{X} n'est pas connexe ou si $\dim \mathbf{X} = 1$ (cf. 8.8.6).

stationnaire (dans un sens qui sera précisé dans 8.4), on dit alors que famille est « stationnaire » (cf. 8.4.1). Lorsque \mathbf{X} est en plus de type fini, cette stabilité implique, par un résultat de Macdonald (cf. 8.3.8), la polynomialité des caractères.

Théorème (Church [7]). *Soit \mathbf{X} une variété topologique, connexe orientable. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m \cdot H^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))\}_m$ est stationnaire pour $m \geq 2i$ si $\dim \mathbf{X} \geq 3$, et pour $m \geq 4i$ si $\dim \mathbf{X} = 2$.*

Le résultat d'Arnold apparaît alors comme cas particulier du stationnement des sous-espaces invariants $H^i(\mathbf{F}_m(\mathbb{R}^2))^{\mathcal{S}_m}$.

Les sections suivantes rappelleront les bases de la théorie de **FI**-modules de Church-Ellenberg-Farb ([9]). Nous en aurons besoin pour plusieurs raisons, notamment pour introduire certains foncteurs d'induction pour les **FI**-modules que nous avons trouvés utiles pour étendre le théorème de Church aux familles $\{\mathcal{S}_m \cdot \Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m\}_m$. On remarquera en passant que $\Delta_{\leq m-a} \mathbf{X}^m$ est généralement singulier, même lorsque \mathbf{X} ne l'est pas.

8.2. Catégorie des **FI**-modules

Suivant [9], on note **FI** la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, et dont les morphismes sont les applications injectives. Ensuite, si \mathcal{A} est un anneau, on définit la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ dont les objets sont les foncteurs covariants $\mathcal{V} : \mathbf{FI} \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$ qu'on appelle des « $\mathcal{A}[\mathbf{FI}]$ -modules » et même simplement **FI**-modules lorsque \mathcal{A} est sous-entendu.

Si \mathcal{V} et \mathcal{W} sont des **FI**-modules, on note $\text{Hom}_{\mathbf{FI}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ l'ensemble des transformations naturelles de \mathcal{V} vers \mathcal{W} .

Conventions et notations. Dans ce qui suit, on identifie pour tous $b \geq 0$

$$\mathcal{S}_m = \text{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}} \llbracket m+1, m+b \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b = \text{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}} \llbracket 1, m \rrbracket,$$

ce qui donne un sens à l'inclusion $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}_{m+b}$.

Dans une notation $V_m \boxtimes \mathcal{A}_b$, on désigne par V_m un \mathcal{S}_m -module et par \mathcal{A}_b la représentation triviale de \mathcal{S}_b dans \mathcal{A} . Le produit tensoriel en question est alors le $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b$ -module défini par $(\alpha, \beta) \cdot (v \otimes w) := (\alpha \cdot v, \beta \cdot w)$.

8.2.1. Une équivalence de catégories. La catégorie $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ est équivalente à la catégorie des familles dénombrables $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$, où les V_m sont des $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$ -modules et où les ϕ_m sont des morphismes de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$ -modules dont les composées, notées

$$\phi_{m+b,m} := \phi_{m+b} \circ \cdots \circ \phi_{m+1} \circ \phi_m, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \quad (\ddagger)$$

vérifient

$$\phi_{m+b,m}(V_m) \subseteq (V_{m+b})^{\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b}, \quad \forall m > 0, \forall b \in \mathbb{N}, \quad (\diamond)$$

autrement dit, sont telles que $\phi_{m+b,m}$ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_m & \xrightarrow{\phi_{m+b,m}} & V_{m+b} \\ & \searrow \iota & \nearrow \Phi_{m+b,m} \\ & \text{ind}_{\mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_b}^{\mathbb{S}_{m+b}}(V_m \boxtimes \mathcal{A}_b) & \end{array}$$

où $\iota : V_m \rightarrow V_m \boxtimes \mathcal{A}$ est le plongement $v \mapsto v \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et où $\Phi_{m+b,m}$ est un morphisme de $\mathcal{A}[\mathbb{S}_{m+b}]$ -modules ⁽²²⁾.

Les morphismes composés $\phi_{m+b,m} : V_m \rightarrow V_{m+b}$ de (\ddagger) seront appelés « *les morphismes de transition de \mathcal{V}* ».

Dans cette équivalence, un morphisme $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ de **FI**-modules est une famille $\{f_m : V_m \rightarrow W_m\}_m$ de morphismes de $\mathcal{A}[\mathbb{S}_m]$ -modules compatibles aux morphismes de transition de \mathcal{V} et de \mathcal{W} , *i.e.* $\phi_m \circ f_m = f_{m+1} \circ \phi_m$. Ces morphismes induisent des morphismes de transition pour les familles $\{\ker(f_m)\}_m$ et $\{\text{coker}(f_m)\}_m$ qui sont alors les **FI**-modules $\ker(f)$ et $\text{coker}(f)$ de la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$. (Dans [26], Sam et Snowden donnent une équivalence de catégories explicite entre $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ et une catégorie de modules sur un anneau.)

8.2.2. Troncatures de **FI-modules.** Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour tout **FI**-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$, on note $\mathcal{V}_{\geq q} = \{W_m \rightarrow W_{m+1}\}$ le sous-**FI**-module de \mathcal{V} avec $W_m := 0$ si $m \leq q-1$, et $W_m := V_m$ autrement. On pose ensuite $\mathcal{V}_{\leq q-1} := \mathcal{V}/\mathcal{V}_{\geq q}$, soit

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{V}_{\geq q} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ \mathcal{V} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathcal{V}_{\leq q-1} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \end{array}$$

On notera $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])_{\geq q}$ (resp. $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])_{\leq q}$) la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$ dont les objets sont les **FI**-modules tronqués $\mathcal{V}_{\geq q}$ (resp. $\mathcal{V}_{\leq q}$).

Les correspondances $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\geq q}$ et $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\leq q}$ sont clairement fonctorielles covariantes et exactes.

8.2.3. Les **FI-modules $\mathcal{M}(\mathbf{a})$.** Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{a} := [[1, a]]$, et ensuite $\mathcal{M}(\mathbf{a}) :=$ le foncteur covariant représenté par \mathbf{a} , soit

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}) : \mathbf{FI} \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$$

$$S \rightsquigarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_S := \mathcal{A}[\text{Mor}_{\mathbf{FI}}(\mathbf{a}, S)]$$

On a donc

$$\begin{cases} \text{si } b < 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = 0 \\ \text{si } b \geq 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = \text{ind}_{\mathbb{S}_a \times \mathbb{S}_b}^{\mathbb{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathbb{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b, \end{cases}$$

²² On prendra garde du fait que la condition (\diamond) qui porte sur les $\mathbb{I}_m \times \mathbb{S}_b$ -invariants est vide pour $b = 1$, elle n'est pas transitive et doit être exigée pour tout $b \in \mathbb{N}$.

Le morphisme de transition $\phi_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b+1}$ provient de l'égalité $k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b = k[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1}$ qui induit un morphisme de $\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b$ -modules

$$\mathcal{S}_a \boxtimes \mathcal{A}_b \rightarrow \text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_{b+1}}^{\mathcal{S}_{a+b+1}} \mathcal{S}_a \boxtimes \mathcal{A}_{b+1}$$

qui définit ϕ_{a+b} .

8.2.4. Par le lemme de Yoneda, pour tout **FI**-module \mathcal{V} l'application

$$Y : \text{Hom}_{\mathbf{FI}}(\mathcal{M}(\mathbf{a}), \mathcal{V}) \rightarrow V_a, \quad Y(f) = f(\text{id}_{\mathbf{a}}),$$

est bijective. Si $v \in V_a$, on note $\text{ev}_{\mathbf{a}}(v) := Y^{-1}(v)$, il s'agit du morphisme de foncteurs dont les valeurs $\text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \rightarrow V_{a+b}$ sont

$$\begin{cases} \text{si } b < 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} = 0 \\ \text{si } b = 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a : \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \rightarrow V_a, \text{ ev}_{\mathbf{a}}(v)_a(\alpha) = \alpha \cdot v \\ \text{si } b > 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} \text{ est la composée :} \end{cases}$$

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathcal{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\text{ind}(\text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a)} \text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} V_a \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\Phi_{a+b,a}} V_{a+b}$$

8.2.5. Sous-FI-modules et FI-modules quotients. On appelle « *sous-FI-module* » d'un **FI**-module \mathcal{V} tout sous-foncteur $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. En termes des familles dénombrables $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ (8.2.1), l'inclusion $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ équivaut à la donnée d'une famille de sous- \mathcal{S}_m -modules $W_m \subseteq V_m$ vérifiant $\phi_m(W_m) \subseteq W_{m+1}$, auquel cas $\mathcal{W} := \{\phi_m|_{W_m} : W_m \rightarrow W_{m+1}\}$.

L'intersection d'une famille de sous-**FI**-modules est un sous-**FI**-module.

On définit dualement la notion de « *FI-module quotient* ».

8.2.6. Systèmes générateurs de FI-modules. Soit \mathcal{V} un **FI**-module. Pour tout sous-ensemble $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$, on appelle « *sous-FI-module engendré par Σ* » et on le note $\langle \Sigma \rangle$, l'intersection de la famille des sous-**FI**-modules \mathcal{W} de \mathcal{V} tels que $\Sigma \subseteq \coprod_m W_m$.

Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, soit $\Sigma_a := \Sigma \cap V_a$. D'après 8.2.3, chaque $s \in \Sigma_a$ détermine un et un unique morphisme de **FI**-modules $\text{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \mathcal{M}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathcal{V}$ t.q. $\text{ev}_{\mathbf{a}}(s)(\text{id}_{\mathbf{a}}) = s$. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme ([9] 2.3.2). *Le sous-FI-module $\langle \Sigma \rangle \subseteq \mathcal{V}$ est l'image du morphisme*

$$\prod_{0 < a \in \mathbb{N}, s \in \Sigma_a} \text{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \bigoplus_{0 < a; s \in \Sigma_a} \mathcal{M}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathcal{V},$$

8.2.7. FI-modules de type fini. Soit \mathcal{V} un **FI**-module.

- a) \mathcal{V} est dit « *engendré en degrés $\leq d$* » si $V = \langle \Sigma \rangle$ avec $\Sigma \subseteq \coprod_{a \leq d} V_a$.
- b) \mathcal{V} est dit « *de type fini* » si $\mathcal{V} = \langle \Sigma \rangle$ avec Σ fini.

8.2.8. Proposition ([9] Finitude des **FI**-modules)

- a) Un **FI**-module \mathcal{V} est de type fini si et seulement si, il admet une surjection $\bigoplus_i \mathcal{M}(\mathbf{a}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{V}$ pour une certaine famille finie $\{\mathbf{a}_i\}$
- b) Un quotient d'un **FI**-module de type fini est de type fini.
- c) Si l'anneau \mathcal{A} des coefficients est noethérien, tout sous-**FI**-module d'un **FI**-module de type fini est encore de type fini. ⁽²³⁾

8.3. Caractères polynomiaux et stabilité des **FI**-modules

L'anneau \mathcal{A} est désormais un corps k de caractéristique nulle (cf. 8.3.5).

8.3.1. Caractères (éventuellement) polynomiaux

Si $\mathcal{R} := \{\mathcal{S}_m:V_m\}_m$ est une famille de représentations de dimensions finies, on note $\chi(\mathcal{R}) := \{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$ la famille de leurs caractères. Ici, on ne suppose pas que \mathcal{R} provient d'un **FI**-module, il n'y a donc a priori aucun lien entre les différents W_m . Cela étant précisé, il existe, pour chaque m , un polynôme $P_m \in k[X_1, \dots, X_m]$ tel que

$$\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)(\alpha) = P_m(X_1, \dots, X_m)(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m,$$

où $X_i(\alpha)$ est le nombre des i -cycles dans la décomposition de $\alpha \in \mathcal{S}_m$ en cycles disjoints. La famille $\chi(\mathcal{R})$ est décrite par des familles $\{P_m\}_m$ de polynômes de l'algèbre $k[\overline{X}] = k[X_1, X_2, \dots]$ à une infinité dénombrable de variables.

Définition. La famille \mathcal{R} est « à caractère éventuellement polynomial » s'il existe $N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $P \in k[X_1, \dots, X_r]$ tels que

$$\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)(\alpha) = P(X_1, \dots, X_r)(\alpha), \quad \forall m \geq N, \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m. \quad (*)$$

On dit alors que $\chi(\mathcal{R})$ « est polynomiale pour $m \geq N$, ou à partir de N ».

8.3.2. Remarque. On prendra garde du fait que si le caractère $\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)$ admet une écriture unique en tant que polynôme de $k[X_1, \dots, X_m]$, ce n'est jamais le cas dans $k[\overline{X}]$. Par contre, lorsque la condition (*) est satisfaite, le polynôme P est bien unique pour tout $m \geq \sup\{N, r\}$.

8.3.3. Remarque. Notons $\dim_k(\mathcal{R}) := \{\dim_k W_m\}_m$. Lorsque la famille de caractères $\chi(\mathcal{R})$ est éventuellement polynomiale, on a, pour m assez grand,

$$\dim_k V_m = P(X_1, X_2, \dots, X_r)(\mathbb{1}_m) = P(m, 0, \dots, 0)$$

et la suite $\dim_k(\mathcal{V})$ est éventuellement polynomiale en m .

L'intérêt de la finitude des **FI**-modules vient du résultat suivant, corollaire d'un théorème remarquable de la théorie des **FI**-modules, le théorème 8.4.9 que nous rappellerons un peu plus tard (voir aussi 8.4.8).

²³ Prouvé dans [9] en supposant $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}$, et dans [10] en général.

8.3.4. Théorème ([9] Polynomialité de caractères). *Un \mathbf{FI} -module de type fini \mathcal{V} est à caractère éventuellement polynomial. En particulier, $\dim_k(\mathcal{V})$ est éventuellement polynomiale.*

8.3.5. Représentations irréductibles $V(\lambda)_m$

Sous l'hypothèse $\text{car}(k) = 0$ en cours, les représentations des groupes finis sont semi-simples et, dans le cas particulier des groupes symétriques, les représentations irréductibles sont *définies sur \mathbb{Q}* . Les décompositions en composantes irréductibles sont alors “indépendantes” de $k \supseteq \mathbb{Q}$ et nous pourrions tout aussi bien prendre $k = \mathbb{Q}$ dans ce qui suit.

8.3.6. Reparamétrisation des représentations irréductibles

Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, les représentations irréductibles de \mathcal{S}_a sur k sont paramétrées par les décompositions $\lambda \vdash a$. On note V_λ la représentation irréductible de \mathcal{S}_a correspondante à $\lambda \vdash a$.

Définition. Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell) \vdash a$. Pour tout $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on note $\lambda[m] \vdash m$ la décomposition $(m - |\lambda|, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \end{array} \right\} \mapsto \lambda[m] := \left\{ \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \dots & \square & \square \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & & \end{array} \begin{array}{l} (m - |\lambda|) \\ (\lambda_1) \\ \vdots \\ (\lambda_\ell) \end{array} \right\},$$

Pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on note $V(\lambda)_m$ la représentation irréductible de \mathcal{S}_m correspondante à $\lambda[m]$, on pose donc :

$$\boxed{V(\lambda)_m := V_{\lambda[m]}}$$

Les notations $V(0)_m$ et $V(1)_m = V(\square)_m$ désignent ainsi respectivement la représentation triviale et la représentation standard de dimension $m-1$ de \mathcal{S}_m .

8.3.7. Remarques

- Une décomposition $\mu \vdash m$ s'écrit d'une et d'une *unique* manière sous la forme $\mu = \lambda[m]$. Si $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell)$, on a $\lambda = (\mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell)$. On a $\mu \vdash a := m - \lambda_1$ (y compris $a = 0$).
- Dans la notation ‘ $\lambda[m]$ ’, le nombre ‘ m ’, qui vérifie $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, indique la taille finale du diagramme. On a

$$\ell(\lambda[m]) = \ell(\lambda) + 1,$$

et si $m \leq n$, on a $(\lambda[m])[n] \neq \lambda[n]$.

- Si $\lambda[m] \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on a $|\lambda| \leq m - \left\lceil \frac{m}{\ell} \right\rceil$. ⁽²⁴⁾

²⁴ On désigne par $[x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $[x] - 1 < x \leq [x]$. Dans (c), le terme $\lceil m/\ell \rceil$ représente le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, il faudrait donc convenir que $\lceil 0/0 \rceil = 0$.

8.3.8. Un résultat de Macdonald. Il s'agit d'un exemple traité dans son livre [24]. On y donne une famille remarquable de représentations à caractère polynomial (ce qui est un ingrédient incontournable dans la preuve de la deuxième partie de 8.4.7-(e)).

Proposition ([24]). *Pour $\lambda \vdash a$, il existe un polynôme $P_\lambda \in k[\overline{X}]$ tel que, pour tout $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on a ⁽²⁵⁾*

$$P_\lambda(\alpha) = \chi_{\mathcal{S}_m}(V(\lambda)_m)(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m.$$

8.4. Rang de stabilité, de monotonie et poids des **FI**-modules

8.4.1. Stabilité et rang de stabilité. Soit $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$ un **FI**-module. Suivant [9], « \mathcal{V} est (uniformément) stationnaire », s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $m \geq N$.

- a) *Injectivité.* Les applications $\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}$ sont injectives.
- b) *Surjectivité.* V_{m+1} est engendré en tant que \mathcal{S}_{m+1} -module par $\text{im}(\phi_m)$.
- c) *Multiplicités.* ⁽²⁶⁾ Dans la décomposition en représentations irréductibles

$$V_m = \bigoplus_{\lambda \vdash a \leq m - \lambda_1} c(\lambda)_m V(\lambda)_m,$$

les multiplicités $c(\lambda)_m$ ne dépendent pas de m . En particulier, la famille de caractères $\chi(\mathcal{V})$ est polynomiale à partir de N (cf. 8.3.8).

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dira aussi que \mathcal{V} est un **FI**-module « stable pour $m \geq N$ ». Le « rang de stabilité de \mathcal{V} », noté $\text{rang}_\sigma(\mathcal{V})$, est alors, par définition, la borne inférieure de tels N . Si \mathcal{V} n'est pas stationnaire, on pose $\text{rang}_\sigma(\mathcal{V}) = +\infty$.

8.4.2. Monotonie d'un **FI-module.** Cette notion, introduite par Church dans [7], joue un rôle clef dans l'étude du rang de stabilité de la cohomologie d'un complexe de **FI**-modules uniformément stationnaires.

Un **FI**-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ est « monotone pour $m \geq N$ » lorsque pour tout $m \geq N$ et tout $W_m \subseteq V_m$ isomorphe à $V(\lambda)_m^{\oplus k}$, le sous- \mathcal{S}_{m+1} -module $\mathcal{S}_{m+1} \cdot \phi_m(W) \subseteq V_{m+1}$ contient $V(\lambda)_{m+1}^{\oplus k}$ comme sous-module.

On notera $\text{rang}_\mu(\mathcal{V})$ le plus petit des tels N .

La notion de monotonie s'avère particulièrement fertile couplée à la notion de stabilité comme le montre la proposition suivante.

²⁵ On trouvera dans [24] exemple I.7.14, p. 122, l'expression précise du polynôme P_λ .

²⁶ L'adverbe "uniformément" est utilisé dans [9] pour distinguer du cas où la condition de stabilité de multiplicités (c) est demandée séparément pour chaque λ , ce qui donne lieu à une famille à priori infinie de rangs de stabilité $\{N_\lambda\}$.

8.4.3. Proposition ([7]). *Pour tout morphisme $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ de **FI**-modules monotones et stables pour $m \geq N$, les **FI**-modules $\ker(f)$ et $\operatorname{coker}(f)$ sont monotones et stables pour $m \geq N$. En particulier, si (\mathcal{V}_*, d_*) est un complexe de **FI**-modules monotones et stables pour $m \geq N$, il en sera de même de chaque **FI**-module de cohomologie $h^i(\mathcal{V}^*)$.*

8.4.4. Poids d'un **FI-module.** Dans les études de stabilité ou de monotonie de **FI**-modules, une question très délicate est la détermination précise de leurs rang, ce pourquoi on se contente la plupart du temps de donner des bornes. La notion de « poids » d'un **FI**-module, introduite dans [9], s'avère très utile pour ces questions (cf. 8.6.2).

Définitions

- Soit $m > 0$. Le « poids » d'un \mathcal{S}_m -module W , noté $\mathcal{P}(W)$, est le plus grand des $|\lambda|$ tels que $V_{\lambda[m]}$ est facteur irréductible de W . Si $W = 0$, on pose $\mathcal{P}(W) := 0$. On a toujours $\mathcal{P}(W) < m$, d'après 8.3.7(c).
- Le « poids » d'un **FI**-module $\mathcal{V} = \{V_m\}$, noté $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, est la borne supérieure de l'ensemble $\{\mathcal{P}(V_m)\}$. On pose $\mathcal{P}(\mathcal{V}) := +\infty$ lorsque l'ensemble en question n'est pas borné.
- Le « poids à l'infini » d'un **FI**-module $\mathcal{V} = \{V_m\}$, noté $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{V})$, est la limite dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, lorsqu'elle existe, de la suite $\mathcal{P}(V_m)$ pour $m \mapsto +\infty$.

Si \mathcal{V} est un **FI**-module avec rang de stabilité fini, on a clairement

$$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{V}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{V}) \leq \operatorname{rang}_\sigma(\mathcal{V}),$$

avec égalités seulement si $\mathcal{P}(\mathcal{V}) = 0$, i.e. si $V_m \subseteq V(0)_m$, pour tout m .

Les propositions 8.6.3 et 8.7.5 indiquent comment la connaissance de $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{V})$ participe à l'évaluation de $\operatorname{rang}_\sigma(\mathcal{V})$. Le résultat suivant qui intervient dans la preuve du théorème 8.7.5, donne une idée de manière dont le foncteur d'induction (6.3) modifie le poids d'une représentation.

8.4.5. Proposition. *Pour tout $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(|\lambda|)$ et tout \mathcal{S}_ℓ -module W , on a*

$$\mathcal{P}(\operatorname{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell} W) \leq |\lambda| - \lambda_1 \leq |\lambda| - \left\lceil \frac{|\lambda|}{\ell} \right\rceil$$

L'égalité $\mathcal{P}(\operatorname{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell} W) = |\lambda| - \lambda_1$, est vérifiée si $\mathcal{P}(\operatorname{Res}_{\mathcal{S}_{\mu_1}}^{\mathcal{S}_\ell} W) \geq \mu_1 - \lambda_1$, par exemple si $W := V_{(1^\ell)}$.

Démonstration. Notons $\underline{\ell}$ le nombre des $\lambda_i > 1$. On a

$$\mathcal{P}_\lambda \trianglelefteq (\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\mu_1}) \trianglelefteq N_{\mathcal{S}_{|\lambda|}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda, \quad (\dagger)$$

d'où une surjection de $\mathcal{S}_{|\lambda|}$ -modules

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\mu_1}}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W \twoheadrightarrow \text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W \quad (\ddagger)$$

qui est un isomorphisme lorsque $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\underline{\ell}})$ est strictement décroissante, car, dans ce cas, (\dagger) est une égalité.

Comme dans l'action de $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\mu_1}$ à travers G_λ , les \mathcal{S}_{λ_i} agissent trivialement sur W , nous sommes emmenés à utiliser le lemme 3.2.3 de [9] :

Lemme. Soit $\nu \vdash b$ et soit $\mathcal{S}_b: V_\nu$ la représentation irréductible correspondante. Alors, dans la décomposition en facteurs \mathcal{S}_{a+b} -irréductibles :

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} k \boxtimes V_\nu = \bigoplus_{\omega} V_\omega,$$

les décompositions $\omega \vdash a + b$ s'obtiennent en rajoutant une boîte sur a colonnes distinctes de ν . On a, par conséquent,

$$\omega_1 \geq \sup(a, \nu_1),$$

la borne pouvant être atteinte.

On en déduit que dans la décomposition des induits de la forme :

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{a_r} \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a_1 + \cdots + a_r + b}} V_\nu = \bigoplus_{\omega} V_\omega \quad (\diamond)$$

où les \mathcal{S}_{a_i} agissent trivialement sur V_ν , on a de même

$$\omega_1 \geq \sup(a_i, \nu_1).$$

Appliquons cette observation au terme de gauche de (\ddagger) . On a, pour tout $\nu \vdash \mu_1$ tel que V_ν est facteur irréductible de $\text{Res}_{\mathcal{S}_{\mu_1}}^{\mathcal{S}_{\underline{\ell}}} W$, une décomposition

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\mu_1}}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} V_\nu = \bigoplus_{\omega} V_\omega,$$

avec $\omega_1 \geq \sup(\lambda_1, \nu_1)$ et donc

$$\mathcal{P}(V_\omega) = |\omega| - \omega_1 \leq |\lambda| - \sup(\lambda_1, \nu_1).$$

La première partie de la proposition est ainsi prouvée. Quand à la deuxième, elle en découle puisque $\nu_1 = \mu_1 - \mathcal{P}(\text{Res}_{\mu_1}^{\mathcal{S}_{\underline{\ell}}} V_\nu)$. \square

8.4.6. Les \mathbf{FI} -modules $\mathcal{M}_a^H(\mathbf{W})$. Cette section donne beaucoup de \mathbf{FI} -modules de type fini et de \mathbf{FI} -modules stationnaires.

Pour tout $0 < a \in \mathbb{N}$ et tout sous-groupe $\mathbf{H} \subseteq \mathcal{S}_a$, on définit le foncteur

$$\mathcal{M}_a^H : \text{Mod}(k[H]) \rightarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq a}$$

par

$$\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)_{a+b} = \begin{cases} 0, & \text{si } b < 0, \\ \text{ind}_{\mathbf{H} \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} W \boxtimes k_b, & \text{si } b \geq 0. \end{cases}$$

Pour tous $0 \leq b_1 \leq b_2$, l'égalité $W \boxtimes k_{b_1} = W \boxtimes k_{b_2}$ induit le morphisme de $\mathbf{H} \times \mathcal{S}_{b_1}$ -modules de $W \boxtimes k_{b_1} \rightarrow \text{ind}_{\mathbf{H} \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2}$, d'où le morphisme (canonique) de transition

$$\phi_{a+b_2, a+b_1} : \text{ind}_{\mathbf{H} \times \mathcal{S}_{b_1}}^{\mathcal{S}_{a+b_1}} W \boxtimes k_{b_1} \rightarrow \text{ind}_{\mathbf{H} \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2}$$

d'image clairement invariante sous $\mathbb{I}_{a+b_1} \times \mathcal{S}_{b_2-b_1}$.

La famille $\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W) : \{\phi_{m+1, m} : \mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)_m \rightarrow \mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)_{m+1}\}$ est donc un **FI**-module bien défini.

L'action du foncteur $\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}$ sur les morphismes suit le même principe d'induction et ne sera pas détaillée.

Remarque. Les **FI**-modules $\mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}(k[\mathcal{S}_a])$ et $\mathcal{M}(\mathbf{a})$ (8.2.3) coïncident.

Notation. Lorsque $\mathbf{H} = \mathcal{S}_a$, on notera $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$.

8.4.7. Proposition ([9])

a) *Le foncteur $\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}} : \text{Mod}(k[\mathbf{H}]) \rightarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq a}$ est additif, exact et fidèle. Il est aussi l'adjoint à gauche du foncteur « d'évaluation en \mathbf{a} », i.e. pour tout \mathbf{H} -module W et tout **FI**-module \mathcal{V} , on a :*

$$\text{Hom}_{\mathbf{FI}}(\mathcal{M}_a(W), \mathcal{V}) = \text{Hom}_{\mathbf{H}}(W, V_a).$$

*En particulier, le **FI**-module $\mathcal{M}_a(W)$ est un objet projectif de $\text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$, quel que soit $W \in \text{Mod}(k[\mathbf{H}])$.*

- b) *Le foncteur $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$ est une équivalence de catégories sur son image.*
c) *$\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)$ est un **FI**-module de type fini si et seulement si, $\dim_k W < \infty$.*
d) ([9], prop. 3.2.4) *Pour tout \mathcal{S}_a -module W , on a*

$$\mathcal{P}_{\infty}(\mathcal{M}_a(W)) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_a(W)) = a.$$

e) (²⁷) *Pour tout \mathcal{S}_a -module W , le **FI**-module $\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)$ est monotone et stationnaire. On a*

$$\text{rang}_{\mu}(\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)) \leq a \quad \text{et} \quad \text{rang}_{\sigma}(\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W)) \leq 2a.$$

En particulier, si $\dim_k W < +\infty$, la famille de caractères $\chi(\mathcal{M}_a^{\mathbf{H}}(W))$ est polynomiale à partir de $2a$.

²⁷ Hemmer [21] thm. 2.4, Chruch [7] thm. 2.8.

8.4.8. Commentaires et justification de 8.3.4. Les assertions (a,b,c) sont presque immédiates. La première partie de l’assertion (e), conjecturée par Church et Farb et démontrée à leur demande par Hemmer, est fondamentale dans l’équivalence entre **FI**-modules de type fini et **FI**-modules stationnaires de dimensions finies. La deuxième partie de (e) résulte d’appliquer le calcul de Macdonald 8.3.8. Toujours dans (e), dans le cas où W est le \mathcal{S}_a module simple V_λ , avec $\lambda \vdash a$, on a mieux, on a $\text{rang}_\sigma(\mathcal{M}_a(V_\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1$.

Le théorème 8.3.4 est ensuite un corollaire rapide de 8.4.7-(c). En effet, un **FI**-module de type fini est quotient d’une somme finie $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{M}(\mathbf{a}_i)$, chaque $\mathcal{M}(\mathbf{a}_i)$ étant stationnaire de dimensions finies, les quotients de \mathcal{V} sont forcément stationnaires de dimensions finies, donc à caractères éventuellement polynomiaux.

Un **FI**-module de type fini est donc toujours stationnaire, et la réciproque, que nous n’allons pas utiliser, est également vraie.

Le théorème suivant qui résume les dernières remarques est central dans la théorie des **FI**-modules.

8.4.9. Théorème ([9] 1.13, Finitude et stabilité). *Un **FI**-module est de type fini si et seulement si, il est stationnaire et de dimensions finies.*

*Plus précisément, pour chaque **FI**-module de type fini \mathcal{V} , il existe une famille de décompositions $\{\lambda_1 \vdash a_1, \dots, \lambda_r \vdash a_r\}$ telle que pour $m \gg 0$, on a*

$$V_m \simeq c(\lambda_1)V(\lambda_1)_m \oplus \dots \oplus c(\lambda_r)V(\lambda_r)_m,$$

où les multiplicités $c(\lambda_i)$ sont indépendantes de m .

La famille des caractères $\chi(\mathcal{V})$ est éventuellement polynomiale de même (donc) que la famille des dimensions $\dim_k(\mathcal{V})$ (cf. 8.3.3).

8.4.10. Rang de stabilité des produits tensoriels d’un espace gradué

On se donne un k -espace vectoriel positivement gradué

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^i \in \text{Vec}^{\mathbb{N}}(k) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}^0 = k.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on munit $\mathcal{A}^{\otimes m} := \underbrace{\mathcal{A} \otimes_k \dots \otimes_k \mathcal{A}}_m$ de l’action de $\alpha \in \mathcal{S}_m$

$$\alpha \cdot (a_1 \otimes \dots \otimes a_m) := a_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\alpha^{-1}(m)}.$$

L’application $\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes m+1}$, $\omega \mapsto \omega \otimes \mathbf{1}_k$, où $\mathbf{1}_k \in \mathcal{A}^0$, est un morphisme de \mathcal{S}_m -modules positivement gradués, et $\mathcal{A}^\otimes := \{\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes m+1}\}_m$ est clairement un **FI**-module, qui n’est généralement pas de type fini. En effet, $\dim_k \mathcal{A}^{\otimes m} = (\dim_k \mathcal{A})^m$ n’est pas polynomiale en m (cf. 8.3.3) si $\dim_k \mathcal{A} > 1$.

Fixons maintenant $i \in \mathbb{N}$ et restreignons les applications ϕ_m aux composantes homogènes de degré i . La famille

$$(\mathcal{A}^\otimes)^i := \{\phi_m : (\mathcal{A}^{\otimes m})^i \rightarrow (\mathcal{A}^{\otimes m+1})^i\}$$

est un sous-**FI**-module de \mathcal{A}^\otimes .

8.4.11. Proposition. Soit \mathcal{A} un k -espace vectoriel positivement gradué avec $\mathcal{A}^0 = k$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{rang}_\mu((\mathcal{A}^\otimes)^i) \leq i \quad \text{et} \quad \text{rang}_\sigma((\mathcal{A}^\otimes)^i) \leq 2i.$$

Démonstration. On remarque que pour tout $m \geq i$, on a un isomorphisme

$$(\mathcal{A}^{\otimes m})^i = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_m(i+m)} \text{ind}_{(\mathcal{S}_{\mu_1}^{\mathcal{S}_m} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_r}^{\mathcal{S}_m}) \times \mathcal{S}_{m-i}}^{\mathcal{S}_m} (\mathcal{A}^{\otimes i})^i \boxtimes \underbrace{k \otimes \dots \otimes k}_{m-i}$$

où l'on a noté $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r}, 1^{m-i})$, avec $d_i > d_{i+1} > 1$. Le théorème de Hemmer-Church (cf. 8.4.7-(e)) s'applique et nous dit que chaque suite $\{\text{ind}_{(\mathcal{S}_{\mu_1}^{\mathcal{S}_m} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_r}^{\mathcal{S}_m}) \times \mathcal{S}_{m-i}}^{\mathcal{S}_m} (\mathcal{A}^{\otimes i})^i \boxtimes k\}_m$ est monotone pour $m \geq i$ et stable pour $m \geq 2i$. \square

8.5. Stabilité des familles de représentations. L'article [9] s'intéresse également à la sous-catégorie pleine $\mathbf{FB} \subseteq \mathbf{FI}$ des ensembles finis et leurs bijections. Un $k[\mathbf{FB}]$ -module est alors, par définition, un foncteur covariant $\mathcal{R} : \mathbf{FB} \rightarrow \text{Vec}(k)$, ce qui équivaut à la donnée d'une famille de représentations de groupes finis $\mathcal{R} := \{\rho_m : \mathcal{S}_m \mapsto \text{Gl}_k(W_m)\}_m$. On a

$$\text{Mod}(k[\mathbf{FB}]) = \prod_{m \in \mathbb{N}} \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m]).$$

Dans $\text{Mod}(k[\mathbf{FB}])$, la notion de \mathbf{FB} -module de type fini est inintéressante car équivalente à la donnée d'une famille de représentations de dimensions finies $\{W_m\}_m$, avec $W_m = 0$ pour presque tout m . Par contre, la notion de « stabilité des multiplicités des représentations $V(\lambda)_m$ » (8.4-(c)) garde tout son intérêt.

Définition. On dira que un \mathbf{FB} -module est « (uniformément) stationnaire » lorsque la condition 8.4-(c) est satisfaite pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

Le lemme suivant donne une forme d'équivalence entre \mathbf{FB} et \mathbf{FI} -modules stationnaires.

8.5.1. Lemme (le \mathbf{FI} -module $\mathcal{V}(\lambda)$, [9] prop. 3.4.1)

a) Pour tout $0 < a \in \mathbb{N}$ et toute décomposition $\lambda \vdash a$, il existe un \mathbf{FI} -module canonique $\mathcal{V}(\lambda)$ vérifiant

$$\mathcal{V}(\lambda)_m := \begin{cases} 0, & \text{si } m < |\lambda| + \lambda_1, \\ V(\lambda)_m, & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) On a

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\infty(\mathcal{V}(\lambda)) = \mathcal{P}(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| \\ \text{rang}_\mu(\mathcal{V}(\lambda)) = \text{rang}_\sigma(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1. \end{cases}$$

Pour tout $m \geq \text{rang}_\sigma(\mathcal{V}(\lambda))$, la multiplicité de $V(\lambda')_m$ dans $\mathcal{V}(\lambda)_m$ vaut $c(\lambda')_m = \delta_{\lambda, \lambda'}$.

ii) Le \mathbf{FI} -module $\mathcal{V}(\lambda)$ est de type fini et, pour tout $a \geq |\lambda| + \lambda_1$, le morphisme naturel $\mathcal{M}_a(\mathcal{V}(\lambda)_a) \rightarrow \mathcal{V}(\lambda)_{\geq a}$ est surjectif.

- b) Un **FB**-module $\mathcal{W} = \{W_m\}_m$ est stable pour $m \geq N$, si et seulement si, il existe un **FI**-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ stable pour $m \geq N$, tel que $W_m = V_m$ pour tout $m \geq N$.

Démonstration. (a) Pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$ numérotions le diagramme de Young de $\lambda[m]$ de haut en bas et de gauche à droite comme dans le tableau :

$$\tau_\lambda(m) := \begin{array}{ccccccc} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{8} & \boxed{10} & \cdots & \cdots & \boxed{m} \\ \boxed{2} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{11} & & & \\ \boxed{3} & \boxed{7} & & & & & \\ \boxed{4} & & & & & & \end{array}$$

Notons (comme [16] §4.1) $P_\lambda(m)$ (resp. $Q_\lambda(m)$) le sous-groupe de \mathcal{S}_m qui laisse stables les lignes (resp. colonnes) de $\tau_\lambda(m)$ et soient, dans $k[\mathcal{S}_m]$,

$$\mathbf{a}_\lambda(m) := \sum_{\alpha \in P_\lambda(m)} \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_\lambda(m) := \sum_{\alpha \in Q_\lambda(m)} \text{sgn}(\alpha) \alpha.$$

Le « symétriseur de Young » associé à $\tau_\lambda(m)$ est l'élément de $k[\mathcal{S}_m]$

$$\mathbf{c}_\lambda(m) := \mathbf{a}_\lambda(m) \cdot \mathbf{b}_\lambda(m),$$

et le sous- \mathcal{S}_m -module à gauche $k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) \subseteq k[\mathcal{S}_m]$ est isomorphe à la représentation irréductible $V(\lambda)_m$. On a aussi

$$k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) = k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda(m) \cdot \mathbf{a}_\lambda(m).$$

Soient maintenant $|\lambda| + \lambda_1 \leq m \leq n$. D'après le choix du schéma de numérotations des tableaux, il est clair que par le plongement $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$ on a

$$\mathbf{b}_\lambda(m) = \mathbf{b}_\lambda(n), \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\lambda(m) \cdot \mathbf{a}_\lambda(n) = (m - |\lambda|)! \lambda! \mathbf{a}_\lambda(n).$$

La multiplication à droite par $\mathbf{a}_\lambda(n)$ définit donc un morphisme de \mathcal{S}_m -modules à gauche injectif :

$$\phi_{n,m} : k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda(m) \cdot \mathbf{a}_\lambda(m) \xrightarrow{(-) \cdot \mathbf{a}_\lambda(n)} k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda(n) \cdot \mathbf{a}_\lambda(n). \quad (\diamond)$$

On remarque alors que toute permutation $\alpha \in \mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ fixe l'image de $\phi_{n,m}$ puisque, d'une part, α commute à $k[\mathcal{S}_m]$ donc à $k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda(n)$ et, d'autre part, on a $\alpha \cdot \mathbf{a}_\lambda(n) = \mathbf{a}_\lambda(n)$ parce que $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ est contenu dans le sous-groupe de \mathcal{S}_n qui fixe la première ligne du tableau $\tau_\lambda(n)$.

Si nous notons maintenant $\phi_m = \phi_{m+1,m}$, l'injection $\phi_{n,m}$ est multiple de la composée $\phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_m$ et la famille $\mathcal{V}(\lambda)$ dont les termes V_m sont nuls pour $m < |\lambda| + \lambda_1$ et qui coïncide avec

$$\{\phi_m : k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) \rightarrow k[\mathcal{S}_{m+1}] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m+1)\}_m$$

pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$ est bien un **FI**-module. D'où la première partie de (a).

L'assertion (a-i) est claire par construction. Pour (a-ii), on induit à partir de (\diamond) le morphisme $f_m := \text{ind}(\phi_{m,a}) : \text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_{m-a}}^{\mathcal{S}_m} V(\lambda)_a \boxtimes k_{m-a} \rightarrow V(\lambda)_m$ qui est bien défini et surjectif puisque non nul et que $V(\lambda)_m$ est irréductible. La commutativité des diagrammes pour $|\lambda| + \lambda_1 \leq a \leq m \leq n$

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_{m-a}}^{\mathcal{S}_m} V(\lambda)_a \boxtimes k_{m-a} & \longrightarrow & \text{ind}_{\mathcal{S}_a \times \mathcal{S}_{n-a}}^{\mathcal{S}_n} V(\lambda)_a \boxtimes k_{n-a} \\ f_m \downarrow & & \downarrow f_n \\ V(\lambda)_m & \xrightarrow{\phi_{o,n}} & V(\lambda)_n \end{array}$$

montre que $f : \mathcal{M}_a(V(\lambda)_a) \rightarrow \mathcal{V}(\lambda)$ est bien un morphisme de **FI**-modules avec f_m surjectif pour tout $m \geq a$. Ce qui termine avec la preuve de (a). L'assertion (b) en découle aussitôt. \square

8.6. Détermination du rang d'un **FI**-module

8.6.1. Rang d'un **FI-module.** Dans la suite nous nous intéresserons davantage à la conjonction des propriétés de monotonie et stabilité. Aussi, nous définissons le « rang (de monotonie et stabilité) d'un **FI**-module \mathcal{V} » par

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) := \sup \{ \text{rang}_{\mu}(\mathcal{V}), \text{rang}_{\sigma}(\mathcal{V}) \}.$$

Dans la suite, le mot « stabilité » sera un raccourci abusif de « monotonie et stabilité », le contexte permettant de lever l'ambiguïté.

8.6.2. Notations. On identifie le groupe \mathcal{S}_L des permutations d'une partie $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, au sous-groupe de \mathcal{S}_m qui fixe les $i \notin L$. On note alors $L' := L \sqcup \{m+1\} \subseteq \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ et l'on définit le sous-groupe $\mathcal{S}_{L'} \subseteq \mathcal{S}_{m+1}$ de la même manière.

On rappelle aussi une autre notation de [9] : si W est un \mathcal{S}_m -module, on note pour $0 \leq a \leq m$

$$(W)_{\mathcal{S}_a} := (W)^{\mathbb{I}_{n-a} \times \mathcal{S}_a}.$$

8.6.3. Proposition. Soit $\mathcal{W} : \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}$ un **FI**-module de poids $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{W})$ fini. Pour $s \geq \mathcal{P}$ donné, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) Pour tout $m \geq s$ et tout $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $m - |L| \leq \mathcal{P}$, les morphismes

$$\phi_m : (W_m)^{\mathcal{S}_L} \rightarrow (W_{m+1})^{\mathcal{S}_{L'}}$$

sont des isomorphismes de $\mathcal{S}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L}$ -modules.

b) Si $m \geq s \geq \mathcal{P} \geq t \geq 0$, les morphismes de transition

$$\phi_m : (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} \rightarrow (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

sont des isomorphismes de \mathcal{S}_t -modules.

c) $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}) \leq s$.

Démonstration. L'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) est élémentaire. La preuve de (b) \Leftrightarrow (c) utilisera le lemme 3.2.7 de [9]. Ce lemme (pour $\text{car}(k) = 0$) affirme que pour toute décomposition $\mu[m] \vdash m$, on a :

$$\begin{cases} \text{i) } t < |\mu| \iff (V(\mu)_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} = 0 \\ \text{ii) } t = |\mu| \implies (V(\mu)_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} = V_{\mu} \end{cases} \quad (*)$$

(b) \Rightarrow (c). Notons $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{W})$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on a une décomposition

$$W_m = \sum_{|\mu| \leq \mathcal{P}} c(\mu)_m V(\mu)_m,$$

et par l'hypothèse (b), si $m \geq s$ et si $t \leq \mathcal{P}$, le morphisme de \mathcal{S}_t -modules

$$\left(\sum_{|\mu| \leq \mathcal{P}} c(\mu)_m V(\mu)_m \right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{\phi_{t,m}} \left(\sum_{|\mu| \leq \mathcal{P}} c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1} \right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

est bijectif. Les propriétés (*)-(i,ii) pour $t = 0$, donnent aussitôt

$$c(0)_m = c(0)_{m+1}, \quad \forall m \geq s.$$

Il existe alors une surjection de **FI**-modules (cf. 8.5.1)

$$\pi_0 : \mathcal{W}_{\geq s} \twoheadrightarrow c(0)_s \mathcal{V}(0)_{\geq s}$$

dont le noyau est le **FI**-module $\mathcal{W}_{\geq s}^{(1)} := \ker(\pi_0)_{\geq s}$ ne contient aucun facteur de la forme $V(0)_m$. On a $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}(0)_{\geq s}) = s$ (8.5.1-(a-i)) et l'assertion (c) résultera de prouver que $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}_{\geq s}^{(1)}) = s$, ce pour quoi, on répète la même idée avec $\mathcal{W}_{\geq s}^{(1)}$, mais en prenant maintenant $t = 1$.

Plus précisément, si nous pouvons affirmer que pour $1 \leq t \leq \mathcal{P}$ donné, les sous- \mathcal{S}_m -modules

$$W_m^{(t)} := \sum_{t \leq |\mu| \leq \mathcal{P}} c(\mu)_m V(\mu)_m \subseteq W_m,$$

constituent un sous-**FI**-module $\mathcal{W}_{\geq s}^{(t)} \subseteq \mathcal{W}_{\geq s}$, les propriétés (*)-(i,ii) donnent des isomorphismes de \mathcal{S}_t -modules

$$\sum_{|\mu|=t} c(\mu)_m V_\mu \xrightarrow{\phi_m} \sum_{|\mu|=t} c(\mu)_{m+1} V_\mu, \quad \forall m \geq s,$$

d'où

$$c(\mu)_m = c(\mu)_{m+1}, \quad \forall m \geq s \quad \forall |\mu| = t.$$

On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s V(\mu)_m & \xhookrightarrow{\iota} & \sum_{|\mu| \geq t} c(\mu)_s V(\mu)_m & \xrightarrow{\phi_m} & \sum_{|\mu| \geq t} c(\mu)_s V(\mu)_{m+1} \\ & \swarrow \text{id} & \pi_{t,m} \downarrow & \text{(I)} & \downarrow \pi_{t,m+1} \\ & & \sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s V(\mu)_m & \xrightarrow{\tilde{\phi}_m} & \sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s V(\mu)_{m+1} \end{array}$$

où $\pi_{t,*}$ est la projection canonique et où le morphisme $\tilde{\phi}_m := \pi_{t,m+1} \circ \phi_m \circ \iota$ rend le sous-diagramme (I) commutatif. On remarquera que l'existence du morphisme $\tilde{\phi}_m$ dépend de ce que les composantes irréductibles des sous-modules $\mathcal{S}_{m+1} \cdot V(\mu')_m \subseteq W_{m+1}$, pour $|\mu'| > t$, soient de poids minorés par $|\mu'|$. Cela est une conséquence des règles de branchement pour les représentations des groupes symétriques qui dit que lors des inductions de \mathcal{S}_m à \mathcal{S}_{m+1} les poids ne baissent pas ([9] lemme 3.2.3).

La famille $\{\tilde{\phi}_m\}_{m \geq s}$ est la famille des morphismes de transition du **FI**-module $\widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t)}$, et, par hypothèse, elle est telle que les morphismes induits

$$\left(\sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s V(\mu)_m \right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{\tilde{\phi}_{t,m}} \left(\sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s V(\mu)_{m+1} \right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t)} \simeq \sum_{|\mu|=t} c(\mu)_s \mathcal{V}(\mu)_{\geq s},$$

et, comme d'autre part $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}) = s$ d'après 8.5.1-(a-i), le fait que

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t)}) = s. \quad (\diamond)$$

Cela étant précisé, les projections $\pi_{t,m}$ définissent la surjection de **FI**-modules $\pi_t : \mathcal{W}_{\geq s}^{(t)} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t)}$, dont on note $\mathcal{W}_{\geq s}^{(t+1)} := \ker(\pi_t)$. On obtient ainsi la suite exacte courte de **FI**-modules

$$0 \rightarrow \mathcal{W}_{\geq s}^{(t+1)} \longrightarrow \mathcal{W}_{\geq s}^{(t)} \xrightarrow{\pi_t} \widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t)} \rightarrow 0,$$

et, compte tenu de l'égalité (\diamond) , on conclut à l'équivalence

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}_{\geq s}^{(t)}) = s \Leftrightarrow \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}_{\geq s}^{(t+1)}) = s.$$

Or, dans $\mathcal{W}_{\geq s}^{(t+1)}$ il n'y a plus de composante de la forme $V(\mu)$ pour $|\mu| \leq t$.

Ces idées s'itèrent puisque $\mathcal{W}_{\geq s}^{(t+1)}$ est un **FI**-module et nous conduisent, après \mathcal{P} étapes, à conclure que le **FI**-module $\mathcal{W}_{\geq s}$ est monotone et stable pour $m \geq s$ et donc que $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}) \leq s$.

(c) \Rightarrow (b) La preuve suit une démarche analogue. Pour $s \geq \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W})$, on a bien $s \geq \mathcal{P}$ et pour tout $m \geq s$

$$W_m = \sum_{|\mu| \leq \mathcal{P}} c(\mu) V(\mu)_m$$

où les multiplicités $c(\lambda)$ sont indépendantes de m .

Nous devons montrer que pour chaque $t \leq \mathcal{P}$, le morphisme

$$\left(\sum_{|\mu| \leq t} c(\mu) V(\mu)_m \right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{\phi_{t,m}} \left(\sum_{|\mu| \leq t} c(\mu) V(\mu)_{m+1} \right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}} \quad (*)$$

est un isomorphisme.

Soit $t_0 := \inf\{|\mu| \mid c(\mu) \neq 0\}$ et procédons comme dans la preuve de (b) \Rightarrow (c). Notons $\widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t_0)}$ le **FI**-module quotient défini par les surjections de \mathcal{S}_m -modules $W_m \twoheadrightarrow \sum_{|\mu|=t_0} c(\mu) V(\mu)_m$, pour $m \geq s$, et soit

$$\pi_{t_0} : \mathcal{W}_{\geq s} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_{\geq s}^{(t_0)}$$

la surjection de **FI**-modules correspondante.

Pour tout $t < t_0$ le morphisme $\tilde{\phi}_{t,m}$ est l'identité entre les modules nuls et pour $t = t_0$, on a un morphisme de \mathcal{S}_{t_0} -modules

$$\sum_{|\mu|=t_0} c(\mu) V_\mu \xrightarrow{\tilde{\phi}_{t_0,m}} \sum_{|\mu|=t_0} c(\mu) V_\mu$$

qui est surjectif puisque m est dans le rang de monotonie de \mathcal{W} . Comme les multiplicités des facteurs simples coïncident, le morphisme $\tilde{\phi}_{t_0,m}$ est bien un

isomorphisme. Le **FI**-module $\mathcal{W}_{\geq s}^{(t_0)}$ vérifie donc les hypothèses de (b), et on a $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}_{\geq s}^{(t_0)}) = s$. On peut alors appliquer 8.4.3 pour conclure que le **FI**-module $\mathcal{K} := \ker(\pi_{t_0})$ est aussi de rang s . Or, comme \mathcal{K} possède moins de facteurs irréductibles, on peut supposer par récurrence que les analogues des morphismes (*) pour \mathcal{K} sont des isomorphismes, ce qui permet aisément de conclure. \square

8.6.4. L'implication 8.6.3-(c) \Rightarrow (a) donne une condition sur m garantissant aux morphismes de transition

$$\phi_m : (W_m)^{S_L} \rightarrow (W_{m+1})^{S_{L'}}$$

d'être bijectifs pour tout $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \geq m - |L|$. Dans la preuve du théorème 8.7.5-(c), nous aurons besoin d'une condition sur m mais pour des valeurs de $m - |L|$ arbitrairement grands. La proposition suivante traite de cette situation.

8.6.5. Proposition. *Soit $\mathcal{W} : \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}$ un **FI**-module de rang de monotonie et stabilité $s := \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{W}) < +\infty$. On fixe $t \in \mathbb{N}$, et l'on considère la famille de morphismes pour $m \geq t$,*

$$\phi_{t,m} : (W_m)_{S_{m-t}} \rightarrow (W_{m+1})_{S_{m+1-t}}$$

- a) Si $t \leq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, le morphisme $\phi_{t,m}$ est bijectif pour $m \geq s$.
- b) Si $t > \mathcal{P}_\infty(\mathcal{W})$, le morphisme $\phi_{t,m}$ est bijectif pour $m \geq \sup(t, s)$.

Démonstration. (a) C'est 8.6.3-(b). (b) C'est l'assertion (c) du lemme 3.2.7 de [9] qui établit l'existence d'isomorphismes naturels

$$(V(\mu)_m)_{S_{m-t}} \simeq \text{ind}_{S_{|\mu|} \times S_{t-|\mu|}}^{S_t} V_\mu \boxtimes k,$$

pour tout $t \geq |\mu|$ et tout $m \geq t + \mu_1$. \square

8.7. Foncteurs d'induction dans $\text{Mod}(\mathbf{k}[\mathbf{FI}])$

Nous introduisons certains foncteurs d'« induction » dans les catégories de **FI**-modules qui prolongement naturellement les foncteurs $\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{S_{|\lambda|}}$ et \mathbf{I}_m^{m+a} de (6.3) et l'opérateur Θ_m^{m+a} de (6.5).

8.7.1. Lemme et définition. *Étant donné $\lambda = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m}) \vdash m$, on définit pour $n \geq m$, la partition $\lambda \setminus n \vdash n$ en rajoutant $(n - m)$ singletons à λ , soit*

$$\lambda \setminus n = (1^{\mu_1+n-m}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m}) \vdash n.$$

Pour tous $a \in \mathbb{N}$ et $m \leq n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{m-a}(m) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{n-a}(n) \\ \lambda \vdash m & \longrightarrow & \lambda \setminus n \\ m-a \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} & \longmapsto & m-a \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}_{n-a} \end{array}$$

est bijective dès que $m \geq 2a$. Dans ce cas, on a

$$|\mathcal{Y}_a(2a)| = |\mathcal{Y}_{m-a}(m)|.$$

Démonstration. En effet, les décompositions de $\lambda \vdash m$ vérifient l'inégalité

$$m = \mu_1 + 2\mu_2 + \dots, m\mu_m \geq \mu_1 + 2(\mu_2 + \dots + \mu_m) = \mu_1 + 2(m - a - \mu_1),$$

dont on déduit que $\mu_1 \geq m - 2a$. Il en résulte que si $m \geq 2a$ toute décomposition $\lambda \vdash m$ comporte au moins $m - 2a$ singletons, le fait de les enlever ou de les rajouter établit une bijection entre $\mathcal{Y}_{m-a}(m)$ et $\mathcal{Y}_a(2a)$. \square

8.7.2. Remarques et notations

a) Dans la notation ' $\lambda \setminus n$ ', le nombre ' n ', qui vérifie $n \geq |\lambda|$, indique la taille finale du diagramme. On a (comparer à 8.3.7-(b)) :

$$\ell(\lambda \setminus n) = \ell(\lambda) + (n - |\lambda|),$$

et si $n \leq n'$

$$(\lambda \setminus n) \setminus n' = \lambda \setminus n'.$$

b) Étant donné $\lambda = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots) \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$, on pose

$$\underline{\ell} := \ell - \mu_1 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = (1^0, 2^{\mu_2}, \dots) \in \mathcal{Y}_{\underline{\ell}}(\underline{\ell} + a).$$

Les données suivantes sont associées au diagramme $\lambda \setminus m$:

$$(\lambda \setminus m) \left\{ \begin{array}{l} (\lambda) \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}_\ell \\ \left. \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}_{\mu_1} \\ \left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}_{m - |\lambda|} \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\underline{\lambda}) \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}_{\underline{\ell} := \ell - \mu_1} \\ |\lambda| = \ell + a \\ |\underline{\lambda}| = |\lambda| - \mu_1 \leq 2a \\ \#\{\square\} = a \end{array}$$

On a, en particulier : $\lambda \setminus m = \underline{\lambda} \setminus m, \forall m \geq |\lambda|$, ce qui nous conduit à étendre la portée des notations en posant

$$\lambda \setminus m := \underline{\lambda} \setminus m, \quad \forall m \geq |\underline{\lambda}| = |\lambda| - \mu_1.$$

8.7.3. Le foncteur \mathbf{Ind}_λ

On introduit, pour $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ donné, le foncteur

$$\boxed{\mathbf{Ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]_{\geq |\lambda|})} \quad (\mathbf{Ind}_\lambda)$$

qui fait correspondre à un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} , le \mathcal{S}_m -module

$$W_m := \begin{cases} 0, & \text{si } m < |\lambda|, \\ \mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a}, & \text{si } m \geq |\lambda|. \end{cases}$$

Le théorème 8.7.5 établira le fait que ce foncteur est exact et qu'il respecte la finitude des \mathbf{FI} -modules. Il décrira aussi la façon dont il perturbe le rang de monotonie et stabilité, mais auparavant il nous faut le définir plus précisément.

8.7.4. Proposition. *Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et soient $0 \leq |\lambda| \leq m \leq n$.*

a) *L'inclusion $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$ induit des inclusions (voir 6.1, 6.1.1)*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\lambda \setminus m} \subseteq \mathcal{P}_{\lambda \setminus n}, \\ \mathcal{S}_{\lambda \setminus m} \subseteq \mathcal{S}_{\lambda \setminus n}, \\ G_{\lambda \setminus m} \subseteq G_{\lambda \setminus n}, \end{cases}$$

b) *Une application k -linéaire $\phi : V_{m-a} \rightarrow V_{n-a}$ d'un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} vers un \mathcal{S}_{n-a} -module V_{n-a} , compatible à l'action de \mathcal{S}_{m-a} et telle que $\text{im}(\phi) \subseteq V_{n-a}^{\mathbb{I}_{m-a} \times \mathcal{S}_{n-m}}$, admet un unique prolongement en une application k -linéaire*

$$\mathbf{Ind}_\lambda(\phi) : \mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \rightarrow \mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}$$

compatible à l'action de \mathcal{S}_m . De plus,

$$\text{im}(\mathbf{Ind}_\lambda(\phi)) \subseteq (\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a})^{\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}}.$$

c) *Dans (b), si l'on suppose en plus que $k[\mathcal{S}_{n-a}] \cdot \text{im}(\phi) = V_{n-a}$, on a*

$$k[\mathcal{S}_n] \cdot \text{im}(\mathbf{Ind}_\lambda \phi) = \mathbf{Ind}_\lambda V_{n-a}.$$

Démonstration. (a) Résulte de remarquer que $\mathcal{P}_{\lambda \setminus m} = \mathcal{P}_\lambda \times \mathbb{I}_{m-|\lambda|}$, ce qui implique que si μ_1 est le nombre des $\lambda_i = 1$, on a $G_\lambda = \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_2} \times \mathcal{S}_{\mu_1}$ alors

$$G_{\lambda \setminus m} = \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_2} \times \mathcal{S}_{\mu_1 + m - |\lambda|}.$$

(b) Compte tenu de (a), le prolongement $\mathbf{Ind}_\lambda(\phi)$ annoncé est bien défini et est unique. L'image de $\mathbf{Ind}_\lambda \phi$ est alors le sous- \mathcal{S}_m -module de $\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}$ engendré par $\text{im}(\phi)$, et le fait que $\text{im}(\mathbf{Ind}_\lambda \phi)$ est invariant sous l'action du groupe $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ résulte de ce que ce groupe commute à l'action de $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$, qu'il est contenu dans $\mathcal{S}_{\lambda \setminus n}$, et que, par la surjection $\mathcal{S}_{\lambda \setminus n} \twoheadrightarrow G_{\lambda \setminus n}$, il est en bijection avec $\mathbb{I}_{m-a} \times \mathcal{S}_{n-m}$ qui, lui, fixe $\text{im}(\phi)$ par hypothèse.

(c) Clair. □

8.7.5. Théorème. Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$.

- a) Le foncteur $\mathbf{Ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ est covariant, additif, exact.
b) Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le \mathbf{FI} -module $\mathbf{Ind}_\lambda(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d + a, |\lambda|)$.
c) Soient $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) < +\infty$ et $\underline{\ell} := \ell(\lambda)$. On a

$$\boxed{\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), \underline{\ell}) + |\lambda| + a,} \quad (*)$$

et plus grossièrement, $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) + 2|\lambda|$.

Démonstration. (a) Clair. (b) Un \mathbf{FI} -module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ est engendré en degrés $\leq d$, si et seulement si, $k[\mathcal{S}_{m+1}] \cdot \text{im}(\phi_m) = V_{m+1}$, pour tout $m \geq d$. L'assertion 8.7.4-(c) montre alors que $\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}$ est bien engendré en degrés $\leq d + a$. La deuxième partie de (b) résulte de même, puisque \mathcal{V} est de type fini, si et seulement si, il est engendré en degrés $\leq d$ (pour d assez grand), et $\dim_k V_m < +\infty$ pour tout $m \leq d$.

(c) Soit $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$. Supposons $\mathcal{V} \neq 0$ et $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) < +\infty$ et notons pour simplifier

$$\underline{s} := \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}).$$

On a

$$\mathcal{V}_{\geq \underline{s}} = \sum_i \mathcal{V}(\mu_i)_{\geq \underline{s}} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\infty(\mathcal{V}) = \sup\{|\mu_i|\} \leq \underline{s}.$$

pour une certaine famille finie $\{\mu_i \vdash a_i \leq \underline{s}\}$.

- Cas $\underline{\ell} \leq \underline{s}$.— Le degré de troncature $\underline{\ell}$ de \mathbf{Ind}_λ étant inférieur à \underline{s} , on a

$$\mathcal{P}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}_{\geq \underline{s}}) \leq \underline{s} + a. \quad (1)$$

En effet, le poids du \mathcal{S}_{s+a} -module $\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus (\underline{s}+a)}}^{\mathcal{S}_{s+a}} V_{\underline{s}}$ est à priori majoré par $\underline{s} + a$ (cf. 8.4.5) ⁽²⁸⁾, ce qui implique (8.4.7-(d)) que l'on a

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\underline{s}+a}(\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus (\underline{s}+a)}}^{\mathcal{S}_{s+a}} V_{\underline{s}})) \leq \underline{s} + a.$$

La majoration (1) en découle puisqu'il existe une surjection (8.5.1-(a-ii))

$$\mathcal{M}_{\underline{s}+a}(\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus (\underline{s}+a)}}^{\mathcal{S}_{s+a}} V_{\underline{s}}) \twoheadrightarrow \mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}_{\geq \underline{s}},$$

et que le poids d'un \mathbf{FI} -module majore celui de ses quotients.

Compte tenu de (1), on va chercher des majorants pour $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}_{\geq \underline{s}})$ à l'aide du critère de stabilité (8.6.3-(a)). Ceci nous emmène à examiner

²⁸ En fait, 8.4.5 majore plus précisément par $\underline{s} + a - \lceil (\underline{s} + a)/\underline{s} \rceil$, de sorte que si nous notons $\underline{t} := \sup(\underline{s}, \underline{\ell})$, le terme de droite de 8.7.5-(c)-(*) doit être corrigé de $-\lceil (\underline{t} + a)/\underline{t} \rceil$.

l'ensemble des $m + a \geq \underline{s} + a$ tels que pour tout $L \subseteq \llbracket 1, m+a \rrbracket$ vérifiant

$$\boxed{|L| \geq m - \underline{s}} \quad (2)$$

le morphisme :

$$\left(\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus (m+a)}}^{\mathcal{S}_{m+a}} V_m \right)^{\mathcal{S}_L} \rightarrow \left(\mathbf{Ind}_{G_{\lambda \setminus (m+1+a)}}^{\mathcal{S}_{m+1+a}} V_{m+1} \right)^{\mathcal{S}_{L'}} ,$$

induit par $\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}$, ou ce qui revient au même (29), le morphisme $\Phi_m : \text{Hom}_{G_{\lambda \setminus (m+a)}}(k[\mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L], V_m) \rightarrow \text{Hom}_{G_{\lambda \setminus (m+1+a)}}(k[\mathcal{S}_{m+1+a}/\mathcal{S}_{L'}], V_{m+1})$, induit aussi par ϕ_m , est un morphisme *bijectif*.

Notons $A := \llbracket |\lambda| + 1, m+a \rrbracket \subseteq \llbracket 1, m+a \rrbracket$. On a $|A| = m + a - |\lambda|$ et

$$G_{\lambda \setminus (m+a)} = G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_A \quad \text{et} \quad G_{\lambda \setminus (m+1+a)} = G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{A'}$$

et l'étude de Φ_m se ramène à l'étude du morphisme de $G_{\underline{\lambda}}$ -modules

$$\Psi_m : \text{Hom}_{\mathcal{S}_A}(k[\mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L], V_m) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}_{A'}}(k[\mathcal{S}_{m+1+a}/\mathcal{S}_{L'}], V_{m+1}) . \quad (3)$$

Plus précisément, Φ_m s'identifie à la restriction de Ψ_m aux $G_{\underline{\lambda}}$ -invariants. Aussi, Φ_m est bijectif lorsque Ψ_m l'est (30), et c'est bien cette dernière propriété que nous allons étudier dans la suite.

Le \mathcal{S}_A -module à gauche $k[\mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L]$ se décompose en somme directe

$$k[\mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L] = \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L)} k[\mathcal{S}_A/\mathcal{S}_{A \cap \alpha L}] ,$$

ce qui permet l'identification

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}_A}(k[\mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L], V_m) = \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L)} (V_m)^{\mathcal{S}_{A \cap \alpha L}} .$$

Le morphisme (3) se voit alors comme le morphisme

$$\Psi_m : \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}_{m+a}/\mathcal{S}_L)} (V_m)^{\mathcal{S}_{A \cap \alpha L}} \longrightarrow \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_{A'} \setminus \mathcal{S}_{m+1+a}/\mathcal{S}_{L'})} (V_{m+1})^{\mathcal{S}_{A' \cap \alpha L'}}$$

induit par l'action de ϕ_m coordonnée par coordonnée.

²⁹ On rappelle que si K et H sont des sous-groupes d'un groupe fini G , et si $W \in \text{Mod}(K)$ et $V \in \text{Mod}(V)$, on dispose des morphismes naturels par rapport à W et à V

$$\text{Hom}_K(W, \text{ind}_H^G V) \rightarrow \text{Hom}_G(\text{ind}_K^G W, \text{ind}_H^G V) \rightarrow \text{Hom}_H(\text{ind}_K^G W, V) .$$

Ces morphismes sont bijectifs lorsque $\text{car}(k) = 0$.

³⁰ La réciproque n'est a priori pas vraie, et nos estimations pour Ψ_m ne seront pas optimales pour Φ_m , notamment l'estimation de la proposition (\diamond) plus bas.

Proposition (\diamond). *Le morphisme Ψ_m est un isomorphisme lorsque*

$$\boxed{|L| \geq m - \underline{s} \geq |\underline{\lambda}|}$$

Elle résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 1. Soit $L \subseteq \llbracket 1, m+a \rrbracket$. L'application entre espaces de doubles classes

$$\mathcal{S}_A \backslash \mathcal{S}_{m+a} / \mathcal{S}_L \longrightarrow \mathcal{S}_{A'} \backslash \mathcal{S}_{m+1+a} / \mathcal{S}_{L'}$$

induite par l'inclusion $\mathcal{S}_{m+a} \subseteq \mathcal{S}_{m+1+a}$, est bijective lorsque

$$\boxed{|L| \geq |\underline{\lambda}|} \quad (4)$$

Preuve du lemme 1. Nous construisons un inverse à cette application. Pour $\beta \in \mathcal{S}_{m+1+a}$, l'ensemble $\beta L'$ rencontre nécessairement l'ensemble A' lorsque

$$|L'| + |A'| > m + 1 + a. \quad (5)$$

Dans ce cas, la double classe $\mathcal{S}_{A'} \cdot \beta \cdot \mathcal{S}_{L'}$ contient une permutation α qui fixe $m+1$, de plus, si α' est une autre telle permutation, il est clair que l'on a bien $\mathcal{S}_A \cdot \alpha \cdot \mathcal{S}_L = \mathcal{S}_A \cdot \alpha' \cdot \mathcal{S}_L$. Par conséquent, l'application

$$\mathcal{S}_{A'} \cdot \beta \cdot \mathcal{S}_{L'} \mapsto \mathcal{S}_A \cdot \alpha \cdot \mathcal{S}_L$$

est bien définie et elle est clairement bijective. Enfin, la condition (5) est clairement équivalente à $|L| \geq |\underline{\lambda}|$, et le lemme 1 est prouvé.

Lemme 2. Soient $\alpha \in \mathcal{S}_{m+a}$ et $L \subseteq \llbracket 1, m+a \rrbracket$. Le morphisme

$$\phi_m : (V_m)^{\mathcal{S}_{A \cap \alpha L}} \rightarrow (V_{m+1})^{\mathcal{S}_{A' \cap \alpha L'}}$$

est bijectif lorsque

$$\boxed{|L| \geq m - \underline{s} \geq |\underline{\lambda}|} \quad (6)$$

Preuve du lemme 2. On applique 8.6.5 qui fait intervenir la taille du complémentaire de $A \cap \alpha L$ dans $\llbracket 1, m \rrbracket$. On a toujours

$$m - |A \cap \alpha L| \leq m + |\underline{\lambda}| - |L| \leq \underline{s} + |\underline{\lambda}|,$$

et le lemme résulte d'appliquer 8.6.5-(b), nécessaire puisque $\underline{s} + |\underline{\lambda}| > \mathcal{P}_\infty(\mathcal{V})$.

Lorsque m satisfait à la condition (6), l'inégalité (4) est automatiquement vérifiée et la proposition (\diamond) s'en trouve démontrée.

Revenons maintenant au **FI**-module $\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}$. Compte tenu de la proposition (\diamond), le critère de stabilité (8.6.3-(b)) donne la majoration

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) + a + |\underline{\lambda}|, \quad (\dagger\dagger)$$

et ceci termine l'étude du cas $\underline{\ell} \leq \underline{s}$.

- Cas $s < \underline{\ell}$.— Comme le foncteur \mathbf{Ind}_λ agit seulement sur $\mathcal{V}_{\geq \underline{\ell}}$, l'étude qui précède mène à la majoration

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \underline{\ell} + a + |\underline{\lambda}|. \quad (\ddagger\ddagger)$$

- Dans tous les cas, on a

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), \underline{\ell}) + |\underline{\lambda}| + a \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), \underline{\ell}) + 3a$$

ce qui termine la preuve de l'assertion (c), et du théorème. \square

8.7.6. Le foncteur $\mathbf{Ind}_{\rho,\lambda}$

Lors de l'étude de rangs de monotonie et stabilité des termes des suites spectrales basiques de 8.9.7, nous rencontrerons une version légèrement plus sophistiquée des foncteurs d'induction \mathbf{Ind}_λ .

Étant donnés, $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et une représentation $\rho : H_\lambda \rightarrow \text{Gl}_k(\sigma)$ d'un sous-groupe $H_\lambda \subseteq \mathcal{P}_\lambda$, on définit le foncteur

$$\boxed{\mathbf{Ind}_{\rho,\lambda} : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]_{\geq |\underline{\lambda}|})} \quad (\mathbf{Ind}_{\rho,\lambda})$$

qui fait correspondre à un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} , le \mathcal{S}_m -module

$$W_m := \begin{cases} 0, & \text{si } m < |\underline{\lambda}|, \\ \mathbf{Ind}_{H_\lambda \times G_{\lambda \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \boxtimes V_{m-a}, & \text{si } m \geq |\underline{\lambda}|. \end{cases}$$

On vérifie que les analogues de la proposition 8.7.4 et du théorème 8.7.5 sont encore vérifiés. En particulier, on garde toujours un contrôle sur les rangs de monotonie et stabilité.

8.7.7. Théorème. *Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et $\rho : H_\lambda \rightarrow \text{Gl}_k(\sigma)$ une représentation d'un sous groupe $H_\lambda \subseteq \mathcal{P}_\lambda$. Alors, si $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) < +\infty$ et $\underline{\ell} := \ell(\underline{\lambda})$, on a*

$$\boxed{\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{Ind}_{\rho,\lambda} \mathcal{V}) \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), \underline{\ell}) + |\underline{\lambda}| + a,}$$

8.7.8. Les foncteurs d'induction \mathbf{I}^a , $\mathbf{I}(a)$ et Θ^a

Dans la section 6.3, nous avons introduit le foncteur $\mathbf{I}_\ell^{\ell+a}$ qui associe à une représentation de \mathcal{S}_ℓ une représentation de $\mathcal{S}_{\ell+a}$ en induisant suivant tous les diagrammes de Young $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$:

$$\mathbf{I}_\ell^{\ell+a} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{\ell+a}]), \quad \mathbf{I}_\ell^{\ell+a} := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell+a)} \mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{\ell+a}}. \quad (\mathbf{I})$$

Ce foncteur apparaît naturellement dans l'étude des espaces $\Delta_\ell \mathbf{X}^{\ell+a}$. Il intervient notamment dans la proposition 6.3.1, où il donne l'égalité de caractères

$$\chi_c(\Delta_\ell \mathbf{X}^{\ell+a}; i) = \mathbf{I}_\ell^{\ell+a}(\chi_c(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}); i)).$$

Nous cherchons maintenant à "recoller" la famille des foncteurs $\{\mathbf{I}_{m-a}^m\}_m$ en un unique foncteur $\mathbf{I}^a : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$ dans le but d'étudier

la stabilité (cf. 8.5) des $k[\mathbf{FB}]$ -modules

$$\{H_c^i(\Delta_{m-a}\mathbf{X}^m; k)\}_m \quad \text{et} \quad \{H^i(\Delta_{m-a}\mathbf{X}^m; k)\}_m.$$

Cela établira a priori, grâce au théorème 8.4.9, que ces familles de représentations ont des caractères éventuellement polynomiaux. Bien évidemment, nous cherchons aussi à donner des bornes pour les rangs de monotonie et stabilité, ce qui présuppose que nous puissions contrôler le décalage que le foncteur \mathbf{I}^a fera subir à ces rangs.

Dans la section 8.7.3, nous avons associé à chaque $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ un foncteur

$$\mathbf{Ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq |\underline{\lambda}|}$$

et sa définition est telle que l'on a

$$\mathbf{Ind}_\lambda = \mathbf{Ind}_{\underline{\lambda}}$$

où $|\underline{\lambda}| \leq 2a$ (8.7.2-(b)), de sorte que la correspondance

$$\left(\bigcup_{1 \leq i \leq a} \mathcal{Y}_i(i + a) \right) \ni \lambda \mapsto \mathbf{Ind}_\lambda$$

est surjective sur l'ensemble de tels foncteurs. Mieux encore, le lemme 8.7.1 montre que cette correspondance devient bijective pour peu que l'on tronque les foncteurs :

$$\mathcal{Y}_a(2a) \ni \lambda \xrightarrow[\simeq]{} \mathbf{Ind}_\lambda(_)_{\geq 2a}.$$

On pose alors pour $a \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathbf{I}^a := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_a(2a)} \mathbf{Ind}_\lambda(_)_{\geq 2a} : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq 2a}} \quad (\mathbf{I}^a)$$

Nous pouvons maintenant facilement introduire l'analogie des inductions composées $\mathbf{I}(\sigma)$ et $\Theta_\ell^{\ell+a}$ de 6.5.

Pour $a \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{A}(a)$ l'ensemble des suites d'entiers $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, avec $a_i > 0$ et tels que $a = \sum_i a_i$. On pose pour chaque $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)$:

$$\mathbf{I}(\mathbf{a}) := \mathbf{I}^{a_1} \circ \mathbf{I}^{a_2} \circ \dots \circ \mathbf{I}^{a_r} : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq a},$$

d'où

$$\boxed{\Theta^a := (-1)^a \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)} (-1)^{|\mathbf{a}|} \mathbf{I}(\mathbf{a}) : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq a}} \quad (\Theta^a)$$

où la présence de signes indique que l'on a affaire à \mathbf{FI} -modules virtuels.

L'analogie suivant du théorème 8.7.5 est immédiat.

8.7.9. Théorème. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)$ et désignons par \mathbf{L}^a l'un des trois foncteurs $\mathbf{I}^a, \mathbf{I}(\mathbf{a}), \Theta^a$.

- a) Le foncteur $\mathbf{L}^a : \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])_{\geq 2a}$ est covariant, additif, exact.
b) Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le \mathbf{FI} -module $\mathbf{L}^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d + a, 2a)$.
c) On a $\boxed{\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathbf{L}^a\mathcal{V}) \leq \sup(\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}), a) + 3a}$

8.8. Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{X}^m)\}_m$

8.8.1. Structure de \mathbf{FI} -module de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$. Dans les sections précédentes (cf. 7.1, 7.6.5), nous avons muni les familles $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{X}^m)$ et $H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}\mathbf{X}^m)$ de structures de \mathbf{FI} -modules induites par les projections $p_m : \mathbf{X}^{m+1} \rightarrow \mathbf{X}^m$. On étend maintenant ces structures aux familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$ pour toute pseudovariété orientée \mathbf{M} . Pour cela on considère le diagramme commutatif de décompositions ouvertes-fermées :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{m+1-a}\mathbf{M}^{m+1} & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m+1-a}\mathbf{M}^{m+1} & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^{m+1} \\ \downarrow j & & \uparrow i & & \uparrow i \\ \Delta_{m-a}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M} & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M} & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M} \\ \downarrow p_m & & \downarrow p_m & & \downarrow p_m \\ \Delta_{m-a}\mathbf{M}^m & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m \end{array}$$

où j est une inclusion ouverte et les inclusions i sont fermées entre des espaces de même dimension cohomologique $(m-a)d_{\mathbf{M}}$ et mêmes orientations. On en déduit par les règles de functorialité de la cohomologie de Borel-Moore, le diagramme commutatif de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m+1-a}\mathbf{M}^{m+1}) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m+1-a}\mathbf{M}^{m+1}) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_{\mathbf{M}}}(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^{m+1}) & \leftarrow & \dots \\ \uparrow (j)^{\vee} & & \uparrow (i^*)^{\vee} & & \uparrow (i^*)^{\vee} & & \\ H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M}) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M}) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_{\mathbf{M}}}(\Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m \times \mathbf{M}) & \leftarrow & \dots \\ \uparrow p_m^* & & \uparrow p_m^* & & \uparrow p_m^* & & \\ H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_{\mathbf{M}}}(\Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m) & \leftarrow & \dots \end{array}$$

où les composées des flèches verticales sont compatibles à l'action des groupes symétriques et vérifient clairement la condition pour être des \mathbf{FI} -modules. Ces observations constituent l'essentiel de la preuve de la proposition suivante.

8.8.2. Proposition et définition. Dans le diagramme précédent, les morphismes verticaux définissent les \mathbf{FI} -modules $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$. Les morphismes horizontaux définissent alors une suite exacte longue de \mathbf{FI} -modules

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^{i-d_{\mathbf{M}}}(\Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow$$

8.8.3. Dans la suite de cette section, nous généralisons les résultats de stabilité de Church ([7]) des espaces $\mathbf{X}^m = \Delta_{\leq m} \mathbf{X}^m$ et $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) = \Delta_m \mathbf{X}^m$ à celles des espaces de configuration généralisés $\{\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m\}_m$ et ce, pour toute pseudovariété i -acyclique orientable \mathbf{X} et pour chaque $a \in \mathbb{N}$ fixé. Dans 8.9 nous nous affranchirons de l'hypothèse de i -acycliticité.

8.8.4. Le cas de la stabilité de la cohomologie à support compact. Ce cas est inintéressant si \mathbf{X} est i -acyclique puisque, d'après 5.2.5 et 5.4, les polynômes de Poincaré pour $H_c(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)$ sont de valuation $m - a$, ce qui implique que

$$H_c^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m) = 0, \quad \forall m > a + i.$$

8.8.5. Le cas de la stabilité de la cohomologie de Borel-Moore. On rappelle (7.1) que la cohomologie de Borel-Moore d'une pseudovariété \mathbf{M} connexe orientable et de dimension $d_{\mathbf{M}}$ est par définition

$$H_{\text{BM}}^i(\mathbf{M}) := H_c^{d_{\mathbf{M}}-i}(\mathbf{M}; k)^\vee.$$

Le complexe fondamental de \mathbf{M} pour $\Delta_{\leq m-a} \mathbf{M}^m$ pour la cohomologie de Borel-Moore est alors le complexe de \mathcal{S}_m -modules k -dual de 3.2.2 muni de l'action 7.2.3-(b), soit

$$0 \rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} \mathbf{M}^m) \rightarrow H(m-a) \rightarrow H(m-a-1) \rightarrow \cdots \rightarrow H(1) \rightarrow 0 \quad (\text{BM})$$

avec $H(m-a-b) := H_{\text{BM}}^{i-(d_{\mathbf{M}}-1)b}(\Delta_{m-a-b} \mathbf{M}^m)$.

8.8.6. Remarque. Lorsque \mathbf{M} est de type fini, la condition de stabilité de représentations impose sur \mathbf{M} qu'elle soit connexe et que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{M} \geq 2$, car, autrement, les \mathbf{FB} -modules $H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} \mathbf{M}^m)$ ne sont pas de type fini. En effet, si $r := |\pi_0(\mathbf{M})|$, on a $|\pi_0(\mathbf{M}^m)| = r^m$ et $|\pi_0(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))| = (r^m)^{\underline{m}}$ ce qui exclut toute possibilité de finitude pour le \mathbf{FB} -module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} \mathbf{M}^m)\}_m$ pour peu que $r > 1$. D'autre part, si \mathbf{M} est connexe et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{M}) = 1$, c'est une courbe illimitée avec un nombre fini f de points multiples et alors $|\pi_0(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))| \geq (m - f)!$ d'où encore une obstruction à la finitude.

Dans la suite on suppose que \mathbf{X} est une pseudovariété connexe orientable.

- (A) *Le cas de $\{\Delta_{\leq m}(\mathbf{X})\}_m$.*— On s'intéresse au \mathbf{FB} -module

$$\mathcal{A}(\mathbf{X}; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\mathbf{X}^m)\}_m.$$

La proposition 8.4.11 s'applique, car $H_{\text{BM}}^0(\mathbf{X}; k) = k$ (cf. 7.2.5-(c)), et donne

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{A}(\mathbf{X}; i)) \leq 2i. \quad (\text{A})$$

- (B) *Le cas de $\{\Delta_m(\mathbf{X})\}_m$.*— C'est le cas étudié par Church lorsque \mathbf{X} est une variété topologique ([7], cf. 8.1). On s'intéresse au \mathbf{FB} -module

$$\mathcal{B}(\mathbf{X}; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))\}_m.$$

Notons $d := \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{X})$. Par dualité de Borel-Moore, on a l'égalité

$$H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) = H_c^{d_{\mathbf{X}}m-i}(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})).$$

Le théorème 6.5.1-(a)-(i) s'applique et donne

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); d_{\mathbf{X}}m - i) = \sum_{0 \leq \ell < m} \Theta_{m-\ell}^m(\chi_c(\mathbf{X}^{m-\ell}; d_{\mathbf{X}}m - i - \ell)) \quad (*)$$

où, encore par dualité de Borel-Moore, on a

$$\chi_c(\mathbf{X}^{m-\ell}; d_{\mathbf{X}}m - i - \ell) = \chi(\mathbf{X}^{m-\ell}; i - (d_{\mathbf{X}}-1)\ell).$$

Nous sommes ainsi emmènes à considérer pour

$$\ell \in \mathbb{N} \text{ fixe et tel que } i \geq (d_{\mathbf{X}}-1)\ell, \quad (\ddagger)$$

le **FB**-module

$$\{H_{\text{BM}}^{i-(d_{\mathbf{X}}-1)\ell}(\mathbf{X}^{m-\ell})\}_{m-\ell},$$

dont nous avons déjà établi la stabilité dans **(A)** pour tous

$$m - \ell \geq 2(i - (d_{\mathbf{X}}-1)\ell).$$

Maintenant, en raison de (*), il nous faut borner le rang de stabilité de

$$\Theta_{m-\ell}^m \{H_{\text{BM}}^{i-(d_{\mathbf{X}}-1)\ell}(\mathbf{X}^{m-\ell})\}_{m-\ell},$$

ce pour quoi le théorème 8.7.9-(c) donne

$$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{B}(\mathbf{X}; i)) \leq \sup(2(i - (d_{\mathbf{X}}-1)\ell), \ell) + 3\ell \leq \begin{cases} 4i, & \text{si } d_{\mathbf{X}} = 2, \\ 2i, & \text{si } d_{\mathbf{X}} \geq 3. \end{cases} \quad (\text{B})$$

compte tenu du fait que l'on a (\ddagger).

Dans son article [7], Church obtient la même conclusion pour \mathbf{X} : une variété topologique orientable. Sa démonstration est très différente de la nôtre et utilise de manière essentielle les résultats de Totaro ([28]) sur la de suite spectrale de Leray du plongement $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \hookrightarrow \mathbf{X}^m$.

- **(C)** Le cas de $\{\Delta_{m-a}(\mathbf{X})\}_m$.— On s'intéresse au **FB**-module

$$\mathcal{C}_a(\mathbf{X}; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}\mathbf{X}^m)\}_m,$$

pour lequel on trouve les mêmes majorations (B) ci-dessus. Cela se voit, soit, en raisonnant comme dans (B) mais à l'aide de la formule 6.5.1-(a)-(ii), soit, a partir du cas **(B)** à l'aide de l'égalité (6.3.1) :

$$\chi(\Delta_{m-a}\mathbf{X}^m; i) = \mathbf{I}_{m-a}^m(\chi(\mathbf{F}_{m-a}(\mathbf{X}); i)).$$

- **(D)** Le cas de $\{\Delta_{\leq m-a}(\mathbf{X})\}_m$.— On s'intéresse au **FB**-module

$$\mathcal{D}_a(\mathbf{X}; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{X}^m)\}_m$$

On trouve encore les mêmes majorations (B) pour $\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{D}_a(\mathbf{X}; i))$. Cette fois, on raisonne, soit, aussi comme dans (B) mais à l'aide de la formule 6.5.1-(a)-(iii), soit, a partir du cas **(C)** à l'aide du dual du complexe fondamental

de \mathcal{S}_m -modules 3.2 (th. 3.2.3) :

$$0 \rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} \mathbf{X}^m) \rightarrow H(m-a) \rightarrow H(m-a-1) \rightarrow \cdots \rightarrow H(1) \rightarrow 0$$

avec $H(m-a-\ell) := H_{\text{BM}}^{i-(d_{\mathbf{X}}-1)\ell}(\Delta_{m-a-\ell} \mathbf{X}^m)$ et aussi $i \geq (d_{\mathbf{X}}-1)\ell$.

Résumons les conclusions de ces observations sous forme de théorème.

8.8.7. Théorème. *Soit \mathbf{X} une pseudovariété i -acyclique, connexe orientable de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$ est stable pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{X}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{X}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.*

8.8.8. Remarque. Nous insistons sur le fait que dans cette section 8.8.3, les familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$ (\diamond) ne sont a priori pas de **FI**-modules, mais seulement des **FB**-modules, autrement dit, ce sont de collections de représentations a priori sans liens entr'elles. L'intérêt des foncteurs d'induction $\mathbf{I}^a, \mathbf{I}(a), \Theta^a$ de la section 8.7, vient alors de ce que lorsqu'ils sont appliqués au **FI**-module $(H_{\text{BM}}(\mathbf{X})^{\otimes})^i$ (cf. 8.4.10), ils fournissent des **FI**-modules virtuels dont les suites de caractères coïncident (asymptotiquement) à celles des familles (\diamond). La connaissance du rang de $(H_{\text{BM}}(\mathbf{X})^{\otimes})^i$ et le théorème 8.7.9 qui pondère les perturbations des rang par les foncteurs d'induction, permet alors d'estimer ceux des familles (\diamond).

8.9. Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{M}^m)\}_m$

On rappelle que \mathbf{M} désigne une pseudovariété orientée de type fini.

Nous démontrerons l'analogie du dernier théorème 8.8.7 pour la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))\}_m$ où \mathbf{M} est une pseudovariété orientée générale, *i.e.* qu'elle soit i -acyclique ou non.

8.9.1. Stabilité dans les suites spectrales basiques. Le théorème 7.7.1 nous conduit à étudier les **FI**-modules

$$\mathbb{E}_{\sigma}(q_m^*)_{1;p,q} : \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q},$$

canoniquement isomorphes aux **FI**-modules définis par les morphismes

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \xrightarrow{\text{ind } p_m^*} \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m+1}^{m+1})$$

où σ indique que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}$ est tordue $\sigma(k)_{m-(p+1)}$ et lorsque le couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ est soumis à la contrainte $q = i + (m - (p+1))$.

Le théorème décrit aussi le morphisme

$$p_m^* : H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m}^m) \rightarrow H_{\text{BM}}^q(U_{m-p, \dots, m+1}^{m+1})$$

dans son assertion (c), comme somme directe des images inverses

$$\bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) \xrightarrow{\bigoplus p_{p+1}^*} \bigoplus_{\mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)} H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+2}(\mathbf{M}_{>0})) \quad (\diamond)$$

où $Q := q - (m - (p+1)) d_{\mathbf{M}} = i - (m - (p+1)) (d_{\mathbf{M}} - 1)$.

Nous allons maintenant expliquer la structure de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -modules de ces sommes directes.

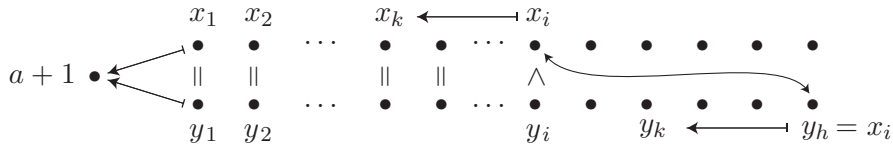
8.9.2. Tableaux et fonctions de $\mathcal{F}(p+1, m)$. Nous allons coder une fonction $f \in \mathcal{F}(p+1, m)$ sous la forme d'un tableau à $p+1$ lignes et m boîtes.

L'idée est la suivante. Soit $a > 0$. Pour toute suite $\bar{x} = (x_1, \dots, x_a)$ d'éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, a \rrbracket$, associons la fonction $f_{\bar{x}} \in \mathcal{F}(a+1, 1)$ définie pour $i \leq a$, par la règle suivante

Pour $i \in \llbracket 1, a \rrbracket$, notons $I_{\bar{x}}(i) := \{j \leq i \mid x_j > x_i\}$. Alors

$$f_{\bar{x}}(x_i) = \begin{cases} a+1, & \text{si } I_{\bar{x}}(i) = \emptyset \\ x_{\sup I_{\bar{x}}(i)}, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Cette correspondance est injective. En effet, si $\bar{x} \neq \bar{y}$, il existe un premier i tel que $x_i \neq y_i$. Supposons que l'on ait $x_i < y_i$. Alors, comme il existe $h > i$ avec $y_h = x_i$, on aura $f_{\bar{y}}(x_i) = f_{\bar{y}}(y_h) = y_k \neq a+1$ pour un certain $k \geq i$, tandis que $f_{\bar{x}}(x_i) = x_k = y_k$ pour un certain $k < i$, ou bien $f_{\bar{x}}(x_i) = a+1$. dans tous les cas, $f_{\bar{x}} \neq f_{\bar{y}}$.



Comme d'autre part le cardinal des suites est $a! = \mathcal{F}(a+1, a)$, on conclut que la correspondance en question est bijective. Cette idée est la base de la preuve du lemme suivant.

8.9.3. Lemme et notations. L'ensemble $\mathcal{F}(p+1, m)$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathcal{T}(p+1, m)$ des tableaux à $(p+1)$ lignes et m boîtes

de toutes les formes possibles :

$$\tau := \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline m-p & \bullet & \bullet & & \\ \hline m-p+1 & \bullet & & & \\ \hline m-p+2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \vdots & & (j) \longleftarrow (i) & & \\ \hline m-2 & & & & \\ \hline m-1 & \bullet & & & \\ \hline m & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array} \right.$$

où les boîtes marquées par ‘•’ sont remplies par les entiers de $\llbracket 1, m-(p+1) \rrbracket$ de manière deux à deux distincte. La correspondance associée au tableau τ la fonction f_τ qui, appliquée à $i \in \llbracket 1, m-(p+1) \rrbracket$, donne le premier entier $j > i$ à gauche de i sur la ligne de τ où il figure.

L’ensemble $\mathcal{F}^\bullet(m+1, p+2)$ est en correspondance bijective avec l’ensemble des tableaux de $\mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$ dont la ligne $(m+1)$ est de longueur 1. L’application

$$(_)^\bullet : \mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$$

qui associe à τ le tableau τ^\bullet obtenu en rajoutant la boîte $(m+1)$ est bijective.

8.9.4. Action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ sur $\mathcal{F}(p+1, m)$

Pour chaque $\tau \in \mathcal{T}(p+1, m)$, soit

$$\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) := \{ \bar{x} \in \mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}) \mid x_i = x_{f_\tau(i)} \}.$$

La preuve de la décomposition Ξ de 7.5.2-(b) donne en fait l’identification

$$H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m) \cong \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1, m)} H_{\text{BM}}(\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))), \quad (\diamond)$$

et c’est cette identification qui nous révèle l’action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$. En effet, on vérifie aisément l’égalité

$$g \cdot \Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) = \Delta_{g \cdot \tau}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))$$

où $g \cdot \tau$ est le même tableau τ où l’on a remplacé le contenu i_s de la boîte s par $g(i)$. C’est donc en agissant sur les contenus des boîtes qu’il est pertinent de faire agir $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ sur $\mathcal{T}(p+1, m)$.

Chaque orbite dans $\mathcal{T}(p+1, m)$ contient un unique élément où la longueur des lignes est décroissante et le contenu des boîtes ‘•’ est strictement crois-

sant. Par exemple si $m = 50$, $m - (p+1) = 17$.

18	1	2	3	4	5	6
19	7	8	9	10		
20	11	12	13	14		
21	15					
22	16					
23	17					
24						
⋮						
32						
⋮						
50						

}

$p+1$

$m - 2(m - (p+1))$

(††)

Un tel tableau sera dit « *normal* », leur ensemble est noté $\mathcal{T}_0(p+1, m)$.

On observera dans (††) que les boîtes grisées constituent la plus petite colonne de lignes à une seule boîte dans les tableau normaux. Le cardinal $m - 2(m - (p+1))$ est atteint uniquement lorsque la longueur des lignes de τ_0 est ≤ 2 et bien sûr que $m \geq 2(m - (p+1))$. Par ailleurs, lorsque cette dernière condition est satisfaite, il y a autant de tableaux normaux que des partitions de $m - (p+1)$.

8.9.5. L'ensemble des tableaux normaux coïncide clairement avec l'ensemble des diagrammes de Young, et on pourra identifier

$$\mathcal{T}_0(p+1, m) = \mathcal{Y}(p+1, m).$$

Pour $\tau \in \mathcal{T}_0(p+1, m)$, on note $\text{Stab}(\Delta_\tau)$ le sous-groupe des $g \in \mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ tels que

$$g \cdot \Delta_{\tau_0}(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) = \Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})).$$

D'après nos notations dans 6.1 et 6.1.1, le groupe $\text{Stab}(\Delta_\tau)$ n'est autre que

$$\text{Stab}(\Delta_\tau) = \mathcal{S}_\tau \cap (\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}),$$

et si l'on note $H_\tau := \text{Stab}(\Delta_\tau) \cap \mathcal{P}_\tau$, on a $H_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}$ et

$$\mathcal{S}_{p+1} \twoheadrightarrow \text{Stab}(\Delta_\tau)/H_\tau = \mathcal{S}_\tau/\mathcal{P}_\tau = G_\tau.$$

8.9.6. Proposition

a) Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -modules

$$\sigma \otimes H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m) \cong \bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1, m)} \text{ind}_{H_\tau \times G_\tau}^{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}} \sigma \otimes H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})),$$

où $\sigma := \sigma(k)_{m-(p+1)}$ est la représentation par la signature de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. Le nombre des termes de la somme est $|\mathcal{Y}(p+1, m)| \leq |\mathfrak{P}(m - (p+1))|$, la borne étant atteinte lorsque $m \geq 2(m - (p+1))$.

b) Le **FI**-module défini par les morphismes des suites spectrales basiques

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_{1;p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q},$$

où $q=i+(m-(p+1))$, est canoniquement isomorphe au **FI**-module défini par les morphismes

$$\bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1,m)} \begin{pmatrix} \text{ind}_{H_{\mathcal{T}} \times G_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma(k)_{m-(p+1)} \boxtimes H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) \\ \downarrow \text{ind}_{p_{p+1}^*} \\ \text{ind}_{H_{\mathcal{T}} \times G_\tau}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma(k)_{m-(p+1)} \boxtimes H_{\text{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+2}(\mathbf{M}_{>0})) \end{pmatrix}$$

où $Q := q - (m - (p+1)) d_{\mathbf{M}} = i - (m - (p+1)) (d_{\mathbf{M}} - 1)$.

Indication. (a) D'après l'isomorphisme (\diamond) de 8.9.4, on a

$$\begin{aligned} \sigma \otimes H_{\text{BM}}(U_{m-p,\dots,m}^m) &\cong \sigma \otimes \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}(p+1,m)} H_{\text{BM}}(\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1})) \\ &\cong \sigma \otimes \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}_0(p+1,m)} \text{ind}_{\text{Stab}(\Delta_\tau)}^{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}} H_{\text{BM}}(\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1})) \\ &\cong \bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1,m)} \text{ind}_{H_{\mathcal{T}} \times G_\tau}^{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}} \sigma \boxtimes H_{\text{BM}}(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) \end{aligned}$$

par la commutation entre le produit tensoriel et l'induction (cf. (19)) et l'identification $\text{Stab}(\Delta_\tau) = H_{\mathcal{T}} \times G_\tau$ de 8.9.5. L'assertion (b) est alors claire. \square

8.9.7. Rang de monotonie et stabilité des suites spectrales basiques

Pour chaque $\tau \in \mathcal{Y}(p+1, m)$, on reconnaît dans 8.9.6-(b) le **FI**-module

$$\mathbf{Ind}_{\rho, \mathcal{T}}(\{H_{\text{BM}}^Q(\mathcal{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))\}_{p+1}) \in \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]_{\geq 2(m-(p+1))}) \cdot \quad (\diamond)$$

où ρ désigne l'action de $H_{\mathcal{T}}$ sur $\sigma(k)_{m-(p+1)}$ et $\mathbf{Ind}_{\rho, \lambda}$ est le foncteur d'induction introduit dans 8.7.6. Le théorème 8.7.7 s'applique et justifie le théorème suivant.

8.9.8. Théorème. Soit \mathbf{M} une pseudovariété connexe orientée et de dimension $d_{\mathbf{M}} \geq 2$.

a) Pour $Q := i - (m - (p+1)) (d_{\mathbf{M}} - 1)$ et $\tau \in \mathcal{Y}(p+1, m)$, on a

$$\text{rang}_{\mu\sigma} \left(\mathbf{Ind}_{\rho; \mathcal{T}}(\{H_{\text{BM}}^Q(\mathcal{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))\}_{p+1}) \right) \leq \begin{cases} 4i, & \text{si } d_{\mathbf{M}} = 2 \\ 2i, & \text{si } d_{\mathbf{M}} \geq 3. \end{cases}$$

b) Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{M}^m)\}_m$ est stable pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{X}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{X}} \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont (donc) polynomiales sur les mêmes intervalles.

Démonstration. (a) On applique le théorème 8.8.7 à l'espace i -acyclique $\mathbf{M}_{>0}$. Comme $\dim(\mathbf{M}_{>0}) \geq 3$, la famille $\{\mathcal{S}_{p+1} : H_{\mathbf{BM}}^Q(\mathbf{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0}))\}_{p+1}$ est stable pour $(p+1) \geq 2Q$. Le théorème 8.7.5 garantit alors que le **FI**-module induit par $\mathbf{Ind}_{\rho, \tau_0}$ est monotone et stable pour tout

$$m \geq \sup\{2Q, (m - (p+1))\} + 3(m - (p+1)).$$

Le remplacement de Q par sa valeur conduit à chercher un majorant pour

$$R := \left\{ 2i - (m - (p+1))(2d_{\mathbf{M}} - 5), 4(m - (p+1)) \right\} e$$

et comme on dispose de l'inégalité 7.5.2-(d) : $\lfloor \frac{i}{d_{\mathbf{M}}-1} \rfloor \geq m - (p+1)$, on voit bien que si $d_{\mathbf{M}} = 2$ l'ensemble R est majoré par $4i$, et que si $d_{\mathbf{M}} \geq 3$, il est majoré par $2i$.

(b) Commençons par le cas de la famille $\{\mathcal{S}_m : H_{\mathbf{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M}))\}_m$. L'assertion 8.9.6-(b) montre que le **FI**-module défini par le morphisme des suites spectrales basiques

$$\left\{ \mathbb{E}_{\sigma}(q_m^*)_{1;p,q} : \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} \right\}_m,$$

se décompose en somme directe des **FI**-modules

$$\bigoplus_{\tau \in \mathcal{Y}(p+1, m)} \mathbf{Ind}_{\rho, \tau} \left(\left\{ H_{\mathbf{BM}}^Q(\mathcal{F}_{p+1}(\mathbf{M}_{>0})) \right\}_{p+1} \right) \in \text{Mod}(k[\mathbf{FI}]_{\geq 2(m-(p+1))}).$$

Or, dans cette somme, les termes qui participent au degré de cohomologie i de l'aboutissement de la suite spectrale basique, sont en nombre fini puisque d'après 7.5.2-(d), on a $m - (p+1) \leq \lfloor i/(d_{\mathbf{M}}-1) \rfloor$. L'assertion (a) montre que ces sous-**FI**-modules sont monotones et stables dans certains rangs et comme la conjonction de ces propriétés passe en cohomologie (8.4.3), on déduit par récurrence sur $r \geq 2$, les mêmes rangs pour les sous-**FI**-modules correspondants dans les pages successives des suites spectrales

$$\mathbb{E}_{\sigma}(q_m^*)_{r;p,q} : \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_r^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^{m+1})_r^{p+1,q},$$

et, par passage à la limite, pour les **FI**-modules

$$p_m^* : H_{\mathbf{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{M})) \rightarrow H_{\mathbf{BM}}^i(\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{M})).$$

A partir de là, le cas des familles $\{\mathcal{S}_m : H_{\mathbf{BM}}^i(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$ se gère à l'aide de l'égalité (6.3.1) :

$$\chi(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m; i) = \mathbf{I}_{m-a}^m(\chi(\mathbf{F}_{m-a}(\mathbf{M}); i)).$$

exactement comme dans le cas (C) des espaces i -acycliques (p. 104).

Pour le cas général des familles $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m)\}_m$, on fait appelle aux suites longues de **FI**-modules de 8.8.2

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}\mathbf{M}^m)\} \rightarrow$$

où l'on peut supposer que les termes de droite et gauche sont monotones et stables pour $m \geq 2i$ ou $m \geq 4i$ suivant le cas. On en déduit (8.4.3) le même rang de monotonie et stabilité pour $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}\mathbf{M}^m)\}$ puisque extension d'un noyau et conoyau de **FI**-modules monotones est stables sur le même rang des m . C.Q.F.D \square

9. Calcul du caractère de \mathcal{S}_m -module de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$

Dans cette section, on étend les résultats de Macdonald ([24]) concernant le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c(\mathbf{X}^m)$ à $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ lorsque \mathbf{X} est i -acyclique.

Mise en garde. Dans cette section et la suivante, $\text{car}(k) = 0$ et la donnée d'un espace i -acyclique \mathbf{X} présuppose que $\dim H_c(\mathbf{X}) < \infty$.

9.1. Série de caractères de \mathcal{S}_m

9.1.1. Série de caractères d'un \mathcal{S}_m -module gradué. Nous appellerons \mathcal{S}_m -module gradué, la donnée d'un k -espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$, tel que chaque V^i est un \mathcal{S}_m -module.

Lorsque, de plus, chaque V^i de dimension finie sur k , la « série de caractères de V », est l'application $\chi_V : \mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$ définie par (cf. [24] (2.3))

$$\mathcal{S}_m \ni \alpha \mapsto \chi_V(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}(\alpha : V^i) \cdot T^i.$$

Le lemme suivant, pendant du lemme 5.1.2, est élémentaire.

9.1.2. Lemme

- $S_i(\cdots \rightarrow V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1} \rightarrow \cdots)$ est un complexe borné de \mathcal{S}_m -modules gradués, on a $\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi_{V^i}(\alpha, T) = 0$.
- Pour $r \in \mathbb{Z}$, on a $\chi_{V[-r]}(\alpha, T) = \chi_V(\alpha, T) \cdot (-T)^r$.
- $\chi_{V_1 \otimes_k V_2}(\alpha_1 \otimes \alpha_2, T) = \chi_{V_1}(\alpha_1, T) \cdot \chi_{V_2}(\alpha_2, T)$.
- $\mathcal{P}(\text{Homgr}_k(V_1, V_2))(T) = \mathcal{P}(V_1)(1/T) \cdot \mathcal{P}(V_2)(T)$

9.1.3. Série de caractères d'un \mathcal{S}_m -espace topologique. Si \mathbf{M} est un espace topologique de type fini, muni d'une action de \mathcal{S}_m , les « séries de caractères de $H_c(\mathbf{M})$ et de $H(\mathbf{M})$ » seront respectivement notées

$$\chi_c(\mathbf{M})(\alpha, T) := \chi_{H_c(\mathbf{M}, k)}(\alpha, T), \quad \text{et} \quad \chi(\mathbf{M})(\alpha, T) := \chi_{H(\mathbf{M}, k)}(\alpha, T).$$

On a donc par rapport aux définitions de 6.2.2, l'égalité

$$\chi_c(\mathbf{M})(_, T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \cdot \chi_c(\mathbf{M}; i)(_) \cdot T^i.$$

9.1.4. Remarque. Il convient de retenir pour la suite les expressions suivantes. Pour tout espace topologique \mathbf{X} et tout $m \geq 0$, on a :

$$\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X}^m)(-T)}{T^m} = \left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(1, T)}{T} \right)^m,$$

$$\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(1, T)}{T} \right)^m.$$

9.2. Séries de caractères de $\mathbf{F}^q(\mathbf{X})$

L'exactitude des complexes fondamentaux associés aux espaces $\Delta_{\leq \ell}(\mathbf{F}^q)$ du théorème 3.5.4 s'avère particulièrement adaptée à la détermination des séries de caractères. La proposition suivante est un ingrédient important dans le calcul des caractères.

9.2.1. Théorème. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour toute partition \mathfrak{q} de $\llbracket 1, m \rrbracket$, tout $\ell \leq m$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}^q$, on a*

$$\frac{\chi_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{F}^q(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{T^\ell} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{\ell-a} \mathbf{F}^q(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{T^{\ell-a}}.$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 3.5.4 et du lemme 9.1.2 □

9.3. Séries de traces pour un m -cycle

L'action de \mathcal{S}_m sur $\llbracket 1, m \rrbracket$ induit une action sur l'ensemble $\mathfrak{P}(m)$ des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$ qui sera sous-entendue dans la suite. Pour $m > 0$ donné, on note $\sigma_m \in \mathcal{S}_m$, ou simplement σ s'il est superflu de préciser l'entier m , la permutation cyclique $(1, 2, \dots, m)$. On notera $\mathbf{C}_m := \langle \sigma_m \rangle$ le sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par σ_m .

9.3.1. Lemme. *Les points fixes de $\mathfrak{P}(m)$ sous l'action de \mathbf{C}_m sont les partitions en orbites de $\llbracket 1, m \rrbracket$ sous l'action des différents sous-groupes de \mathbf{C}_m . On a*

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_d(m)^{\mathbf{C}_m} = \{ \llbracket 1, m \rrbracket / \langle \sigma_m^{m/d} \rangle \}, & \text{si } d \mid m, \\ \mathfrak{P}_d(m)^{\mathbf{C}_m} = \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $|\mathfrak{P}(m)^{\mathbf{C}_m}| = |\{d \in \mathbb{N} \text{ t.q. } d \mid m\}|$.

Démonstration. L'application $\mathbf{C}_m \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$ est un isomorphisme de \mathbf{C}_m -espaces lorsque l'on munit \mathbf{C}_m de son action par multiplications à gauche. Les partitions \mathbf{C}_m stables par multiplication à gauche sont aussi stables par multiplication à droite puisque \mathbf{C}_m est abélien. Or, les partitions de \mathbf{C}_m stables par multiplication à droite sont les ensemble des classes d'équivalence à gauche de \mathbf{C}_m des sous-groupes $H \subseteq \mathbf{C}$, autrement dit, ce sont les partitions de \mathbf{C}_m en H -orbites. Enfin, comme \mathbf{C}_m est cyclique engendré par σ , ses sous-groupes sont les $\langle \sigma^d \rangle$ avec $d \mid m$. □

9.3.2. Théorème. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tout $m \geq 1$, la série de traces de l'action de σ_m sur $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ vérifie

$$\boxed{\frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\sigma_m, T)}{T^m} = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^d)}{T^d}},$$

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius.

Démonstration. Le théorème 9.2.1 appliqué à la partition $\mathfrak{q} = (1, \dots, 1)$ et pour $\ell = m$ donne l'égalité de séries de traces

$$\frac{\chi_c(\mathbf{X}^m)(\sigma, T)}{T^m} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)(\sigma, T)}{T^{m-a}} \quad (*)$$

D'après 2.3.3, on a la décomposition

$$H_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{m-a}(m)} H_c(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}),$$

et la trace de l'action de σ sur $H_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)$ se lit sur les termes $H_c(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})$ tels que $\sigma \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Or, on a vu dans le lemme 9.3.1 qu'il n'y a de telles partitions que lorsque $d := m - a$ est un diviseur de m , et dans ces cas, il y a une et une seule partition telle, à savoir $\mathfrak{p} := \mathbf{C}_m \cdot \langle \sigma_m^d \rangle$. L'action de σ_m sur $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec l'action de σ_d sur \mathbf{F}_d , on a donc l'égalité de séries de traces

$$\begin{cases} \chi_c(\Delta_d \mathbf{X}^m)(\sigma_m, T) = \chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T), & \text{si } d|m, \\ \chi_c(\Delta_d \mathbf{X}^m)(\sigma_m, T) = 0, & \text{si } d \nmid m, \end{cases}$$

dont on déduit l'expression du deuxième membre de (*) suivante :

$$\sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} \mathbf{X}^m)(\sigma_m, T)}{T^{m-a}} = \sum_{d|m} \frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d}. \quad (\dagger)$$

Maintenant, si $p_i : \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}$ est la projection $\bar{x} \mapsto x_i$, on a $\sigma^* \circ p_{\sigma i}^* = p_i^*$ et l'action de σ sur les tenseurs simples de $H_c^k(\mathbf{X})^{\otimes m}$ se fait par permutation signée (cf. [24]) :

$$\sigma^*(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_m) = (-1)^{k(m-1)} (\omega_2 \otimes \omega_3 \otimes \dots \otimes \omega_1).$$

Comme l'opérateur σ^* agit sur une base de tenseurs simples de $H_c(\mathbf{X})^{\otimes m}$, sa trace se lit sur ceux de tels tenseurs fixés par σ , donc de la forme $\omega \otimes \dots \otimes \omega$ pour ω appartenant à une base de $H_c(\mathbf{X})$. On a alors l'égalité

$$\begin{cases} \text{tr}(\sigma^* : H_c^{km} \mathbf{X}^m) = (-1)^{k(m-1)} \dim H_c^k(\mathbf{X}) \\ \text{tr}(\sigma^* : H_c^j \mathbf{X}^m) = 0, & \text{si } m \nmid j, \end{cases}$$

et, par définition de la série des traces 9.1.1,

$$\begin{aligned} \chi_c(\mathbf{X}^m)(\sigma_m, T) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^{km} \cdot (-1)^{k(m-1)} \dim H_c^k(\mathbf{X}) \cdot T^{km} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim H_c^k(\mathbf{X}) \cdot (T^m)^k = \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^m). \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

En reportant les égalités (†) et (‡) dans la formule (*), on obtient :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^m)}{T^m} = \sum_{d|m} \frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d}, \quad \forall m \geq 1,$$

et la formule d'inversion de Möbius donne l'égalité recherchée :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})(\sigma_m, T))}{T^m} = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^d)}{T^d}. \quad \square$$

9.3.3. Remarque pour \mathbf{X}^m . D'après l'égalité (‡) de la preuve précédente qui donne

$$\chi_c(\mathbf{X}^m)(\sigma_m, T) = \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^m),$$

l'analogie du théorème 9.3.2 pour l'espace \mathbf{X}^m s'énonce par la même formule où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $d := m$. On retrouve alors les résultats de Macdonald ([24], formule (3.2)).

9.4. Séries des traces pour une puissance d'un m -cycle

9.4.1. Partitions en orbites \mathfrak{q}_r

On s'intéresse maintenant au cas où $m = dr$ avec $1 \leq d \leq m$ et à la trace de l'opérateur σ_{dr}^r agissant sur $\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X})$. Notons \mathfrak{q}_r la partition de $\llbracket 1, dr \rrbracket$ et $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$ -orbites. Pour l'étude de $\chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)$ nous allons utiliser le théorème 9.2.1 avec $\mathfrak{q} := \mathfrak{q}_r$ et $\ell := dr$. Dans ce cas, on a (9.1.2-(c))

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}_r}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr}} = \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r,$$

d'où l'égalité :

$$\left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{dr-a} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}_r}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr-a}},$$

qui nous emmène à l'étude de l'espace $\Delta_{dr-a} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}_r}(\mathbf{X})$ sous l'action de σ_m^r .

9.4.2. Proposition. *Soit \mathfrak{q}_r la partition de $\llbracket 1, dr \rrbracket$ en $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$ -orbites et soit $\mathfrak{p} = \{I_1, \dots, I_\ell\} \uplus \mathfrak{q}_r$ telle que $\sigma_{dr}^r \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Alors, $\ell = dr'$, pour un certain r' vérifiant $1 \leq r' \leq r$, et l'on a une identification d'espaces munis d'actions*

$$(\sigma_{dr}^r : \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})) \simeq (\sigma_{dr'}^{r'} : \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})).$$

Le cardinal de l'ensemble de telles partitions \mathfrak{p} est

$$\left| (\mathfrak{q} \uplus \mathfrak{P}_{dr'}(dr)) \sigma_{dr}^r \right| = \left\{ \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\} d^{(r-r')}.$$

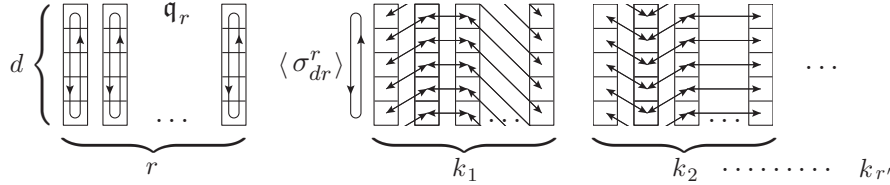
Démonstration. Commençons par remarquer qu'une partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(dr)$ vérifie $\sigma^r \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, si et seulement si, la relation $\simeq_{\mathfrak{p}}$ est « $\langle \sigma^r \rangle$ -équivariante »,

c'est-à-dire :

$$i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j \Rightarrow \sigma^{ra}(i) \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \sigma^{ra}(j), \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

L'illustration ci-dessous représente, sur la partie gauche, la partition \mathfrak{q}_r . Chaque colonne étant l'une des parties de \mathfrak{q}_r , est remplie d'indices i de $\llbracket 1, dr \rrbracket$ pour lesquels les coordonnées x_i de $\bar{x} \in \mathbf{F}^q$ sont deux à deux distinctes. Le cycle à l'intérieur des colonnes rappelle l'action simplement transitive du groupe $\langle \sigma^r \rangle$ sur chacune d'elles.

Sur la partie droite, on représente, à l'aide de flèches, les identifications définies par l'équivalence $\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$. Il faut remarquer le parallélisme des flèches dans le sens vertical qui reflète la σ^r -équivariance de $\underset{\mathfrak{p}}{\sim}$.



Les regroupements $k_1, k_2, \dots, k_{r'}$ sont tels que $r = \sum_i k_i$. On voit donc bien qu'au final on a $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbf{F}_{dr'}$ et que l'action $\sigma_{dr}^r : \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\sigma_{dr'}^{r'} : \mathbf{F}_{dr'}$.

La partie de droite de la figure permet aussi de comprendre que pour chaque partition de l'ensemble \mathfrak{q}_r en r' parties non vides de cardinaux k_i , les différentes manières de définir les partitions $\mathfrak{p} \in (\mathfrak{q}^{\text{fin}})^{\sigma_{dr}^r}$ pour les regroupements k_i sont en bijection avec les différentes manières de dessiner les flèches, soit au nombre $d^{k_1-1} d^{k_2-1} \dots d^{k_{r'}-1} = d^{r-r'}$, nombre qui seul dépend de r' et pas de la suite $(k_1, \dots, k_{r'})$. La proposition en découle. \square

9.4.3. Théorème. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tous $d, r \geq 1 \in \mathbb{N}$, la série de traces de l'action de σ_{dr}^r sur $H_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))$ vérifie l'égalité :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r,$$

soit

$$\boxed{\frac{\chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \right)^r}$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante de 4.1.

Démonstration. Dans la formule de l'introduction 9.4.1 :

$$\left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{dr-a} \mathbf{F}^{qr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr-a}},$$

nous pouvons maintenant préciser le membre de droite. Par 9.4.2, on a

$$\begin{cases} \chi_c(\Delta_\ell \mathbf{F}^{qr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T) = 0, & \text{si } d \nmid \ell, \\ \chi_c(\Delta_{dr'} \mathbf{F}^{qr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T) = \left\{ \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\} d^{(r-r')} \chi_c(\mathbf{F}_{dr'}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr'}^{r'}, T). \end{cases}$$

En substituant les expressions, on obtient, pour tout $r \geq 1$,

$$\left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{(dT)^d} \right)^r = \sum_{r' \geq 1} \left\{ \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\} \frac{\chi_c(\mathbf{F}_{dr'}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr'}^{r'}, T)}{(dT^d)^{r'}},$$

soi, en écriture vectorielle,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d)(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^1 \\ \vdots \\ \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d)(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\chi_c(\mathbf{F}_{d \cdot 1})(\sigma_{d \cdot 1}^1, T)}{(dT^d)^1} \\ \vdots \\ \frac{\chi_c(\mathbf{F}_{d \cdot r})(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ est la matrice des nombres de Stirling de deuxième espèce $(\underline{s}(i, j))$ (4.4.1). Son inverse est la matrice des nombres de Stirling de première espèce signés $(\underline{s}(i, j))$. Cette matrice est aussi la matrice de changement d'un système de puissances (X^1, \dots, X^r) vers un système de factorielles décroissantes (X^1, \dots, X^r) (4.3.3), par conséquent :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r.$$

Le théorème découle alors de l'égalité du théorème 9.3.2 qui donne :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} = \sum_{e \mid d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e}. \quad \square$$

9.4.4. Remarque pour \mathbf{X}^m . La remarque de l'introduction 9.4.1 est la même pour l'espace \mathbf{X}^m , mais en plus simple. On a clairement (cf. 9.3.3, mais aussi [24] (eq. 4.5))

$$\chi_c(\mathbf{X}^{dr})(\sigma_{dr}^r, T) = \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^d)^r.$$

Aussi, l'analogie du dernier théorème 9.4.3 pour l'espace \mathbf{X}^m est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au terme d'indice $e := d$.

9.5. Séries des traces pour une permutation générale

9.5.1. Permutations immiscibles

À une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on associe la partition \mathbf{p}_α de $[[1, m]]$ en $\langle \alpha \rangle$ -orbites. Les cardinaux des $\langle \alpha \rangle$ -orbites définissent une décomposition de m

que l'on note $\lambda(\alpha) = (1^{\mu_1(\alpha)}, 2^{\mu_2(\alpha)}, \dots, m^{\mu_m(\alpha)})$, ce qui signifie le fait qu'il y a exactement $\mu_i(\alpha)$ orbites de cardinal i .

Définition. Étant données deux parties non vides I et J de $\llbracket 1, m \rrbracket$ et deux permutations $\alpha \in \mathcal{S}_I$ et $\beta \in \mathcal{S}_J$ (voir 3.4.3), on dit qu'elles sont « immiscibles », si l'on a $\sum_i \mu_i(\alpha)\mu_i(\beta) = 0$, autrement dit, si les orbites de $\langle \alpha \rangle$ dans I ont toutes des cardinaux différents de celles de $\langle \beta \rangle$ dans J .

9.5.2. Proposition. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour toute partition $\mathfrak{q} := \{J_1, \dots, J_r\} \in \mathfrak{P}(m)$, et toute famille de permutations $\{\alpha_i \in \mathcal{S}_{J_i}\}_{i=1, \dots, r}$ deux à deux immiscibles, on a

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = \prod_{i=1}^r \chi_c(\mathbf{F}_{|J_i|}(\mathbf{X}))(\alpha_i, T)$$

où α désigne le recollement des α_i et où, dans les terme de droite, nous avons identifié le support J_i de α_i avec l'intervalle $\llbracket 1, |J_i| \rrbracket$.

Démonstration. Grâce au complexe fondamental de $\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$, pour $\ell = m$ et pour α le recollement des α_i , on a l'égalité (9.2.1)

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})(\alpha, T)}{T^m} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{T^{m-a}},$$

où, dans le premier membre, on a clairement

$$\chi_c(\mathbf{F}^{\mathfrak{q}})(\alpha, T) = \prod_{i=1}^r \chi_c(\mathbf{F}_{|J_i|}(\mathbf{X}))(\alpha_i, T).$$

Dans le second membre, pour $a = 0$, on a bien

$$\chi_c(\Delta_m \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}))(\alpha, T) = \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)$$

ce qui nous emmène à montrer que pour tout $a \geq 1$, on a

$$\chi_c(\Delta_{m-a} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}))(\alpha, T) = 0 \quad (*)$$

Or, d'après 3.4.5, on a la décomposition en sous-espaces ouverts

$$\Delta_{\ell} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}) := \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m), \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{q}} \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}),$$

et la série de traces de α pour $\Delta_{\ell} \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}$ est concentrée sur les espaces $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ correspondants aux partitions \mathfrak{p} vérifiant, de plus, $\alpha \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, donc, telles que

$$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \implies (\alpha^r i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha^r j).$$

Maintenant, s'il existait une telle partition pour $\ell < m$, on aurait un certain couple $(i \neq j)$ vérifiant $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$, auquel cas, par transversalité, on aurait $(i \not\underset{\mathfrak{q}}{\sim} j)$ et il existerait des parties $J_a \neq J_b$ de \mathfrak{q} telles que $i \in J_a$ et $j \in J_b$. En particulier, les orbites $\langle \alpha \rangle \cdot i = \langle \alpha_a \rangle \cdot i$ et $\langle \alpha \rangle \cdot j = \langle \alpha_b \rangle \cdot j$ seraient de cardinaux différents puisque α_a et α_b sont immiscibles. Si $\epsilon := \text{ord}(\alpha_a) < \text{ord}(\alpha_b)$, on

aurait

$$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \text{ et } (i = \alpha_a^\varepsilon i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha_b^\varepsilon j), \quad \text{et donc } (j \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha_b^\varepsilon j),$$

avec $\alpha_b^\varepsilon j \neq j$, et ceci contredirait la transversalité de \mathfrak{p} et \mathfrak{q} puisque $(j \underset{\mathfrak{q}}{\sim} \alpha^\varepsilon j)$.

L'égalité (*) se trouve ainsi justifiée et la proposition résulte. \square

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

9.5.3. Théorème. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Étant donné une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$, soit $\lambda(\alpha) = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m})$ la décomposition de m déterminée par la partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en $\langle \alpha \rangle$ -orbites. Alors,*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = T^m \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)^{\mu_d}}{dT^e} \right)^{\mu_d}$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^{\underline{r}}$ est la factorielle décroissante de 4.1.

Démonstration. Pour chaque $d = 1, 2, \dots, m$, notons J_d la réunion des $\langle \alpha \rangle$ -orbites de $\llbracket 1, m \rrbracket$ qui sont de cardinal d . Notons \mathfrak{q} la partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ définie par les parties J_d non vides, *i.e.* telles que $\mu_d \neq 0$.

Pour chaque $J \in \mathfrak{q}$, notons α_J la restriction de α à J . On a $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$, et ses différentes composantes α_J sont deux à deux immiscibles. On peut donc appliquer la proposition 9.5.2 à la partition \mathfrak{q} et à la permutation α . On obtient l'égalité

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{J \in \mathfrak{q}} \frac{\chi_c(\mathbf{F}_{|J|}(\mathbf{X}))(\alpha_J, T)}{T^{|J|}}. \quad (*)$$

Maintenant, comme une partie $J_d \in \mathfrak{q}$ est la réunion de μ_d orbites de cardinal d , l'action de α sur J_d est équivalente à l'action de $\sigma_{d\mu_d}^{\mu_d}$ sur $\llbracket 1, d\mu_d \rrbracket$ et chaque terme du produit dans (*) est, d'après 9.4.3,

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_{d\mu_d}(\mathbf{X}))(\sigma_{d\mu_d}^{\mu_d}, T)}{T^{d\mu_d}} = d^{\mu_d} \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^{\mu_d}.$$

Le théorème résulte alors de remarquer que dans le produit de la formule à démontrer, les termes d'indices d tels que $\mu_d = 0$ sont tous égaux à 1. \square

9.5.4. Remarque pour \mathbf{X}^m . Tout comme dans les remarques 9.3.3 et 9.4.4, l'analogue du dernier théorème 9.5.3 pour l'espace \mathbf{X}^m est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$ (*cf.* aussi [24] (eq. 4.5)). On a donc pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$ avec $\lambda(\alpha) = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m})$:

$$\chi_c(\mathbf{X}^m)(\alpha, T) = \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^d)^{\mu_d}.$$

9.6. Comparaison entre $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ et $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus a))$

Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, notons $\lambda(\alpha) = (1^{\mu_1(\alpha)}, 2^{\mu_2(\alpha)}, \dots)$ son type. Le coefficient $\mu_1(\alpha)$ est le cardinal de l'ensemble des α -orbites réduites à un point, autrement dit, de l'ensemble des $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ fixés par α .

9.6.1. Le cas ou $\mu_1(\alpha) = 0$. On a vu dans le corollaire de 3.1.3 que si \mathbf{X} est i -acyclique, on dispose d'une suite exacte courte de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m^\bullet(\mathbf{X}))[-1] \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow 0 \quad (*)$$

où $\overset{\circ}{\mathbf{X}} := \mathbf{X} \setminus \{\bullet\}$ pour un certain $\bullet \in \mathbf{X}$, et où $\mathbf{F}_m^\bullet(\mathbf{X})$ est la réunion disjointe des parties ouvertes $\mathbf{F}_m^{i=\bullet}(\mathbf{X}) := \{(x_i, \dots, x_m) \in \mathbf{F}_m \mid x_i = \bullet\}$ où $i = 1, \dots, m$.

Or, par l'égalité évidente $\alpha(\mathbf{F}_m^{i=x}) = \mathbf{F}_m^{\alpha(i)=x}$, on voit que lorsque $\mu_1(\alpha) = 0$, on a $\alpha(\mathbf{F}_m^{i=x}) \neq (\mathbf{F}_m^{i=x})$, et donc que $\chi_c(\mathbf{F}_m^\bullet)(\alpha, T) = 0$. On conclut alors, par l'exactitude de (*), que $\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus 1)) = \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$, d'où le lemme suivant.

9.6.2. Lemme. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tout $m > 0$ et toute permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$ telle que $\mu_1(\alpha) = 0$, on a*

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus a))(\alpha, T) = \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$.

9.6.3. Remarque. Ce lemme peut aussi être vérifié en appliquant le théorème 9.5.3. Dans ce cas, il suffit de voir que pour tout $d > 1$ on a

$$\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X} \setminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)}{T^e}.$$

Or, d'après 5.1.5-(c), on a $\chi_c(\mathbf{X} \setminus 1)(\mathbf{1}, T) = \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T) - T$, et alors

$$\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(\mathbf{X} \setminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} - 1 \right).$$

On conclut par le fait bien connu sur la fonction de Möbius que affirme que l'on a $\sum_{e|d} \mu(d/e) = 0$ lorsque $d > 1$.

9.6.4. Le cas général. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, notons $I := \{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \mid \alpha(i) = i\}$ et $J := \llbracket 1, m \rrbracket \setminus I$. Les permutations $\text{id}_I \in \mathcal{S}_I$ et $\alpha|_J \in \mathcal{S}_J$ sont clairement immiscibles et on peut appliquer 9.5.2. On a

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T) = \chi_c(\mathbf{F}_{|I|}(\mathbf{X}))(\mathbf{1}, T) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_{|J|}(\mathbf{X}))(\alpha|_J, T),$$

d'où la proposition suivante.

9.6.5. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. On a*

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\alpha, T)}{\left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T)}{T}\right)^{\mu_1(\alpha)}} = \frac{\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus a))(\alpha, T)}{\left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T)}{T} - a\right)^{\mu_1(\alpha)}}$$

9.7. Comparaison entre $\chi_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))$ et $\chi_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))$

Dans la section 11, nous allons nous intéresser de plus près aux projections $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ de fibre $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$. Le théorème 11.4.9 établit que lorsque \mathbf{X} est, de plus, i -acyclique et localement connexe, la suite spectrale de Leray associée à π_a est dégénérée ($d_r = 0$, pour $r \geq 2$), auquel cas on a un isomorphisme

$$H_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})) \sim H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \otimes H_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X})).$$

Notons \mathcal{S}_a (resp. \mathcal{S}_b) le sous-groupe des permutations $\alpha \in \mathcal{S}_{b+a}$ telles que $\alpha(i) = i$ pour tout $i \leq b$ (resp. $b < i$). Le groupe \mathcal{S}_a agit sur la base $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, et le groupe \mathcal{S}_b sur la fibre $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$.

La proposition suivante montre qu'il n'est généralement pas vrai que le caractère de $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ sur $H_c(\mathbf{F}_{b+a})$ soit le produit des deux autres caractères, *i.e.* on n'a pas pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ l'égalité :

$$\chi_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))((\beta, \alpha), T) = \chi_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))(\beta, T) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))(\alpha, T). \quad (\ddagger)$$

9.7.1. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique.*

a) *Pour $d > 1$ et $r > r' \geq 1$, et pour $\pi : \mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_{dr'}(\mathbf{X})$ la projection sur la réunion de r' orbites de $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$. On a*

$$\begin{aligned} \chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r) &= (dT^d)^r Q_d(\mathbf{X})^r \\ \chi_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''}) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_{dr'}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr'}^{r'}) &= (dT^d)^r Q_d(\mathbf{X})^{r''} \cdot Q_d(\mathbf{X})^{r'} \\ \text{où } r'' &:= r - r' \text{ et } Q_d(\mathbf{X}) := \chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T) / (dT^d). \end{aligned}$$

Dans cette situation, l'égalité (\ddagger) n'est donc jamais vérifiée.

b) *Pour $a, b \geq 1$. On a pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_a$,*

$$\begin{aligned} \chi_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))(\mathbf{1}_b \times \alpha, T) &= T^{b+a} Q_1^{\underline{b+\mu_1(\alpha)}} \cdot R \\ \chi_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))(\mathbf{1}_b, T) \cdot \chi_c(\mathbf{F}_a(\mathbf{X}))(\alpha, T) &= T^{b+a} (Q_1 - a)^{\underline{b}} \cdot Q_1^{\underline{\mu_1(\alpha)}} \cdot R \end{aligned}$$

où $Q_1 := (\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T) / T)$ et $R := \chi_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))(\alpha', T) / T^{b+a}$ avec α' tel que $\mu_1(\alpha') = 0$ et $\mu_i(\alpha') = \mu_i(\alpha)$ pour les autres indices i .

Dans cette situation, la formule (\ddagger) est vérifiée si et seulement si $\alpha = \mathbf{1}_a$.

Démonstration. (a) La fibre de π étant $\mathbf{F}_{dr''}(\mathbf{X} \setminus dr')$, on a par 9.4.3

$$\begin{cases} \chi_c(\mathbf{F}_{dr}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr}^r, T) = (dT^d)^r Q_d(\mathbf{X})^r \\ \chi_c(\mathbf{F}_{dr'}(\mathbf{X}))(\sigma_{dr'}^{r'}, T) = (dT^d)^{r'} Q_d(\mathbf{X})^{r'} \\ \chi_c(\mathbf{F}_{dr''}(\mathbf{X} \setminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''}, T) = (dT^d)^{r''} Q_d(\mathbf{X} \setminus dr')^{r''}. \end{cases}$$

où, dans la troisième égalité on a $Q_d(\mathbf{X} \setminus dr') = Q_d(\mathbf{X})$, d'après 9.6.2.

(b) Les égalités résultent aussitôt de 9.5.3. La formule (‡) est vérifiée si et seulement si,

$$Q_1^{b+\mu_1(\alpha)} = (Q_1 - a)^b \cdot Q_1^{\mu_1(\alpha)}$$

et la conclusion résulte de ce que $Q_1^{b+\mu_1(\alpha)} = Q_1^{\mu_1(\alpha)} \cdot (Q_1 - \mu_1(\alpha))^b$. \square

9.7.2. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Si α et β sont immiscibles et si $\mu_1(\beta) = 0$, l'égalité (‡) est vérifiée.*

Démonstration. Conséquence du théorème 9.5.3 et du lemme 9.6.2. \square

10. Quotients d'espaces de configuration généralisés

La possibilité d'un algorithme de calcul des caractères de \mathcal{S}_m -modules $H_c^i(\Delta_\ell \mathbf{X}^m)$ donnée par le théorème 6.3.3 et évoquée dans la remarque 6.4, ouvre la porte à la détermination des polynômes de Poincaré de la cohomologie des espaces d'orbites $(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m)/\mathbf{H}$ où \mathbf{H} est un sous-groupe de \mathcal{S}_m .

10.1. Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m)/\mathbf{H}$

L'énoncé bien connu suivant rappelle le lien entre le polynôme de Poincaré des quotients et les séries de caractères.

10.1.1. Proposition. *Soit \mathbf{Z} un espace topologique de type fini muni d'une action de \mathcal{S}_m . Pour tout sous-groupe $\mathbf{H} \subseteq \mathcal{S}_m$, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(\mathbf{Z}/\mathbf{H})(-T) &= \frac{1}{|\mathbf{H}|} \sum_{h \in \mathbf{H}} \chi_c(\mathbf{Z})(h, T) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{g \in \mathcal{S}_m} \chi_c(\mathbf{Z})(g, T) \cdot \chi(\text{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathcal{S}_m} \mathbf{1})(g) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\lambda} h_{\lambda} \chi_c(\mathbf{Z})(g_{\lambda}, T) \cdot \chi(\text{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathcal{S}_m} \mathbf{1})(g_{\lambda}) \end{aligned}$$

Dans la dernière formule, la sommation est indexée par les décompositions $\lambda = \{1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots, m^{\mu_m}\}$ de m , le nombre h_{λ} est le cardinal de l'ensemble $\pi(\lambda)$ des permutations dont la décomposition en produit de cycles disjoints est de type λ , l'élément g_{λ} est alors un représentant quelconque de $\pi(\lambda)$.

Démonstration. Un théorème classique de Grothendieck ([19])³¹ donne l'équivalence $H_c^i(\mathbf{Z}/H) = H_c^i(\mathbf{Z})^H$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(\mathbf{Z}/\mathbf{H})(-T) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|\mathbf{H}|} \sum_{h \in \mathbf{H}} \text{tr}(h : H_c^i(\mathbf{Z})) \right) (-T)^i \\ &= \frac{1}{|\mathbf{H}|} \sum_{h \in \mathbf{H}} \chi_c(\mathbf{Z})(h, T). \end{aligned}$$

Les autres égalités sont classiques (cf. [24] eq. (6.1) et (6.2)). \square

10.1.2. Commentaire. Lorsque l'espace \mathbf{X} est i -acyclique, cette proposition et l'explicitation des séries de caractères des \mathcal{S}_m -modules $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$ du théorème 9.5.3, donnent des formules très explicites des polynômes de Poincaré pour les espaces de configurations cycliques et non-ordonnées associés à $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$, ce qui constitue le sujet des deux sections suivantes.

10.2. Espaces de configurations cycliques $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X})$

Soit \mathbf{C}_m le sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par le cycle $\sigma_m := (1, \dots, m)$. L'« espace de configurations cycliques de \mathbf{X} », noté $\mathbf{CF}_m(\mathbf{X})$, est l'espace

$$\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) / \mathbf{C}_m.$$

10.2.1. Théorème. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\boxed{\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T) = \frac{T^m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}},$$

où $\phi(_)$ est la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius et $(_)^r$ est la factorielle décroissante de 4.1.

Démonstration. Par 10.1.1, on a

$$\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{dr=m} \phi(d) \frac{\chi_c(\mathbf{F}_m)(\sigma_m^r, T)}{T^m}.$$

Par 9.4.3, on a alors

$$\frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{dr=m} \phi(d) d^r \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r,$$

et la proposition résulte de l'égalité 9.3.2 :

$$\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{T^d} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{T^e}. \quad \square$$

³¹ *Loc.cit.* Théorème 5.3.1 et corollaire de la Proposition 5.2.3.

10.2.2. Remarque. Un cas particulier de la proposition précédente est lorsque m est un nombre premier p . Dans ce cas, on a simplement

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_p)(-T)}{T^p} &= \frac{1}{p} \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_p)(\mathbf{1}, T)}{T^p} + (p-1) \frac{\chi_c(\mathbf{F}_p)(\sigma_p, T)}{T^p} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T)}{T} \right)^2 + (p-1) \left(\frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T^p)}{T^p} - \frac{\chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T)}{T} \right) \right) \end{aligned}$$

Où l'on remarquera que si nous notons $Q(T) := \chi_c(\mathbf{X})(\mathbf{1}, T)/T$, la dernière expression entre les grandes parenthèses est

$$Q(T)^2 + (p-1)(Q(T^p) - Q(T)),$$

qui est nulle modulo p puisque l'on a

$$Q(T)^2 \equiv_p Q(T)^p - Q(T) \equiv_p Q(T^p) - Q(T).$$

10.2.3. Remarque. En suivant la méthode décrite dans [24], la proposition résulte également comme application de la troisième égalité de 10.1.1. Dans ce cas, $\chi(\text{ind}_{\mathbf{C}_m}^{\mathbf{S}_m})(g_\lambda) \neq 0$, si et seulement si, g_λ est conjuguée à $\sigma_m^{m/d}$ pour un certain $d|m$, auquel cas

$$\lambda = \{d^{m/d}\}, \quad h_\lambda = \frac{m!}{d^{m/d}}, \quad g_\lambda := \sigma_m^{m/d}, \quad \chi(\text{ind}_{\mathbf{C}_m}^{\mathbf{S}_m})(g_\lambda) = \phi(d) \frac{d^{m/d}}{m},$$

d'où

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}))(-T) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) \chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\sigma_m^{m/d}, T),$$

et la conclusion suit par application de 9.5.3 à la décomposition λ en question, ce qui donne

$$\chi_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))(\sigma_m^{m/d}, T) = T^m d^{m/d} \left(\frac{\chi_c(\mathbf{F}_d(\mathbf{X}))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^{m/d}.$$

10.2.4. Remarque pour \mathbf{X}^m . En accord avec la remarque 9.5.4, l'analogue du dernier théorème 10.2.1 pour le produit cyclique $\mathbf{X}[m] := \mathbf{X}^m/\mathbf{C}_m$ ⁽³²⁾ est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^{\underline{r}}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la deuxième sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{X}[m])(T) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) \mathcal{P}_c(\mathbf{X})((-1)^{d+1} T^d)^{m/d},$$

qui est très précisément la formule 8.4 de [24].

10.3. Espaces de configurations non-ordonnées $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X})$

On appelle « espace de configurations non ordonnées de \mathbf{X} », noté $\mathbf{BF}_m(\mathbf{X})$, l'espace

$$\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathcal{S}_m.$$

³² Notation de [24] p. 568.

10.3.1. Théorème. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))(-T) = \frac{T^m}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{\mu_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(\mathbf{X})(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mu_d}$$

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $(_)^\mathbb{Z}$ est la factorielle décroissante (4.1), et h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_m dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})$, soit :

$$h_\lambda = \frac{m!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_m! (1!)^{\mu_1} (2!)^{\mu_2} \dots (m!)^{\mu_m}}.$$

Démonstration. Corollaire immédiat de la troisième formule de 10.1.1 modulo le calcul de séries de traces de 9.5.3. La valeur de h_λ est classique et bien connue (cf. [3] thm. 13.2, p. 215). \square

10.3.2. Remarque pour \mathbf{X}^m . Comme pour les autres remarques concernant \mathbf{X}^m , l'analogie du dernier théorème 10.3.1 pour le produit symétrique $\mathbf{X}(m) := \mathbf{X}^m / \mathcal{S}_m$ (33) est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^\mathbb{Z}$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la deuxième sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{X}(m))(T) = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{\mu_1}, \dots, m^{\mu_m})} h_\lambda \prod_{d=1}^m \mathcal{P}_c(\mathbf{X})((-1)^{d+1} T^d)^{\mu_d},$$

qui est très précisément la formule 8.3 de [24].

Concernant cette formule, on rappelle que Macdonald en a donné une très belle fonction génératrice (*loc.cit.* eq (8.5)) : le k -ième coefficient de $\mathcal{P}_c(\mathbf{X}(m))$ est le coefficient en $x^k t^m$ du développement en série entière de

$$\frac{(1 + xt)^{\beta_1} (1 + x^3 t)^{\beta_3} \dots}{(1 - t)^{\beta_0} (1 - x^2 t)^{\beta_2} (1 - x^4 t)^{\beta_4} \dots}$$

où β_k est le k -ième coefficient de $\mathcal{P}_c(\mathbf{X})$.

Nous ne connaissons pas de résultat semblable pour $\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))$, la difficulté essentielle, par rapport à l'approche de *loc.cit.*, réside dans les factorielles décroissantes.

10.3.3. Remarque. Conformément à la reparamétrisation de Church-Farb, la représentation irréductible $V(0)_m$ est la représentation triviale de \mathcal{S}_m quel que soit m (cf. 8.3.6). Un corollaire important des théorèmes de stabilité de représentation 8.8.7 et 8.9.8 est alors le suivant.

– *Corollaire.* Soit \mathbf{X} une pseudovariété (resp. i -acyclique), connexe, orientable et de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. Pour tous $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la suite des dimensions

³³ Notation de [24] p. 568.

des sous-espaces invariants $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}); k)^{\mathcal{S}_m}$ (resp. $H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}\mathbf{X}^m)^{\mathcal{S}_m}$) est stationnaire pour $m \geq 4i$, si $d_{\mathbf{X}} = 2$, et pour $m \geq 2i$, si $d_{\mathbf{X}} \geq 3$.

Il s'ensuit que dans les conditions du corollaire, les polynômes

$$\mathcal{P}_c(\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}))(1/T) \cdot T^{md_{\mathbf{X}}} \pmod{T^{i+1}}$$

sont indépendants de $m \geq 4i$; quelque chose qui est loin d'être évident à partir de la simple inspection de la formule explicite du théorème 10.3.1.

11. Suites spectrales de Leray

Cette section est consacrée à l'étude de la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées aux fibrations $\pi_a = \Delta_{?a}^{[a]}\mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ (en particulier $\pi_a = \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$), lorsque \mathbf{X} est i -acyclique et localement connexe par ars.

Mise en garde. Le corps k est de caractéristique quelconque et l'espace i -acyclique \mathbf{X} n'est pas supposé de type fini.

11.1. Cohomologie à support π -propre

11.1.1. Catégorie d'espaces au-dessus de \mathbf{B} . Soit \mathbf{B} un espace topologique. On rappelle qu'on appelle « espace de base \mathbf{B} , ou au-dessus de \mathbf{B} , » la donnée d'une application continue $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$, et « morphisme d'espaces au-dessus de \mathbf{B} » de $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$ vers $\pi_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{B}$ la donnée une application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ rendant commutatif le diagramme ci-contre.

Pour $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$ donné, la « cohomologie à support $\pi_{\mathbf{Y}}$ -propre », notée $H_{\pi!}(\pi_{\mathbf{Y}})$ où $H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$ où même $H_{\pi!}(\mathbf{Y})$, suivant les contextes, comme la cohomologie du complexe

$$(\mathcal{C}_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}), d_{\pi!}) := \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}, \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}}).$$

Les morphismes naturels de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{B}, \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}, \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}, \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}*} \underline{k}_{\mathbf{Y}})$$

induisent des morphismes naturels en cohomologie :

$$H_c(\mathbf{Y}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H(\mathbf{Y}). \quad (\ddagger\ddagger)$$

11.1.2. On rappelle (cf. 1.1.2) que dans la mesure où la résolution du faisceau constant par les cochaînes d'Alexander-Spanier $\underline{k}_{\mathbf{Y}} \rightarrow (\underline{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathbf{X}; k), d_{\bullet})$ est une résolution Φ -molle pour toute famille paracompactifiante Φ de \mathbf{B} , on

dispose du candidat canonique des « *cochaînes à support π -propre* » :

$$(\mathcal{C}_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}), d_{\pi!}) := \Gamma(\mathbf{B}, \pi_{\mathbf{Y}!}(\underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k), d_\bullet)),$$

puisque $\pi_{\mathbf{Y}!}$ conserve la propriété d'être c -mou ⁽³⁴⁾ et qu'un c -mou sur la pseudovariété dénombrable à l'infini \mathbf{B} est $\Gamma(\mathbf{B}, _)$ -acyclique ⁽³⁵⁾. Des raisons qui expliquent aussi que $H_c(\mathbf{Y})$ est calculée par le complexe des « *cochaînes à support compact* »

$$(\mathcal{C}_c(\mathbf{Y}; \mathbf{B}), d_c) := \Gamma_c(\mathbf{B}, \pi_{\mathbf{Y}!}(\underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k), d_\bullet)).$$

Dans la suite on notera

$$\mathcal{Z}_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) := \ker(d_{\pi!}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) := \text{im}(d_{\pi!}).$$

et de manière analogue pour le complexe $(\mathcal{C}_c(\mathbf{Y}; \mathbf{B}), d_c)$.

11.1.3. Lorsque $\mathbf{B} = \{\text{pt}\}$, on a $H_{\pi!}(_; \mathbf{B}) = H_c(_)$. La cohomologie à support π -propre étend la cohomologie à support compact et tout comme elle, si $j : U \hookrightarrow \mathbf{Y}$ est une inclusion ouverte, complémentaire de l'inclusion fermée $i : F \hookrightarrow \mathbf{Y}$, on munit U et F des structures d'espaces basés sur \mathbf{B} en composant les inclusions avec $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$, et l'on dispose alors des morphismes

- de prolongement par zéro $j_! : H_{\pi!}(U; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$
- de restriction à un fermé $i^* : H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(F; \mathbf{B})$

et d'une suite exacte longue de cohomologie à support π -propre

$$\cdots \rightarrow H_{\pi!}^{i-1}(F; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}^i(U; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}^i(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}^i(F; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}^{i+1}(U; \mathbf{B}) \rightarrow \cdots$$

qui est aussi un complexe de $H(\mathbf{B})$ -modules.

En effet, une décomposition ouverte-fermée $\mathbf{Y} = U \sqcup F$ donne lieu à la suite exacte courte $0 \rightarrow j_! \underline{k}_U \rightarrow \underline{k}_{\mathbf{Y}} \rightarrow i_! \underline{k}_F \rightarrow 0$ de $\text{Faisc}_k(\mathbf{Y})$, et donc au triangle exact de $D_k^+(\mathbf{B})$:

$$\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} j_! \underline{k}_U \rightarrow \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} i_! \underline{k}_F \rightarrow ,$$

où nous avons $\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} j_! = \mathbb{R}\pi_{U!}$ et $\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} i_! = \mathbb{R}\pi_{F!}$, puisque $j_!$ et $i_!$ sont exacts et transforment c -mous en c -mous ⁽³⁴⁾.

Enfin, dans le modèle des cochaînes d'Alexander-Spanier, les morphismes naturels $\pi_{\mathbf{Y}!} j_! \underline{\mathcal{A}}_U^i \rightarrow \pi_{\mathbf{Y}!} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{Y}}^i$ et $\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{Y}}^i \rightarrow \pi_{\mathbf{Y}!} \underline{\mathcal{A}}_F^i$ correspondent clairement aux opérations de prolongement par zéro et de restriction habituels.

11.1.4. Si $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue et *propre* entre deux espaces au-dessus de \mathbf{B} , le morphisme d'adjonction $\underline{k}_{\mathbf{Y}} \rightarrow (\mathbb{R}f_* \circ f^{-1}) \underline{k}_{\mathbf{Y}}$

³⁴ cf. [22] proposition 2.5.7-(ii), p. 105.

³⁵ cf. [22] proposition 2.5.10, p. 106.

donne lieu au morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}} \rightarrow (\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \circ \mathbb{R}f_*) \underline{k}_{\mathbf{Z}} = (\mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \circ \mathbb{R}f_!) \underline{k}_{\mathbf{Z}} = \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Z}!} \underline{k}_{\mathbf{Z}},$$

d'où le morphisme « image-inverse » pour la cohomologie à support π -propre $f^* : H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{B})$. La naturalité des morphismes (‡‡) de 11.1.1, donne alors lieu au diagramme commutatif de morphismes image-inverse

$$\begin{array}{ccccc} H_c(\mathbf{Y}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) & \longrightarrow & H(\mathbf{Y}) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H_c(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{B}) & \longrightarrow & H(\mathbf{Z}) \end{array}$$

L'analogie pour la cohomologie $H_{\pi!}(_ ; \mathbf{B})$ de la propriété caractéristique des espaces i -acycliques, le théorème 1.3.1-(d), est également vérifiée.

11.1.5. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Étant donnés des espaces basés $\pi_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{B}$ et $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$, soit $\pi_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$, $(x, y) \mapsto \pi_{\mathbf{Y}}(y)$ et notons $p_2 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$, $(x, m) \mapsto m$. Soit $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ un morphisme d'espaces au-dessus de \mathbf{B} , notons $f_2 := p_2 \circ f$. Soit $j : V \hookrightarrow \mathbf{Y}$ un plongement ouvert, notons $f'_2 : f^{-1}(V) \rightarrow V$ la restriction de f_2 . On a le diagramme commutatif d'espaces au-dessus de \mathbf{B} suivants,*

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & V & \xrightarrow{j} & \mathbf{Y} \end{array}$$

Alors, si f et f'_2 sont propres et si $j_! : H_{\pi!}(V; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$ est surjectif, on a

$$(f^* : H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{B})) = 0.$$

Démonstration. C'est presque littéralement la même preuve que 1.3.1-(d).

Soient $p_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ la projection canonique et $f_1 := p_1 \circ f$. Par Künneth, on a $H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathbf{B}) = H_c(\mathbf{X}) \otimes H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$ et il suffit de montrer que pour tous cocycles $\omega \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{X})$ et $\varpi \in \mathcal{Z}_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$, le cocycle

$$f^*(\omega \otimes \varpi) = f^*(p_1^* \omega \cup p_2^* \varpi) = f_1^* \omega \cup f_2^* \varpi \in \mathcal{Z}_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{B}) \quad (*)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support π -propre de \mathbf{Z} . Or, il existe par hypothèse $\tau \in \mathcal{Z}_{\pi!}(V; \mathbf{B})$ qui représente la classe de ϖ dans $H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B})$. On peut donc remplacer dans (*) $f_2^* \varpi$ par $f_2^* \tau$ qui est à support π -propre dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans \mathbf{Z} par le prolongement par zéro $j_!$. D'autre part, comme \mathbf{X} est i -acyclique, on a $f_1^* \omega = f_1^* d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de \mathbf{X} (à support non nécessairement compact), et alors

$$f_1^* \omega \cup f_2^* \tau = d(f_1^* \alpha \cup f_2^* \tau),$$

où $f_1^* \alpha \cup f_2^* \tau$ est à support π -propre de \mathbf{Z} puisqu'il en est ainsi de $f_2^* \tau$. On a donc bien $f^*(\omega \otimes \varpi) = 0$ dans $H_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{B})$. \square

11.2. Localisation du théorème de scindage

11.2.1. Naturalité de $H_{\pi!}(_ ; \mathbf{B})$ relative aux ouverts de \mathbf{B} . Soit \mathbf{B}' un ouvert de \mathbf{B} . Étant donné $\pi_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$, on note $\mathbf{Y}' := \pi_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{B}')$ et $\pi_{\mathbf{Y}'} : \mathbf{Y}' \rightarrow \mathbf{B}'$ la restriction de $\pi_{\mathbf{Y}}$. Nous avons ainsi un diagramme cartésien de plongements ouverts :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}' & \hookrightarrow & \mathbf{Y} \\ \pi_{\mathbf{Y}'} \downarrow & \square & \downarrow \pi_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{B}' & \hookrightarrow & \mathbf{B} \end{array}$$

et un morphisme naturel de restriction de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}, \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}', \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}}) = \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{B}', \mathbb{R}\pi_{\mathbf{Y}!} \underline{k}_{\mathbf{Y}'}).$$

donnant lieu à un morphisme naturel de restriction :

$$H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{Y}'; \mathbf{B}').$$

Nous aurons besoin du résultat classique suivant ⁽³⁶⁾.

11.2.2. Proposition. *Soient \mathbf{Y} et \mathbf{B} des espaces localement compacts et soit $\pi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$ une application continue. Pour tout $b \in \mathbf{B}$, le morphisme canonique*

$$\lim_{\longrightarrow \mathbf{B}' \ni b} H_{\pi!}(\pi^{-1}(\mathbf{B}'); \mathbf{B}') \rightarrow H_c(\pi^{-1}(b))$$

est un isomorphisme.

11.2.3. Notations. Pour la suite de cette section nous fixons un espace \mathbf{X} et un entier $0 \leq a \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{F}_a := \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, si $a > 0$, et $\mathbf{F}_0 := \{\text{pt}\}$.

Pour tous $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, nous avons introduit (2.1-(N-4)) les espaces

$$\Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m := \Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m \cap (\mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{F}_a),$$

que nous notons aussi $\Delta_{? \ell, m}^{[a]} := \Delta_{? \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m$ lorsque l'on aura besoin d'une écriture plus compacte. Nous y avons aussi introduit la projection $\pi_a : \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^a$ sur les dernières a coordonnées, et les espaces de base \mathbf{F}_a

$$\pi_a : \Delta_{? \ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{F}_a \quad \text{et} \quad \pi_a : \mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{F}_a.$$

Maintenant, pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$, nous notons

$$\mathbf{U} \Delta_{? \ell, m}^{[a]} := \pi_a^{-1} \mathbf{U} \cap \Delta_{? \ell, m}^{[a]} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} \mathbf{F}_m := \pi_a^{-1} \mathbf{U} \cap \mathbf{F}_m,$$

et considérons les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U} \Delta_{? \ell, m}^{[a]} & \hookrightarrow & \Delta_{? \ell, m}^{[a]} & & \mathbf{U} \mathbf{F}_m & \hookrightarrow & \mathbf{F}_m & & \mathbf{X} \times \mathbf{U} \mathbf{F}_m & \hookrightarrow & \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m & \ni & (x, \bar{y}) \\ \pi_a \downarrow & \square & \downarrow \pi_a & & \pi_a \downarrow & \square & \downarrow \pi_a & & \pi_a \downarrow & \square & \downarrow \pi_a & & \downarrow \pi_a \\ \mathbf{U} & \hookrightarrow & \mathbf{F}_a & & \mathbf{U} & \hookrightarrow & \mathbf{F}_a & & \mathbf{U} & \hookrightarrow & \mathbf{F}_a & \ni & \pi_a(\bar{y}) \end{array}$$

³⁶ Conséquence immédiate de la proposition 2.5.2 p.103, [22].

Les décompositions ouvertes-fermées

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]} &= \mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]} \sqcup \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]} \\ \mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m &= \mathbf{U}\mathbf{F}_{1+m} \sqcup \Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m) \end{aligned}$$

sont alors des décompositions d'espaces basés sur \mathbf{U} .

On peut maintenant énoncer l'analogie du théorème 3.1.1 dans le contexte d'espaces basés sur \mathbf{U} . Il est important de remarquer que si dans 3.1.1 la i -acyclicité était une condition suffisante, maintenant elle apparaît comme une condition nécessaire et suffisante.

11.2.4. Théorème de scindage local. *Soient $1 \leq a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. On fixe un ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$. Les espaces dans cet énoncé sont des sous-espaces de $\pi_a : \mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$. On note $H_{\pi!}(_)$ la cohomologie à support π_a -propre. Alors, l'espace \mathbf{X} est i -acyclique, si et seulement si, il vérifie les assertions suivantes.*

a) *Pour $m \geq a \geq 1$ et un ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$, le morphisme de restriction*

$$H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m) \rightarrow H_{\pi!}(\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m))$$

est nul et la suite

$$0 \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\mathbf{F}_m)[-1]^m \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\mathbf{F}_{m+1}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m) \rightarrow 0,$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support π -propre, est exacte.

b) *Pour $m \geq \ell \geq a \geq 1$ et un ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$, le morphisme de restriction*

$$H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})$$

est nul et la suite

$$0 \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})[-1] \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow 0,$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support π -propre, est exacte.

Démonstration. On suppose que \mathbf{X} est i -acyclique. La preuve de (a) et (b) est alors la même que dans 3.1.1 modulo la version de la propriété fondamentale des espaces i -acycliques pour les espaces basés sur \mathbf{U} de la proposition 11.1.5.

Pour l'assertion (a), on est conduit au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m) & \hookrightarrow & \mathbf{X} \times \mathbf{U}\mathbf{F}_m \\ & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & \mathbf{U}\mathbf{F}_m \end{array}$$

où l'application f_2 est propre car revêtement trivial d'ordre m .

Pour (b), on raisonne par induction sur ℓ . Sa valeur la plus petite est $\ell := a$, auquel cas $\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]} = \emptyset$ et l'assertion est claire quel que soit m . Ensuite, en supposant l'assertion établie pour $\ell - 1 \geq a$, on est conduit à considérer le

diagramme commutatif suivant où $m \geq \ell$

$$\begin{array}{ccccc}
f_2^{-1}(\mathbf{U}\Delta_{\ell-1,m-1}^{[a]}) & \hookrightarrow & \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1,m}^{[a]} & \hookrightarrow & \mathbf{X} \times \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1,m-1}^{[a]} \\
& \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\
& & \mathbf{U}\Delta_{\ell-1,m-1}^{[a]} & \hookrightarrow & \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1,m-1}^{[a]}
\end{array}$$

où f'_2 est propre car restriction (par l'image) de l'application propre de même nom $f_2' : f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1,m-1}) \rightarrow \Delta_{\ell-1,m-1}$ de la preuve de 3.1.1-(b).

Réciproquement, si $m = \ell = a = 1$ et si $\mathbf{U} = \mathbf{X}$, le morphisme $H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \rightarrow H(\Delta_1(\mathbf{X} \times \mathbf{X}))$ est nul. Or, ce morphisme s'identifie au cup-produit

$$\cup : H_c(\mathbf{X}) \otimes H(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$$

et \mathbf{X} est bien i -acyclique. \square

11.2.5. Le corollaire suivant est un résultat technique qui sera très utile pour montrer que les faisceaux des cohomologie à support π -propre de la fibration $\pi_a : \mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{F}_a$ sont constants sur les composantes connexes de \mathbf{F}_a . Ceci participera ensuite de manière décisive dans l'étude des suites spectrales de Leray correspondantes. (Voir la remarque 5.2.4.)

11.2.6. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Soient $a \leq m \in \mathbb{N}$ et $\pi_{m,a} : \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{m-a+1}, \dots, x_m)$. Pour tout $\bar{x} \in \mathbf{F}_a$, le morphisme de restriction*

$$\rho_{m,a} : H_{\pi!}(\mathbf{F}_m(\mathbf{X})) \rightarrow H_c(\pi_{m,a}^{-1}\bar{x})$$

est surjectif.

Démonstration. On raisonne par induction sur $m \geq a$. Lorsque $m = a$, on a $\pi_a = \text{id}_{\mathbf{F}_a}$ et donc $H_{\pi!}(\mathbf{F}_m) = H(\mathbf{F}_a)$, et cette cohomologie se surjecte clairement sur $H_c(\bar{x}) = H^0(\bar{x}) = k$.

Dans le cas général, on considère décomposition ouverte-fermée

$$\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{m+1} \sqcup \Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$$

et la décomposition qu'elle induit sur le fermé $\mathbf{X} \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}$, à savoir

$$\mathbf{X} \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x} = \pi_{m+1,a}^{-1}\bar{x} \sqcup \Delta_m(\mathbf{X} \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}).$$

On considère alors le morphisme de restrictions des suites de cohomologie à supports π -propres

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{\pi!}(\mathbf{F}_m)[-1]^m & \longrightarrow & H_{\pi!}(\mathbf{F}_{m+1}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \longrightarrow 0 \\
& & (\rho_{m,a})^m \downarrow & & \rho_{m+1,a} \downarrow & & \xi \downarrow \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \longrightarrow & H_c(\pi_{m,a}^{-1}\bar{x})[-1]^m & \longrightarrow & H_c(\pi_{m+1,a}^{-1}\bar{x}) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X} \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}) \longrightarrow
\end{array} \quad (*)$$

où la première ligne est exacte d'après 11.2.4-(a) (la seconde aussi, mais on n'en aura pas besoin). La colonne de gauche est surjective puisque $\rho_{m,a}$ l'est par hypothèse de récurrence, et la colonne de droite l'est puisque le morphisme de restriction $\xi : H_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m \rightarrow H_c(\mathbf{X} \times \pi_{m,a}^{-1} \bar{x})$ s'identifie trivialement à $\text{id} \otimes \rho_{m,a} : H_c(\mathbf{X}) \otimes H_{\pi!}(\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\pi_{m,a}^{-1} \bar{x})$. Une chasse au diagramme élémentaire montre alors la surjectivité de $\rho_{m+1,a}$. \square

11.2.7. Polynôme de Poincaré de la cohomologie à support π -propre

Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{F}_a$ et tout $\pi : \mathbf{Z} \rightarrow U$ tel que $\dim_k H_{\pi!}(\mathbf{Z}; U) < \infty$, on note, de manière analogue à 5.1.3,

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{Z}; U)(T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k(H_{\pi!}^i(\mathbf{Z}; U)) T^i.$$

Le corollaire suivant de 11.2.4-(a) est un ingrédient essentiel dans la preuve de dégénérescence de la suite spectrale de Leray du théorème 11.4.9. (Comparer à 5.2.3.)

11.2.8. Corollaire. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique tel que $\dim_k H_c(\mathbf{X}) < \infty$ et soit $U \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ un ouvert tel que $\dim_k H(U) < \infty$. Alors, pour tout $b > 0$,*

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}); U) = \mathcal{P}(U) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)).$$

Démonstration. Par 11.2.4-(a), on a l'égalité

$$\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{UF}_m; U) = \mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{UF}_{m-1}; U) \cdot (\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) + (m-1)T)$$

que l'on va itérer jusqu'à ce que $m-1 = a$, auquel cas $\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{UF}_a; U) = \mathcal{P}(U)$ puisque $\mathbf{UF}_a = U$ et que $\pi_a = \text{id}_U$. Le produit résiduel

$$(\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) + aT) \cdots (\mathcal{P}_c(\mathbf{X}) + (m-1)T)$$

étant alors clairement égal à $\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_{m-a}(\mathbf{X} \setminus a))$. \square

11.3. Constance des faisceaux de cohomologie à support π -propre

Pour $a \leq \ell \leq m$, reprenons les espaces \mathbf{F}_m et $\Delta_{? \ell, m}^{[a]}$ de base \mathbf{F}_a et les décompositions ouvertes-fermées de base \mathbf{F}_a

$$\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{1+m} \sqcup \Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \quad (\diamond_1)$$

$$\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]} = \Delta_{\ell, m}^{[a]} \sqcup \Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]} \quad (\diamond_2)$$

11.3.1. Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}^i(_)$ sur \mathbf{F}_a

Le cas $\Delta_{? \ell, m}^{[a]}$. Reprenons l'application $\pi_a : \Delta_{? \ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{F}_a$. Les faisceaux :

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell, m}^{[a]}}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont de fibre $H_c(\pi_a^{-1}(\bar{x}))$ en $\bar{x} \in \mathbf{F}_a$ d'après 11.2.2. D'autre part, le foncteur $\mathbb{R}\pi_{a!}$ appliqué au triangle exact de $D_k^+(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]})$

$$j_! \underline{k}_{\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}} \xrightarrow{j_!} \underline{k}_{\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}} \xrightarrow{\rho} i_! \underline{k}_{\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]}} \rightarrow$$

associé à la décomposition (\diamond_2) , où $j_!$ est le prolongement par zéro et ρ la restriction, donne la suite exacte longue de faisceaux localement constants :

$$\longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \xrightarrow{j_{i!}} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]}) \xrightarrow{+1} . \quad (\ddagger\ddagger)$$

Le cas $\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$. C'est la même démarche sur la décomposition (\diamond_1) , qui nous conduit cette fois à la suite longue de faisceaux localement constants sur \mathbf{F}_a :

$$\longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{F}_{1+m}) \xrightarrow{j_{i!}} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) \xrightarrow{+1} . \quad (\ddagger)$$

11.3.2. Théorème de scindage. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique.*

a) *Pour $a \leq m \in \mathbb{N}$, les morphismes de faisceaux de la suite (\ddagger)*

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont nuls et l'on a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{1+m}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \rightarrow 0.$$

b) *Pour $0 \leq a \leq \ell - 1$ et $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, les morphismes de faisceaux dans $(\ddagger\ddagger)$*

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont nuls et l'on a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow 0.$$

c) *Si \mathbf{X} est, de plus, localement connexe, les faisceaux dans (a,b) sont constants sur les composantes connexes de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ (cf. 1.3.4 et 2.2.2).*

Démonstration. La preuve de (a) et (b) est essentiellement la même que celle de 3.1.1. On indique brièvement les modifications à faire pour prouver (b). La preuve pour (a) suit exactement la même démarche.

Preuve de (b). On reprend les notations de 11.2.3. Pour un ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$, on pose $\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]} := \pi_a^{-1}(\mathbf{U})$. On a les suites exactes courtes (11.2.4(b)) :

$$0 \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})[-1] \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow 0. \quad (*)$$

Cela étant, la naturalité de la cohomologie à supports propres relative à la base (11.2.1) permet de dire que si $\pi_a : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{F}_a$ est un espace topologique basé sur \mathbf{F}_a , et que l'on note $\mathbf{UM} := \pi_a^{-1}(\mathbf{U})$, la correspondance

$$\mathbf{U} \rightsquigarrow H_{\pi!}(\mathbf{UM})$$

définit le préfaisceau $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{M})$ de k -espaces vectoriels sur \mathbf{F}_a . Cette idée appliquée aux suites (*) donne la suite exacte de préfaisceaux sur \mathbf{F}_a :

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})[-1] \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow 0,$$

et comme le faisceau engendré par $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(_)$ est précisément le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(_)$, on obtient l'exactitude de la suite courte des faisceaux sur \mathbf{F}_a :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]}[-1]) \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell, m}^{[a]}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \rightarrow 0,$$

et donc aussi l'annulation du morphisme ρ_i dans la suite longue ($\dagger\dagger$).

Commentaire. On remarquera que grâce à l'exactitude de ces suites courtes, l'assertion : " le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]})$ est constant sur une composante connexe \mathbf{C} de \mathbf{F}_a " sera conséquence de ce que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1, m}^{[a]})$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell, m}^{[a]})$ la vérifient. Or, comme la plus petite valeur possible de ℓ vérifie $a = \ell - 1$ et que $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq a, m}^{[a]}) = \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{a, m}^{[a]})$, une preuve de l'assertion par récurrence découle de prouver seulement que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell, m}^{[a]})$ sont constants sur \mathbf{C} et ce, pour tout $\ell \geq a$ (et pas seulement $\ell > a$).

Preuve de (c). Nous commençons par montrer que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_m)$ sont constants sur une composante connexe \mathbf{C} de \mathbf{F}_a .

Nous procédons par induction sur $m \geq a$, le cas $m = a$ étant évident. Supposons maintenant que $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_m)$ est constant sur \mathbf{C} . Comme $\Delta_m(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$ est isomorphe au produit $\llbracket 1, m \rrbracket \times \mathbf{F}_m$, le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_m)^m$ et il est donc constant sur \mathbf{C} . D'autre part, on a $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \simeq H_c(\mathbf{X}) \otimes_k \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_m)$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$ est aussi constant sur \mathbf{C} . Par conséquent, dans la suite exacte courte de (a)

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m \mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{1+m}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \rightarrow 0, \quad (**)$$

les faisceaux de droite et de gauche sont constants. Nous allons en déduire que celui du centre l'est également.

• *Critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants.* ⁽³⁷⁾ Dans une suite exacte courte de faisceaux sur une composante connexe \mathbf{C} de \mathbf{F}_a

$$0 \rightarrow \underline{\underline{A}} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \underline{\underline{B}} \rightarrow 0$$

où $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont constants, le faisceau \mathcal{L} est constant, si et seulement si la suite est scindée, donc si et seulement si, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\underline{k}_{\mathbf{F}_a}}(\underline{\underline{B}}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{k}_{\mathbf{F}_a}}(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{B}})$$

est surjective, et comme $\underline{\underline{B}}$ est constant sur un espace localement connexe, ceci équivaut à la surjectivité de

$$\Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathbf{C}, \underline{\underline{B}}) = B_z, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Dans le cas de la suite de faisceaux (**), si $\bar{x} \in \mathbf{F}_a$ et si \mathbf{C} est la composante connexe de \mathbf{F}_a contenant \bar{x} , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) &= \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)_{\bar{x}} = H_c(\mathbf{X}) \otimes \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_m)_{\bar{x}} \\ &= H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\pi_a^{-1} \bar{x}), \end{aligned}$$

³⁷ Voir aussi la remarque 5.2.2.

d'après 11.2.2. D'autre part, le morphisme $\Gamma(\mathbf{C}, _) \rightarrow (_)_{\bar{x}}$ « germe en \bar{x} », donne sur le préfaisceau $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathbf{C}, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)_{\bar{x}} = \Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) \quad (\dagger) \\ \parallel & & \parallel \\ H_c(\mathbf{X}) \otimes H_{\pi!}(\mathbf{C}\mathbf{F}_m) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \rho_{\mathbf{C}}} & H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\pi_a^{-1}\bar{x}) \end{array}$$

où l'on voit apparaître la restriction $\rho_{\mathbf{C}} : H_{\pi!}(\mathbf{C}\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ qui est surjective comme conséquence de la surjectivité de $\rho_{m,a} : H_{\pi!}(\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$, d'après 11.2.6, et du fait que, dans la décomposition

$$H_{\pi!}(\mathbf{F}_m) = \bigoplus_{\mathbf{C}' \in \Pi_0 \mathbf{F}_a} H_{\pi!}(\mathbf{C}'\mathbf{F}_m),$$

la restriction $H_{\pi!}(\mathbf{C}'\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ est nulle si $\mathbf{C}' \not\ni \bar{x}$. Le morphisme (\dagger) est par conséquent surjectif. Comme d'autre part une section globale d'un préfaisceau détermine une section globale du faisceau associé, le diagramme naturel induit par les prolongements par zéro

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathbf{C}, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{F}_{1+m})) & \xrightarrow{j!} & \Gamma(\mathbf{C}; \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) \\ \downarrow & & \downarrow (\dagger) \\ \Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{m+1})) & \xrightarrow{j!} & \Gamma(\mathbf{C}; \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) \end{array}$$

permet de conclure à la surjectivité du morphisme

$$\Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{1+m})) \twoheadrightarrow \Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)),$$

et le critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants s'applique, et le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{1+m})$ est bien constant sur \mathbf{C} .

Preuve de la deuxième partie de (c). D'après le commentaire à la fin de la preuve de (b), il suffit de prouver que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell,m}^{[a]})$ sont constants sur les composantes connexes de \mathbf{F}_a .

On a la décomposition en parties ouvertes (cf. 2.3.3)

$$\Delta_{\ell,m} = \coprod_{\mathbf{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}.$$

L'inclusion $\mathbf{F}_{\mathbf{p}} \subseteq \Delta_{\ell,m}^{[a]}$ a lieu, si et seulement si, la partition \mathbf{p} de $\llbracket 1, m \rrbracket$ décompose l'intervalle $\llbracket m-a+1, m \rrbracket$ en singletons. Appelons une telle partition « π_a -adaptée ». Si \mathbf{p} n'est pas π_a -adaptée, on a $\mathbf{F}_{\mathbf{p}} \cap \Delta_{\ell,m}^{[a]} = \emptyset$.

Si \mathbf{p} est π_a -adaptée, la projection $\pi_a : \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{F}_a$ (sur les a derniers termes) est trivialement équivalente à des projections $\pi_a : \mathbf{F}_{\ell} \rightarrow \mathbf{F}_a$ déjà traitées. Le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{\mathbf{p}})$ est donc constant sur les composantes connexes de \mathbf{F}_a . On conclut ensuite grâce à la décomposition évidente

$$\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell,m}^{[a]}) = \bigoplus_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{\mathbf{p}}),$$

où \mathbf{p} décrit l'ensemble des partitions $\mathbf{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)$ qui sont π_a -adaptées. \square

11.3.3. Remarque et notation. L'assertion 11.3.2-(c) permet de préciser le sens du commentaire 1.3.4. En effet, si nous l'appliquons à $\pi_{1+a} : \mathbf{F}_{1+a} \rightarrow \mathbf{F}_a$ la constance du faisceau $\mathcal{H}_{\pi_!}(\mathbf{F}_{1+a})$ sur une composante connexe $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{F}_a$ signifie que les groupes $H_c(\mathbf{X} \setminus \bar{x})$ sont canoniquement isomorphes pour $\bar{x} \in \mathbf{C}$. On peut donc voir cette assertion comme une large généralisation et une amélioration de 1.3.3. Elle permet également de donner un sens à la notation $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus a))$, quel que soit m .

11.4. Dégénérescence des suites spectrales de Leray

11.4.1. Critère élémentaire de dégénérescence. Nous donnons ici un critère de dégénérescence de suites spectrales par comparaison à une suite spectrale dégénérée. Le critère est très élémentaire, mais il sera utilisé à plusieurs reprises, ce qui justifie que nous l'énonçons séparément.

Comme il est d'usage, l'expression « *la suite spectrale (\mathcal{E}_r, d_r) est dégénérée* » sera synonyme de « $d_r = 0$, pour tout $r \geq 2$ ».

11.4.2. Proposition. Soit $\{\varphi_r : (\mathcal{E}_r, d_r) \rightarrow (\mathcal{E}'_r, d'_r) \mid r \in \mathbb{N}\}$ un morphisme de suites spectrales.

- a) Si (\mathcal{E}_r, d_r) est dégénérée et φ_2 est surjectif, alors (\mathcal{E}'_r, d'_r) est dégénérée.
- b) Si (\mathcal{E}'_r, d'_r) est dégénérée et φ_2 est injective, alors (\mathcal{E}_r, d_r) est dégénérée.

Dans les deux cas on a $\varphi_r = \varphi_2$, pour tout $r \geq 2$.

Démonstration. (a) On montre par induction sur $r \geq 2$, que $d'_r = 0$ et que $\varphi_r = \varphi_2$. Lorsque $r := 2$, le complexe (\mathcal{E}'_2, d'_2) est quotient de $(\mathcal{E}_2, 0)$ par hypothèse, donc $d'_2 = 0$. Maintenant, si nous avons montré que $d'_r = 0$, on aura $\varphi_{r+1} = \varphi_r$ et alors $\varphi_{r+1} = \varphi_2$ puisque par hypothèse inductive $\varphi_r = \varphi_2$, le morphisme de complexes φ_{r+1} est alors surjectif et $d'_{r+1} = 0$. L'assertion (b) se démontre par un raisonnement dual. \square

11.4.3. Les suites spectrales de Leray. Le théorème 11.3.2 établit que pour un espace i -acyclique \mathbf{X} localement connexe, les faisceaux

$$\mathcal{H}_{\pi^!}^i(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell, m}^{[a]}}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont constants sur les composantes connexes de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.

Notons $c : \mathbf{F}_a \rightarrow \{\text{pt}\}$ l'application constante. Comme nous l'avons déjà rappelé dans 11.1.1, la théorie des foncteurs dérivés donne des identifications

$$\mathbb{R}(c_\phi \circ \pi_{a!})(\underline{k}_{\Delta_{? \ell, m}^{[a]}}) = \mathbb{R}c_\phi(\mathbb{R}\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell, m}^{[a]}})), \quad \text{où } \phi \in \{*, !\},$$

dont on tire les suites spectrales de Leray

$$(\mathcal{E}_r(\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_\varphi, d_r), \quad \text{où } \varphi \in \{\pi, c\}.$$

Ces suites se décomposent en sommes directes de suites spectrales

$$\mathcal{E}_r(\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_\varphi = \bigoplus_{C \in \Pi_0 \mathbf{F}_a} \mathcal{E}_r(C \Delta_{? \ell, m}^{[a]})_\varphi,$$

où \mathbf{C} est une composante connexe de \mathbf{F}_a . Les termes de $\mathbb{E}_2(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_\varphi$ sont

$$\mathbb{E}_2(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_\varphi := H_\phi(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]})), \quad \text{où } H_\phi \in \{H, H_c\},$$

et comme le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]})$ est constant sur \mathbf{C} , on a respectivement

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_c := H_c^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \implies H_c^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) \\ \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_{\pi!} := H^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \implies H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}). \end{cases} \quad (\mathbb{E}_2)$$

où $F_{\mathbf{C}}$ désigne la fibre de $\pi_a : \Delta_{? \ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{F}_a$ au-dessus de \mathbf{C} .

11.4.4. Remarque sur les notations. Même si nous avons lourdement insisté sur le fait que les fibres des projections $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ ne sont généralement pas homéomorphes, nous avons pris la liberté de les noter depuis 5.2.3 par la notation générique $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$. C'est une notation commode mais qui demande à être réinterprétée en fonction du contexte. Par exemple, les termes $\mathbb{E}_2(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi$ seront souvent notés de manière succincte par

$$\mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi = H_\phi(\mathbf{U}) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \quad (*)$$

Lorsque \mathbf{U} est connexe les fibres de $\mathcal{H}_{\pi!}(\mathbf{F}_{b+a})$ sont constantes et il n'y a pas d'ambiguïté. Autrement, la notation sous-entend qu'il faut décomposer \mathbf{U} en ses composantes connexes \mathbf{C} et écrire $\mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi$ comme somme directe $\bigoplus_{\mathbf{C}} \mathbb{E}_2(\mathbf{C}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi$, tout comme dans les formules (\mathbb{E}_2) ci-dessus.

L'un des intérêts de la notation $(*)$ est que comme $\mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))$ est intrinsèque d'après 5.2.3, l'égalité permet une description immédiate du polyôme de Poincaré $\mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi$, comme dans le paragraphe suivant.

11.4.5. Le cas où $\dim_k(H_c(\mathbf{X})) < +\infty$. Lorsque \mathbf{X} est i -acyclique et que $\dim H_c(\mathbf{X}) < +\infty$, on a $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X} \setminus n)) < +\infty$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, d'après 2.4.2-(b). Les remarques 5.2.3 et 11.2.8 s'appliquent alors au cas de la fibration localement triviale $\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ de fibre $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$, de sorte que, pour tout ouvert \mathbf{U} de $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, on a

- (A) si $H_c(\mathbf{U}) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_c(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})) = \mathcal{P}_c(\mathbf{U}) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))$;
- (B) si $H(\mathbf{U}) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})) = \mathcal{P}(\mathbf{U}) \cdot \mathcal{P}_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))$.

On en déduit, respectivement dans chaque cas, que :

- (A) si $H_c(\mathbf{U}) < +\infty$, alors

$$\dim_k \mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_c = H_c(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}) = \dim_k \mathbb{E}_\infty(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_c;$$

- (B) si $H(\mathbf{U}) < +\infty$, alors

$$\dim_k \mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!} = H_{\pi!}(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}) = \dim_k \mathbb{E}_\infty(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!};$$

et on conclut que les suites $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_c, d_r)$ et $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées, car si jamais on avait $d_r \neq 0$ pour un certain r , on aurait forcément

$$\dim(\mathcal{I}E_2) \geq \dim(\mathcal{I}E_r) > \dim(\mathcal{I}E_{r+1}) \geq \dim(\mathcal{I}E_\infty),$$

ce qui n'est pas le cas.

11.4.6. Remarque. Dans cette approche, la finitude joue un rôle essentiel, mais nous verrons qu'elle n'est pas nécessaire. La proposition suivante s'affranchi des hypothèses de finitude sur \mathbf{U} , mais demande encore celle sur \mathbf{X} . Ce sera le théorème 11.4.9 qui aura l'énoncé le plus général, *i.e.* sans aucune hypothèse de finitude sur \mathbf{X} .

11.4.7. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique, localement connexe et tel que $\dim_k H_c(\mathbf{X}) < +\infty$. Alors, pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, les suites spectrales $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r)$ et $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées.*

Démonstration. Comme $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$ localement connexe, il suffit de considérer le cas où \mathbf{U} est connexe. Nous pouvons alors fixer une famille croissante $\mathcal{U} := \{\uparrow \mathbf{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ d'ouverts connexes et de type fini qui recouvre $\mathbf{F}_a(\mathbf{X})$. Pour chaque $\mathbf{U}_m \in \mathcal{U}$, on considère le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_m \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a} & = & \mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a} \xrightarrow{j_m} \mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a} \\ & & \begin{array}{ccc} \pi_a \downarrow & \boxtimes & \downarrow \pi_a \\ \mathbf{U}_m & \xrightarrow{j_m} & \mathbf{U} \end{array} \end{array}$$

◦ *La suite spectrale $\mathcal{I}E(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_c$.* — Le cas où $H_c(\mathbf{U}) < +\infty$ est celui déjà considéré dans 11.4.5-(A) où $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{F}_a)_c, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas général on a recours au recouvrement \mathcal{U} . Les morphismes canoniques

$$j_m! \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}} = \mathbb{R}\pi_a! j_m! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}} \rightarrow \underline{k}_{\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}}$$

induisent un morphisme de “prolongement par zéro” de suites spectrales

$$j_m! : (\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}_m), d_r) \rightarrow (\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}), d_r), \quad (\mathcal{I}E_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme de complexes

$$H_c(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \xrightarrow{j_m! \otimes \text{id}} H_c(\mathbf{U}) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)). \quad (\mathcal{I}E_2)$$

Maintenant, le fait que $\varinjlim_m j_m! : \varinjlim_m H_c(\mathbf{U}_m) = H_c(\mathbf{U})$ implique que le morphisme de complexes

$$\varinjlim_m j_m! \otimes \text{id} : \varinjlim_m (\mathcal{I}E_2(\mathbf{U}_m), d_2) \rightarrow (\mathcal{I}E_2(\mathbf{U}), d_2)$$

est bijectif, et alors, comme les suites $(\mathcal{I}E(\mathbf{U}_m), d_r)$ sont dégénérées, le critère de dégénérescence 11.4.2 s'applique et $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{U}), d_r)$ est bien dégénérée.

◦ *La suite spectrale $\mathcal{I}E(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}$.* — Le cas où $H(\mathbf{U}) < +\infty$ est celui déjà considéré dans 11.4.5-(B) où $(\mathcal{I}E_r(\mathbf{F}_a)_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas

général on a recours au recouvrement \mathcal{U} . Les morphismes canoniques

$$\mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}} \rightarrow \mathbb{R}j_{m*} j_m^{-1} \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}} = \mathbb{R}j_{m*} \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}}$$

donnent les morphismes “de restriction” de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{U}; \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{U}_m; \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}})$$

d’où les morphismes de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r),$$

et donc le morphisme de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r) \rightarrow \varprojlim_m (\mathbb{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r). \quad (\mathbb{E}_r)$$

Or, comme l’application en homologie $\varinjlim_m H_*(\mathbf{U}_m, k) \rightarrow H_*(\mathbf{U}, k)$ est bijective, on a par dualité, que $H(\mathbf{U}) = \varprojlim_m H(\mathbf{U}_m)$ l’est également. On en déduit les identifications suivantes pour les termes \mathbb{E}_2 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbb{E}_2(\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!} &= H(\mathbf{U}) \otimes H_c(F) \\ &= (\varprojlim_m H(\mathbf{U}_m)) \otimes H_c(F) = \varprojlim_m (H(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(F)) \quad (\mathbb{E}_2) \\ &= \varprojlim_m \mathbb{E}_2(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, \end{aligned}$$

où on a noté $H_c(F) := H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))$ et où l’égalité de la ligne centrale est justifiée par le fait que $\dim_k H_c(F) < +\infty$. Ces identifications sont compatibles aux différentielles d_2 . Les conclusions de (B) s’appliquent aux suites $(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$, et alors $d_2 = 0$ dans $\mathbb{E}_2(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}$. Le critère de dégénérescence 11.4.2 s’applique et $(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. \square

11.4.8. Le cas général. Nous nous affranchissons maintenant de l’hypothèse de finitude pour $H_c(\mathbf{X})$ et montrons la dégénérescence des suites spectrales en question en nous appuyant sur la proposition précédente 11.4.7.

11.4.9. Théorème. *Soient $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Soit \mathbf{X} un espace topologique i -acyclique et localement connexe. Pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$, les applications $\pi_a : \mathbf{U}\Delta_{? \ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{U}$ donnent lieu à des suites spectrales de Leray pour les cohomologies $H_c(_)$ et $H_{\pi!}(_)$ notées respectivement*

$$(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_c, d_r) \quad \text{et} \quad (\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_{\pi!}, d_r) \quad (\mathbb{E}_r).$$

telles que

$$\begin{cases} \bigoplus_{\mathbf{C} \in \Pi_0 \mathbf{U}} \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_c = H_c^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \Rightarrow H_c^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) \\ \bigoplus_{\mathbf{C} \in \Pi_0 \mathbf{U}} \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}\Delta_{? \ell, m}^{[a]})_{\pi!} = H^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{? \ell, m}^{[a]}) \end{cases}$$

où \mathbf{C} désigne une composante connexe de \mathbf{U} et où $F_{\mathbf{C}}$ désigne une fibre quelconque de π_a au-dessus de \mathbf{C} . De plus, les suites spectrales (\mathbb{E}_r) sont dégénérées.

Démonstration. Compte tenu des résultats qui précèdent, il ne nous reste qu'à justifier la dégénérescence des suites spectrales, ce pourquoi nous allons nous limiter aux ouverts \mathbf{U} connexes. Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell,m}^{[a]})$ sont donc constants sur \mathbf{U} .

On fixe une famille croissante $\mathcal{V} := \{\uparrow \mathbf{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts \mathbf{V}_n (pas forcément connexes) de type fini qui recouvre \mathbf{X} .

• *Le cas des fibrations* $\pi_a : \mathbf{U}\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$

◦ *Dégénérescence de* $(\mathbf{U}\mathcal{I}_r(\mathbf{F}_{b+a})_{c,\pi!}, d_r)$. — Compte tenu de la proposition 11.4.7, nous avons juste à vérifier le cas où $\dim_k(H_c(\mathbf{X})) = +\infty$.

Pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$, notons $\mathbf{U}_m := \mathbf{F}_a(\mathbf{V}_m) \cap \mathbf{U}$. La famille $\mathcal{U} := \{\mathbf{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est clairement un recouvrement ouvert croissant de \mathbf{U} . On remarquera aussi que l'on des inclusions ouvertes

$$\mathbf{U}_m \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{V}_m) \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{V}_n) \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$$

pour tous $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$.

Considérons ensuite les diagrammes commutatifs où $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{V}_n) & \longleftarrow & \mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{V}_n) \xrightarrow{j_{m,n}} & \mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \xleftarrow{j_m} & \mathbf{U} \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \\ \pi_a \downarrow & \text{(I)} & \pi_a \downarrow & \text{(II)} & \pi_a \downarrow & \text{(III)} & \downarrow \pi_a \\ \mathbf{F}_a(\mathbf{V}_n) & \longleftarrow & \mathbf{U}_m & \xlongequal{\quad} & \mathbf{U}_m \xrightarrow{j_m} & \mathbf{U} \end{array}$$

Les sous-diagrammes (I) et (III) sont des produits fibrés et les cohomologies à support compact des fibres de π_a y sont (constantes car \mathbf{U} est connexe) respectivement $\mathbf{F}_b(\mathbf{V}_n \setminus a)$ et $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$.

Dans le sous-diagramme (II), la base est constante et seul les fibres changent. La famille croissante de plongements ouverts $\{j_{m,n}\}_n$ recouvre $\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})$ et les morphismes de complexes

$$\lim_{\rightarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}c_\phi \mathbb{R}\pi_{a!} j_{m,n}! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{V}_n)} \rightarrow \mathbb{R}c_\phi \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})}$$

où $c : \mathbf{U}_m \rightarrow \{\text{pt}\}$ est l'application constante et $\phi \in \{*, !\}$, induisent alors les morphismes de suites spectrales

$$\lim_{\rightarrow n \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{V}_n))_\varphi, d_r) \rightarrow (\mathcal{I}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi, d_r) \quad (\mathcal{I}_r)$$

où $\varphi \in \{\pi!, c\}$, qui s'identifient pour $r = 2$, au morphisme

$$\lim_{\rightarrow n \in \mathbb{N}} (H_\phi(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{V}_n \setminus a)) \xrightarrow{\text{id} \otimes j_n!} H_\phi(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))), \quad (\mathcal{I}_2)$$

où $H_\phi \in \{H, H_c\}$ et où $j_n : H_c(\mathbf{V}_n) \rightarrow H_c(\mathbf{X})$ est le prolongement par zéro. Or, comme la famille $\{\mathbf{F}_a(\mathbf{V}_n)\}_{n \geq m \in \mathbb{N}}$ recouvre $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$, la limite inductive des morphismes $(\text{id} \otimes j_n!)$ est un isomorphisme.

Enfin, les suites spectrales $(\mathcal{I}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{V}_n))_\varphi, d_r)$ sont dégénérées d'après 11.4.7 puisque $\dim H_c(\mathbf{V}_n) < +\infty$. Le critère de dégénérescence 11.4.2 s'applique et les suite spectrales $(\mathcal{I}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_\varphi, d_r)$ sont bien dégénérées.

Revenons maintenant au sous-diagramme (III). Ici, les fibres sont fixes et égales à $\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)$ mais la base change. Aussi, nous avons deux situations différentes à considérer.

◦ *La suite spectrale* $(\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r)$. — Les morphismes de complexes des prolongements par zéro

$$\lim_{\rightarrow \mathbf{m}} \mathbb{R}c! \mathbb{R}\pi_{a!} j_{\mathbf{m}}! \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})} \rightarrow \mathbb{R}c! \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X})},$$

induisent un morphisme de suites spectrales

$$\lim_{\rightarrow \mathbf{m}} (\mathcal{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r) \rightarrow (\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r), \quad (\mathcal{E}_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$\lim_{\rightarrow \mathbf{m}} (H_c(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))) \xrightarrow{\lim_{\rightarrow \mathbf{m}} j_{\mathbf{m}}! \otimes \text{id}} H_c(\mathbf{U}) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)), \quad (\mathcal{E}_2)$$

clairement bijectif puisque $\{\mathbf{U}_m\}$ recouvre \mathbf{U} . Ce fait, et la dégénérescence déjà établie des suites spectrales $(\mathcal{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r)$ font que le critère de dégénérescence 11.4.2 s'applique et la suite spectrale $(\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_c, d_r)$ est dégénérée.

◦ *La suite spectrale* $(\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r)$. — On commence par rappeler le morphisme canonique de restriction de complexes dans $D^+(\mathbf{U})$

$$\mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X})} \rightarrow \mathbb{R}\pi_{a!} \mathbb{R}j_{\mathbf{m}*} \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})} = \mathbb{R}j_{\mathbf{m}*} \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})},$$

où l'égalité est justifiée puisque (III) est un produit fibré. On en déduit le morphisme de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{U}; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X})}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{U}_m; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X})}),$$

qui donne lieu au morphisme de suites spectrales

$$(\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r) \rightarrow \varprojlim_{\mathbf{m}} (\mathcal{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r), \quad (\mathcal{E}_r)$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$H(\mathbf{U}) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a)) \xrightarrow{\varprojlim_{\mathbf{m}} j_{\mathbf{m}}^* \otimes \text{id}} \varprojlim_{\mathbf{m}} (H(\mathbf{U}_m) \otimes H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))). \quad (\mathcal{E}_2)$$

Or, comme $\{\mathbf{U}_m\}$ recouvre \mathbf{U} , on a $H(\mathbf{U}) = \varprojlim_{\mathbf{m}} H(\mathbf{U}_m)$ et (\mathcal{E}_2) est injectif. Nous savons d'autre part, que les suites spectrales $(\mathcal{E}_r(\mathbf{U}_m \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées. Le critère de dégénérescence 11.4.2 s'applique et la suite spectrale $(\mathcal{E}_r(\mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}))_{\pi!}, d_r)$ est dégénérée.

Ceci termine la preuve du cas des fibrations $\pi_a : \mathbf{UF}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$.

• *Le cas des fibrations* $\pi_a : \mathbf{U}\Delta_{\ell}^{[a]}\mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$

Résulte du cas précédent, en raison de la décomposition ouverte ⁽³⁸⁾

$$\Delta_{\ell}^{[a]}\mathbf{X}^m = \coprod_{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$$

où \mathbf{p} est une partition π_a -adaptée de $\mathfrak{P}_{\ell}(m)$, et où $\mathbf{F}_{\mathbf{p}} \simeq \mathbf{F}_{\ell}$.

³⁸ Cf. fin de la démonstration du théorème 11.3.2.

- Le cas des fibrations $\pi_a : \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell}^{[a]} \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$

Notons $j : \mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}$ l'inclusion ouverte. Le morphisme de prolongement par zéro dans $D^+(\mathbf{U})$

$$j! \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]}} = \mathbb{R}\pi_a! j! \underline{k}_{\mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]}} \rightarrow \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}}$$

donne lieu aux morphismes de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma_\phi(\mathbf{U}; \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_\phi(\mathbf{U}; \mathbb{R}\pi_a! \underline{k}_{\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}}),$$

avec $\Gamma_\phi \in \{\Gamma, \Gamma_c\}$, qui induisent des morphismes de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{\ell, m}^{[a]})_\varphi, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]})_\varphi, d_r), \quad (\mathbb{E}_r)$$

avec $\varphi \in \{\pi!, c\}$, qui s'identifient pour $r := 2$, aux morphismes

$$H_\phi(\mathbf{U}) \times H_c(F_\ell) \xrightarrow{\text{id} \otimes j!} H_\phi(\mathbf{U}) \times H_c(F_{\leq \ell}) \quad (\mathbb{E}_2)$$

avec $H_\phi \in \{H, H_c\}$, et où $F_{? \ell}$ désigne la fibre de $\pi_a : \mathbf{U}\Delta_{? \ell, m}^{[a]} \rightarrow \mathbf{U}$, et

$$j! : H_c(F_\ell) \rightarrow H_c(F_{\leq \ell}) \quad (\dagger)$$

est le prolongement par zéro. Or, le théorème 11.2.4-(b) établit la surjectivité du prolongement par zéro

$$H_{\pi!}(\mathbf{V}\Delta_{\ell, m}^{[a]}) \longrightarrow H_{\pi!}(\mathbf{V}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]}) \quad (\ddagger)$$

pour tout $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{F}_a$. Si maintenant \mathbf{V} parcourt une base de voisinages connexes d'un point, la proposition 11.2.2 assure la surjectivité de (\dagger) , et donc aussi celle des morphismes (\mathbb{E}_2) . Comme nous avons déjà établi la dégénérescence de $(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]})_\varphi, d_r)$, le critère 11.4.2 s'applique et $(\mathbb{E}_r(\mathbf{U}\Delta_{\leq \ell, m}^{[a]})_\varphi, d_r)$ est aussi dégénérée. Ceci termine la preuve du théorème. \square

11.4.10. Sur l'action de $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ sur la suite spectrale de Leray

Reprenons la discussion de 9.7. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, réalisons $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ comme le sous-groupe de \mathcal{S}_{b+a} des permutations laissant stables les sous-intervalles $[[1, b]]$ et $[[b+1, b+a]]$ et faisons-le agir sur \mathbf{F}_{b+a} par son action naturelle à travers \mathcal{S}_{b+a} . Faisons-le ensuite agir sur \mathbf{F}_a , à travers de la projection sur \mathcal{S}_a . La projection (2.1-(N-4))

$$\pi_a : \mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{F}_a(\mathbf{X}),$$

est alors $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ -équivariante.

Action de \mathcal{S}_b sur $\mathbb{E}_2^{p, q}(\mathbf{C})$

Notons par $\Phi_h : \mathbf{F}_{b+a} \rightarrow \mathbf{F}_{b+a}$ l'homéomorphisme de l'action de $h \in \mathcal{S}_b$. On a $\pi_a \circ \Phi_h = \pi_a$. L'action de Φ_h respecte donc les fibres de π_a et l'action induite sur $H_c(\mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{F}_a))$ correspond à l'action de \mathcal{S}_b sur le second facteur du produit tensoriel $H_c(\mathbf{C}) \otimes H_c(F_{\mathbf{C}})$.

Action de \mathcal{S}_a sur $\mathbb{E}_2^{p,q}(\mathcal{S}_a \mathbf{C})$

Les exemples de la proposition 9.7.1, montrent bien que l'action de \mathcal{S}_a sur $H_c(\mathcal{S}_a \mathbf{C}, \mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{F}_a))$ ne correspond pas à l'action de \mathcal{S}_a sur le premier facteur du produit tensoriel $H_c(\mathcal{S}_a \mathbf{C}) \otimes H_c(F_{\mathbf{C}})$, et ne se voit donc pas sur la suite spectrale de Leray.

Conclusion

Ces remarques montrent que seule l'action $\mathcal{S}_b \times \mathbf{1}_a$ sur $H_c(\mathbf{F}_{b+a})$ et $H_{\pi!}(\mathbf{F}_{b+a})$ se voit sur les termes \mathbb{E}_2 des suites spectrales de Leray (cf. 11.4.9)

$$\begin{cases} \bigoplus_{\mathbf{C}} \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}) := H_c^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \Rightarrow H_c^{p+q}(\mathbf{F}_{b+a}), \\ \bigoplus_{\mathbf{C}} \mathbb{E}_2^{p,q}(\mathbf{C}) := H^p(\mathbf{C}) \otimes H_c^q(F_{\mathbf{C}}) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\mathbf{F}_{b+a}). \end{cases}$$

Elle se voit comme étant l'action de \mathcal{S}_b sur $H_c(F_{\mathbf{C}}) = H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{X} \setminus a))$.

12. Appendice sur les espaces i -acycliques

Nous rassemblons ici quelques résultats d'existence d'espaces i -acycliques ainsi que des contrexemples à certaines propriétés de l' i -acyclicité que l'on aurait souhaité avoir mais qui ne sont pas vérifiées en toute généralité.

12.1. Espaces de configuration généralisés

– Si \mathbf{X} est i -acyclique, l'espace $\Delta_{\gamma\ell} \mathbf{X}^m$ est i -acyclique pour $0 < \ell \leq m$.

Démonstration. Si \mathbf{X} est i -acyclique, \mathbf{X}^m l'est aussi (1.2.4-(f)), et donc aussi l'ouvert $\mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}^m$ (1.2.4-(e)) de même que tout espace $\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m$, car réunion disjointe ouverte d'espaces homéomorphes à $\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X})$ (2.3.3).

Pour établir la i -acyclicité des espaces $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$, nous utilisons le critère 1.3.1-(c) selon lequel un espace \mathbf{Y} est i -acyclique lorsque pour tout compact $K \subseteq \mathbf{Y}$, la restriction $\rho_K : H_c(\mathbf{Y}) \rightarrow H(K)$ est nulle. Dans le cas présent, comme en plus le prolongement par zéro $j_i : H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ est surjectif (3.1.1-(b)) et que $\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m$ est réunion disjointe des ouverts $U_{\mathbf{p}} := \mathbf{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, avec $\mathbf{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)$ (cf. 2.3.2), le critère en question sera validé par la nullité, pour tous \mathbf{p} et K , des composées

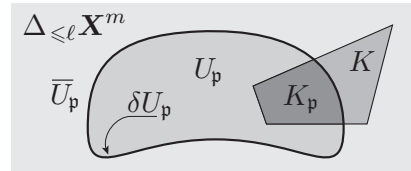
$$H_c(U_{\mathbf{p}}) \xrightarrow{j_i} H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \xrightarrow{\rho_K} H(K). \quad (\diamond)$$

Pour \mathbf{p} et K donnés, notons $\bar{U}_{\mathbf{p}}$ l'adhérence de $U_{\mathbf{p}}$ dans $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$, puis

$$\delta U_{\mathbf{p}} := \bar{U}_{\mathbf{p}} \setminus U_{\mathbf{p}} \quad \text{et} \quad K_{\mathbf{p}} := K \cap \bar{U}_{\mathbf{p}}.$$

Les triplets d'espaces $(U_{\mathbf{p}} \subseteq \bar{U}_{\mathbf{p}} \supseteq \delta U_{\mathbf{p}})$

et $(\mathbf{F}_{\ell}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}^{\ell} \supseteq \Delta_{\leq \ell-1, \ell})$ sont homéomorphes et l'annulation de (\diamond) résultera du lemme suivant qui généralise quelque peu le théorème 3.1.1-(b).



⊢ Lemme. Soit \mathbf{X} un espace i -acyclique. Pour tout compact $J \subseteq \mathbf{X}^\ell$, le morphisme de restriction

$$H_c(\mathbf{X}^\ell) \rightarrow H_c((\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^\ell) \cup J) \quad (\dagger\dagger J)$$

est nul. En particulier, le prolongement par zéro $H_c(\mathbf{F}_\ell(\mathbf{X}) \setminus J) \rightarrow H_c(\mathbf{X}^\ell)$ est surjectif.

Preuve du lemme. On procède comme dans la démonstration de 3.1.1. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_2^{-1}(\mathbf{F}_{\ell-1}(\mathbf{X})) & \hookrightarrow & ((\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^\ell) \cup J) \xrightarrow{f} \mathbf{X} \times \mathbf{X}^{\ell-1} = \mathbf{X}^\ell \\ & \searrow f'_2 & \searrow f_2 \downarrow p_2 \\ & & \mathbf{F}_{\ell-1}(\mathbf{X}) \xrightarrow{j} \mathbf{X}^{\ell-1} \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte). La restriction f'_2 de $f_2 := p_2 \circ f$ est propre puisque si $L \subseteq \mathbf{F}_{\ell-1}(\mathbf{X})$ est compact, on a

$$f_2^{-1}(L) = (p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} \mathbf{X}^\ell) \cup (p_2^{-1}(L) \cap J)$$

où $p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} \mathbf{X}^\ell$ est compact puisque la restriction de p_2 à $\Delta_{\ell-1} \mathbf{X}^\ell$ est un revêtement fini au-dessus de $\mathbf{F}_{\ell-1}(\mathbf{X})$ (cf. *loc.cit.*). L'annulation de $(\dagger\dagger J)$ résulte alors d'appliquer 1.3.1-(d), exactement comme dans 3.1.1. \square

Dans la situation présente, ce lemme (avec $J := K_{\mathfrak{p}}$) nous dit que le morphisme de prolongement par zéro

$$H_c(U_{\mathfrak{p}} \setminus K) \twoheadrightarrow H_c(\overline{U}_{\mathfrak{p}})$$

est surjectif. Une classe de cohomologie $[\alpha] \in H_c(U_{\mathfrak{p}})$ est donc représentée par un cocycle d'Alexander-Spanier $\alpha \in \underline{\mathcal{A}}(U_{\mathfrak{p}})$ dont le support $|\alpha|$ est compact dans $U_{\mathfrak{p}} \setminus K$. Comme cette partie est ouverte dans $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$, le cocycle α représente aussi l'image $j_![\alpha]$ de $[\alpha]$ dans $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$. Or, on a $|\alpha| \cap K = \emptyset$ et donc $\rho_K(j_![\alpha]) = 0$. L'annulation des morphismes (\diamond) est ainsi établie et l'espace $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$ est bien i -acyclique. \square

12.2. Variétés toriques affines

⊢ On suppose le corps k de caractéristique nulle.

- a) Si \mathbf{G} un groupe fini agissant sur un espace i -acyclique \mathbf{X} , l'espace des orbites \mathbf{X}/\mathbf{G} est i -acyclique.
- b) Une variété torique affine U_σ associée à un cône simplicial σ est i -acyclique.

Démonstration. (a) Résulte aussitôt des égalités $H_c(\mathbf{X}/\mathbf{G}) = H_c(\mathbf{X})^{\mathbf{G}}$ et $H(\mathbf{X}/\mathbf{G}) = H(\mathbf{X})^{\mathbf{G}}$ et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathbf{X}/\mathbf{G}) = H_c(\mathbf{X})^{\mathbf{G}} & \hookrightarrow & H_c(\mathbf{X}) \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ H(\mathbf{X}/\mathbf{G}) = H(\mathbf{X})^{\mathbf{G}} & \hookrightarrow & H(\mathbf{X}) \end{array}$$

(b) On a $U_\sigma = \mathbb{A}_n(\mathbb{C})^{\mathbf{G}} \times (\mathbb{C}^*)^m$, où \mathbf{G} est un groupe abélien fini agissant sur l'espace affine complexe $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ (cf. [15], §2.1, p. 29 et §2.2, p. 34). \square

12.3. Groupes de Lie non-compacts

† *Tout groupe de Lie réel connexe non compact est i -acyclique.*

Démonstration. Comme un groupe de Lie \mathbf{G} est toujours une variété différentielle orientable, il revient au même de montrer que \mathbf{G} est \cup -acyclique (1.2.4-(c)). Pour cela, on remarque que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Delta_{\mathbf{G}} \times \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{G} \\ (x, x)g &\mapsto (x, xg) \end{aligned}$$

est bien un homéomorphisme échangeant les plongements fermés

$$\Delta_{\mathbf{G}} \times \{e\} \subseteq \Delta_{\mathbf{G}} \times \mathbf{G}, \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{G}} \subseteq \mathbf{G} \times \mathbf{G}$$

Le morphisme de restriction à la diagonale s'identifie alors par Künneth au morphisme

$$\begin{aligned} H_c(\Delta_{\mathbf{G}}) \otimes H_c(\mathbf{G}) &\rightarrow H_c(\Delta_{\mathbf{G}}) \otimes H_c(\{e\}) \\ \omega \otimes \varpi &\mapsto \omega \otimes \varpi|_e \end{aligned}$$

clairement nul lorsque \mathbf{G} n'est pas compact. \square

12.4. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

† *Si $\text{car } k \neq 2$, tout ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est i -acyclique.*

Démonstration. Résulte de ce que $H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}); k) = 0$ pour tout $i < n$. \square

12.5. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

† *Soit \mathbf{U} un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire contient une hypersurface complexe Z .*

- a) *Si $\text{car}(k) = 0$, l'espace \mathbf{U} est i -acyclique.*
- b) *Si $\text{car}(k) = p > 0$, l'espace \mathbf{U} est i -acyclique si $n = 1 \pmod{2}$, ou bien si $n = 0 \pmod{2}$ et si les degrés des composantes irréductibles de Z sont premiers à p .*

Démonstration. Par 1.2.4-(e), l'assertion résulte aussitôt du cas où l'ouvert est $U := \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus Z$. L'ouvert U est alors une variété complexe *affine* lisse de dimension n . D'après un théorème de Hamm (cf. [11] th. (6.8) p. 26), il a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini de dimension réelle n . Il s'ensuit que les groupes d'homologie $H_i(\mathbf{X}; A)$ sont nuls, pour $i > n$ et tout anneau A , et de même en cohomologie. Comme U est non singulière et orientable, on dispose de la dualité de Poincaré-Lefschetz $H_i(U; A) \simeq H_c^{2n-i}(U; A)$, et donc $H_c^i(U; A) = 0$ pour tout $i < n$. Par conséquent, on a à priori

$$(\epsilon_{U,i} : H_c^i(U; A) \rightarrow H^i(U; A)) = 0, \quad \forall i \neq n,$$

et la preuve de la proposition se réduit à montrer l'annulation de $\epsilon_{U,n}$.

Notons $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ l'inclusion ensembliste.

Le morphisme $\epsilon_{U,n}$ se factorise à travers $H^n(\mathbb{P}_n)$ suivant les morphismes

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(U; A) & \xrightarrow{j_!} & H^n(\mathbb{P}_n; A) & \xrightarrow{j^*} & H^n(U; A) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\epsilon_{U,n}} & & \uparrow \end{array}$$

où $j_!$ désigne le prolongement par zéro et j^* la restriction. On a aussitôt deux cas à considérer suivant la parité de n .

$n = 1 \bmod 2$. On a $H^n(\mathbb{P}_n; A) = 0$ et donc $\epsilon_{U,n} = 0$. La proposition est alors prouvée et ce, quel que soit l'anneau de coefficients A .

$n = 0 \bmod 2$. On a $H(\mathbb{P}_n; A) = A$. Dans ce cas, on a intérêt à reprendre notre convention et considérer que l'anneau de coefficients A est un corps, auquel cas on a l'équivalence

$$(\epsilon_{U,n} = 0) \iff \left(\begin{array}{l} \text{le morphisme de restriction} \\ \rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(Z) \\ \text{est injectif} \end{array} \right) \quad (\ddagger)$$

En effet, comme $H^n(\mathbb{P}_n)$ est une droite vectorielle, l'annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaut au fait que soit $j_!$, soit j^* , est nul. Or, la dualité de Poincaré échange ces morphismes et il sont tous les deux nuls ou non nuls. Ainsi, l'annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaut à l'annulation de $j_!$ et donc à l'injectivité de ρ_n , par la suite exacte longue de cohomologies.

$$\dots \longrightarrow H_c^n(U) \xrightarrow{j_!} H^n(\mathbb{P}_n) \xrightarrow{\rho_n} H^n(Z) \longrightarrow \dots$$

Notons L l'opérateur sur $H(\mathbb{P}_n)$ et $H(Z)$ de multiplication par la classe fondamentale $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n)$ de $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}_n$, et considérons le diagramme commutatif suivant où la deuxième ligne est la suite exacte de cohomologies

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^n(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(Z) & & \\ & & \downarrow L^{(n-2)/2} \simeq & \oplus & \downarrow L^{(n-2)/2} & & \\ \dots & H_c^{2n-2}(U) & \xrightarrow{j_!} & H^{2n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_{2n-2}} & H^{2n-2}(Z) & \xrightarrow{c} & H_c^{2n-1}(U) \dots \end{array} \quad (\ddagger\ddagger)$$

Nous avons maintenant besoin de plus de renseignements sur le morphisme de liaison c . Pour cela, on commence par remarquer que l'on peut supposer Z irréductible. En effet, si Z' est une composante irréductible de Z , l'ouvert $U = \mathbb{P}_n \setminus Z$ est contenu dans l'ouvert $U' = \mathbb{P}_n \setminus Z'$ et il est donc i -acyclique si U' l'est (1.2.4-e).

Supposons donc que $Z = V(f)$ est irréductible et, compte tenu des hypothèses, que $\deg f$ n'est pas multiple de la caractéristique du corps de coefficients. L'espace vectoriel $H^{2n-2}(Z)$ est alors de dimension 1 et comme

$$H_c^{2n-1}(U; \mathbb{Z}) = H_1(U; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(\deg f) \quad (\star)$$

(cf. [11] chap. 4, prop. 1.3, p. 102), on a $H_c^{2n-1}(U) = H_1(U) = 0$. Ces données reportées sur $(\ddagger\ddagger)$ assurent que ρ_{n-2} est surjective, et donc injective aussi. L'injectivité de ρ_n découle alors de la commutativité du même diagramme. \square

12.5.1. Remarque. L'hypothèse dans la proposition 12.5 concernant la caractéristique du corps de coefficients de la cohomologie est optimale. En effet, si $Z = V(f) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ avec f irréductible homogène de degré p , on a pour $U := \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \setminus V(f)$ d'après (\star) :

$$H_c^3(U; \mathbb{F}_p) \simeq H_1(U; \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p,$$

auquel cas, la suite exacte longue de cohomologie devient

$$H^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\rho_2} (H^2(V(f); \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \xrightarrow{c} (H^3(U; \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \rightarrow 0,$$

le morphisme c est bijectif, et alors nécessairement $\rho_2 = 0$.

On en déduit la surjectivité de $j_! : H_c^2(U; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_c^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p)$ et, par dualité, l'injectivité de $j^* : H^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^2(U; \mathbb{F}_p)$. À partir de là, la non nullité de $\epsilon_{U,2} = j^* \circ j_!$ découle de ce que $H^2(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$. L'ouvert U n'est donc pas i -acyclique pour la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_p .

12.5.2. Remarque. Dans le cas où la proposition 12.5 intéresse la cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, le fait que $H_!(U)$ soit concentrée en dimension moitié n , peut aussi être justifié en invoquant le théorème de comparaison de Grothendieck entre la cohomologie des formes différentielles holomorphes (dont le degré est à priori majoré par n) et la cohomologie du faisceau constant.

Dans le même ordre d'idées, si l'on se restreint au cas où l'hypersurface est supposée non-singulière, l'injectivité de ρ_n (et donc la i -acyclivité de U) admet aussi une justification via le théorème de Lefschetz vache. En effet, notons L l'opérateur de multiplication par la classe génératrice $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ et considérons, pour n pair, le diagramme commutatif ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-2}(U) & & \\ \downarrow j_! & & \\ H^{n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow[\sim]{L} & H^n(\mathbb{P}_n) \\ \downarrow \rho_{n-2} & & \downarrow \rho_n \\ H^{n-2}(Z) & \xrightarrow{L} & H^n(Z) \end{array}$$

L'injectivité de $\rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(Z)$ découle alors par une chasse au diagramme élémentaire de ce que :

- $L : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n)$ est trivialement bijectif,
- $L : H^{(n-1)-1}(Z) \rightarrow H^{(n-1)+1}(Z)$ est bijectif d'après le théorème vache de Lefschetz.
- $\rho_{n-2} : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^{n-2}(Z)$ est injectif puisque $H_c^{n-2}(U) = 0$ en raison de précisément de l'affinité de U .

12.6. Ouverts non i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

– *Tout ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire est contenu dans un fermé algébrique complexe (ou réel) de dimension réelle strictement plus petite que n n'est pas i -acyclique.*

Démonstration. Un tel ouvert contient le complémentaire \mathbf{U} d'un fermé algébrique \mathbf{Y} de petite dimension. Il suffira donc, d'après 1.2.4-(e), de ne considérer que ce cas. Des suites longues de cohomologie, on retire les sous-suites

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\mathbf{Y}) \rightarrow H_c^n(\mathbf{U}) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(\mathbf{Y}) = 0 \\ 0 = H_{\mathbf{Y}}^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(\mathbf{U}) \rightarrow H_{\mathbf{Y}}^{n+1}(\mathbb{P}_n) \end{aligned}$$

où $H^n(\mathbf{Y}) = 0$ puisque $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{Y}) < n$, et $H_{\mathbf{Z}}^n(\mathbb{P}_n) = H^n(\mathbf{Y})^{\vee} = 0$ ⁽³⁹⁾. \square

12.7. Courbes algébriques i -acycliques

– *Une courbe algébrique complexe irréductible \mathbf{C} qui est i -acyclique est rationnellement lisse. Si de plus \mathbf{C} est affine, elle est homéomorphe à un ouvert algébrique de \mathbb{C} .*

Démonstration. Pour chaque $x \in \mathbf{X}$, et tout voisinage ouvert $V \ni x$, le morphisme $\alpha_x : H_x(\mathbf{C}) \rightarrow H(\mathbf{C})$ se factorise à travers $H_c(\mathbf{C})$ de sorte que si \mathbf{C} est supposée i -acyclique, on a $\alpha_x = 0$ d'où la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H(\mathbf{C}) \rightarrow H(\mathbf{C} \setminus \{x\}) \rightarrow H_x(\mathbf{C})[1] \rightarrow 0.$$

Il s'ensuit que lorsque \mathbf{C} est complexe irréductible, on a $H_x^1(\mathbf{C}) = 0$ (\dagger) puisque \mathbf{C} et $\mathbf{C} \setminus \{x\}$ sont connexes. D'autre part, la singularité Σ de \mathbf{C} est une partie fermée de dimension 0 donc discrète, et x admet des voisinages ouverts coniques $V = \hat{c}(\mathbb{L}(x, \mathbf{C}))$, où $\mathbb{L}(x, \mathbf{C})$, le « lien de x dans \mathbf{C} », est une réunion disjointe de cercles $\sqcup_{i=1}^r \mathbb{S}^1$. On a donc d'après (\dagger), l'égalité

$$0 = H_x^1(\mathbf{C}) = H_x^1(\hat{c}(\mathbb{L}(x, \mathbf{C}))) = \overline{H}^0(\mathbb{L}(x, \mathbf{C})) = k^{r-1},$$

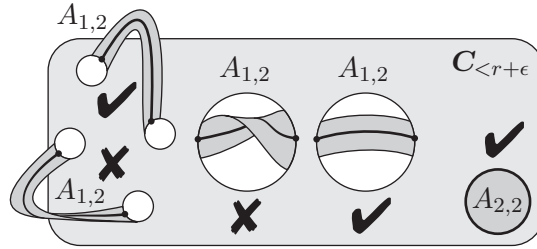
où \overline{H} désigne la cohomologie réduite. Par conséquent, $r = 1$ et x est rationnellement lisse dans \mathbf{C} .

³⁹ Par le formalisme de la dualité de Poincaré-Grothendieck-Verdier, cela résulte de ce que $\mathcal{D}^{\bullet} R c_{\mathbf{Y}!} c_{\mathbf{Y}}^! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}} = R c_{\mathbf{Y}*} c_{\mathbf{Y}}^{-1} \underline{\mathcal{D}}^{\bullet} = R c_{\mathbf{Y}*} c_{\mathbf{Y}}^{-1} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}}[2n]$ et du fait que $\underline{\mathcal{D}}^{\bullet} = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}}[2n]$.

Supposons maintenant que \mathbf{C} est en plus affine. Quitte à remplacer les voisinages coniques $\hat{c}^{(1)}$ par des disques \mathbb{D}^2 , nous pouvons supposer que \mathbf{C} est une sous-variété fermée et différentiable de $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ à laquelle nous pouvons appliquer la théorie de Morse ⁽⁴⁰⁾. Soit donc $h : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de Morse et notons $\mathbf{C}_{<r} := \{x \in \mathbf{C} \mid h(x) < r\}$, c'est un espace i -acyclique car ouvert de \mathbf{C} qui l'est par hypothèse. Montrons que $\mathbf{C}_{<r}$ est homéomorphe à un ouvert algébrique de \mathbb{C} .

Pour r petit on a $\mathbf{C}_r \sim \mathbb{C}$. Supposons ensuite que pour une certaine valeur critique r , l'espace $\mathbf{C}_{<r}$ est homéomorphe à \mathbb{C} privé d'un ensemble fini de disques fermés disjoints homéomorphes à \mathbb{D}^2 . Le bord $\mathbf{C}_r = \partial\mathbf{C}_{<r}$ est alors une réunion finie de cercles ¹.

Par la théorie de Morse, $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$ est homéomorphe au récolement de $\mathbf{C}_{<r}$ et d'une anse $A_{1,2} = \overline{\mathbb{D}^1} \times \overline{\mathbb{D}^1}$ de noyau de dimension 1, ou bien d'une anse $A_{2,2} = \overline{\mathbb{D}^2} \times \overline{\mathbb{D}^0}$ de noyau de dimension 2. Comme $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$ est un ouvert d'une variété algébrique complexe, il est orientable, ce qui exclu certains recollements.



Pour une anse $A_{1,2}$, il y a deux recollements orientables possibles qui résultent du fait que le bord du cœur de $A_{1,2}$, à savoir $\overline{\mathbb{D}^1} = [0, 1]$, possède deux composantes connexes $\{0, 1\}$. Ces composantes peuvent être collées tantôt sur deux composantes connexes de $\partial\mathbf{C}_{<r}$ tantôt sur la même. Dans le premier cas, $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$ serait homéomorphe à un tore $\mathbf{T} := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ privé d'un ensemble fini de points \mathbf{F} , mais alors on aurait la suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{H}^0(\mathbf{F}) \rightarrow H_c^1(\mathbf{T} \setminus \mathbf{F}) \rightarrow H^1(\mathbf{T}) \rightarrow 0,$$

et $H^1(\mathbf{T}) \hookrightarrow H^1(\mathbf{T} \setminus \mathbf{F})$ par dualité. Donc $\dim H_1^1(\mathbf{C}_{<r+\epsilon}) = \dim H^1(\mathbf{T}) = 2$, ce qui contredit la i -acyclité de $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$. Dans le deuxième cas, un trou de \mathbf{C}_r est partiellement comblé par l'anse et $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$ est bien comme annoncé.

Pour une anse $A_{2,2}$. On recolle le disque \mathbb{D}^2 par son bord ¹ sur le bord de $\mathbf{C}_{<r}$. Par connexité, il n'y a qu'une seule manière de le faire et c'est en comblant l'un des trous de $\mathbf{C}_{<r}$. L'espace $\mathbf{C}_{<r+\epsilon}$ est donc, de nouveau, homéomorphe à \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points. \square

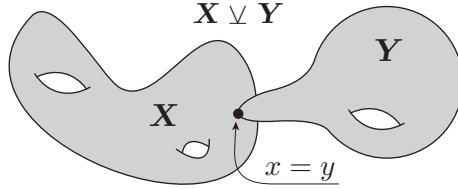
⁴⁰ Cf. le théorème fondamental de structure dans [25], thm. 2.7, p. 47.

12.7.1. Remarque. Dans la preuve de 12.7, le tore $\mathbf{T} := \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ privé d'un nombre fini non nul de points est une variété affine complexe non singulière \mathbf{C} qui n'est pas i -acyclique. Les produits finis $\mathbf{P} := \prod_i \mathbf{C}_i$ de tels espaces sont des exemples de variété affine complexe non singulière non i -acycliques, contrairement à tout produit de la forme $\mathbb{C} \times \mathbf{P}$ (1.2.4).

12.8. Bouquet d'espaces i -acycliques

– Un bouquet d'espaces i -acycliques est i -acyclique. Et de même en remplaçant i -acyclique par (totalemment) \cup -acyclique.

Démonstration. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux espaces i -acycliques. Notons $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ le bouquet qui identifie $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{Y}$.



On considère le morphisme suivant de suites exactes de Mayer-Vietoris associées à la décomposition en parties fermées $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H_c(x = y) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) & \longrightarrow & H_c(\mathbf{X}) \oplus H_c(\mathbf{Y}) & \longrightarrow \\
 & \parallel & & \downarrow \epsilon_{\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}} & & \epsilon_{\mathbf{X}} \downarrow & \downarrow \epsilon_{\mathbf{Y}} \\
 \longrightarrow & H(x = y) & \longrightarrow & H(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) & \xrightarrow{\rho} & H(\mathbf{X}) \oplus H(\mathbf{Y}) & \longrightarrow
 \end{array}$$

où $\rho : H^+(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \rightarrow H^+(\mathbf{X}) \oplus H^+(\mathbf{Y})$ est clairement injectif. La nullité de $\epsilon_{\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}}$ résulte alors immédiatement de celles de $\epsilon_{\mathbf{X}}$ et $\epsilon_{\mathbf{Y}}$.

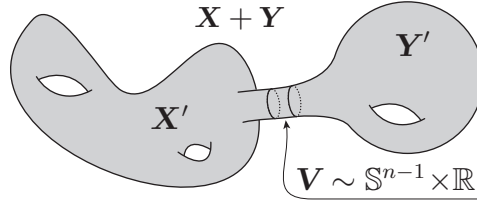
Le même raisonnement prouve que $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ est (totalemment) \cup -acyclique si les espaces \mathbf{X} et \mathbf{Y} le sont. \square

12.9. Sommes amalgamées d'espaces i -acycliques

– La somme amalgamée de variétés i -acycliques est i -acyclique si et seulement si au moins l'une des variétés est orientable.

Démonstration. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux variétés topologiques i -acycliques de dimension n . Notons \mathbf{X}' et \mathbf{Y}' des complémentaires d'un point dans \mathbf{X} et \mathbf{Y} respectivement, ce sont des espaces i -acycliques d'après 1.2.4(e). La somme amalgamée $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ est la variété topologique obtenue en recollant homéomorphiquement \mathbf{X}' et \mathbf{Y}' le long du cylindre ouvert bordant ${}^{n-1}\mathbb{R}$

noté \mathbf{V} bordant respectivement \mathbf{X}' et \mathbf{Y}' .



On considère alors les suites exactes longues de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{X}' \cup \mathbf{Y}'$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H_c^i(\mathbf{V}) & \xrightarrow{\alpha_i} & H_c^i(\mathbf{X}') \oplus H_c^i(\mathbf{Y}') & \xrightarrow{\beta_i} & H_c^i(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \longrightarrow \\
 & \downarrow \epsilon_{\mathbf{V},i} & & \downarrow \epsilon_{\mathbf{X}',i} \oplus \epsilon_{\mathbf{Y}',i} & & \downarrow \epsilon_{\mathbf{X}+\mathbf{Y},i} & \\
 & & & & & & \\
 \longleftarrow & H^i(\mathbf{V}) & \xleftarrow{\delta_i} & H^i(\mathbf{X}') \oplus H^i(\mathbf{Y}') & \xleftarrow{\gamma_i} & H^i(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \longleftarrow
 \end{array} \quad (*)$$

où

$$\begin{cases} H_c^i(\mathbf{V}) = k(1) \otimes (k(0) \oplus k(n-1)) = k(1) \oplus k(n), \\ H^i(\mathbf{V}) = k(0) \oplus k(n-1). \end{cases}$$

Cas $i \neq n - 1$. Le morphisme β_i est surjectif et γ_i est injectif, soit parce que $i < n$ auquel cas $H^{i-1}(\mathbf{V}) = 0$, soit parce que $i = n$ auquel cas les cohomologies $H^n(_)$ sont nulles. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^i(\mathbf{X}') \oplus H_c^i(\mathbf{Y}') & \xrightarrow{\beta_i} & H_c^i(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow \epsilon_{\mathbf{X}+\mathbf{Y},i} & & & & \\
 H^{i-1}(\mathbf{V}) & \longrightarrow & H^i(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \xleftarrow{\gamma_i} & H^i(\mathbf{X}') \oplus H^i(\mathbf{Y}') & & (*)
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. On y voit que

$$\gamma_i \circ \epsilon_{\mathbf{X}+\mathbf{Y},i} \circ \beta_i = \epsilon_{\mathbf{X}',i} \oplus \epsilon_{\mathbf{Y}',i} = 0,$$

et nous concluons, indépendamment de l'orientabilité de \mathbf{X} et \mathbf{Y} , que

$$\epsilon_{\mathbf{X}+\mathbf{Y},i} = 0, \quad \forall i \neq n - 1.$$

Cas $i = n - 1$. La suite de Mayer-Vietoris en degré n est

$$\longrightarrow (H_c^n(\mathbf{V}) = k) \xrightarrow{\alpha_n} H_c^n(\mathbf{X}') \oplus H_c^n(\mathbf{Y}') \longrightarrow H_c^n(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\ddagger)$$

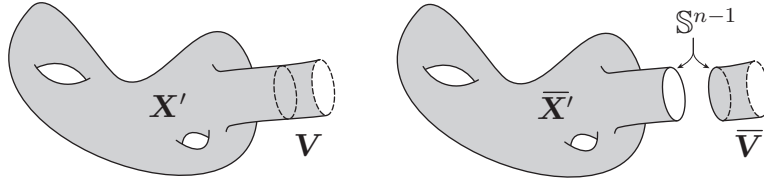
montre que α_n est injective pour peu que \mathbf{X} ou \mathbf{Y} soit orientable. Dans ces cas, β_{n-1} sera surjective et le diagramme (*) pour $i = n - 1$ fournit toujours l'annulation $\epsilon_{\mathbf{X}+\mathbf{Y},n-1} = 0$ puisque γ_{n-1} est injective. Ceci termine la preuve de l'un des sens de la proposition.

Réciproquement, ni \mathbf{X} ni \mathbf{Y} ne sont orientables, ce qui équivaut à dire que ni \mathbf{X}' ni \mathbf{Y}' ne le sont. Nous allons nous intéresser à des suites longues de

cohomologies associées à la décomposition ouvert/fermé

$$\mathbf{X}' = \mathbf{V} \sqcup (\mathbf{X}' \setminus \mathbf{V})$$

où $\mathbf{X}' \setminus \mathbf{V}$ est clairement est une variété à bord $n-1$ et d'intérieur homéomorphe à \mathbf{X}' , raison pour laquelle on la notera $\overline{\mathbf{X}'}$. Enfin, l'adhérence de \mathbf{V} dans \mathbf{X}' qui sera notée $\overline{\mathbf{V}}$, est une variété à bord dont le bord $n-1$ est aussi le bord de $\overline{\mathbf{X}'}$.



On a alors le diagramme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^{n-1}(\mathbf{X}') & \xrightarrow{\text{rest}} & H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'}) & \xrightarrow{c_X} & (H_c^n(\mathbf{V}) = k) & \longrightarrow & (H_c^n(\mathbf{X}') = 0) \\ \text{rest} \downarrow & & \text{rest} \downarrow & \text{(I)} & \text{id} \downarrow & & \text{rest} \downarrow \\ (H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{V}}) = 0) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(n-1) & \xrightarrow{\simeq} & (H_c^n(\mathbf{V}) = k) & \longrightarrow & (H_c^n(\overline{\mathbf{V}}) = 0) \end{array}$$

On y constate que la classe fondamentale de \mathbf{V} se relève bien en une classe $[\mathbf{V}_X] \in H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'})$ et que cette classe se restreint sur la classe fondamentale $[\]$ de $n-1$, d'où le carré :

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'}) \ni [\mathbf{V}_X] & \xrightarrow{c_X} & [\mathbf{V}] \\ \text{rest} \downarrow & \text{(I)} & \parallel \\ H_c^{n-1}(n-1) \ni [\] & \xrightarrow{c_X} & [\mathbf{V}] \end{array}$$

Maintenant, en remarquant que $H_c(\overline{\mathbf{X}'}) \xrightarrow{\text{rest}} H_c(n-1)$ se factorise suivant

$$H_c(\overline{\mathbf{X}'}) \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{X}'}}} H(\overline{\mathbf{X}'}) \xrightarrow{\text{rest}} H(n-1),$$

on déduit que

$$\epsilon_{\overline{\mathbf{X}'}}([\mathbf{V}_X]) \neq 0. \quad (**)$$

Ces observations s'appliquent telles quelles également à \mathbf{Y} et conduisent aux mêmes conclusions où \mathbf{Y} vient remplacer \mathbf{X} .

Considérons à présent la décomposition ouvert/fermé

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{V} \sqcup (\mathbf{X} + \mathbf{Y} \setminus \mathbf{V}) = \mathbf{V} \sqcup (\overline{\mathbf{X}'} \sqcup \overline{\mathbf{Y}'})$$

et le morphisme de suites exactes de cohomologie

$$\begin{array}{ccc}
H_c^{n-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'}) \oplus H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{Y}'}) \xrightarrow{c_{\mathbf{X}} + c_{\mathbf{Y}}} (H_c^n(\mathbf{V}) = k) \\
\downarrow \epsilon_{\mathbf{X} + \mathbf{Y}} & \text{II} & \downarrow \epsilon_{\overline{\mathbf{X}'}} \oplus \epsilon_{\overline{\mathbf{Y}'}} \\
H^{n-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) & \longrightarrow & H^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'}) \oplus H^{n-1}(\overline{\mathbf{Y}'}) \xrightarrow{c_{\mathbf{X}} + c_{\mathbf{Y}}} (H^n(\mathbf{V}) = 0) \\
& & \downarrow \epsilon_{\mathbf{V}}
\end{array}$$

La classe $([\mathbf{V}_{\mathbf{X}}], -[\mathbf{V}_{\mathbf{Y}}]) \in H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{X}'}) \oplus H_c^{n-1}(\overline{\mathbf{Y}'})$ appartient clairement au noyau de $c_{\mathbf{X}} \oplus c_{\mathbf{Y}}$ et survit au morphisme $\epsilon_{\overline{\mathbf{X}'}} \oplus \epsilon_{\overline{\mathbf{Y}'}}$ d'après (**). La commutativité de (II) permet alors de conclure que $\epsilon_{\mathbf{X} + \mathbf{Y}} \neq 0$ et donc que l'espace $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ n'est pas i -acyclique. \square

12.10. La bouteille de Klein épointée

Dans l'implication (\cup -acyclique) \Rightarrow (i -acyclique) de l'assertion 1.2.4-(c), l'hypothèse d'orientabilité est indispensable. On donne ici un contreexemple lorsque cette hypothèse fait défaut.

† La bouteille de Klein épointée vérifie le théorème de scindage 3.1.1. Elle n'est ni i -acyclique ni totalement \cup -acyclique, mais elle est bien \cup -acyclique.

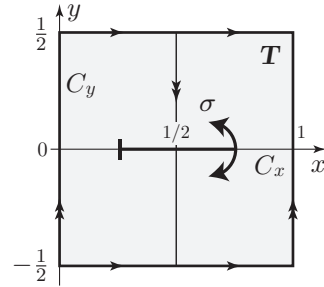
Notons \mathbf{T} le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. L'anneau de cohomologie $H(\mathbf{T})$ est engendré par les 1-cocycles dx et dy . Si nous notons $C_x := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $C_y := \{0\} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on peut voir que

$$H_{C_x}^1(\mathbf{T}) = \langle dy \rangle_k \subseteq H^1(\mathbf{T}), \quad H_{C_y}^1(\mathbf{T}) = \langle dx \rangle_k \subseteq H^1(\mathbf{T}).$$

L'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$, induit sur $H(\mathbf{T})$ l'action $\sigma : dx \mapsto dx$ et $\sigma : dy \mapsto -dy$ de sorte que l'on a

$$H(\mathbf{T})^{\langle \sigma \rangle} \simeq k(0) \oplus \langle dx \rangle_k(1).$$

Comme la bouteille de Klein est la variété quotient $\mathbf{K} := \mathbf{T}/\langle \sigma \rangle$, si $\nu : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{K}$ est la surjection canonique, le morphisme $\nu^* : H(\mathbf{K}) \rightarrow H(\mathbf{T})$ identifie $H(\mathbf{K})$ à $H(\mathbf{T})^{\langle \sigma \rangle} \simeq k(0) \oplus k(1)$.



On pose maintenant $\mathbf{X} := \mathbf{K} \setminus \text{pt}$.

\cup -acyclité de \mathbf{X} . L'examen des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H_{\text{pt}}^i(\mathbf{X}) = k(2) & \longrightarrow & H^i(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\rho_i} & H^i(\mathbf{X}) & \longrightarrow \\
& & & & & & \text{(\diamond)} \\
\longrightarrow & H_c^i(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\iota_i} & H_c^i(\mathbf{K}) & \longrightarrow & H_c^i(\text{pt}) = k(0) & \longrightarrow
\end{array}$$

montre que l'on a

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{X}) &= k(0) \oplus (\langle dx \rangle_k \oplus \langle dx \wedge dy \rangle_k)(1) = k(0) \oplus k(1)^2, \\
H_c(\mathbf{X}) &= H^+(\mathbf{K}) = \langle dx \rangle_k(1) = k(1).
\end{aligned}$$

et $H_c(\mathbf{X}) \wedge H_c(\mathbf{X}) = 0$. L'espace \mathbf{X} est donc bien \cup -acyclique.

Non i -acyclicité de \mathbf{X} . Comme le cycle C_y est plongé (via ν) dans \mathbf{X} , l'espace $H_c^1(\mathbf{X})$ est engendré par $dx \in H_{C_y}^1(\mathbf{X}) \subseteq H_c^1(\mathbf{X})$ et le morphisme $\iota_1 : H_c^1(\mathbf{X}) \rightarrow H_c^1(\mathbf{K})$ est bijectif. D'autre part, il est clair par la première suite dans (\diamond) que le morphisme $\rho_1 : H^1(\mathbf{K}) \hookrightarrow H^1(\mathbf{X})$ est injectif. On a donc

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^1(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\iota_1} & H_c^1(\mathbf{K}) & & & & \\ & & \parallel & & & & \\ 0 = H_{\text{pt}}^1(\mathbf{K}) & \xrightarrow{0} & H^1(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\rho_1} & H^1(\mathbf{X}) & \twoheadrightarrow & H_{\text{pt}}^2(\mathbf{K}) = k(2) \end{array}$$

et $\epsilon_{\mathbf{X},1} = \rho_1 \circ \iota_1$ est non nul. L'espace \mathbf{X} n'est donc pas i -acyclique.

Non totale \cup -acyclicité de \mathbf{X} . Soit maintenant U un ouvert connexe de \mathbf{X} . Comme $H_c(\mathbf{X}) = k(1)$, le cup-produit

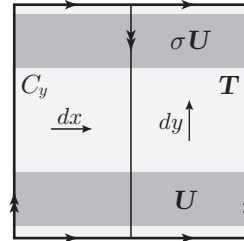
$$\cup : H_c(\mathbf{X}) \times H_c(U) \rightarrow H_c(U) \quad (*)$$

est automatiquement nul si U n'est pas orientable car alors $H_c^2(U) = 0$. Lorsque, par contre, U est orientable, la dualité de Poincaré s'applique et le cap produit $(*)$ est nul, si et seulement si, la restriction $H_c^1(\mathbf{X}) \rightarrow H(U)$ est nulle, donc si et seulement si $dx|_U = 0$ dans $H(U)$.

On a deux cas possibles.

- Cas $C_y \subseteq U$. La restriction du revêtement $\nu : \mathbf{T} \twoheadrightarrow \mathbf{K}$ à $\nu^{-1}(U)$ est triviale à deux nappes U_1 et $U_2 = \sigma U_1$, car U orientable. On peut supposer $C_y \subseteq U_1$ et alors $\sigma C_y \cap U_1 = \emptyset$. On a donc $U \simeq U_1 \subseteq \mathbf{T} \setminus C_y$, et U est i -acyclique puisque ouvert de $\mathbf{T} \setminus C_y \sim {}^1 \times \mathbb{R}$, espace i -acyclique. Maintenant, comme $C_y \subseteq U_1$, l'image de $H_{C_y}^1(\mathbf{X}) = H_c^1(\mathbf{X}) \rightarrow H^1(U)$ est l'image de $H_{C_y}^1(U) \rightarrow H^1(U)$, morphisme qui se factorise naturellement à travers $\epsilon_U : H_c(U) \rightarrow H(U)$, nul puisque U i -acyclique. Par conséquent, si $C_y \subseteq U$ le cup produit $(*)$ est nul.

- Cas $C_y \not\subseteq U$. Il existe des ouverts $U \subseteq \mathbf{X}$ tels que $(*)$ n'est pas nul. En effet, si U est l'ouvert indiqué par la figure ci-contre, on y voit que c'est un cylindre et que dx ne s'intègre pas en une fonction sur U . Par conséquent, $dx \neq 0$ dans $H^1(U)$ et l'espace \mathbf{X} n'est pas totalement \cup -acyclique.



Le théorème de scindage 3.1.1 pour \mathbf{X} . L'espace \mathbf{X} vérifie les assertions (a) et (b) de ce théorème, et la raison vient de ce que $H_c(\mathbf{X})$ est concentrée en degré 1. En effet, dans de tels cas, on s'aperçoit rapidement que $H_c(\Delta_{\ell} \mathbf{X}^m)$ doit être concentré en degré ℓ , ce que l'on démontre par induction sur ℓ et prouve, en passant, les assertions en question.

Plus précisément, dans le cas des espaces \mathbf{F}_m , on s'intéresse au morphisme

$$H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\mathbf{F}_m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m)) \sim H_c(\mathbf{F}_m)^m \quad (\ddagger)$$

où le terme de gauche est concentré en degré $m+1$ puisque $H_c(\mathbf{X}) = k(1)^\#$ et que $H_c(\mathbf{F}_m) = k(m)^\#$, par hypothèse inductive. Le morphisme (\ddagger) est alors nul puisque $H_c(\Delta_{\leq m}(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m))k(m)^\#$, également par hypothèse inductive. On a donc la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_c(\mathbf{F}_m)[-1]^m \rightarrow H_c(\mathbf{F}_{m+1}) \rightarrow H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{F}_m) \rightarrow 0,$$

et elle montre que $H_c(\mathbf{F}_{m+1})$ est concentré en degré $m+1$, et l'étape inductive peut être itérée.

Dans le cas des espaces $\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m$, on s'intéresse au morphisme

$$H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m) \quad (\ddagger\ddagger)$$

dont la preuve de 3.1.1 montre que son annulation résulte de l'annulation de

$$H_c(\mathbf{X}) \otimes H_c(\Delta_{\leq \ell-1, m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1, m}).$$

Cela résulte pour les mêmes raisons de degré que précédemment, sous l'hypothèse d'induction que $\Delta_{\leq \ell-1, ??}$ est concentré en degré $\ell-1$. À partir de là, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} \mathbf{X}^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m) \rightarrow 0,$$

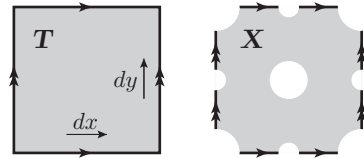
où le terme central est concentré en degré ℓ car somme directe d'espaces gradués isomorphes à $H_c(\mathbf{F}_\ell)$ (cf. 2.3.3). On conclut que $H_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ est concentré en degré ℓ , et l'étape inductive peut être itérée.

12.11. Revêtements non i -acycliques à base i -acyclique

⊢ *Un revêtement fini de base i -acyclique peut ne pas être i -acyclique.*

Une manière élémentaire de produire des contrexemples consiste à prendre une variété orientable \mathbf{Y} non i -acyclique, donc telle que $H_c(\mathbf{Y}) \wedge H_c(\mathbf{Y}) \neq 0$, et à faire agir librement sur \mathbf{Y} un groupe fini \mathbf{W} qui conserve l'orientation et tel que $H_c(\mathbf{Y})^{\mathbf{W}} \wedge H_c(\mathbf{Y})^{\mathbf{W}} = 0$.

Le tore \mathbf{T} de dimension 2 est le domaine carré ci-contre sur lequel on a identifié les côtés opposés. Cet espace privé de quatre points, noté \mathbf{X} , est représenté par la figure à droite. La suite exacte longue



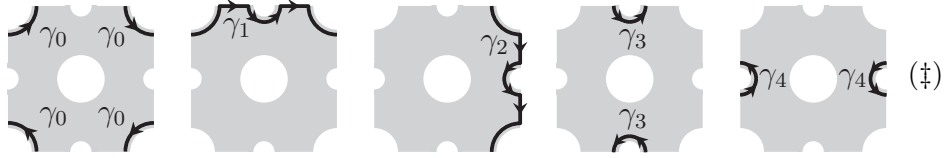
$$0 \rightarrow H_c^0(\mathbf{T}) \rightarrow H_c^0(4) \rightarrow H_c^1(\mathbf{X}) \rightarrow H_c^1(\mathbf{T}) \rightarrow 0 \rightarrow H_c^2(\mathbf{X}) \rightarrow H_c^2(\mathbf{T}) \rightarrow 0, \quad (\ddagger)$$

montre que les 1-cocycles dx et dy dans \mathbf{T} sont représentés par des 1-cocycles à support compact dans \mathbf{X} . La classe fondamentale de \mathbf{X} se retrouve alors représentée comme le produit de ceux deux cocycles. Il s'ensuit que \mathbf{X} n'est

pas \cup -acyclique (ni i -acyclique). La suite (\dagger) révèle aussi l'apparition de trois nouveaux 1-cocycles dans \mathbf{X} provenant de $H_c^0(4)$, nous avons donc

$$H_c^0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad H_c^1(\mathbf{X}) = \mathbb{Q}^5, \quad H_c^2(\mathbf{X}) = \mathbb{Q}.$$

Voici une représentation de 1-cycles de \mathbf{X} générant $H_c^1(\mathbf{X})(= H_1(\mathbf{X}))$:



Notons maintenant $\theta : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ l'isomorphisme d'ordre 4 qui se voit sur $(*)$ par une rotation horaire d'angle $\pi/4$. Il est clair que θ agit librement sur \mathbf{X} et préserve son orientation. L'espace quotient $\mathbf{B} := \mathbf{X}/\langle \theta \rangle$ est par conséquent une variété différentiable orientable et

$$H_c(\mathbf{B}) = H_c(\mathbf{X})^{\langle \theta \rangle}.$$

Or, l'action de θ sur les 1-cycles se lit facilement sur (\dagger) . On y voit que

$$\theta(\gamma_0) = \gamma_0, \quad \begin{cases} \theta(\gamma_1) = \gamma_2 \\ \theta^2(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_3 \\ \theta^3(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_2 + \gamma_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta(\gamma_3) = \gamma_4 \\ \theta(\gamma_4) = \gamma_3, \end{cases}$$

de sorte que $H_c^0(\mathbf{B}) = 0$, $H_c^1(\mathbf{B}) = [\gamma_0]\mathbb{Q} \oplus [\gamma_3 + \gamma_4]\mathbb{Q}$, et $H_c^2(\mathbf{B}) = \mathbb{Q}$, où $[\gamma_0] \wedge [\gamma_3 + \gamma_4] = 0$ puisque l'intersection des cycles sous-jacents est vide. On conclut que $H_c(\mathbf{B}) \wedge H_c(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ et \mathbf{B} est \cup -acyclique et donc i -acyclique. (En fait, on peut vérifier que \mathbf{B} est un cylindre ouvert épointé $(^1 \times \mathbb{R}) \setminus \bullet$.)

Le revêtement $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}$ est bien à base i -acyclique alors que \mathbf{X} ne l'est pas.

12.12. Fibrations non i -acycliques à fibre et base i -acycliques

– Une fibration à fibre et base i -acycliques peut ne pas être i -acyclique.

Rappelons que la cohomologie de l'espace projectif complexe $\mathbb{P} := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'anneau gradué $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]/(\mathbf{z}^{n+1})$ où $\deg(\mathbf{z}) = 2$.

Le fibré tautologique \mathcal{TP} au-dessus de \mathbb{P} est le sous-espace de $\mathbb{P} \times \mathbb{C}^{n+1}$ des couples (\mathcal{D}, z) où \mathcal{D} est une droite vectorielle de \mathbb{C}^{n+1} et $z \in \mathcal{D}$. L'application $\pi : \mathcal{TP} \rightarrow \mathbb{P}$, $(\mathcal{D}, z) \mapsto \mathcal{D}$, est une fibration vectorielle localement triviale de fibres isomorphes à \mathbb{C} . Notons $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{TP}$ sa section nulle. La classe de Thom $\Phi_{(\mathbb{P}, \mathcal{TP})} \in H_c^2(\mathcal{TP})$ de la section nulle se restreint à la classe génératrice de $H(\mathbb{P})$, autrement dit,

$$\Phi_{(\mathbb{P}, \mathcal{TP})}|_{\mathbb{P}} = \mathbf{z}$$

En fait, on a

$$H_c(\mathcal{TP}) = \mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2})$$

et la restriction à la section nulle s'identifie à l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2}) \rightarrow \mathbb{Q}[\mathbf{z}]/(\mathbf{z}^{n+1}), \quad \Phi \mapsto \mathbf{z}$$

En particulier, la multiplication par $\Phi_{\mathcal{P}, \mathcal{T}}$ n'est pas une opération nulle dans $H_c^+(\mathcal{TP})$ pour peu que $n \geq 1$.

Maintenant, si nous restreignons le fibré tautologique au complémentaire de deux points $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \setminus 2$, nous avons la suite exacte longue

$$\mathbf{0} \rightarrow H_c^2(\mathcal{TP}') \longrightarrow H_c^2(\mathcal{TP}) = \Phi \cdot \mathbb{C} \xrightarrow{\rho} H_c^2(\mathbb{C})^2 \longrightarrow H_c^3(\mathcal{TP}') \rightarrow \mathbf{0}$$

où ρ est injective. On en déduit que $H_c^i(\mathcal{TP}) = 0$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, puis que $H_c^3(\mathcal{TP}) = \mathbb{Q}$, et enfin que

$$H_c^i(\mathcal{TP}') = H_c^i(\mathcal{TP}), \quad \text{pour tout } i \geq 4. \quad (*)$$

Par conséquent, si $n \geq 4$ on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\dim H_c^i(\mathcal{TP}')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	...
$\dim H_c^i(\mathcal{P}')$	0	1	1	0	1	0	1	0	1	...

et si ω est non nulle de $H_c^4(\mathcal{TP}')$, on a $\omega \wedge \omega \neq 0$ dans $H_c^8(\mathcal{TP}')$ compte tenu de (*) et du fait qu'il en est ainsi pour $H_c(\mathcal{TP})$ (pour $n \geq 3$).

Considérons maintenant \mathcal{P}' pour $n = 3$. Dans ce cas, on dispose sur $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ de l'involution θ sans point fixes :

$$\theta(\langle a, b, c, d \rangle) = \langle b, -a, d, -e \rangle$$

dont on sait que son action sur \mathbf{z} est $\theta\mathbf{z} = -\mathbf{z}$, de même par ailleurs que l'action sur le générateur de $H_c^1(\mathcal{P}')$. Il s'ensuit que l'on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim H_c^i(\mathcal{TP}')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1
$\dim H_c^i(\mathcal{P}')$	0	1	1	0	1	0	1		
$\dim H_c^i(\mathcal{P}'/\langle \theta \rangle)$	0	0	0	0	1	0	0		
$\dim H^i(\mathcal{P}')$	1	0	1	0	1	1	0		
$\dim H^i(\mathcal{P}'/\langle \theta \rangle)$	0	0	1	0	0	0	0		

Et on voit bien que la variété $(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \setminus 2)/\langle \theta \rangle$ n'est pas \cup -acyclique.

Références bibliographiques

- [1] V.I. Arnold. The cohomology ring of the colored braid group. Mat. Zametki 5 No 2 (1969), 227–231 (Russian). English transl. Mathematical Notes 5, no. 2, 138–140 (1969).

- [2] V.I. Arnold. On some topological invariants of algebraic functions. Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 21, 30–52 (1970).
- [3] G.E. Andrews. “*The theory of partitions*”. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley, (1976).
- [4] A. Borel et al. “*Intersection cohomology*”. Progress in Mathematics, vol. 50, Birkhäuser, (1984).
- [5] R. Bott, L.W. Tu “*Differential forms in algebraic topology*” Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982)/
- [6] G.E. Bredon. “*Sheaf theory*”. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 170. Springer-Verlag, New York, (1997).
- [7] T. Church. Homological stability for configuration spaces of manifolds. Invent. Math. 188, no. 2, 465–504 (2012).
- [8] T. Church, B. Farb. Representation theory and homological stability. Adv. Math. 245, 250–314 (2013).
- [9] T. Church, J.S. Ellenberg, B. Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. Duke Math. J. 164, no. 9, 1833–1910 (2015).
- [10] T. Church, J.S. Ellenberg, B. Farb, R. Nagpal. FI-modules over Noetherian rings, Geom. Topol. 18 (2014).
- [11] A. Dimca. “*Singularities and topology of hypersurfaces*”. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [12] S. Eilenberg, J.C. Moore. Limits and spectral sequences. Topology 1, 1–23, (1962).
- [13] E. Fadel, L. Neuwirth. Configuration spaces. Mathematica Scandinavica 10, pp. 111–118 (1962).
- [14] B. Farb. Representation Stability. Contribution to Proceedings of the ICM 2014, Seoul. arXiv :1404.4065 (2014).
- [15] W. Fulton. “*Introduction to toric varieties*”. Annals of Mathematical Studies 131, Princeton University Press (1993).
- [16] W. Fulton, J. Harris. “*Representation theory. A first course*”. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, (1991)
- [17] W. Fulton, R. MacPherson. A Compactification of Configuration Spaces. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 139, No. 1, pp. 183–225 (1994).
- [18] R. Godement. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*”. Troisième édition revue et corrigée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [19] A. Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9 1957 119–221.
- [20] Graham-Knuth-Patashnik. Concrete mathematics. A foundation for computer science. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1994).
- [21] D.J. Hemmer. Stable decompositions for some symmetric group characters arising in braid group cohomology. J. Combin. Theory Ser. A 118, no. 3, 1136–1139 (2011).
- [22] M. Kashiwara, P. Schapira. “*Sheaves on manifolds*”. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292. Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [23] G.I. Lehrer, L. Solomon. On the action of the symmetric group on the cohomology of the complement of its reflecting hyperplanes. J. Algebra 104, no. 2, 410–424 (1986).

- [24] I.G. Macdonald. The Poincaré polynomial of a symmetric product. Proc. Cambridge Philos. Soc. 58, pp. 563–568, (1962).
- [25] L. Nicolaescu. “An invitation to Morse theory”. Second edition. Universitext. Springer, New York, (2011).
- [26] S. Sam, A. Snowden. GL -equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables. Trans. of the AMS. Volume 368, Number 2, February (2016), Pages 1097–1158. Article electronically published on June 17, (2015) at the address <http://dx.doi.org/10.1090/tran/6355>.
- [27] G. Segal. The topology of spaces of rational functions. Acta Mathematica 143, no. 1, 39–72, (1979).
- [28] B. Totaro. Configuration spaces of algebraic varieties. Topology 35(4), 1057–1067 (1996).
- [29] C. Weibel. “An introduction to homological algebra”. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

Notations

Généralités sur les espaces i -acycliques

$\mathcal{K}(\mathbf{X})$	famille des parties compactes $K \subseteq \mathbf{X}$	17
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$	pseudovariétés	17
$\epsilon_{\mathbf{X}} : H_c(\mathbf{X}) \rightarrow H(\mathbf{X})$	morphisme induit par l’inclusion $\Omega_c(\mathbf{X}) \subseteq \Omega(\mathbf{X})$	18
$H_l(\mathbf{X}) := \text{im}(\epsilon_{\mathbf{X}})$	cohomologie « intérieure » de \mathbf{X}	18
$\delta_{\mathbf{X}}^* : H_c(\mathbf{X} \times \mathbf{X}) \rightarrow H_c(\mathbf{X})$	restriction à la diagonale	18
$\mathbf{X} \setminus a$	“complémentaire” dans \mathbf{X} d’une partie finie de cardinal a	21

Espaces de configuration généralisés

$\Delta_{? \ell} \mathbf{X}^m$	espace de configurations (ordonnées) généralisé	22
$\mathbf{F}_m(\mathbf{X})$	espace de configurations (ordonnées), c’est aussi $\Delta_m \mathbf{X}^m$	22
$\mathbf{Z}^{[a]}$	intersection $\mathbf{Z} \cap (\mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{F}_a(\mathbf{X}))$	22
$\pi_a = \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^a$	projection sur les a dernières coordonnées	22
$p_a = \mathbf{X}^m \rightarrow \mathbf{X}^a$	projection sur les a premières coordonnées	22
« type fini »	\mathbf{X} est de « type fini » lorsque $H_c(\mathbf{X})$ et $H(\mathbf{X})$ sont de dimension finie	24
$\mathfrak{P}_\ell(E)$	ensemble des partitions de l’ensemble E en ℓ parties non vides	24
$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$	Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(E)$, on pose $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists I \in \mathfrak{p}) \text{ t.q. } \{i, j\} \subseteq I$	25
$[[a, b]]$	intervalle des entiers naturels m vérifiant $a \leq m \leq b$	25
$\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X})$	Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(m)$, on a $\bar{x} \in \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} ((x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j))$	25
$\text{dim}_{\text{ch}}(\mathbf{X})$	dimension cohomologique de \mathbf{X}	25

Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux

\bullet	point d’un espace	28
\mathbf{X}°	l’espace \mathbf{X} privé d’un point \bullet	28
$\mathbf{F}_m^{i=\bullet}(\mathbf{X})$	ensemble des $\bar{x} \in \mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ avec $x_i = \bullet$	29
$\mathbf{F}_m^\bullet(\mathbf{X})$	ensemble des $\bar{x} \in \mathbf{F}_m(\mathbf{X})$ avec l’un des x_i égal à \bullet	29
\mathcal{S}_m	groupe des permutations de l’ensemble fini $\{1, 2, \dots, m\}$	29
$\mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X})$	Si $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(m)$, $\bar{x} \in \mathbf{F}^{\mathfrak{q}}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j)((i \underset{\mathfrak{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j))$	33

Rappels sur les nombres de Stirling

$x^{\overline{n}} := x(x+1) \cdots (x+(n-1))$, n -ième factorielle croissante de x 35
 $x^{\underline{n}} := x(x-1) \cdots (x-(n-1))$, n -ième factorielle décroissante de x 35
 $\underline{s}(i, j), \overline{s}(i, j)$, nombres de Stirling de première espèce resp. signés et non signés . . 36
 $\overline{S}(i, j), \underline{S}(i, j)$, nombres de Stirling de seconde espèce resp. signés et non signés . . 37
 $\left[\begin{smallmatrix} m \\ \ell \end{smallmatrix} \right] = \overline{s}(i, j)$ cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments
 qui sont produits d'exactly j cycles 38
 $\{j\} = \underline{S}(i, j)$, cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i
 éléments en j parties non vides 38

Cohomologie des espaces de configuration, cas i -acyclique

$\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T]$, polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué V 39
 $\mathcal{P}(\mathbf{X}), \mathcal{P}_c(\mathbf{X})$, polynômes de Poincaré de $H(\mathbf{X})$ et $H_c(\mathbf{X})$ respectivement 39
 $\mathcal{P}_c(\mathbf{X} \setminus i)$ Polynôme de Poincaré compact du complémentaire dans \mathbf{X} d'une
 partie finie de cardinal i 39
 $\mathbf{Q}_{\leq \ell, m} \in \mathbb{Z}[P, T]$, polynôme universel pour $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} \mathbf{X}^m)$ 44

Représentations du groupe symétrique

$\lambda \vdash m$ alias pour: λ est une décomposition de m 44
 $|\lambda|$ nombre décomposé par λ , donc $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ 44
 $\ell(\lambda)$ nombre de termes (non nuls) d'une décomposition 44
 $\mathcal{Y}_\ell(m) := \{\lambda \vdash m \mid \ell(\lambda) = \ell\}$, 45
 $\tau(\lambda)$ tableau de Young standard associé à une décomposition λ 45
 $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$, sous-groupe des permutations de \mathcal{S}_m qui conservent les
 lignes du tableau $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ 45
 $\mathcal{S}_\lambda := N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$, normalisateur de \mathcal{P}_λ dans \mathcal{S}_m 45
 $G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_r}$, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (d_1^{\mu_1}, \dots, d_r^{\mu_r})$ 45
 $\chi_c(\mathbf{Z}; i), \chi(\mathbf{Z}; i)$, caractères de \mathcal{S}_m -module de $H_c^i(\mathbf{Z}, k)$ et de $H^i(\mathbf{Z}, k)$ 46
 $\mathbf{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\lambda} := \text{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_\lambda} \circ \text{Res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\lambda}$, où \mathcal{S}_λ agit à travers de la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda$. . 47
 $\mathbf{I}_\ell^m : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]$, opérateur sur les fonctions centrales 47
 $\mathbf{I}(\sigma) := \mathbf{I}_{m_1}^{m_0} \circ \cdots \circ \mathbf{I}_{m_t}^{m_{t-1}} : k_c[\mathcal{S}_{m_t}] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_{m_0}]$, opérateur d'inductions itérées . . 48
 $\Theta_\ell^m := (-1)^{m-\ell} \sum_{\sigma: m \searrow \ell} (-1)^{|\sigma|-1} \mathbf{I}(\sigma) : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]$, opérateur d'induc-
 tions itérées 48

Cohomologie des espaces de configuration, cas général

$p_m : \mathbf{F}_{m+1} \twoheadrightarrow \mathbf{F}_m$, projection sur les m premières coordonnées 50
 $H_{\text{BM}}^i(\mathbf{M}) := H_c^{d_M-i}(\mathbf{M}; k)^\vee$, cohomologie de Borel-Moore d'une pseudovariété
 \mathbf{M} dimension d_M 50
 $\langle _, _ \rangle_M$ accouplement de la dualité de Poincaré sur la variété topologique
 orientée \mathbf{M} 50
 $\sigma_M(f_a)$ action de $f_{a!}$ sur la classe fondamentale de \mathbf{M}_a , i.e. $f_!([\mathbf{M}_a]) =$
 $\sigma_{\mathbf{M}_a}(f) \cdot [\mathbf{M}_{f(a)}]$ 51
 $p_{b!} : H_c(\mathbf{F}_{b+a}(\mathbf{M})) \rightarrow H_c(\mathbf{F}_b(\mathbf{M}))[-a d_M]$, intégration sur les fibres 52
 $\text{sgn}(g)$ signature de $g \in \mathcal{S}_m$ 52

$\sigma_{\mathbf{M}^m}(g) := \text{sgn}(g)^{\dim \mathbf{M}}$, action de $g \in \mathcal{S}_m$ sur l'orientation de \mathbf{M}^m	52
$(_)^\vee$ dualité vectorielle	52
$\sigma(k)_m$ la représentation par « signature » de \mathcal{S}_m	53
$(\check{C}^p(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p -cochaînes simpliciales (non ordonnées)	55
$(\check{C}_{\leq}^p(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p -cochaînes (simpliciales) ordonnées	55
$(\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _), d)$, complexe de p -cochaînes (simpliciales) alternées	55
$\text{sgn}(\alpha)$ signature d'une permutation α	55
$\varepsilon_p : (\check{C}_{\leq}^p(\mathcal{U}, _), d) \rightarrow (\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _), d)$, quasi-isomorphisme d'antisymétrisation	55
$U_{(i_0, \dots, i_p)}$ une copie de U_{i_0, \dots, i_p} paramétrée par l'uplet (i_0, \dots, i_p)	56
\mathcal{G}_{U^m} faisceaux \mathcal{S}_m -équivariant sur U^m	56
$(\Omega_c^*(U), d) := \Gamma(U; (\underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k), d_*))$, le complexe des cochaînes (d'Alexander-Spanier) à support compact de U	59
$(\underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}, d)$ complexe de cofaisceaux (flasques) des cochaînes à support compact sur \mathbf{M}	59
$(\Omega_c^*(U), d_*) := \Gamma(U; (\underline{\mathcal{A}}^\bullet(\mathbf{X}; k), d))$, le complexe des cochaînes de Borel-Moore de $U \subseteq \mathbf{M}$	59
$(\underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}, d_*)$ complexe de faisceaux (flasques) de germes de cochaînes de Borel-Moore de \mathbf{M}	59
$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{c, \bullet}^* := (\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, c}^*(_)), \partial_\bullet, d_*)$, bicomplexe de chaînes de Čech à support compact de U^m	60
$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet, *} := (\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{\mathbf{M}, \text{BM}}^*(_)), \delta_\bullet, d_*)$, bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de U^m	60
$\mathbb{F}H_{\text{BM}}^*(U^m)$, $\mathbb{F} \text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet, *})$, filtrés par degrés de cochaînes de Čech des objets concernés	61
$\mathbb{E}_\sigma(U^m) := \mathbb{E}(U^m) \otimes \sigma(k)_m$, suite spectrale pour le complexe de faisceaux \mathcal{S}_m -équivariants $\underline{\Omega}_{U^m, \text{BM}}^* \otimes \sigma(k)_m$	63
Ξ_{p+1}^m décomposition canonique de $H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m)$	63
$\mathcal{F}(p+1, m)$ ensemble des applications $f : \llbracket 1, m \rrbracket$ strictement croissantes sur $\llbracket 1, m-p \rrbracket$ qui fixent $\llbracket m-p, m \rrbracket$	63
$\gamma_m(\omega) = (-1)^{ \omega m + \frac{m(m-1)}{2}d_M} c_m(\omega)$, renormalisation du morphisme de liaison	68
$\mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)$, ensemble des applications $f : \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ strictement croissantes sur $\llbracket 1, m-p \rrbracket$ qui fixent $\llbracket m-p, m+1 \rrbracket$	75

Stabilité des représentations de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} \mathbf{X}^m)\}_m$

FI catégorie des ensembles F inis et des applications I njectives	79
$\text{Mod}(\mathcal{A}[\mathbf{FI}])$, catégorie des FI -modules	79
$\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$, famille dénombrable représentant un FI -module	79
$\phi_{m+b, m} : V_m \rightarrow V_{m+b}$, morphisme de transition de $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$	80
$\mathcal{V}_{\geq q}$ Tronqué de \mathcal{V} qui préserve les V_m pour $m \geq q$ et annule les autres.	80
$\mathcal{V}_{\leq q}$ Tronqué de \mathcal{V} qui préserve les V_m pour $m \leq q$ et annule les autres.	80
$\mathbf{a} := \llbracket 1, a \rrbracket$ notation pour l'ensemble fini représenté par l'intervalle $\llbracket 1, a \rrbracket$	80
$\mathcal{M}(\mathbf{a})$ le foncteur représentable $(_) \rightsquigarrow \mathcal{A}[\text{Mor}_{\mathbf{FI}}(\mathbf{a}, _)]$	80
$\langle \Sigma \rangle \subseteq V$ sous- FI -module de V engendré par $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$	81

$\mathcal{R} := \{\mathcal{S}_m:V_m\}_m$, famille de représentations de dimensions finies des groupes symétriques	82
$\chi(\mathcal{R}) := \{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$, famille des caractères associée à \mathcal{R}	82
$\dim_k(\mathcal{R}) := \{\dim_k(W_m)\}_m$, famille des dimensions associée à \mathcal{R}	82
$V(\lambda)_m$ la représentation irréductible de \mathcal{S}_m correspondante à $\lambda[m]$	83
$[x] \in \mathbb{Z}$ partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $[x] - 1 < x \leq [x]$. Le nombre $[m/\ell]$ est le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, on convient que $[0/0] = 0$	83
$c(\lambda)_m$ multiplicité de $V(\lambda)_m$ dans V_m	84
$\text{rang}_\sigma(\mathcal{V})$ rang de stabilité de \mathcal{V}	84
$\text{rang}_\mu(\mathcal{V})$ rang de monotonie de \mathcal{V}	84
$\mathcal{P}(\mathcal{V})$ poids de \mathcal{V}	85
$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{V}) := \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{P}V_m$, poids à l'infini de \mathcal{V}	85
$\mathcal{M}_a^H : \text{Mod}(k[H]) \rightarrow \text{Mod}(k[\mathbf{FI}])$,	86
$\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$, alias de notation	87
FB catégorie des ensembles finis et bijections	89
$\mathcal{V}(\lambda) = \{V(\lambda)_m\}_m$,	89
$\mathbf{c}_\lambda(m) := \mathbf{a}_\lambda(m) \cdot \mathbf{b}_\lambda(m)$, symétriseur de Young associé à $\lambda[m]$	90
$\text{rang}_{\mu\sigma}(\mathcal{V}) := \sup \{\text{rang}_\mu(\mathcal{V}), \text{rang}_\sigma(\mathcal{V})\}$, rang de \mathcal{V}	91
\mathcal{S}_L pour $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $\mathcal{S}_L := \text{Fix}_{\mathcal{S}_m}(\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L)$	91
L' pour $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $L' := L \sqcup \{m+1\}$	91
$\lambda \setminus n$ si $\lambda = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots) \vdash m$, on pose $\lambda \setminus n = (1^{\mu_1+n-m}, 2^{\mu_2}, \dots)$	94
$\underline{\lambda}$ Si $\lambda = (1^{\mu_1}, 2^{\mu_2}, \dots)$, on pose $\underline{\lambda} = (1^0, 2^{\mu_2}, \dots)$	95
$\mathcal{T}(p+1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}(p+1, m)$	106
$\mathcal{T}^\bullet(p+1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}^\bullet(p+1, m)$	107
$(_)^\bullet : \mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$, application qui rajoute la boîte $(m+1)$	107
$\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1}) := \{\bar{x} \in \mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1} \mid x_i = x_{f_\tau(i)}\}$,	107
$\mathcal{T}_0(p+1, m)$ ensemble de tableaux « normaux » dans $\mathcal{T}(p+1, m)$	108
$\text{Stab}(\Delta_\tau)$ stabilisateur dans $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ de $\Delta_\tau(\mathbf{M}_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times \mathbf{F}_{p+1})$	108

Calcul du caractère de \mathcal{S}_m -module de $H_c(\mathbf{F}_m(\mathbf{X}))$

$\chi_V : \mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$, série de caractères d'un \mathcal{S}_m -module gradué V	111
$\chi_c(\mathbf{M})(_, T) : \mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$, série de caractères de \mathcal{S}_m -module de $H_c(\mathbf{M})$	111
$\sigma_m \in \mathcal{S}_m$ la permutation cyclique $(1, 2, \dots, m)$	112
$\mathbf{C}_m := \langle \sigma_m \rangle$, sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par σ_m	112
$\mu(_) $ fonction de Möbius	113

Nombres de Betti des quotients des espaces de configuration

$\mathbf{CF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathbf{C}_m$, espace de configurations cycliques de \mathbf{X}	122
$\phi(_) $ fonction indicatrice d'Euler	122
$\mathbf{BF}_m(\mathbf{X}) := \mathbf{F}_m(\mathbf{X})/\mathcal{S}_m$, espace de configurations non ordonnées de \mathbf{X}	123

Suites spectrales de Leray

$H_{\pi!}(\pi_Y), H_{\pi!}(\mathbf{Y}; \mathbf{B}), H_{\pi!}(\mathbf{Y})$, cohomologie à support π -propre pour la fibration $\pi_a : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B}$	125
$D_k^+(\mathbf{Y})$ catégorie dérivée des complexes de faisceaux de k -espaces vectoriels sur \mathbf{Y} bornés inférieurement	126
$\Delta_{\ell, m}^{[a]}$ notation abrégée de $\Delta_{\ell}^{[a]} \mathbf{X}^m := \Delta_{\ell} \mathbf{X}^m \cap (\mathbf{X}^{m-a} \times \mathbf{F}_a)$	128
$\mathcal{P}_{\pi!}(\mathbf{Z}; \mathbf{U})(T)$, polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support π -propre d'un espace \mathbf{Z} basé sur $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a(\mathbf{X})$	131
$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\mathbf{Y}) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\mathbf{Y}})$, faisceau de cohomologie à support π -propre pour l'application $\pi_a : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{F}_a$	131
\mathbf{UY} $\pi_a : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{F}_a$ et $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}_a$, on pose $\mathbf{UY} := \pi_a^{-1} \mathbf{U}$	132
\mathbf{C} composante connexe de \mathbf{F}_a	133
$c : \mathbf{Y} \rightarrow \{\text{pt}\}$, application constante	135
$\mathcal{S}_a \mathbf{C} := \bigcup_{g \in \mathcal{S}_a} g \cdot \mathbf{C}$, saturé d'une partie $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{F}_a$ sous l'action de \mathcal{S}_a	142