



HAL
open science

OPERATEURS DE DIRAC

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. OPERATEURS DE DIRAC. 2016. hal-01325248v3

HAL Id: hal-01325248

<https://hal.science/hal-01325248v3>

Preprint submitted on 27 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

OPÉRATEURS DE DIRAC

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. L'idée principale de cet article est de donner une représentation de l'équation de Dirac à partir d'une section de Dirac, dont les matrices associées sont définies par les matrices gamma.

1. LES OPÉRATEURS DE DIRAC SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT

Un fibré d'état sur l'univers \mathbf{W} est la donnée d'un fibré vectoriel

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F})$$

de base \mathbf{W} , de fibre un espace de banach \mathcal{F} séparable si le fibré est réel ou d'une structure d'espace de hilbert séparable si le fibré est complexe [3]. Une section de Dirac est une section du fibré

$$\text{Hom}(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E, E) \approx \text{Hom}(\Lambda^1 \mathbf{W}, \text{End}(E)),$$

la section des endomorphismes de Dirac pour la 1-forme $d \in \Lambda^1 \mathbf{W}$ est définie par

$$\gamma^d \in \Gamma(\text{End}(E)), \gamma^d(w) : E_w \rightarrow E_w \text{ avec } \gamma^d(w)(u) = \gamma(d(w) \otimes u).$$

Definition 1. Une section de Dirac γ est bornée et à trace si pour chaque 1-forme d , l'endomorphisme de Dirac

$$\gamma^d(w) : E_w \rightarrow E_w,$$

est un endomorphisme borné et à trace pour la structure induite par \mathcal{F} sur la fibre E_w pour tout $w \in \mathbf{W}$.

Remark 1. On peut définir cette notion sur toutes les cartes de trivialisations à des 1-formes locales.

Pour une carte de trivialisations $W \subset \mathbf{W}$, une base de sections locales sur W est notée $\{\partial_\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$, on pose $\{d^\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ la base duale locale de 1-formes sur W en posant

$$d^\mu \otimes \partial_\nu = \delta_\nu^\mu \text{ avec } d^\mu \otimes \partial_\nu(w) = d^\mu(w)(\partial_\nu(w)), \forall w \in W.$$

On définit sur la carte W , le tenseur de Poisson

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Trace}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \text{ avec } \gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}.$$

Cette construction a un sens si on fait l'hypothèse que la section de Dirac est localement bornée et à trace.

Date: 10 Mai 2016.

Key words and phrases. Section de Dirac, Connexion, Section pseudo-riemannienne, Fibré de Banach, Fibré de Hilbert, Section de Dirac bornée, Section à trace.

Definition 2. *Le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est métrique si et seulement si la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible, le tenseur pseudo-métrique g associée au tenseur de Poisson est définie par*

$$(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} (\gamma^{\mu\nu})^{-1} \text{ avec } g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}.$$

Proposition 1. *La pseudo-métrique g est indépendante du choix de la base locale de sections.*

Proof. Soit W^1 et W^2 deux cartes en $w \in \mathbf{W}$. On note $\{\partial_\nu^j\}$ une base locale de sections sur la carte W^j . Sur $W^1 \cap W^2$ les sections locales ∂_ν^2 s'écrivent dans la base de sections locales $\{\partial_\nu^1\}$

$$\partial_\nu^2 = a_\nu^\mu \partial_\mu^1.$$

On note d_j^ν la 1-forme duale locale de ∂_ν^j définie par

$$d_j^\nu \otimes \partial_\mu^j = \delta_\mu^\nu$$

alors

$$d_2^\nu = b_\tau^\nu d_1^\tau, \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

avec $\mathbf{A} = (a_\nu^\mu)$ et $\mathbf{B} = (b_\tau^\nu)$. Les endomorphismes de Dirac associées aux 1-formes d_j^ν sont notées γ_j^ν et le tenseur de Poisson associé est noté $\gamma_j^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma_j^\nu \gamma_j^\mu)$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_2^\nu &= b_\tau^\nu \gamma_1^\tau \text{ et } \gamma_2^\mu = b_\rho^\mu \gamma_1^\rho, \\ \gamma_2^\nu \gamma_2^\mu &= b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^\tau \gamma_1^\rho, \end{aligned}$$

donc,

$$\gamma_2^{\nu\mu} = b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^{\tau\rho}, \gamma_j^{\tau\rho} = \text{Trace}(\gamma_j^\tau \gamma_j^\rho). \quad (1.1)$$

Si on pose $\tilde{\gamma}_j$ la matrice $(\tilde{\gamma}_j)_\tau^\rho = \gamma_j^{\tau\rho}$, l'équation 1.1 s'écrit

$$\tilde{\gamma}_2 = \mathbf{B} \times \tilde{\gamma}_1 \times (\text{Tr} \mathbf{B})$$

et si $g_j = \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_j^{-1}$, on a

$$g_2 = (\text{Tr} \mathbf{A}) g_1 \mathbf{A}.$$

Les matrices g_1 et g_2 sont congruentes, les métriques qu'elles définissent sont les mêmes. \square

Definition 3. *Une section de Dirac est métrisable si et seulement si cette section est localement bornée, localement à trace et le tenseur de Poisson associé est métrique.*

La pseudo-métrique associée à γ est notée g_γ et g si aucune confusion n'est possible. Les sections de Dirac définissant une métrique riemannienne sont les sections de Riemann, les section de Lorentz sont les sections de Dirac ayant pour métrique associée une métrique lorentzienne. Les sections de Dirac dont la métrique est de signature (2, 2) sont les sections de Pauli et celle de signature (3, 1) sont les sections anti-lorentzienne [2].

Remark 2. *Les signatures (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1) sont les signatures respectivement de la forme (+, +, +, +) (-, +, +, +), (-, -, +, +) et (-, -, -, +).*

Si le fibré $\xi_{\mathbf{W}}$ est le fibré tangent de \mathbf{W} , alors chaque section de Dirac métrisable de $T\mathbf{W}$ définit un opérateur de Dirac sur les champs de l'univers \mathbf{W}

$$H = \gamma \otimes \nabla, \quad \tilde{X} = \gamma(\nabla X)$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la pseudo-métrique g_γ . La connexion de Levi-Civita est définie sur le fibré tangent, si on veut étendre la notion d'opérateur de Dirac à un fibré de Banach, il faut munir le fibré d'état sur \mathbf{W} d'une section de Dirac γ et d'une connexion de Koszul ∇ . L'opérateur de Dirac s'écrit

$$H = \gamma \otimes \nabla,$$

avec

$$\nabla : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E), \quad \nabla(\lambda s) = d\lambda \otimes s + \lambda \nabla s, \quad \mathbb{K}\text{-linéaire}$$

et

$$H(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)), \quad \forall w \in \mathbf{W}.$$

On peut définir deux types d'équation de Dirac, l'une est une équation d'évolution le long d'un champ T , l'autre est une équation d'état des sections. L'équation d'évolution dans une carte de trivialisatation $W \subset \mathbf{W}$, d'une section s le long d'un champ T , est définie par une équation de la forme

$$Hs = \lambda \nabla_T s,$$

λ est une C^∞ -application définie sur W à valeurs dans \mathbb{C} (2.2). L'équation d'état est de la forme

$$Hs = \lambda s,$$

les états locaux de l'opérateur de Dirac sont les fonctions propres locales λ de cet opérateur (2.3).

Proposition 2. *Si s et $\nabla_T s$ sont des sections propres associées à la fonction propre λ alors s est une section propre de l'opérateur $[\nabla_T, H]$ pour la fonction propre $d\lambda \otimes T$.*

Proof. On rappelle que $d\lambda \otimes T(w) = d\lambda(w)(T(w)), \forall w \in W$. Avec les hypothèses on a

$$\begin{aligned} \nabla_T \circ H(s) &= \nabla_T(\lambda s) = (d\lambda \otimes T)s + \lambda \nabla_T s \\ &= (d\lambda \otimes T)s + H \circ \nabla_T(s) \end{aligned}$$

et

$$[\nabla_T, H](s) = (d\lambda \otimes T)s.$$

□

2. REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS DE DIRAC SUR UN FIBRÉ DE DIMENSION FINIE

On suppose que le fibré ζ est de dimension n . Soit W une carte de trivialisatation de ζ et du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ de \mathbf{W} . On se donne une base de sections locales sur \mathbf{W} , notée $\{e_\alpha : \alpha = 0, 1, \dots, n-1\}$, $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé à la carte W et $\{d^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual.

Theorem 1. *Si ∇ est une connexion de Koszul et γ est une section de Dirac sur ζ alors*

$$H(s) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) e_\sigma.$$

où $\gamma_\beta^{\nu\sigma} = (\gamma^\nu)^\sigma_\beta$, $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ sont les symboles de Christoffel de ∇ et $s = s^\alpha e_\alpha$.

Proof. Si on pose $s = s^\alpha e_\alpha$, alors

$$\begin{aligned}\nabla s &= \nabla (s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \nabla e_\alpha \\ &= ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta d^j \otimes e_\beta.\end{aligned}$$

La connexion s'écrit $\nabla e_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta$, les C^∞ -applications $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ représentent les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^\alpha = \partial_\nu s^\alpha d^\nu$,

$$\begin{aligned}\nabla s &= \partial_\nu s^\alpha d^\nu \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta \\ &= (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta.\end{aligned}$$

La section de Dirac γ de E a pour représentation

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma,$$

avec $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$,

$$\begin{aligned}\gamma \otimes \nabla(s) &= \gamma((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta) \\ \gamma \otimes \nabla(s) &= (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \gamma(d^\nu \otimes e_\beta) \\ \gamma \otimes \nabla(s) &= \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) e_\sigma.\end{aligned}\tag{2.1}$$

□

Theorem 2. *L'équation d'évolution le long d'un champ $T = T^\rho \partial_\rho$ est*

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda (t^\rho \partial_\rho s^\sigma + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq n-1$$

et l'équation d'état s'écrit

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda s^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq n-1.$$

Proof. On calcule $\nabla_T s$ pour $T = T^\rho \partial_\rho$ et $s = s^\alpha e_\alpha$,

$$\begin{aligned}\nabla_T s^\alpha e_\alpha &= t^\rho \nabla_{\partial_\rho} (s^\alpha e_\alpha) \\ &= t^\rho (\partial_\rho s^\alpha e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\beta e_\beta) \\ &= (t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k) e_k,\end{aligned}$$

et en utilisant 2.1, on peut écrire

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda (t^\rho \partial_\rho s^\sigma + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq n-1.$$

□

Les matrices de Dirac γ^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, sont des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des applications C^∞ sur W , à valeurs réelles ou complexes. Si D_ν est l'opérateur sur E défini par

$$D_\nu s = (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) e_\beta = (D_\nu^\beta s) e_\beta,$$

l'opérateur de Lie s'écrit

$$L_\nu s = \partial_\nu s^\beta e_\beta$$

et l'opérateur de Christoffel est défini par

$$\Gamma_\nu s = s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta e_\beta$$

et l'opérateur D_ν est la somme de ces deux opérateurs

$$D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu.$$

L'endomorphisme de Dirac γ^ν vérifie

$$\gamma^\nu (e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma$$

et

$$\begin{aligned} \gamma \otimes \nabla (s) &= \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) e_\sigma \\ &= D_\nu^\beta s \cdot \gamma^\nu (e_\beta) = \gamma^\nu (D_\nu^\beta s \cdot e_\beta) \\ &= \gamma^\nu D_\nu (s). \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes

$$H = \gamma^\nu D_\nu = \gamma_\beta^{\nu\sigma} D_{\nu\sigma}^\beta,$$

l'équation d'évolution peut s'écrire

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} D_{\nu\sigma}^\beta s = \lambda (t^\rho \partial_\rho s^\sigma + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma),$$

si le champ $T = \partial_0$, l'équation de Dirac s'écrit

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} D_{\nu\sigma}^\beta s = \lambda (\partial_0 s^\sigma + s^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\sigma)$$

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda (t^\rho \partial_\rho s^\sigma + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma)$$

or $\Gamma_{0\alpha}^\sigma = \Gamma_{\alpha 0}^\sigma$ et

$$\gamma^\nu D_\nu (s) = \lambda D_0 (s),$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^3 \gamma^\nu D_\nu (s) = (\lambda - \gamma^0) D_0 (s).$$

On a le théorème suivant,

Theorem 3. *L'opérateur H de l'équation de Dirac est*

$$H = \gamma^\nu D_\nu,$$

γ^ν sont les quatre matrices de Dirac dans le local frame $\{e_\alpha, 0 \leq \alpha \leq n-1\}$ et si $T = \partial_0$ alors l'équation de Dirac le long du champ T s'écrit localement

$$\sum_{\nu=1}^3 \gamma^\nu D_\nu (s) = (\lambda - \gamma^0) D_0 (s), \quad (2.2)$$

l'équation d'état est de la forme

$$\gamma^\nu D_\nu (s) = \lambda s. \quad (2.3)$$

Remark 3. *Si la section de Dirac γ est lorentzienne, on peut définir la notion de champ chronologique [1] local T pour la métrique g induite par la section γ . La connexion de Levi-Civita ∇ associée à cette métrique permet de définir l'opérateur de Dirac et l'équation de Dirac sur les champs X de \mathbf{W} . Le théorème de redressement des champs permet de définir une carte W pour laquelle le local frame associé vérifie $T = \partial_0$. L'équation de Dirac sous la forme 2.2 s'écrit*

$$(\lambda - \gamma^0) D_0 (X) = \sum_{\nu=1}^3 \gamma^\nu D_\nu (X), \quad X \in \Gamma_W (\xi_{\mathbf{W}}).$$

Si les symboles de Christoffel sont nuls alors on retombe sur l'opérateur de Dirac

$$\gamma^\nu \partial_\nu,$$

\mathcal{D} est l'opérateur de Dirac sur un espace non courbe, il se généralise à un espace courbe sous la forme

$$\gamma^\nu D_\nu.$$

3. EQUATION DE DIRAC SUR UN UNIVERS PARALLÉLISABLE

Si l'univers \mathbf{W} est parallélisable, le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ est trivial et les champs **complexes** de \mathbf{W} , c'est-à-dire, les sections de $\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$, s'identifient aux C^∞ -applications ψ de \mathbf{W} à valeurs dans \mathbb{C}^4 . Sur la carte W de \mathbf{W} , on note $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé à la carte W et $\{d^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual. Une base de sections locales sur \mathbf{W} est $\{\psi_\alpha : \alpha = 0, 1, \dots, 3\}$ où $\psi_0(w) = (1, 0, 0, 0)$, $\psi_1(w) = (0, 1, 0, 0)$, $\psi_2(w) = (0, 0, 1, 0)$ et $\psi_3(w) = (0, 0, 0, 1)$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. On complexifie la connexion de Levi-Civita ∇ associée à la section métrisable γ ,

$$\nabla_{A+iB}(X+iY) = \nabla_A X - \nabla_B Y + i(\nabla_A Y + \nabla_B X)$$

on peut ainsi définir l'opérateur de Dirac de rang un. Soit γ la section de Dirac de matrices complexes

$$\gamma^0 = \frac{i}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma^j = i \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}, j = 1, 2, 3$$

où σ^j sont les matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette section γ est une section de Dirac métrisable, de métrique g dont la matrice dans le local frame est la matrice de Minkowski

$$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les fonctions de Christoffel, associées à la connexion de Levi-Civita de g , sont nulles sur W . L'équation de Dirac 2.3 s'écrit $\gamma^\nu L_\nu \psi = \lambda \psi$. Or $L_\nu \psi = (\partial_\nu \psi^\alpha) \psi_\alpha = \partial_\nu \psi$, on obtient l'équation de Dirac en prenant pour fonction λ , la fonction constante $\lambda = \frac{mc}{\hbar}$.

Remark 4. *On voit ainsi que les masses sont discrétisées, elles correspondent aux fonctions propres constantes de l'opérateur de Dirac défini par la section de Dirac γ . Dans le cas général, les masses peuvent varier, les fonctions propres de l'opérateur de Dirac permettent de définir la notion de variation de masse. Les fonctions propres de l'opérateur de Dirac H sont appelées les fonctions de densité de masse.*

4. L'ÉQUATION D'ÉTAT DES PSEUDO-MÉTRIQUES

Soit W une carte de trivialisaton du fibré $\mathcal{S}^2\mathbf{W}$ des formes bilinéaires symétriques. Une section de $\mathcal{S}^2\mathbf{W}$, non dégénérée, définit une pseudo-métrique sur \mathbf{W} . La fibre de $\mathcal{S}^2\mathbf{W}$ est formée des formes bilinéaires symétriques de \mathbb{R}^4 . Le local frame dual de $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est noté $\{d^\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ et une base de sections locales $\mathcal{S}^2\mathbf{W}$ sur W est $\{d^\mu \otimes d^\nu : 0 \leq \mu \leq \nu \leq 4\}$. Si g est une forme bilinéaire symétrique sur W , $g = g_{\mu\nu}d^\mu \otimes d^\nu$.

Theorem 4. *L'équation d'état des formes bilinéaires symétriques est*

$$\gamma_{\rho\sigma}^{abc} (\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) = \lambda g_{\rho\sigma},$$

où λ est une fonction propre de l'opérateur de Dirac H .

Proof. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \nabla g &= \nabla (g_{\mu\nu} d^\mu \otimes d^\nu) = dg_{\mu\nu} \otimes (d^\mu \otimes d^\nu) + g_{\mu\nu} \nabla (d^\mu \otimes d^\nu) \\ &= dg_{\mu\nu} \otimes (d^\mu \otimes d^\nu) + g_{\mu\nu} \Gamma_{j\sigma\tau}^{\mu\nu} d^j \otimes d^\sigma \otimes d^\tau, \end{aligned}$$

les C^∞ -applications $\Gamma_{j\sigma\tau}^{\mu\nu}$ sur W sont les symboles de Christoffel de la connexion. En posant $dg_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} d^\rho$,

$$\begin{aligned} \nabla g &= \partial_\rho g_{\mu\nu} d^\rho \otimes d^\mu \otimes d^\nu + g_{\mu\nu} \Gamma_{j\sigma\tau}^{\mu\nu} d^j \otimes d^\sigma \otimes d^\tau \\ &= \partial_a g_{bc} d^a \otimes d^b \otimes d^c + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu} d^a \otimes d^b \otimes d^c \\ &= (\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) d^a \otimes d^b \otimes d^c. \end{aligned}$$

La section de Dirac γ de $\mathcal{S}^2\mathbf{W}$ a pour représentation

$$\gamma (d^a \otimes d^b \otimes d^c) = \gamma_{\rho\sigma}^{abc} d^\rho \otimes d^\sigma$$

avec $(\gamma^a)_{\rho\sigma}^{bc} = \gamma_{\rho\sigma}^{abc}$.

$$\begin{aligned} \gamma \otimes \nabla (g) &= \gamma ((\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) d^a \otimes d^b \otimes d^c) \\ &= (\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) \gamma (d^a \otimes d^b \otimes d^c) \\ &= \gamma_{\rho\sigma}^{abc} (\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) d^\rho \otimes d^\sigma. \end{aligned}$$

L'équation de Dirac s'écrit

$$\gamma_{\rho\sigma}^{abc} (\partial_a g_{bc} + g_{\mu\nu} \Gamma_{abc}^{\mu\nu}) = \lambda g_{\rho\sigma}.$$

□

Remark 5. *Peut-on décrire l'équation de la relativité générale d'Einstein à partir d'un opérateur de Dirac? La réponse est non, si on veut décrire cette équation, il est nécessaire de faire intervenir les opérateurs de Dirac de rang supérieur, à savoir l'opérateur*

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla$$

défini dans [1].

5. CONCLUSION

A partir d'une section de Dirac métrisable γ sur le fibré tangent, on peut écrire l'équation de Dirac à l'aide des matrices gamma et des matrices de Pauli. Cette représentation permet de généraliser l'équation de Dirac sur les fibrés d'état munis d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ . On a démontré que l'équation de Dirac sur les champs complexes peut être représentée uniquement par une section Lorentzienne.

REFERENCES

- [1] Jonot J.L. "Géométrie et quantification de l'univers de Dirac-Einstein" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01294150
- [2] Kobayashi S. and Nomizu K. "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, (1996)
- [3] Tumpach A.B. "Variétés kaehlériennes et hyperkaélériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)
Email address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr