



HAL
open science

Note sur la loi hyper-équiprobable sur N

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

| Léo Gerville-Réache. Note sur la loi hyper-équiprobable sur N . 2016. hal-01324757

HAL Id: hal-01324757

<https://hal.science/hal-01324757>

Preprint submitted on 1 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Note sur la loi *hyper-équiprobable* sur \mathbb{N}

Léo Gerville-Réache - IMB - UMR 5251 - Université de Bordeaux

Il n'existe pas de loi équiprobable sur l'ensemble des entiers naturels (\mathbb{N}). Vraiment? Selon la théorie des probabilités de Kolmogorov, s'il existe une telle loi, alors soit la probabilité de chaque élément est strictement positive et la somme infinie de ces probabilités est infinie, soit la probabilité de chaque élément vaut zéro et la somme infinie de ces probabilités vaut zéro. Dans les deux cas, on est en contradiction avec l'axiome IV de Kolmogorov qui demande que la probabilité de l'ensemble des éléments (Ω) fasse 1. Soit...

Mais cela signifie-t-il qu'il n'existe pas de loi de probabilité équiprobable (ou uniforme) sur \mathbb{N} ? De Finetti voulait que l'on puisse parler d'une loterie où le nombre de billets serait infini et pour laquelle chaque ticket aurait la même probabilité d'être sélectionné. S'agit-il d'un rêve inaccessible ou d'une nécessité légitime? Une théorie des probabilités peut-elle se satisfaire d'une réponse négative? D'autant plus qu'avec l'axiomatique de Kolmogorov, qui exclut la loi de base des probabilités (loi uniforme ou équiprobabilité) sur un ensemble infini dénombrable comme l'ensemble des entiers naturels mais inclut la loi uniforme sur un ensemble infini non-dénombrable et de cardinal infiniment plus grand que celui des entiers comme, par exemple, la loi uniforme sur l'intervalle réel $[0,1]$, il semble que nous soyons en plein paradoxe. De plus, quelque soit l'entier n , la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$ est mathématiquement parfaitement définie. Mais la limite quand n tend vers l'infini de la suite "d'existence d'une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$ " est la non-existence de cette loi uniforme. On ne pourrait donc pas être équiprobable (ou *indifférent* si l'on parle en termes de théorie des jeux) sur une infinité dénombrable d'alternatives mais on peut l'être sur l'infinité (infiniment plus vaste) de l'intervalle réel $[0,1]$.

Une solution se trouve certainement via le concept de nombre infinitésimal (IP) et l'ensemble des hyperréels (${}^*\mathbb{R}$):

Un nombre hyperréel x est dit infinitésimal ou infiniment petit (IP) si $|x|$ est inférieur à tout réel strictement positif ; infiniment grand (IG) si $1/x$ est infinitésimal ; appréciable (AP) s'il n'est ni infiniment petit ni infiniment grand.

Un nombre infinitésimal positif (IPP) est donc un nombre non-réel strictement supérieur à 0 mais inférieur à tout nombre réel strictement positif. Ce concept peut sembler déconcertant et les critiques en ont fait un objet mathématique actuellement à la marge. En effet, par exemple, si ε est un IPP, alors 3ε est également un IPP et de surcroît, $\varepsilon = 3\varepsilon > 0$!

Mais, comme le faisait remarquer si justement Raymond Devos :

Une fois rien, c'est rien ; deux fois rien, ce n'est pas beaucoup, mais pour trois fois rien, on peut déjà s'acheter quelque chose, et pour pas cher. Alors maintenant si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien, rien multiplié par rien égale rien, trois multiplié par trois égale neuf, ça fait rien de neuf.

L'axiomatique de Kolmogorov impose que toute probabilité soit un nombre réel (axiome III). Précisément, toute probabilité appartient à $[0,1]_{\mathbb{R}}$. Si l'on assouplit cet axiome en demandant que toute probabilité appartienne à $[0,1]_{*\mathbb{R}}$, que se passe-t-il?

Dans l'ensemble des hyperréels, certaines propriétés sont particulièrement intéressantes. Par exemple, si l'on procède au calcul d'une somme infinie de nombres infinitésimaux positifs, cette somme peut prendre par convention la valeur souhaitée. Pour ce qui nous préoccupe ici, en particulier, si ε est un IPP alors on peut définir que pour tout entier k :

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon = k\varepsilon = \varepsilon \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon = \infty\varepsilon = 1$$

Aussi, pour toute somme finie de nombres IPP, chaque nombre IPP se comporte comme le nombre 0. En revanche, pour une somme infinie, le comportement de cette somme n'est qu'une question de convention. Convention permettant de réconcilier l'offre proposée par une théorie avec la demande conceptuelle : Par exemple, *je veux une théorie des probabilités qui me permette de définir une loi équiprobable sur \mathbb{N} .*

NB : Dans la théorie des probabilités de Kolmogorov, le concept d'infinitésimal est en réalité bien présent. En effet, selon Kolmogorov, l'événement impossible est de probabilité nulle mais un événement de probabilité nulle n'est pas nécessairement impossible. Cela est clairement contraire au sens commun de l'idée d'une probabilité nulle. Aussi, même si cela n'est pas dit et encore moins axiomatisé par Kolmogorov, les nombres infinitésimaux flottent comme un spectre au dessus sa théorie. Comment expliquer raisonnablement la non-équivalence entre probabilité nulle et événement impossible si ce n'est en introduisant clairement et formellement le concept de probabilité infinitésimale?

Dans le cas d'un ensemble fini d'éléments, le concept de probabilité infinitésimale se confond avec celui de probabilité nulle. Aussi, l'extension aux probabilités infinitésimales n'est utile que pour les ensembles infinis et sont donc intimement liés à l'axiome VI de signa-additivité. Cet axiome n'est nullement mis en cause ici, en effet, Kolmogorov le définit pour des probabilités appartenant à $[0,1]_{\mathbb{R}}$ et nous l'étendons aux probabilités appartenant à $[0,1]_{*\mathbb{R}}$. Donc, en termes d'axiomatique, la seule modification nécessaire consiste en la généralisation de l'axiome III aux probabilités hyperréelles (ou "hyper-probabilités").

La théorie des hyper-probabilités se développe sous le nom de *probabilités non-archimédiennes*. En effet, *l'axiome d'Archimède demande que pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande*. Or, les nombres infinitésimaux ne respectent pas nécessairement cet axiome. Aussi, une théorie des probabilités qui intègre les IPP est dite non-archimédienne. L'article le plus significatif sur l'axiomatisation d'une théorie des probabilités non-archimédiennes est probablement (au sens archimédien du terme) celui de Vieri Benci, Leon Horsten et Sylvia Wenmackers (2013) : "*Non-Archimedean Probability*". Dans cet article, les auteurs utilisent le concept de nombre infinitésimal mais également celui de " *numerosity* " (nombre d'élément d'un ensemble $\mathbf{n}(\cdot)$). Ce dernier concept est associé à celui de cardinal d'un ensemble. La différence est cependant notable. Si l'on prend l'exemple de l'ensemble \mathbb{N} , il y a autant de nombres pairs (*even*) que de nombres impairs (*odd*) mais il y a également autant de nombres pairs que de nombres entiers :

$$\text{Card}(\mathbb{E}) = \text{Card}(\mathbb{O}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Le concept de *numerosity* conduit à dire plus intuitivement que :

$$\mathbf{n}(\mathbb{E}) = \mathbf{n}(\mathbb{O}) = \mathbf{n}(\mathbb{N})/2.$$

Donc on définit la loi *hyper-équiprobable* (ou hyper-uniforme) sur \mathbb{N} de la manière suivant :

- Quelque soit E , un ensemble fini d'éléments de \mathbb{N} , l'hyper-probabilité de E est infinitésimale (i.e. $*P(E) = \varepsilon$).
- Quelque soit k , un entier naturel, et \mathbb{N}_k , l'ensemble des multiples de k , $*P(\mathbb{N}_k) = 1/k$.

Cette définition, conforme à l'intuition, mais plus profondément conforme à l'idée du concept de probabilité comme étant le rapport entre un nombre de cas favorables sur un nombre de cas possibles ne peut pas décevoir.

Tout d'abord, le concept de *numerosity* ne peut pas être plus décevant que celui de cardinalité: Selon le concept de cardinalité, il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs. Il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers! Il y a autant de nombres rationnels que de nombres entiers!! Il y a plus de nombres réels (Aleph 1) que de nombres rationnels (Aleph 0), il y en a une infinité non-dénombrable. Pourtant, l'ensemble des rationnels est dense dans l'ensemble des réels (entre deux nombres réels, il y a toujours un nombre rationnel)!!! Mais alors, où sont cachés les irrationnels????

Ensuite, le concept d'hyper-probabilité ne peut pas être décevant par rapport à celui de probabilités réelles : Soit n un nombre entier, E_{2n} l'ensemble des nombres pairs entre 1 et $2n$ et O_{2n} l'ensemble des nombres impairs entre 1 et $2n$, on ne peut être déçu par une théorie des probabilités qui permet d'avoir :

$$*P(E_{2n}) = *P(O_{2n}) = 1/2 \text{ et } \lim_{2n \rightarrow \infty} *P(E_{2n}) = \lim_{2n \rightarrow \infty} *P(O_{2n}) = 1/2$$

Enfin, une théorie des probabilités qui ne fait que généraliser la théorie mathématiquement très fructueuse de Kolmogorov ne peut pas être décevante.

Tous les problèmes ne sont sans doute pas réglés avec cette théorie mais les "insatisfaits" de la théorie des probabilités de Kolmogorov sont assez nombreux. Par exemple, Alan Hájek en 2003 s'oppose à la définition par ratio de la probabilité conditionnelle telle que l'a définie Kolmogorov. Dans la théorie de Kolmogorov, on ne peut pas considérer la probabilité d'un événement conditionnellement à un événement "possible" de probabilité nulle. La formule :

$$P(A \text{ si } B) = P(A \cap B)/P(B)$$

n'est pas définie pour $P(B) = 0$.

Pour les hyper-probabilités sur un ensemble dénombrable, le problème disparaît. En effet,

$$*P(A \text{ si } B) = \frac{*P(A \cap B)}{*P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Par exemple pour la loi hyper-équiprobable sur \mathbb{N} , la probabilité de l'événement $\{1\}$ conditionnellement à l'hypothèse $\{1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3\}$ est égale à $1/3$. Quant à la probabilité de l'événement $\{1\}$ conditionnellement à l'hypothèse que l'événement est impair, celle-ci est infinitésimale.

Plus généralement Aidan Lyon en 2012 fait une revue des principales critiques envers la théorie des probabilités de Kolmogorov.

Si l'on s'intéresse aux paradoxes de théorie de jeux, réfléchir dans le cadre des hyper-probabilités n'est pas inutile. Par exemple, dans le paradoxe des deux enveloppes, un argument très présent pour tenter d'expliquer "l'inexplicable" est celui de la "non-existence" d'une loi de probabilité équiprobable sur \mathbb{N} . Au delà du fait que cet argument ne résout pas le paradoxe, l'existence d'une loi hyper-équiprobable permet de réfuter encore d'une autre

manière les tentatives de résolution basées sur cette conséquence de l'axiomatique de Kolmogorov.

Pour ma part, il me semble que l'intégration des nombres infinitésimaux et de la numerosity doivent permettre de compléter la théorie mathématique en vigueur et donner satisfaction à un plus grand nombre d'utilisateurs.

Personnellement, j'ajouterais une autre critique qui porte sur la définition de l'espérance mathématique. En effet, celle-ci demande que la série infinie soit absolument convergente. Cela est mathématiquement bien pratique mais certains problèmes de théorie des jeux posent la question d'une "espérance de gain" non-convergente comme dans le paradoxe de St Petersburg ou non-absolument-convergente comme dans le paradoxe (trop peu connu) de Pasadena proposé par Nover et Hájek :

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce qu'elle tombe sur Face. Les gains et pertes sont donnés dans la pile de cartes suivante :

- La première carte dit : Si la pièce tombe sur Face au premier lancer, vous gagnez 2£.
- La carte suivante dit : Si la pièce tombe sur Face au deuxième lancer, vous perdez 2£.
- La carte suivante dit : Si la pièce tombe sur Face au troisième lancer, vous gagnez 8/3£.
- La carte suivante dit : Si la pièce tombe sur Face au quatrième lancer, vous perdez 4£.
- ...
- La $n^{\text{ième}}$ carte dit : Si la pièce tombe sur Face au $n^{\text{ième}}$ lancer, vous avez $(-1)^{n-1}2^n/n$.

L'espérance de gain est de :

$$E(G) = 1/2 * 2 - 1/4 * 2 + 1/8 * 8/3 - 1/16 * 4 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4... = \ln(2) \approx 0,69$$

En effet, il s'agit de la série $(-1)^{n-1}/n$. L'espérance étant positive, le jeu semble favorable. Mais juste avant de jouer, le tas de cartes tombe et se mélange. Après avoir rassemblé et remplié les cartes, l'ordre des cartes a changé de la manière suivante :

La première dit toujours : la pièce tombe sur Face au premier lancer, vous gagnez 2£. Mais les 5 cartes suivantes sont celles qui disent ce que vous devez payer si Face sort au lancé 2, 4, 6, 8 ou 10. La pile se poursuit alors par la carte définissant les gains si Face sort au lancer 3. Puis à nouveau les 5 cartes suivantes sont celles qui disent ce que vous devez payer si Face sort au lancer 12, 14, 16, 18 ou 20, Etc...

En calculant à nouveau l'espérance de gain, on a :

$$E(G) = 1 - 1/2 - 1/4 - 1/6 - 1/8 - 1/10 + 1/3 - 1/12 - 1/14 - 1/16 - 1/18 - 1/20 + 1/5... \\ = \ln(2) + 1/2 * \ln(1/5) \approx -0,11$$

Aussi, le jeu semble maintenant défavorable avec une espérance de gain à -0,11 !

La question de l'organisation d'une somme infinie dépend peut-être du point de vue selon lequel il convient de se placer en fonction de la problématique. C'est bien cette question qui est subtilement posée dans le paradoxe de Pasadena. Il semble que la question soit associée (comme souvent) à celle de la répétition infinie ou pas du jeu. En effet, en cas de répétition finie du jeu, même avec les cartes "mélangées", le jeu reste favorable (on doit faire référence à l'ordre temporel des lancers et donc à 0,69)... Si l'on devait jouer une infinité de fois (hypothèse bien théorique!), alors, avec les cartes "mélangées", le jeu serait défavorable (on doit faire référence à l'ordre des cartes et donc à -0,11)...

On est en droit de s'interroger sur la pertinence de la théorie des probabilités réelles comme partie constituante de l'axiomatique de la théorie des jeux de Von Neumann et Morgenstern mais également comme base théorique de la statistique.

Bibliographie

- [1] Alan Hájek (2003), *What Conditional Probability Could Not Be*, Synthese, Volume 137, Issue3, pp. 273-323.
- [2] Vieri Benci, Leon Horsten and Sylvia Wenmackers (2013). *Non-Archimedean Probability*, Milan Journal of Mathematics 81 (1):121-151.
- [3] Bruno De Finetti (1936). *Les probabilités nulles*, Bulletin de Sciences Mathématiques, 275-288.
- [4] Gerville-Réache L. (2014). *Why do we change whatever amount we found in the first envelope: the Wikipedia "two envelopes problem" commented*. hal-00943573v1, 17p.
- [5] Gerville-Réache L. (2015). *Quand la probabilité conditionnelle croise la statistique*, CFIES, Bordeaux, 6p.
- [6] Peter J. Hammond (1997). *Non-Archimedean Subjective Probabilities*, Decision Theory and Games.
- [7] Andrei Kolmogorov (1950). *Foundation of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company.
- [8] Aidan Lyon (2012). *Kolmogorov's Axiomatisation and its Discontents*. Oxford Handbook of Probability and Philosophy.
- [9] Harris Nover and Alan Hájek (2004). *Vexing Expectations*, Mind, Vol. 113(450), 237-249.