



**HAL**  
open science

# Comment développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite ?

Thomas Hausberger

## ► To cite this version:

Thomas Hausberger. Comment développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite ?. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2016, 36 (1), pp.97-142. hal-01323672

**HAL Id: hal-01323672**

**<https://hal.science/hal-01323672v1>**

Submitted on 20 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## COMMENT DÉVELOPPER DES PRAXÉOLOGIES STRUCTURALISTES EN ALGÈBRE ABSTRAITE ?

Thomas Hausberger\*

### HOW TO DEVELOP STRUCTURALIST PRAXEOLOGIES IN ABSTRACT ALGEBRA?

**Abstract** – This work fits into the development project of a "didactic of structuralism", bearing on epistemology, motivated by significant difficulties acknowledged in the learning of algebraic structures at University. We introduce the concept of structuralist praxeologies and show its relevance when describing the mathematics organizations of the arithmetic of abstract rings. We study the development of these praxeologies, firstly within a heterogeneous group on a forum online about a question on decimal numbers, then in the classroom as part of an activity using a transcript of the forum. The analysis of didactical phenomena mobilizes recent advances in the Anthropological Theory of Didactics and motivates new developments to which this work provides contributions in the context still little-explored of higher education.

**Key words:** tertiary education, abstract algebra, didactics of structuralism, structuralist praxeologies, study and research path.

### ¿CÓMO DESARROLLAR PRAXEOLOGÍAS ESTRUCTURALISTAS EN ÁLGEBRA ABSTRACTA?

**Resumen** – El trabajo que presentamos se inscribe en el proyecto de desarrollo de una "didáctica del estructuralismo" basada en la epistemología, motivado por las importantes dificultades que se constatan en los aprendizajes de las estructuras algebraicas en la universidad. Introducimos el concepto de praxeología estructuralista y mostramos su pertinencia para describir las organizaciones matemáticas de la aritmética de los anillos abstractos. Estudiamos el desarrollo de estas praxeologías, por un lado, en el seno de un colectivo heterogéneo en un foro online que trata una cuestión sobre los números decimales y, por otro lado, en una clase universitaria en el marco de una actividad que

---

\* Equipe DEMa du laboratoire IMAG, UMR CNRS 5149, Université de Montpellier, thomas.hausberger@umontpellier.fr

utiliza la transcripción de los intercambios del foro anterior. El análisis de los fenómenos didácticos recurre a los avances recientes de la teoría antropológica de lo didáctico y motiva nuevos desarrollos a los que este trabajo pretende contribuir, en el contexto todavía poco estudiado de la enseñanza superior.

**Palabras-claves:** enseñanza superior, algebra abstracta, didáctica del estructuralismo, praxeologías estructuralistas, recorridos de estudio e investigación.

## RESUME

Le travail présenté ici s'inscrit dans le projet de développement d'une « didactique du structuralisme », en appui sur l'épistémologie, projet suscité par le constat d'importantes difficultés au niveau de l'apprentissage des structures algébriques à l'université. Nous introduisons le concept de praxéologie structuraliste et montrons sa pertinence dans la description des organisations mathématiques de l'arithmétique des anneaux abstraits. Nous étudions le développement de ces praxéologies, d'une part au sein d'un collectif hétérogène sur un forum en ligne à propos d'une question portant sur les nombres décimaux, d'autre part en classe dans le cadre d'une activité utilisant la retranscription des échanges de ce forum. L'analyse des phénomènes didactiques mobilise les avancées récentes de la Théorie Anthropologique du Didactique et motive de nouveaux développements auxquels ce travail apporte des contributions, dans le contexte encore peu étudié de l'enseignement supérieur.

**Mots-Clés :** enseignement supérieur, algèbre abstraite, didactique du structuralisme, praxéologies structuralistes, parcours d'étude et de recherche.

## INTRODUCTION

L'enseignement de l'algèbre abstraite à l'université (notamment les structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps) s'apparente souvent à une « visite d'œuvres » dont l'appropriation par les étudiants est difficile. Les difficultés sont reconnues par de nombreux auteurs (Leron & Dubinsky 1995, Nardi 2000, Durand-Guerrier et al. 2015, Hausberger 2013) et reflètent un problème de « transition » (Gueudet 2008), qui a lieu cette fois, par comparaison avec la transition lycée-université, à l'intérieur d'une même institution.

De nombreuses difficultés sont à lier à la nature épistémologique particulière du savoir enseigné (le « challenge de la pensée structuraliste », Hausberger 2012) et ses conséquences didactiques que l'on peut analyser au sein du cadre épistémologique des savoirs FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur ; Robert 1987, voir également Hausberger 2012 p.430). L'étude de la disponibilité chez les étudiants des prérequis nécessaires à l'apprentissage des théories algébriques abstraites, notamment la théorie des groupes (Durand-Guerrier et al. 2015) apporte également d'autres facteurs explicatifs. Pour autant, l'impact de l'organisation didactique est également à étudier : nous faisons l'hypothèse que l'approche majoritaire « *top-down* », c'est-à-dire un enseignement frontal des structures qui se présente comme un discours théorique (propre à la contemplation, selon l'étymologie de *theoria*), contribue à faire des apprenants des spectateurs plutôt que des acteurs. En d'autres termes, l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université se situe souvent dans ce que l'on appelle, en Théorie Anthropologique du Didactique, le « paradigme monumentaliste » (Chevallard 2011).

Plus que des concepts (les structures), c'est l'apprentissage de la méthode structuraliste qui est en jeu, les concepts eux-mêmes trouvant leur raison d'être dans cette méthode qui a donné lieu à une véritable réécriture de l'algèbre par les mathématiciens (Hausberger 2012). Notre étude de la transposition didactique (Chevallard 1985) de la notion de structure a montré que cette notion est présente dans le discours méta de l'enseignant sans qu'aucune définition mathématique ne soit donnée et ne puisse l'être à ce stade de l'apprentissage (Hausberger 2013, p.2351). En conséquence, l'étudiant est censé apprendre par lui-même et sur des exemples ce que l'on entend par structure algébrique tandis

que des discours du type « un homomorphisme est une application qui conserve la structure » sont supposés l'aider à donner du sens au concept d'homomorphisme (loc. cit. p.2352). Notre étude épistémologique de l'algèbre abstraite en relation avec les difficultés observées dans l'enseignement et les apprentissages motive ainsi le développement de ce que nous appelons une « didactique du structuralisme algébrique ». Dans cette optique, les praxéologies particulières qui interviennent en algèbre abstraite, que nous nommons « praxéologies structuralistes », vont être amenées à jouer un rôle important : il s'agit d'identifier et de décrire ces praxéologies, ce qui fournira un modèle épistémologique de référence pour le chercheur, puis de développer des situations et des stratégies d'apprentissages à même de conduire les apprenants à développer ces praxéologies. D'où notre question de recherche à laquelle cet article se propose de donner des éléments de réponse : comment développer chez les étudiants des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite ?

La stratégie que nous présentons dans cet article se fonde sur une approche « *bottom-up* » de l'enseignement des structures algébriques et en particulier de l'arithmétique des anneaux abstraits qui constituera notre domaine d'étude. Nous avons eu la charge de l'enseignement de la théorie des anneaux et des corps en troisième année de licence de mathématiques pendant quatre années à l'université de Montpellier, ce qui a permis la mise en place d'expérimentations et le recueil des données empiriques que nous présentons ici. Une approche « *bottom-up* » se donne pour objectif de construire progressivement les concepts, en les faisant apparaître comme des outils performants développés afin de répondre à des questions concrètes sur des objets, puis d'instaurer progressivement une dialectique entre objets et structures. Pour ce faire, il est utile de disposer de moyens permettant d'« enrichir le milieu », afin de favoriser la dévolution des concepts abstraits. Il s'agit également de favoriser le questionnement des étudiants, afin de quitter le paradigme monumentaliste.

Ces préoccupations nous ont conduit à développer une activité d'enseignement portant sur la structure algébrique de l'anneau des nombres décimaux et le calcul du pgcd, en appui sur des échanges recueillis sur un forum de mathématiques autour d'une question posée par l'un des participants. En d'autres termes, le forum, en tant que milieu, a conduit à la création d'un media (disponible sur internet et consulté par un grand nombre de personnes), lequel sert de milieu dans l'activité. Pour ces raisons, nous appellerons ce media le « media-milieu ». Ce fonctionnement nous a conduit

à nous emparer de la notion, introduite par Chevallard, de dialectique des medias et des milieux (Chevallard 2008). D'autre part, la structure de Parcours d'Etude et de Recherche (PER, Chevallard 2009) et ses dialectiques nous sont apparues comme des outils d'analyse adaptés pour comprendre la dynamique des échanges, à la fois sur le forum de mathématiques (ce que nous appelons le premier PER) et en classe, lors d'un travail des étudiants sur le media-milieu (le second PER).

Cet article est structuré comme suit : dans un premier temps, nous détaillerons les praxéologies structuralistes en algèbre abstraite et développerons notre modèle épistémologique de référence ; puis nous présenterons le media-milieu et les deux PER ; nous analyserons ensuite le premier PER à l'aide d'outils que nous détaillerons ; la dernière partie de l'article concerne le second PER : nos analyses nous permettent de conclure en terme d'effets sur les apprentissages et notamment de développement des praxéologies structuralistes visées.

Signalons pour finir que différentes parties de cet article ont été publiées ou vont l'être prochainement dans les actes de différents congrès, mettant à chaque fois l'accent sur un aspect différent de ce travail<sup>1</sup>.

## PRAXÉOLOGIES STRUCTURALISTES EN ALGÈBRE ABSTRAITE : DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE

Les praxéologies<sup>2</sup> structuralistes permettent de décrire les organisations mathématiques en algèbre abstraite. Afin de les

---

<sup>1</sup> Le premier PER a ainsi été présenté dans le cadre de la XVIIIème école d'été de didactique des mathématiques (Hausberger 2015), mettant l'accent sur la dialectique individuel-collectif (que nous n'évoquerons pas dans ce travail) et la dialectique des medias et des milieux. L'accent est mis sur la question du développement d'un paradigme du questionnement du monde en algèbre abstraite dans le cadre d'une communication à la cinquième Conférence Internationale de la Théorie Anthropologique du Didactique (Hausberger 2016a). Enfin, le modèle épistémologique de référence autour des praxéologies structuralistes est détaillé lors d'une communication au premier congrès de l'International Network for Didactic Research in University Mathematics (Hausberger 2016b).

<sup>2</sup> Nous supposons le lecteur familier de la notion de praxéologie (Chevallard 1992). Voir Bosch et *al.* (2005) pour un exemple d'application.

établir, nous nous basons à la fois sur une étude épistémologique et sur une étude de manuels et photocopiés de cours (Guin 2013 et Perrin 1996, par exemple). Ces études vont, entre autres, permettre de justifier leur appellation de « praxéologies structuralistes ». Cependant, afin de comprendre le processus d'élaboration des organisations mathématiques à l'Université, il est important de poser le problème de la transposition didactique dans le cadre de l'enseignement supérieur, qui est particulier. Ceci nous permettra également de préciser en termes praxéologiques les approches « *top-down* » et « *bottom-up* » de l'enseignement des structures algébriques que nous avons évoquées dans l'introduction.

### **1. Transposition didactique à l'Université et approches « *top-down* » et « *bottom-up* »**

Les articles de mathématiques, les traités et les manuels donnent à voir un ensemble d'éléments mathématiques (des problèmes, des notions, des résultats, des méthodes ; des définitions, des propriétés d'objets, des preuves ; etc.). Les trois types de documents mathématiques cités n'ont pas la même fonction : communiquer des résultats nouveaux au sein de la communauté mathématique, effectuer une synthèse des connaissances à l'usage du mathématicien ou communiquer dans une optique de transmission des connaissances en direction d'un apprenant constituent trois modalités de la diffusion des mathématiques ayant des objectifs différents. La transition du savoir depuis les articles de recherche jusqu'aux manuels (en passant par les traités) relève du processus appelé transposition didactique (Chevallard 1985). Dans l'institution « Université » en France, ce processus est largement à la charge du mathématicien enseignant-chercheur, lequel bénéficie d'une grande autonomie pédagogique, même s'il est mis en place des comités d'enseignants-chercheurs qui localement établissent une division du savoir à enseigner en modules et proposent une brève description de ce contenu, le tout devant être validé par une commission au niveau national, composée également d'enseignants-chercheurs. Définir le savoir à enseigner est donc une tâche difficile : d'un côté, l'équivalent du programme officiel du secondaire est très succinct, de l'autre les manuels sont souvent bien trop complets, d'où une grande distance avec le savoir effectivement enseigné, qui constitue au final la donnée la plus clairement identifiable pour le chercheur en didactique. Les photocopiés de cours apparaissent ainsi (peut-être davantage que les manuels) comme des documents très

pertinents afin d'identifier des organisations mathématiques (OM) et construire un modèle praxéologique de référence destiné à analyser les séquences d'enseignement et les apprentissages. La légitimité de ce modèle provient du fait que les enseignants ayant construit ces OM sont également des membres de la communauté savante. Mais surtout, il faudra entendre par « référence » le fait que ce modèle servira de base pour nos interprétations dans le cadre du travail du didacticien.

En relation avec la question de l'élucidation des différents *moments* de la construction des praxéologies en algèbre abstraite dans l'enseignement, nous nous proposons de distinguer deux approches de l'enseignement de l'algèbre abstraite à l'Université :

i) *L'approche majoritaire « top-down »* de l'enseignement des structures algébriques, qui prend la forme d'un discours théorique mettant d'abord en place le bloc du logos (ou bloc technologico-théorique) de l'organisation mathématique (ou praxéologie), puis articulant la théorie à la pratique (donc au bloc praxique, ou *practico-technique*) à travers les exercices.

Face à un descriptif sommaire du « programme officiel » du module, qui se présente sous la forme d'un contenu conceptuel que l'on peut assimiler à un bloc du logos  $L$ , incluant des notions théoriques (par exemple, celle d'idéal) et des technologies (par exemple, les théorèmes d'isomorphismes), l'enseignant-chercheur, dans son travail de transposition didactique, va user de son autonomie pédagogique et intégrer ce bloc au sein d'un bloc théorique plus large  $L_i = (\theta_i, \Theta_i)$  en relation avec son domaine de recherches et son expérience passée d'enseignement, pour enfin déterminer des blocs praxiques  $P_i = (T_i, \tau_i)$  lorsqu'il choisira ses exemples et exercices d'application, ce qui complètera les praxéologies  $(T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i)$ . A l'inverse, le « programme officiel », mis en place par un collectif d'enseignants-chercheur, aura tendance à coïncider avec l'intersection des  $L_i$ . Ceci explique que ce programme corresponde au « noyau structuraliste le plus dur », c'est-à-dire le plus dépouillé des traces de pratiques spécifiques à des catégories d'objets données, relatives à un sous-domaine des mathématiques appartenant au champ de l'algèbre abstraite dans lequel travaille un enseignant-chercheur donné.

Bien entendu, ce modèle sommaire a une valeur conjecturale. Une enquête approfondie au sein de l'institution « Université » serait nécessaire afin d'en examiner la pertinence et les limites. Sa fonction est de permettre la discussion du phénomène de construction des praxéologies structuralistes, en relation avec le



processus de transposition didactique et la pratique des enseignants-chercheurs.

ii) Une approche « *bottom-up* », où l'on se donne le temps des généralisations successives, de la motivation de la construction des concepts. D'un point de vue praxéologique, l'enseignant pose d'abord un bloc praxique ( $T, \tau$ ) au sein d'une théorie en constitution, donc un bloc du logos partiel ( $\theta_p, \Theta_p$ ). La dialectique entre les deux blocs en relation avec l'application de la méthodologie structuraliste (voir paragraphe 2.2 ci-dessous) enrichit le bloc du logos, conduisant à un accroissement progressif du topos de l'étudiant (paragraphe 5.6).

Cette approche vise en quelque sorte à faciliter une transition qui s'apparente à celle « de type 2 » identifiée par Winsløw (2006). Etudiant les praxéologies en analyse au sein de l'institution université, ce dernier constate que la transition du concret à l'abstrait que requiert la transition secondaire-supérieur se traduit, au niveau praxéologique, par le développement de nouvelles praxéologies ( $P', L'$ ) dont le bloc praxique est construit sur le bloc du logos d'une praxéologie ( $P, L$ ) que l'étudiant maîtrise déjà. En algèbre abstraite, il s'agit davantage, comme nous allons le voir, d'une réécriture de l'algèbre classique sur la base de nouveaux concepts. L'approche *bottom-up* vise à accompagner ce mouvement de généralisation et de réécriture, lequel conduit également à de nouveaux objets, de nouvelles questions, donc de nouveaux blocs praxiques.

## 2. La méthodologie structuraliste

La notion de *structure* est issue de la constitution des mathématiques en tant que science des « relations entre objets », point de vue relationnel abstrait qui domine les mathématiques contemporaines depuis l'élaboration des axiomatiques formelles par Hilbert notamment. Ainsi que l'énonce Dieudonné (1987, p.114) :

Peu à peu se dégage une idée générale qui se précisera au XXème siècle, celle de structure à la base d'une théorie mathématique ; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les relations entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la nature de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s'expriment de la même manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » aux deux théories.

La pensée structuraliste se caractérise par une méthodologie et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et en mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples » :

Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts. (Hasse 1930, pp.26-27)

Il s'agit donc d'une refondation mathématique, portée par un projet qui relève également du didactique (permettre l'intelligibilité d'un contenu structuré). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets. En d'autres termes, le didactique crée ici du mathématique.

La citation de Hasse est également intéressante par la mise en avant de la généralité, posée en principe (recherche de la généralité maximale), car vecteur de simplifications. Ce point de vue, s'il est emblématique du projet structuraliste, ne manquera pas d'être débattu au sein de la communauté mathématique ; ainsi, pour Mandelbrojt :

Le fait d'être général est une grande vertu pour un fait mathématique, et l'on éprouve une sorte de léger mépris pour le fait particulier. Je n'arrive pourtant pas à diviniser la généralité en soi. [...] La généralité est belle lorsqu'elle possède un caractère explicatif. [...] On cherche donc à généraliser le résultat pour donner au phénomène son aspect naturel. [...] Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème. [...] Personnellement, je sens qu'il y a un optimum à cette généralité. (Mandelbrojt 1952, p.426-427)

Il est intéressant de noter que le caractère simplificateur des concepts FUGS a fait également débat, cette fois au sein de la communauté de recherche en didactique des mathématiques. Le S pour simplificateur est ainsi omis par certains auteurs (Robert 1987 par exemple, ainsi que dans ses écrits ultérieurs, à la différence de Rogalski 1995).

Décrivons maintenant plus précisément la méthodologie structuraliste, à travers les mots d'un groupe de mathématiciens qui en fut l'un des grands promoteurs, le groupe Bourbaki dont

Dieudonné fut un des membres actifs, et qui s'est donné comme projet de diffuser à l'ensemble des mathématiciens la méthodologie développée par les algébristes allemands. Bourbaki est l'auteur d'un Manifeste célèbre intitulé « L'architecture des mathématiques » dont nous allons commenter quelques extraits particulièrement éclairants :

C'est ici que l'axiomatique va se rapprocher le plus de la méthode expérimentale. Puisant comme elle à la source cartésienne, elle « divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à dissocier les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'entre eux isolément, et le posant en principe abstrait, elle découlera les conséquences qui lui sont propres ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en combinera de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et comment ils réagissent les uns sur les autres. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée. (Bourbaki 1948, p.38)

Cette citation nous montre que les raisons d'être des concepts sont à trouver dans l'examen des preuves, en les faisant apparaître comme des « ressorts » (phase d'analyse). On construit ensuite une théorie déductive, en posant ces principes isolément puis en les combinant, de façon à produire des systèmes axiomatiques fertiles (comme celui définissant un groupe) tels que les théorèmes sur les objets considérés apparaissent comme des conséquences logiques de ces derniers systèmes (phase de synthèse).

Plus loin dans le Manifeste, Bourbaki évoque « La standardisation de l'outillage mathématique » :

Son trait le plus saillant, d'après ce qui précède, est de réaliser une économie de pensée considérable. Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombrent souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques. (Bourbaki 1948, p.42)

Cette citation met en évidence la dimension outil des structures. Ceci contraste avec la réalité de l'enseignement des structures algébriques dans lequel la dimension objet est généralement

prépondérante. De plus, le discours de Bourbaki est clairement de nature technologique : tous les ingrédients sont présents pour définir des praxéologies. Cependant, afin de traduire l'esprit de ce Manifeste, les types de tâches ne doivent pas rester au niveau théorique (montrer une inférence dans le jeu axiomatique abstrait) mais attraper des objets concrets et montrer le gain du point de vue conceptuel.

Nous allons maintenant montrer que les démarches structuralistes sont présentes dans les praxéologies visibles dans les manuels d'algèbre abstraite, ce qui justifie la dénomination de « praxéologies structuralistes », bien que la dimension structuraliste ne soit pas également visible dans toutes les praxéologies et qu'elle soit notamment dépendante des techniques et technologies utilisées.

### **3. Les praxéologies structuralistes dans le cas de l'arithmétique des anneaux abstraits**

Regardons de plus près ce qui se passe dans la théorie des anneaux, au chapitre « anneaux factoriels, principaux, euclidiens » (domaine théorique dans lequel il faut se placer pour répondre à la question qui sera l'objet des PER).

L'arithmétique de  $\mathbf{Z}$  et des anneaux des entiers des corps de nombres, dans le cadre de généralisations successives, a été une des branches prépondérantes dans le cheminement historique, progressif, de la construction de la théorie des anneaux. La problématique est la suivante : quel est l'analogue de  $\mathbf{Z}$  si l'on remplace  $\mathbf{Q}$  par une extension (finie) de  $\mathbf{Q}$  (i.e. un corps de nombres) ? On veut que le théorème fondamental de l'arithmétique soit vérifié (existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers). Or ce n'est pas toujours le cas, même pour la bonne notion d'anneau des entiers ; ce résultat négatif conduit Dedekind à introduire les idéaux : dans les anneaux des entiers, tout idéal se décompose comme un produit d'idéaux premiers.

Une autre branche qui a contribué historiquement à la construction de la théorie est l'arithmétique des polynômes, développée par Hilbert bien que ce dernier n'ait pas fait le lien avec les corps de nombres : il a fallu attendre Noether vers les années 1920 pour que l'on comprenne bien l'intérêt des structures comme principe organisateur. Le rapprochement est alors effectué entre la théorie des groupes et celle des anneaux, à travers les théorèmes d'isomorphismes par exemple, ce qui met en évidence

l'intérêt d'un traitement unifié des structures et conduit à la réécriture des deux théories selon la méthodologie structuraliste.

Les exemples  $\mathbf{Z}[i]$  et  $K[X]$  sont ainsi les deux grands exemples paradigmatiques dans une approche « *bottom-up* », à unifier. Certains livres (par exemple Guin 2013) préfèrent  $K[X]$  en vertu de la propriété universelle d'un tel anneau (point de vue théorie des catégories) ; de notre côté, nous préférons  $\mathbf{Z}[i]$  car ce dernier permet de motiver et travailler les concepts abstraits visés dans la problématique d'extension de l'arithmétique de  $\mathbf{Z}$  tout en engendrant toute une classe d'exemples que l'on peut traiter avec des techniques identiques (donc des types de tâches).

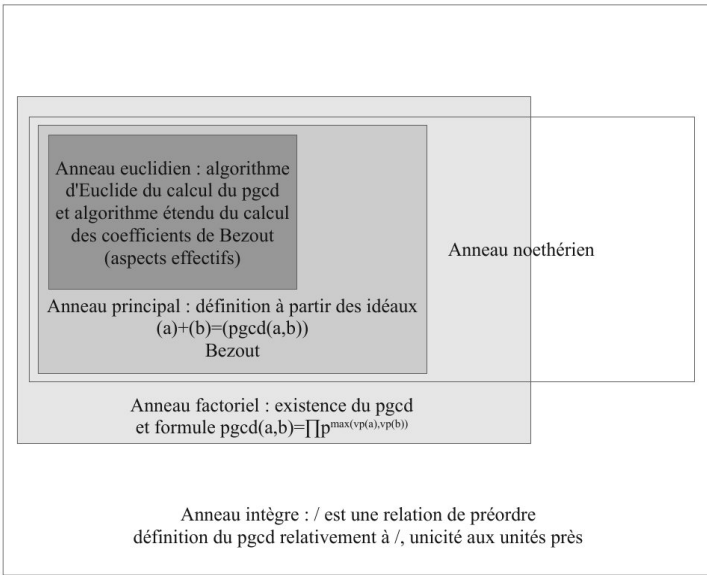
La notion d'anneau, de morphisme, voire d'idéal (mais on peut introduire également les idéaux à travers le cheminement historique de Dedekind) constitue un fond théorique dans lequel s'inscrit cette théorie des anneaux factoriels, principaux et euclidiens. De nombreux auteurs (par exemple Guin 2013, Chap. I) font ainsi précéder ce chapitre d'un chapitre « généralités sur les anneaux » très abstrait (sans problématique sur des objets), en s'appuyant sur les praxéologies formelles de la théorie des groupes et les analogies dans la structuration formelle de la théorie (groupe, sous-groupe, morphisme, sous-groupe distingué comme noyau d'un morphisme de groupes versus anneau, sous-anneau, morphisme, idéal comme noyau d'un morphisme d'anneaux).

Nous donnons ci-dessous une liste de tâches qui apparaissent de manière récurrente dans les photocopiés et manuels que nous avons consultés. Elles constituent ce que nous considérons comme les praxéologies enseignées et figurent au sein du noyau dur de l'approche *top-down* (paragraphe 2.1) :

- $T_i$  (resp.  $T_i'$ ) : montrer qu'un anneau donné est *intégrè* ( $T_1$ ), *factoriel* ( $T_2$ ), *principal* ( $T_3$ ), *euclidien* ( $T_4$ ), (resp. ou non)
- $T_5$  : déterminer le groupe des inversibles  $A^*$  d'un anneau  $A$
- $T_6$  : déterminer les irréductibles, ou simplement montrer qu'un élément donné est irréductible
- $T_7$  : décomposer un élément en produit d'éléments irréductibles
- $T_8$  : calculer le pgcd de 2 éléments.

Il est important, afin de poursuivre notre analyse praxéologique, de noter que le domaine mathématique qui nous concerne est caractérisé par une structure écologique en « poupées russes » (voir figure 1), qui impacte les types de tâches : se situer par rapport à des classes d'objets et en tirer parti, délimiter ces classes

donc l'extension des concepts, occupent une partie importante des tâches dévolues à l'étudiant. Cette structure particulière explique également les difficultés récurrentes des étudiants par rapport au pgcd : c'est une notion multiforme, avec une définition générale (qui provient de son étymologie, cependant l'ordre en question n'est pas généralisé à partir de l'ordre l'usuel sur  $\mathbf{Z}$ , c'est la relation de divisibilité qui est à considérer en tant que préordre<sup>3</sup>), mais dont l'on peut donner des définitions différentes relativement à chaque sous-classe. L'existence du pgcd et ses propriétés dépendent ainsi de la classe et l'unicité du pgcd est non stricte (ce dernier est défini aux éléments inversibles près de l'anneau), ce qui complique considérablement les règles du jeu.



**Figure 1.** - représentation de l'habitat du pgcd au sein d'une structure écologique en « poupées russes »

La compréhension nécessite également le passage à un mode de pensée ensembliste et la mise en relation de propriétés et d'opérations sur les éléments avec des propriétés et opérations correspondantes sur les ensembles, sous la forme d'un véritable « dictionnaire » : par exemple,  $a$  est un élément premier (resp.

<sup>3</sup> Les étudiants confondent souvent les deux car le pgcd dans  $\mathbf{Z}$  est le plus grand élément pour les deux relations d'ordre (et préordre, sachant que le choix du représentant entier neutralise le problème lié au fait qu'un préordre ne vérifie pas la propriété d'antisymétrie).

irréductible) si et seulement si  $(a)$  est un idéal premier non réduit à  $(0)$  (resp.  $(a)$  est un idéal maximal, sous l'hypothèse  $A$  principal) ; pgcd et ppcm correspondent à la somme et à l'intersection d'idéaux principaux, etc. Cet héritage de Dedekind et Noether représente un saut conceptuel conséquent. Dans Hausberger (2013), nous mettons en relation le « problème de transition » (Gueudet 2008) généré par l'accès à l'algèbre structuraliste à l'université avec la transition épistémologique vers ce mode de pensée en termes de sous-ensembles distingués et d'homomorphismes.

#### 4. Examen détaillé des types de tâches $T_1$ à $T_4$

i) Prenons tout d'abord l'exemple de la tâche  $T_1$  (montrer qu'un anneau est intègre) dans le cas de l'anneau  $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ . Cette tâche peut être traitée à différents niveaux, selon l'importance de la *dimension structuraliste*.

Au premier niveau (niveau 1), il s'agit de démontrer que la définition de l'intégrité est satisfaite, autrement dit qu'« un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul ». On écrit pour cela  $(a+ib)(c+id) = 0$ , ce qui conduit à un système un peu pénible à résoudre dans les entiers, d'où probablement une impasse pour un grand nombre d'étudiants. Par contre, lorsque l'on réalise que  $\mathbf{Z}[i]$  est inclus dans l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes et qu'un élément non nul est inversible donc simplifiable, la preuve devient « triviale » :  $zz' = 0$  avec  $z$  non nul, donne, en multipliant par  $z^{-1}$ , la nullité de  $z'$ .

Au niveau 2, on utilise toujours l'inclusion de  $\mathbf{Z}[i]$  dans  $\mathbf{C}$  mais on invoque le résultat général que le sous-anneau d'un corps est intègre. Le bloc technologico-théorique, réduit dans le niveau 1 aux propriétés des nombres complexes, intègre maintenant des résultats abstraits généraux, des structures. C'est ce type d'organisation mathématique qui est visée, et non l'organisation mathématique restant au niveau de la théorie des objets.

Au niveau 3, on invoque qu'un corps est intègre et que l'intégrité est une propriété stable par sous-anneau. C'est le même bloc théorique que le niveau 2 en apparence mais la formulation de la réponse et son mode d'obtention est différent : on n'applique plus un théorème du cours, mais le mode de pensée structuraliste par rapport à la question posée : elle concerne l'intégrité ; je raisonne alors en termes de classes d'objets, de relation entre ces classes (anneau-corps) et de conservation de la propriété (intégrité) vis-à-

vis des opérations structuralistes sur ces classes (passage à un sous-anneau).

ii) Tâche  $T_2$  (montrer qu'un anneau est factoriel) : la réalisation de cette tâche par les étudiants, même pour l'anneau le plus simple  $\mathbf{Z}$ , est très difficile s'il s'agit de démontrer que la définition de la factorialité est vérifiée, autrement dit l'existence et l'unicité de la décomposition en produit d'éléments irréductibles (cette notion généralise la notion de nombre premier) : on a besoin pour cela d'une dimension organisatrice<sup>4</sup>, on a besoin de concepts. Tout s'éclaire lorsque l'on réalise que l'unicité est liée au lemme de Gauss : si  $a / bc$  et  $a$  est premier avec  $b$  alors  $a / c$  ; quant à l'existence, elle provient de l'impossibilité d'une chaîne infinie de divisibilité.

On dispose d'un critère de factorialité<sup>5</sup>, mais celui-ci demeure théorique (rares sont les exercices qui le mobilise) : il sert en cours afin de démontrer que la propriété de factorialité est conservée lors du passage de  $A$  à l'anneau de polynômes  $A[X]$  ou bien dans la preuve qu'un anneau principal est factoriel.

Finalement, la tâche  $T_2$  est réalisée à travers les tâches  $T_3$  et  $T_4$ , à part si l'on souhaite étendre les preuves de  $\mathbf{Z}$  et se rendre compte que l'ingrédient clef est la présence d'une division euclidienne généralisée, dans une démarche d'apprentissage *bottom-up*.

iii) La tâche  $T_3$  (montrer qu'un anneau est principal) : dans le cas de  $\mathbf{Z}$ , au niveau 1, on se donne un idéal  $I$  de  $\mathbf{Z}$  non réduit à  $(0)$  et considère  $a = \inf(I \cap \mathbf{N}^*)$ . On montre alors que  $I = a\mathbf{Z}$  en utilisant la division euclidienne ; c'est la même preuve que pour les sous-groupes de  $\mathbf{Z}$ . Le niveau 2 consiste à remarquer que la preuve précédente fonctionne dès que l'on a une généralisation de la division euclidienne : cela revient à effectuer  $T_3$  via la tâche  $T_4$ . Dans les PER, il sera question de la tâche  $T_3$  dans le cas de l'anneau  $\mathbf{D}$  des nombres décimaux. La première idée est de généraliser la preuve de  $\mathbf{Z}$  (niveau 1). On se rend alors compte que c'est la relation de  $\mathbf{D}$  à  $\mathbf{Q}$  qui fait fonctionner la preuve : tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal (niveau 2 également). Nous faisons l'hypothèse qu'un apprenant ayant accompli ce chemin et assimilé le nouveau contrat structuraliste retiendra par la suite cet

---

<sup>4</sup> « La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration » (Battie 2003 p.21).

<sup>5</sup> Un anneau est factoriel si et seulement si i) tout élément irréductible est premier et ii) toute suite croissante d'idéaux principaux est stationnaire.



argument plus synthétique. L'examen de différents sous-anneaux de  $\mathbf{Q}$  peut également conduire à formuler cet énoncé en tant qu'hypothèse, ou bien un mode d'investigation structuraliste dans lequel on a posé en principe de travail que la généralisation est porteuse de simplification. Il est également possible de montrer que  $\mathbf{D}$  est euclidien (donc effectuer  $T_3$  via  $T_4$ ), en généralisant à  $\mathbf{D}$  la division euclidienne de  $\mathbf{Z}$ , en appui sur l'écriture d'un décimal sous la forme  $a/10^n$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ .

iv) La tâche  $T_4$  (montrer qu'un anneau est euclidien) : l'existence d'une division euclidienne est standard pour  $K[X]$ . Une preuve pour  $\mathbf{Z}[i]$ , à l'aide de l'outil appelé « norme » ( $N(x) = |x|^2$  dans le cas de  $\mathbf{Z}[i]$ ), engendre toute une classe d'exemples :  $\mathbf{Z}[j]$ ,  $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ , etc. Dans le cas des nombres décimaux, la « clef » est, comme nous l'avons dit, d'utiliser la division euclidienne de  $\mathbf{Z}$ . Le résultat plus général que l'on peut énoncer est le suivant : si  $A$  est euclidien et  $s$  désigne un élément de  $A$ , alors il en est de même de l'anneau  $A_s$  constitué des éléments  $x$  du corps des fractions  $K$  de  $A$  s'écrivant  $x = a/s^n$ , pour  $a$  dans  $A$  et  $n$  entier naturel.

v) Conclusions : en définitive, chaque type de tâche présente une dialectique entre le particulier et le général, où l'on essaie soit de généraliser/adapter des preuves connues, soit de généraliser l'énoncé à démontrer et de démontrer cette généralisation en conjecturant qu'elle est vraie et porteuse de simplification. La pensée structuraliste raisonne ainsi en termes de classes d'objets, de relations entre ces classes et de stabilité de propriétés par des opérations sur les structures. La structure écologique (en « poupées russes ») des anneaux joue de ce fait un rôle important, par ce jeu d'imbrication des classes. Sur les exemples précédents, dès que le niveau 2 est atteint, nous pouvons parler de praxéologie structuraliste. De façon générale, une telle praxéologie va viser la réalisation de la tâche en se plaçant à un niveau de généralité qui soit porteur de simplification, en appui sur les concepts et sur l'outillage technologique structuraliste (théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). Avec les notations du paragraphe 2.1, la méthodologie structuraliste vise ainsi à remplacer une praxéologie  $(T, *, *, *)$  par une praxéologie  $(T^g, \tau, \theta, \Theta)$  structuraliste, où  $T^g$  désigne une généralisation de  $T$ .

## LE MEDIA-MILIEU ET LES DEUX PER

Le document que nous avons appelé media-milieu figure en annexe 1. Il consiste en la retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques à propos d'une question, soulevée par un participant (*Mic*), portant sur la structure algébrique de l'anneau des nombres décimaux et le calcul du pgcd. Nous présentons dans un premier temps le forum dont il est extrait et le fil de discussion dont il est la retranscription, puis nous situons le media-milieu en termes de dialectique des medias et des milieux, dans les différents usages qui en sont faits, notamment lors de la constitution du media (premier PER) et du travail en classe sur le media-milieu (deuxième PER).

### **1. Le forum les-mathématiques.net et le fil de discussion choisi**

Le forum dont est extrait le media-milieu est accessible à l'adresse <http://www.les-mathematiques.net>. Il a été créé en janvier 2001 et est régi par une charte, rédigée par les principaux contributeurs du forum, dont son fondateur. Le forum est structuré selon les grands domaines mathématiques : algèbre, analyse, arithmétique, combinatoire et graphes, etc. et inclut également des entrées comme maths et société, maths et informatique, pédagogie, etc. La modération du forum a lieu sur la forme essentiellement. En ce qui concerne le fond, le contenu mathématique n'est pas modéré, la charte mentionne principalement des règles de bonne conduite (pas de propos diffamatoires, de contenu à caractère commercial, etc.). On notera cependant les deux derniers items des « conseils d'utilisation » (paragraphe 4 de la charte) :

4.11 - ne donnez pas la solution des exercices trop vite, mettez sur la piste, suggérez des indices ;

4.12 - faites preuve de tolérance, de patience, de pédagogie. Evitez la condescendance et le dogmatisme. La critique constructive du contenu d'un message fait partie des échanges autorisés et souhaités sur le Forum, mais l'attaque nominative est mal venue.

Le fil de discussion choisi, intitulé « les nombres décimaux », est visible à l'adresse suivante :

<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1>.

Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. Le contenu n'a pas évolué depuis, mais il a été vu

6897 fois (au 30 mai 2015), ce qui constitue l'un des plus gros scores (avec les suites de Cauchy dans  $\mathbf{Q}$  qui totalise 9595 vues).

## 2. Media-milieu et PER

Il est fait trois usages distincts du media-milieu, lequel bénéficie ainsi de « trois vies », de sa genèse (première vie) à sa « mise en examen » en classe (troisième vie). Nous renvoyons le lecteur à Chevallard (2008) pour une définition de *media*, *milieu* et de la *dialectique des medias et des milieux*.

i) *Première vie* : travail collaboratif sur le forum visant à répondre à une question  $Q$  posée par un forumeur  $x$ . Il s'agit d'une première dimension collaborative : travail d'un collectif (ouvert, hétérogène) d'acteurs sur la base d'une question posée par un individu

- *Modalités* : accès libre, à distance ; le forum est le lieu du débat public ; la structure du forum organise les échanges sous forme d'un fil de discussion ; le forum est régi par une charte, mais le contenu mathématique n'est pas modéré (extérieurement au collectif de pairs) ; la charte véhicule une intention didactique (mettre sur la piste, critique constructive)

- *Medias-milieux* : fonctionnement du forum en tant que milieu, rétroactions par les pairs uniquement ; production d'un media  $M$  : le fil de discussion (achevé)

Il s'agit d'un **premier PER** : visite d'œuvres et développement de praxéologies (Chevallard 2009), par le collectif.

ii) *Deuxième vie* : bien que potentiellement ouvert (une réponse n'est jamais définitive), le media (figé) sert de documentation à un visiteur du forum (lecteur) se posant des questions similaires. Il s'agit cette fois d'un travail individuel d'un lecteur (pas d'action sur le media), nourri du travail du collectif

- *Medias-milieux* : Fonctionnement en tant que media principalement voire comme un milieu, au niveau individuel, sans rétroaction par des acteurs, si le lecteur en entreprend le questionnement en autonomie. Les traces des rétroactions du milieu forum, inscrites dans le media, fonctionnent comme des « rétroactions virtuelles » pour celui qui revisite l'étude.

iii) *Troisième vie* : en classe, travail d'annotation du media (avec des sigles pour en organiser l'étude). Il s'agit d'une deuxième dimension collaborative : travail d'un collectif (fermé, plus ou moins homogène) sur la base du travail du premier collectif.

- *Modalités* : en classe, travail en petits groupes de 3-4 étudiants ; le professeur organise le travail du collectif : introduction d'un contrat spécifique (annotations) et circule entre les groupes, en tant que directeur de l'étude.
- *Medias-milieu* : fonctionnement en tant que milieu (adidactique) avec un contrat spécifique (annoter)

Il s'agit du **second PER** : ce n'est plus  $Q$  qui est soumise à l'étude mais le media  $M$  lui-même, autour d'une question de l'enseignant  $Q_M$  relative à  $M$  (voir paragraphe 5 ci-dessous).

### **3. Potentialités du media-milieu et dialectique des medias et des milieux**

Dans l'optique du second PER qui vise au développement de praxéologies structuralistes par les étudiants, nous pouvons dès maintenant entrevoir certaines caractéristiques importantes du media-milieu et préciser certains apports attendus : le media-milieu sert de milieu car la réponse n'est pas institutionnalisée, ce n'est pas une fiction didactique mais un pan de réalité ; le media-milieu favorise la dévolution de la question  $Q$  (relative à l'anneau des décimaux) car elle a déjà été réalisée au sein du forum, les forumeurs ont le statut de pairs ; sans le media-milieu, le milieu est trop pauvre pour produire une résolution de  $Q$  à l'aide des praxéologies visées (il tendrait à l'usage de techniques élémentaires) ; enfin, l'enrichissement du milieu par le media-milieu permet la discussion de conceptions erronées d'une part et de praxéologies avancées d'autre part.

Cependant, relativement à notre problématique, beaucoup de questions restent en suspens, et notamment : quelles conditions doivent satisfaire le media-milieu  $M$  et l'organisation didactique du second PER (en termes de mésogénèse, topogénèse et chronogénèse<sup>6</sup>) afin que : revisiter l'étude de  $Q$  *via* l'analyse de  $M$  apparaisse comme une activité qui fasse sens pour les étudiants et qui soit non rébarbative, avec un degré convenable de réflexivité (appropriation et prise de recul par rapport au raisonnement de l'autre) ; l'étude de  $M$  place les étudiants dans une posture autre que celle de spectateurs des œuvres convoquées lors du premier

---

<sup>6</sup> « La topogénèse est le procédé par lequel la place et les attributions des sujets d'une institution (professeur et étudiants au sein d'une situation didactique en classe) sont fixées. La mésogénèse est le procédé par lequel le milieu d'une situation se fabrique, se développe et s'enrichit. La chronogénèse est le procédé par lequel la temporalité de la diffusion et de l'acquisition des savoirs est modifiée » (Wozniak 2015, p.7).

PER, ou provoque une visite hâtive de ces œuvres et de nouvelles œuvres ; bref, que ce deuxième PER conduise du paradigme de visite des œuvres à celui de questionnement du monde et permette le développement des praxéologies structuralistes visées ?

## ANALYSE DU PREMIER PER

Les principales questions auxquelles nous souhaitons répondre sont les suivantes : comment mettre en évidence et analyser la dynamique des échanges sur le forum ? Qu'est-ce qui permet de constater la visite des œuvres et leur appropriation, en d'autres termes que le collectif a développé des praxéologies structuralistes ? Notre modèle épistémologique de référence permet de reconnaître ces praxéologies ; réciproquement, la reconnaissance des praxéologies décrites dans le modèle au sein de cette enquête menée par un collectif d'apprenants valide la pertinence de notre modèle pour décrire les praxéologies en situation d'apprentissage (adidactique) en algèbre abstraite.

### 1. La dynamique des échanges et ses dialectiques

Par rapport à la structure de PER, laquelle met en avant la dialectique des *questions et des réponses* (*point de vue anthropologique*), le fait qu'il s'agisse ici d'un PER mathématique, au niveau de l'enseignement supérieur (avec son exigence de preuve) et sur l'algèbre abstraite, nous pousse à introduire les deux dialectiques supplémentaires suivantes : celle des *preuves et des réfutations*, dans l'esprit de Lakatos (1984) (*point de vue logique*) d'une part et celle du *particulier et du général* (*point de vue structuraliste*). Nous allons mettre en évidence ces nouveaux gestes grâce aux sigles suivants, qui viennent raffiner les notations classiques  $Q_i$  et  $R_j$  (questions-réponses):

- $i(Q_i), E(R_j)$  : formulation d'une indication (piste) ou d'une explication
- Nous notons les assertions mathématiques  $A_i$ , de sorte que  $p(A_i)$ ,  $ip(A_i)$  et  $cp(A_i)$  désignent respectivement l'apport d'une preuve, d'une indication de preuve et d'un complément de preuve, relativement à cette assertion. Nous notons  $r(A_i)$  une réfutation de l'assertion
- $A_i^g$  : formulation d'une généralisation de l'assertion  $A_i$

Bien entendu, d'autres gestes sont à prévoir (et des sigles correspondant à inventer) s'il s'agit de décrire une dynamique de forums en général (par exemple : illustrer, remercier, etc.). Ces outils d'analyse nous permettent d'obtenir une cartographie des

échanges, sous forme du tableau figurant en annexe 2. Il est également possible d'en donner une représentation sous forme d'arbres (voir Hausberger 2015).

Avant de conclure sur la dynamique des échanges que le travail d'annotation avec les sigles permet de mettre en évidence, nous allons examiner les erreurs commises par les participants et identifier des conceptions erronées.

## **2. Examen des erreurs et conceptions erronées**

i) On peut noter quelques problèmes de notation : par exemple, dans le premier argument du forumeur *Domi* (voir annexe 1), la lettre  $m$  ne désigne pas la même chose en ligne 2 et en ligne 3. Plus problématique, une écriture  $\text{pgcd}(a,b) = d$  suggère une unicité du  $\text{pgcd}$  : en effet,  $\text{pgcd}(a,b) = d_1$  et  $\text{pgcd}(a,b) = d_2$  suggère  $d_1 = d_2$  par transitivité, ce que l'on interprète comme une égalité stricte. La notation  $\text{pgcd}(a,b) \sim d$  introduit également une relation d'équivalence (être associés, c'est-à-dire être égaux par multiplication à une unité près), mais dans ce cas  $d_1 \sim d_2$  sans que  $d_1 = d_2$ . On voit qu'il est important de dissocier ces deux relations. Ecrire  $\text{pgcd}(a,b) = d$  suggère que l'on a choisi un système de représentants des éléments de l'anneau modulo les unités. C'est le cas pour  $\mathbf{Z}$ , où l'on choisit les nombres positifs.

ii) La question de la conservation de la principalité par sous-anneau est une question structuraliste intéressante. C'est le cas, on l'a vu, de la propriété d'intégrité. Cet énoncé, qui est posé par le forumeur comme une conjecture, montre la présence de praxéologies en développement dont le bloc théorique n'est pas consistant avec le savoir établi : la praxéologie met en jeu une technique plus ou moins adéquate, voire erronée, d'autant plus que la technologie demeure plus ou moins implicite. Nous faisons l'hypothèse que l'interprétation de ce phénomène en termes de théorèmes-en-actes et concepts-en-actes (Vergnaud 1990) pourrait apporter un éclairage complémentaire aux analyses conduites dans le cadre de la TAD en raison de l'origine cognitiviste du phénomène.

C'est en fait en discutant les nuances entre forme opératoire et forme prédicative de la connaissance que Vergnaud (1981) introduit la distinction entre théorème-en-acte et théorème tout court. Ainsi, un théorème-en-acte désigne « une proposition [implicitement] tenue pour vraie » ou encore un ensemble de « relations saisies et utilisées par le sujet en situation de résolution de problèmes, étant entendu que cela ne signifie pas

pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier. » (Vergnaud 1981, p.220).

Nous faisons l'hypothèse qu'opérer avec des concepts, même si l'organisation de ces derniers sous la forme d'un discours appartient déjà à la forme prédicative de la connaissance (comparativement à une opération sur des objets), revêt également une *dimension opératoire* qui peut être mise en évidence dans les apprentissages par l'identification de théorèmes-en-actes : *la question de la validité des arguments est alors secondaire devant l'opérationnalisation par l'apprenant de ses connaissances et modes de pensée structuralistes*. La formulation de l'assertion sous forme d'une conjecture plutôt que d'un théorème-en-acte peut s'expliquer soit par un manque de familiarité avec la mobilisation de concepts qui pousse à l'exercice du doute, soit par l'exercice d'un contrôle en voie d'acquisition, ou encore par une sorte de prédominance de la forme prédicative de la connaissance dans un tel discours mobilisant des concepts, même s'il ne reflète pas le fonctionnement cognitif de l'individu qui passe par la construction de schèmes. Bien entendu, ces considérations appellent à un travail approfondi d'investigation du comportement des apprenants en situation d'apprentissage.

iii) La principalité de  $\mathbf{Z}[X]$  pourrait également s'interpréter comme un théorème-en-acte :  $\mathbf{Z}$  est principal, donc  $\mathbf{Z}[X]$  également. La principalité se transmettrait donc dans le passage d'un anneau  $A$  à l'anneau de polynômes  $A[X]$  tout comme la factorialité. Il est cependant nécessaire d'interviewer les étudiants afin de mettre à l'épreuve cette hypothèse. D'autres facteurs explicatifs de cette conception erronée sont envisageables : par exemple, un anneau  $K[X]$  est toujours principal lorsque  $K$  est un corps. Une généralisation abusive peut conduire à admettre la principalité de tout anneau de polynômes.

### 3. Conclusions

Nous donnons ci-dessous les principales conclusions que l'examen de la cartographie des échanges (Annexe 2), notre cadre théorique et les considérations précédentes nous permettent de formuler, relativement à notre problématique de développement de praxéologies structuralistes dans le cadre d'un PER.

*Dialectique des preuves et des réfutations*. Nous notons une grande vitalité des échanges en termes de preuves et de réfutations, ce que les sigles permettent bien de mettre en évidence : pluralité des réponses et des preuves, ouverture vers

des questions connexes. La multiplicité des preuves (favorisée par la présence du collectif), y compris celles qui ne débouchent pas, contribue largement à l'étude d'œuvres en algèbre abstraite. Les preuves les plus directes et élémentaires sont les moins riches. Certaines assertions sont données sans preuve ou avec des preuves incomplètes (tout comme la littérature mathématique où le niveau de l'argumentation dépend de nombreux facteurs, dont le lectorat de la revue et les contraintes éditoriales) ; une partie du jeu consiste à compléter les preuves. Le contrat (charte) indiquant de « mettre sur la piste en donnant des indices » plutôt que de livrer la solution y contribue. Il en résulte des preuves à « renvois » ou « dépliantes » qui incitent le lecteur, selon son degré de maturité, à une lecture non continue du fil, c'est-à-dire à suivre par intermittence le « jeu de piste ».

*Dialectique particulier-général.* La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de  $A$  à  $A^g$ ) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Cela reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite, lesquelles, on l'a vu, se retrouvent au niveau des praxéologies structuralistes. L'auteur (*Mic*) de la question génératrice du PER pose d'ailleurs le problème en terme de  $A_1=A_0^g$  et non  $A_0$ , ce qui favorise d'emblée le développement de praxéologies avancées qui ne se limitent pas aux méthodes élémentaires.

*Théorèmes-en-actes.* A l'inverse, le milieu fait surgir des conceptions erronées que l'on peut analyser (conjecturalement) en termes de théorèmes-en-acte et, en dernière instance, comme des généralisations abusives ou l'application sans contrôle suffisant de modes de pensée structuralistes.

*Dialectique medias-milieux.* Un relevé des notions et théorèmes du savoir présents dans le media-milieu atteste de la visite des œuvres ; la mobilisation des œuvres dans un contexte de preuve, la convocation de nouvelles œuvres afin de combler les trous des preuves ou de réfuter des preuves, qui constituent dans ce contexte la dialectique des medias et des milieux, atteste de l'appropriation de ces œuvres par le collectif.

*Dialectique objets-structures.* La mise en relation d'objets et de structures, dans un rapport dialectique constituée, dans le contexte spécifique de l'algèbre abstraite, un second indicateur de l'appropriation des œuvres. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un point de vue



conceptuel généralisateur-simplificateur pour démontrer des propriétés sur les objets ; réciproquement, un contrôle sémantique sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets.

## LE SECOND PER

Ce second PER constitue l'élément principal, discuté dans cet article, d'une stratégie visant à l'apprentissage de praxéologies structuralistes en théorie des anneaux dans le cadre d'une approche *bottom-up* de l'enseignement des structures algébriques. Comme nous avons pu le voir, cette stratégie est entre autres motivée par le fait qu'il est toujours possible de résoudre les problèmes que l'on se pose relativement aux objets avec des méthodes élémentaires ne mobilisant pas les structures. D'où l'idée, lors du jeu contre un milieu, d'enrichir le milieu de façon à introduire un point de vue conceptuel, qui ne soit pas le point de vue du professeur, qui présente des errements, et qui rende visibles les dialectiques fondamentales particulier-général et objets-structures. Nous avons pu constater que le media-milieu est particulièrement pertinent à cet égard.

### 1. Présentation de l'activité

Dans l'approche *bottom-up* et en lien avec la progression du cours, la fonction des nombres décimaux est d'introduire un nouvel exemple (différent de l'exemple paradigmatique  $\mathbf{Z}[i]$ ), tout en étendant le « topos abstrait » des étudiants, c'est-à-dire en incitant au développement de praxéologies structuralistes, avant d'exposer et démontrer les grands théorèmes de l'arithmétique des anneaux abstraits (tout anneau euclidien est principal, par exemple), en tant que point de vue unificateur et simplificateur. Pour cela, le but de ce second PER est de revisiter le media-milieu (premier PER), lequel est soumis à l'étude.

La première question posée aux étudiants relève d'un travail d'analyse, ces derniers étant outillés par des sigles :

(1) Annotez le document à l'aide des signes suivants :

- **V** : l'assertion me semble vraie
- **F** : l'assertion me semble fausse
- **CQFD** : l'assertion est démontrée (i.e. vous validez la preuve)
- **E** : il y a une erreur dans la preuve (annotez alors les différentes étapes de la preuve, toujours à l'aide des sigles, et corrigez les erreurs si vous pouvez)

## *Développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite 121*

- **X** : il y a un trou (signalé ou non par le rédacteur) dans la preuve (complétez si vous pouvez).
- **?** : vous ne comprenez pas un passage (soulignez-le et expliquez ce qui vous pose problème)
- **Q** : ce passage suscite la question suivante (énoncez-la à côté)
- **R** : ce passage suscite la remarque suivante (énoncez-la à côté)

Les outils d'annotations concernent ainsi la *vérité des assertions* (sigles **V** et **F**) d'une part, la *validité des preuves* (**E**, **X**, **CQFD**) d'autre part. On notera le choix effectué d'un contrat plus souple, propice à l'investigation (la formulation met l'accent sur la subjectivité et « l'apparence » de la vérité, telle qu'elle est perçue par l'apprenant, dans l'état actuel de ses connaissances et du contrôle qu'il est capable d'exercer sur ces dernières, en fait du savoir mobilisable). Statuer sur la vérité, si l'assertion ne fait pas partie du savoir institutionnalisé, nécessite la présence d'une preuve ou d'une réfutation, d'où un aller-retour avec la lecture des preuves et indications de preuves, l'annotation de ces deux sigles n'est donc pas un processus linéaire. L'« apparence » de la vérité est amenée à évoluer, au fur et à mesure que les lecteurs s'approprient l'argumentation des forummeurs ou déploient leurs propres investigations. On notera qu'aucune justification n'est demandée, d'une part parce que les assertions les plus importantes sont suivies de preuves ou d'indications de preuve, d'autre part ceci occasionnerait une lourdeur excessive du protocole d'annotation. Les outils d'annotations concernent également la *compréhension* (sigle **?**), enfin *l'appropriation et le questionnement* (sigles **Q** et **R**). L'incompréhension est susceptible de provenir d'un discours syntaxiquement incorrect ou incohérent, ou bien de l'incapacité du lecteur à en faire sens en vertu de l'état actuel de ses connaissances. Ce sigle est attendu si aucun des autres sigles ci-dessous ne peut être utilisé (**Q** et **R** notamment).

Les deux dernières questions concernent un travail de synthèse :

- (2) *Récapitez sur la dernière page les résultats obtenus à propos des nombres décimaux. Recopiez les compléments mathématiques que vous avez apportés par rapport aux échanges du forum. Quels points méritent encore des éclaircissements ?*
- (3) *Récapitez également les résultats plus généraux sur les anneaux, démontrés ou utilisés, qui vous apparaissent importants. Recopiez les compléments mathématiques que vous avez apportés par rapport aux échanges du forum. Quels points méritent encore des éclaircissements ?*

Pour résumer, il est posé aux groupes d'étudiants la question suivante  $Q_M$  : quelles connaissances mathématiques sur les décimaux (question 2) et anneaux abstraits (question 3) pouvez-vous extraire du media-milieu  $M$  ?

La totalité du premier PER a été proposée à l'annotation par les étudiants, malgré le spectre assez large des praxéologies développées. Ce spectre nécessite éventuellement une intervention didactique, afin de contrôler les sorties éventuelles des praxéologies au programme ou de diminuer par des coupes une ampleur qui peut décourager les étudiants. Ces préoccupations de nature topogénétique sont en effet essentielles pour la réussite de l'activité. Dans le cas qui nous concerne, l'évaluation du media-milieu en relation avec la progression du cours et les praxéologies visées (voir ci-dessous) nous a convaincu de le conserver dans sa totalité.

## 2. Cadre de l'expérimentation en classe et analyse *a priori*

Cette séquence a été expérimentée pendant 3 séances de travaux dirigés d'une durée d'1h30 chacune. Les deux premières séances ont été consacrées au travail en groupes et la dernière séance à la mutualisation de ce travail. L'enseignant a circulé entre les différents groupes lors du travail en autonomie, afin de faire régulièrement le point de son avancement avec les étudiants, mais en conservant une posture neutre de directeur d'étude (répondant principalement, pour ce qui concerne les mathématiques, aux questions posées relatives au polycopié de cours dont il est l'auteur). La mutualisation a eu lieu sous la forme d'un corrigé au tableau par l'enseignant, en interpellant régulièrement les étudiants.

Quel est le travail attendu des étudiants (le topos offert, voir 5.6 ci-dessous) relativement à cette analyse du media-milieu ? Les points suivants n'ont pas été relevés ou conclus par les forumers, ou bien nécessitent encore un travail de complétion des preuves ou d'approfondissement (les notations sont celles de l'annexe 2) :

a)  $A_0$  : compléter la preuve  $p(A_0)$  de *Domi* (justifier notamment le « donc » en dernière ligne de son intervention)

b)  $A_1$  : compléter la preuve  $p(A_1)$  de *Trivecteur* (principales omissions : l'argument utilisant Bezout, ce qui nécessite de démontrer, en tant que lemme, que tout sous-anneau  $A$  de  $\mathbf{Q}$  contient  $\mathbf{Z}$  ; le fait que  $I \cap \mathbf{Z}$  est un idéal de  $\mathbf{Z}$  pour tout idéal de  $A$ )

c)  $A_1^g$  : la réfutation conduit à une pluralité de preuves de  $A_2$  :  $ip_1, p_1, p_2, cp_2, cp_1, ip_3$  qui requiert un travail de mise en forme ; le lien entre  $ip_1$  et  $p_1$  (l'idéal  $(2, X)$  coïncide avec l'idéal des polynômes à terme constant pair) fait travailler la notion d'idéal engendré ; compléter  $p_2$  et  $p_3$  mobilise les théorèmes d'isomorphismes afin de justifier les isomorphismes annoncés.

d)  $A_1^{gs}$  : comprendre l'argument de *Barbu rasé* ; ceci nécessite la notion de corps des fractions d'un anneau intègre. Un autre intérêt réside dans le questionnement des propriétés d'euclidianité et de principalité d'un corps, qui est « déstabilisant » par son arithmétique mathématiquement « triviale » (le reste d'une division euclidienne est nul, les seuls idéaux d'un corps  $K$  sont dits « triviaux », c'est-à-dire réduit à  $(0)$  et  $K$ ).

e)  $Q_2'$  : statuer par rapport à la pluralité des réponses proposées  $R_1, R_2, R_3, R_4$  (cette tâche mobilise la notion de pgcd défini à une unité près, d'où également un questionnement sur les unités de  $\mathbf{D}$ ), de convention afin de pouvoir parler « du » pgcd. Est proposé également un autre exemple de calcul de pgcd : il s'agit de même de statuer sur les assertions  $A_3$  et  $A_3'$  qui fournissent deux résultats distincts.

f) On pourrait souhaiter également, au titre de prolongements, que le caractère euclidien de l'anneau  $\mathbf{D}$  soit conjecturé et discuté, ainsi que la question  $Q_2'^g$  de la détermination du pgcd de deux décimaux en général. La question de la détermination des éléments irréductibles de  $\mathbf{D}$  pourrait être également abordée, ce qui permettrait un traitement du pgcd basé sur la factorialité de l'anneau.

L'étude de l'insertion de l'activité dans la progression du cours nous permet de donner les éléments suivants d'analyse *a priori*.

*Tâches a), b) et e)*. Elles sont en phase avec la temporalité du cours : les notions d'idéal, d'anneau principal et de pgcd font partie des notions disponibles (Robert 1998) à travailler. Le choix de questionner la principalité des décimaux (c'est-à-dire le choix de l'anneau en tant que variable didactique) est d'ailleurs motivé par le fait que les décimaux constituent un nouvel exemple pris dans le domaine des nombres (avant d'introduire les anneaux de polynômes), familier des étudiants en tant qu'objet (usuel, pas du point de vue des structures) et tel que la principalité de l'anneau puisse être établie par adaptation de la preuve de la principalité de  $\mathbf{Z}$  (ou en si ramenant en considérant l'idéal  $I \cap \mathbf{Z}$ ).

*Tâche c)*. Les théorèmes d'isomorphismes ont été vus en cours et font donc partie du savoir mobilisable (Robert 1998). Pour autant, ils seront travaillés au sein de la prochaine feuille de TD ; à ce

stade de l'apprentissage, il est prévisible que ces théorèmes ne fassent pas partie des connaissances effectivement disponibles.

*Tâche d).* La notion de corps des fractions d'un anneau intègre a été abordée en cours uniquement dans le cas des anneaux des entiers des corps de nombres et non de façon générale, d'où une difficulté potentielle de compréhension de l'argument.

*Tâche f).* Le caractère euclidien des décimaux s'établit facilement en se ramenant à la division euclidienne des entiers, avec le même stathme valeur absolue que pour  $\mathbf{Z}$ , ce qui apparaît en outre comme une démarche naturelle étant donnée l'écriture d'un décimal. L'obstacle principal réside dans la conception erronée qu'une division euclidienne n'existe pas pour les décimaux non entiers, à cause de la prégnance de la division euclidienne de  $\mathbf{Z}$ , qui joue alors paradoxalement le rôle d'obstacle épistémologique (alors qu'il s'agit d'un point d'appui fort lorsque l'obstacle est dépassé). La détermination des unités de  $\mathbf{D}$  et des éléments irréductibles est aisée, en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique pour les entiers, donc la factorialité de  $\mathbf{Z}$ . Cependant, les praxéologies développées relativement aux tâches numérotées  $T_4$  à  $T_7$  ci-dessus dans le cadre des anneaux des entiers des corps de nombres, sont susceptibles de faire obstacle, du point de vue qu'elles sont fondées sur l'usage de la norme qui a installé une véritable praxis. Dans le cas des décimaux, la possibilité de définir une application multiplicative analogue à la norme (telle que les unités soient les éléments de norme 1) apparaît *a posteriori* comme un sous-produit de l'écriture en irréductibles (on pose  $N(u.n) = n$  où  $u$  est une unité de  $\mathbf{D}$  et  $n$  un entier naturel premier avec 2 et 5) et non comme un outil à la détermination d'une telle écriture. En définitive, notre analyse montre le potentiel des décimaux en vue de déstabiliser et d'enrichir les praxéologies existantes au niveau des habitats des anneaux euclidiens et factoriels. Cependant, à ce stade de l'apprentissage, dans l'approche *bottom-up* choisie, il n'est pas attendu des étudiants qu'ils envisagent de résoudre la tâche  $T_3$  par le biais de  $T_4$ . En outre, le point de vue factoriel sur le pgcd, via la formule  $(a) + (b) = (\text{pgcd}(a,b))$ , n'est pas un point de vue effectif et le calcul du pgcd dans les anneaux factoriels et euclidiens généraux n'a pas été institutionnalisé en cours. Les étudiants ne disposent donc pas de la technologie nécessaire à la résolution de la tâche de détermination du pgcd de deux éléments donnés quelconques, dans le cadre structuraliste. Par contre, via des méthodes élémentaires en appui sur l'arithmétique de  $\mathbf{Z}$ , il est envisageable que les étudiants postulent et démontrent la formule

$\text{pgcd}(a/10^r, b/10^s) \sim \text{pgcd}(a, b)$ , où le second pgcd peut être calculé dans  $\mathbf{Z}$  à l'aide de l'algorithme d'Euclide ou des décompositions en nombres premiers.

### **3. Analyse a posteriori**

#### *i) Etude de l'usage correct des outils d'analyse (sigles)*

La présence abondante des sigles sur les copies montre que la dévolution de la tâche d'annotation a eu lieu, cependant certains groupes éprouvent des difficultés à en faire un usage systématique et rédigent des commentaires sans sigles (groupes 2 et 4 notamment). Ces groupes utilisent plus facilement les symboles « usuels » ( $V$ ,  $F$ ,  $CQFD$ ), qu'ils ont déjà rencontrés dans des textes mathématiques, que les symboles qui sont de purs outils didactiques, ce qui semble indiquer un effet dû à la nouveauté de cette praxéologie d'annotation. Le groupe 6 affecte de valeurs de vérité des énoncés non mathématiques, tels que « ah, moi j'ai lu plusieurs fois qu'il est principal » ou « Merci Domi », le sigle  $V$  étant probablement à interpréter comme un acquiescement, c'est-à-dire un accord de l'énoncé avec leur expérience personnelle ; ceci ne correspond pas à la sémantique mathématique donc à l'usage correct des sigles qui est attendu. Nous remarquons par ailleurs que le sigle « ? » pose problème, du fait d'une confusion avec le sigle  $Q$  (par exemple, le groupe 1 emploie  $Q$  en début de travail, puis bascule sur un usage de « ? » indifféremment pour une question suscitée ou un problème de compréhension). En effet, la sémantique de signe « ? » est liée au questionnement, ce signe ponctuant tout énoncé interrogatif. Afin d'y remédier, il serait préférable d'utiliser, par exemple, le sigle «  $I$  » (pour incompréhension).

#### *ii) Réalisation des tâches attendues (question 1)*

Nous donnons ci-dessous une analyse détaillée des productions du groupe 1, en termes de réalisation des tâches a) à f). L'ensemble des données empiriques a été analysé sur ce modèle afin de produire la synthèse des résultats présentée au paragraphe 5.4.

Les premières questions que se pose le groupe concernent l'objet étudié (qu'est-ce qu'un décimal, quels sont les sous-groupes de  $\mathbf{Q}$ ) et la méthode (comment prouver qu'un anneau est principal). A part la première, ces questions demeurent ouvertes, mais elles montrent que les étudiants ont adopté un recul réflexif qui leur permet de situer le problème comme relevant du type de

tâche  $T_3$  visé par l'activité. La preuve  $p(A_0)$  est complétée mais non validée, probablement du fait du problème de notations relatif au symbole  $m$  (signalé dans l'analyse *a priori*), interprété comme une erreur par le groupe. Par contre, la preuve  $p(A_1)$  est validée par le groupe, après complétion. Le point c) fait l'objet d'un travail important au sein du groupe. Les théorèmes d'isomorphismes sont contournés *via* une description concrète des quotients du type  $\mathbf{Z}[X]/(X)$ . Ainsi que nous l'avons conjecturé dans notre analyse *a priori*, ce savoir mobilisable ne fait donc pas partie des connaissances effectivement disponibles, de sorte que les méthodes élémentaires prédominent. Le point d) n'est pas élucidé par le groupe : « sens de la phrase ? », le sigle « ? » traduisant bien ici une incompréhension, que l'on peut conjecturer comme étant due à la fois à la structure de la phrase (la locution « propriété stable par sous-anneau » ainsi que la structure logique particulière due à l'emploi de « sauf si ») et au manque de maturité mathématique relativement à la notion de corps des fractions ou bien relativement au mode de pensée structuraliste (raisonnement en termes de propriétés conservée par opération structuraliste, ici la considération de sous-objets). Le point e) conduit le groupe à postuler  $\mathbf{D}^* = \{(-1)^s 2^a 5^b, s \in \{0,1\}, (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$  sous forme de question, laissée ouverte (« Y a-t-il d'autres unités ? »). Nous avons conjecturé dans notre analyse *a priori* que l'absence de la donnée d'un analogue d'une norme pour les décimaux a déstabilisé les praxéologies existantes. On notera que les étudiants ont annoté au cours du travail : « quelle norme définir sur  $\mathbf{Z}[X]$  ? », ce qui témoigne de l'intégration de la norme au sein de leur outillage praxéologique. Le point f) n'est pas traité. Nous avons signalé dans l'analyse *a priori* qu'il n'est pas attendu des étudiants qu'ils envisagent de résoudre la tâche  $T_3$  par le biais de  $T_4$ . Les étudiants de ce groupe ont d'ailleurs soulevé plus haut la question suivante : « [Comment] prouver que  $\mathbf{R}[X]$  est principal ? », alors que l'euclidianité de  $\mathbf{R}[X]$  est connue, ce qui confirme notre hypothèse. L'investigation du calcul du pgcd dans  $\mathbf{D}$  en général n'est pas entreprise par le groupe.

### iii) Analyse des réponses aux questions 2 et 3

Le but de ces questions est de demander aux étudiants de récapituler les œuvres visitées, ce qui constitue une étape dans leur appropriation, sachant bien entendu que cela ne suffit pas à attester de la visite de ces œuvres : il faut pour cela confronter

cette liste d'œuvres avec les gestes menées par les étudiants, lesquels sont « capturés » par nos sigles.

Nous avons souligné plus haut l'importance de considérer les dialectiques particulier-général et objets-structures. La question 2) cerne les résultats qui sont particuliers aux nombres décimaux alors que la question 3) demande de pointer des œuvres plus générales en algèbre abstraites. On peut d'ailleurs distinguer différents degrés de généralité : alors que «  $\mathbf{D}$  est un anneau principal » constitue une réponse à la question 2) (qui met en relation un objet et une structure), « tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal » représente une réponse à la question 3) (en rapport dialectique avec la précédente du point de vue particulier/général), mais cet énoncé est de moindre niveau de généralité qu'un énoncé du type « un corps est un anneau principal » ou «  $A/I$  est un corps si et seulement si  $I$  est un idéal maximal », lesquels font totalement abstraction de la nature des objets au niveau de chacune des variables qui entrent dans la décomposition de cet énoncé d'un point de vue logique.

Cependant, il ne faut pas voir dans cette scission en deux questions la séparation des deux polarités particulier et général, les réponses à la première question permettant d'analyser un « topos concret » et la seconde un « topos abstrait » en algèbre abstraite. Les dialectiques particulier-général et objets-structures, qui sont intimement liées, se manifestent aux deux niveaux, dans les réponses aux deux questions : par exemple, il est difficile d'énoncer des propriétés et résultats sur les décimaux sans s'appuyer sur les concepts structuraux abstraits qui constituent le langage du domaine, en vertu du pouvoir structurant de la langue en général et du rôle assigné par les concepts en algèbre abstraite en particulier.

Nous dirons ainsi, relativement aux questions 2) et 3), que les deux dialectiques sont fonctionnelles chez les étudiants si ces derniers manifestent une habileté à : synthétiser des résultats sur un objet, en l'occurrence les décimaux (décrire l'objet, énoncer ses propriétés ainsi que des résultats le faisant intervenir) en s'appuyant sur des concepts structuraux abstraits (e.g. :  $\mathbf{D}$  est un sous-anneau principal de  $\mathbf{Q}$ ) ; poser de nouvelles questions à propos de l'objet en utilisant le langage de l'algèbre abstraite (e.g. :  $\mathbf{D}^* = \{(-1)^s 2^a 5^b, s \in \{0,1\}, (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$  ?) ; s'emparer d'œuvres (définitions abstraites et théorèmes généraux) en algèbres abstraites, mobilisées en tant qu'outils des preuves engageant les objets (e.g. : dans un anneau principal, tout idéal premier non nul est maximal) ; poser de nouvelles questions,



énoncer des conjectures à propos des structures algébriques (e.g. : tout sous-anneau d'un anneau euclidien est-il euclidien ?).

Outre la vitalité des dialectiques que nous observerons à l'aide des critères mentionnés ci-dessus, nous souhaitons également répondre à la question fondamentale : ce second PER permet-il le développement de praxéologies structuralistes ? Nous nous attendons ainsi à trouver parmi les résultats sur les décimaux relevés par les étudiants le bloc de la praxis de certaines praxéologies développées au sein du media-milieu (par exemple, des techniques de calcul du pgcd) et d'autre part au niveau des résultats généraux le bloc du logos de ces praxéologies (par exemple, des théorèmes utiles afin de démontrer qu'un anneau est principal ou ne l'est pas, donc relativement au type de tâche  $T_3$  et  $T_3'$ ).

Les réponses complètes des étudiants sont données en annexe 3. Certains groupes n'ont pas répondu aux questions 2) et 3), notamment ceux qui n'ont pas achevé le travail d'annotation du media-milieu. Ceci est dû à l'absence d'une consigne de l'enseignant incitant à répondre à ces questions, même si la question 1) n'a pas été intégralement traitée. Comme pour la question 1), nous présentons ci-dessous une analyse détaillée des réponses du groupe 1 uniquement.

*Dialectiques particulier-général et objets-structures* : la présence des assertions  $A_1=A_0^g$  et  $A_0$  constitue une manifestation de la présence de ces dialectiques ; outre que l'on s'attend à trouver mentionnées ces deux assertions, puisqu'il s'agit de deux questions principales du premier PER, la formulation des étudiants est particulièrement intéressante et constitue un indicateur que cette dialectique fait sens pour eux : alors que d'autres groupes rédigent «  $\mathbf{D}$  est principal », ce groupe a pris soin de mentionner que  $\mathbf{D}$  est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$ , ce qui fait directement écho à la formulation de l'assertion universelle  $A_1$ . Le concept d'unité est mis en avant, sous la forme d'une conjecture dont une partie a été démontrée lors de l'enquête, après avoir énoncé les propriétés structurales de  $\mathbf{D}$  (en effet, la connaissance du groupe des unités est une connaissance importante sur l'anneau) et avant d'exposer les résultats sur le pgcd (cette notion régit l'unicité du pgcd). Les résultats généraux sont exposés avec des degrés de généralité croissants et incluent des théorèmes généraux qui ont servi d'outils de preuves. On notera que la principalité de  $\mathbf{R}[X]$  est interprétée comme un résultat général (non relatif à  $\mathbf{D}$ ), alors qu'il ne s'agit pas d'un théorème dans les anneaux abstraits. L'interprétation de la formulation « plus

général » dans les consignes prête en effet à confusion. Pour conclure, ces éléments montrent une vitalité des deux dialectiques, selon nos critères, même si le dernier critère n'est pas rempli (une question sur la principalité de  $\mathbf{R}[X]$  est encore une question sur les objets).

*Éléments praxéologiques* : on voit apparaître des éléments praxéologiques de détermination des pgcd dans l'anneau  $\mathbf{D}$ . La praxéologie développée est centrée sur la question de l'unicité du pgcd, les étudiants mettant en avant, à la différence de  $\mathbf{Z}$  où le pgcd est essentiellement unique, la non-unicité du pgcd dans l'anneau  $\mathbf{D}$ . L'existence n'est pas discutée : on pourrait attendre, au sein des résultats généraux, un énoncé théorique du type « un pgcd existe toujours dans un anneau principal », qui compléterait la praxéologie. En fait, le problème praxéologique posé par les étudiants est « comment déterminer la totalité des pgcd, un pgcd étant donné », en relation avec la tâche de validation des pgcd proposés au sein du media-milieu, sachant qu'il est aisé de déterminer un pgcd sur chacun des exemples traités. Les étudiants n'ont pas pris l'initiative d'étendre les praxéologies de calcul du pgcd développées au sein du media-milieu, celles-ci demeurant assez limitées. Un deuxième élément praxéologique est le suivant : les étudiants ont extrait en totalité la partie théorique de la praxéologie visant à démontrer qu'un anneau donné n'est pas principal (type de tâche  $T_3$ ) en utilisant comme technique la construction d'un idéal premier non maximal. La visite de ces œuvres qui sont des théorèmes très importants de la théorie des anneaux a ainsi eu lieu dans le cadre d'une praxéologie complète développée lors du premier PER. On peut conjecturer que le regroupement de ces énoncés effectué par les étudiants est un indicateur de l'appropriation de ces œuvres en relation avec cette praxéologie qui donne sens au bagage théorique en l'articulant à la pratique.

#### **4. Synthèse des résultats**

Nos principales conclusions, mises en évidence par nos outils d'analyse, sont les suivantes.

Les travaux du groupe 4 montrent une absence de dialectiques particulier-général et objets-structures, ce groupe reste au niveau des objets. Ceci les conduit à un théorème-en-acte sur le calcul du pgcd de deux décimaux. Le groupe 5 laisse entrevoir une stratégie de mémorisation sans compréhension, la synthèse du groupe dénote un problème de réflexivité concernant la distinction particulier/général elle-même. L'absence de dialectiques

particulier-général et objets-structures est corrélée avec une incapacité des étudiants à mettre en place des praxéologies en algèbre abstraite.

Les autres groupes sont parvenus à compléter la preuve  $p(A_1)$ , ce qui constitue un indicateur de compréhension, cependant seuls les groupes 1 et 6 se sont engagés dans le travail de synthèse en ayant achevé le travail d'annotation. On peut dire qu'il y a un développement de praxéologies structuralistes pour les groupes 1 et 6 ; les dialectiques particulier-général et objets-structures montrent cependant une plus grande vitalité pour le groupe 1 que pour le groupe 6, ce qui permet au groupe 1 d'aborder des praxéologies mobilisant des blocs théoriques à plus larges contenus et des technologies plus avancées.

Nous avons également remarqué que les « rétroactions virtuelles » du media-milieu n'ont pas toujours suffi à déstabiliser les conceptions erronées (par exemple, sur les unités de  $\mathbf{D}$ ). Enfin, nous constatons peu d'ouvertures vers des nouveaux questionnements et leur investigation, autant que les annotations permettent d'en conserver la trace. L'essentiel du temps est consacré au travail de compréhension du media-milieu.

### **5. Considérations topogénétiques, mésogénétiques et chronogénétiques**

Le but de ce dernier paragraphe est de répondre à la question suivante : quel est finalement l'effet produit par l'enrichissement du milieu *via* l'introduction du media-milieu et la praxéologie d'annotation par les sigles ?

La notion importante que nous nous proposons d'examiner est celle de *topos* de l'étudiant, définie par Chevallard (2002) en tant que « l'ensemble des gestes d'étude que celui-ci aura à accomplir en autonomie didactique. Le topos varie en fonction du type de dispositif d'étude – cours ou travaux dirigés par exemple – et du type d'objet d'étude – selon qu'il s'agit d'une technique ou d'un pur discours technologique par exemple. » (loc. cit. p.7). Une des difficultés de l'enseignement de l'algèbre abstraite consiste justement en la dévolution des praxéologies structuralistes, qui mobilise comme on a pu le constater des gestes spécifiques. Ceci conduit de nombreux enseignants à évaluer le savoir sur la base de tâches qui s'apparentent à des applications directes du cours ou à des questions traitées en travaux dirigés. Il s'agit de mettre en relation, dans notre analyse topogénétique, le *topos offert*, en l'occurrence l'ensemble des gestes d'études et notamment les praxéologies mathématiques développés par les participants du

premier PER, avec le *topos investi*, c'est-à-dire les gestes reproduits ou mis en œuvre, les praxéologies visitées ou produites par les groupes lors du second PER.

Nos analyses ont montré que, pour les groupes 4 et 5, les dialectiques particulier-général et objets-structures sont absentes, si bien que ces groupes n'ont pu investir de praxéologie structuralistes. L'enrichissement par le media-milieu et la praxéologie d'annotation n'a donc pas réussi à augmenter le topos de ces deux groupes. Par contre, les autres groupes ont démontré des habiletés qui confirment la compréhension de certaines preuves, donc l'investissement des praxéologies structuralistes sous-jacentes. En particulier, nos analyses montrent le développement de praxéologies plus ou moins complètes par les groupes 1 et 6, résultant d'un investissement par ces étudiants d'une partie conséquente du topos offert. Ceci montre que le partage particulier des attributions des sujets (les groupes d'étudiants et l'enseignant) réalisé dans l'exercice du PER d'annotation du media-milieu réalise un certain équilibre : il n'est pas attendu des étudiants de reconstruire une preuve complète qui résulterait en un topos offert trop important comparé aux capacités d'investissement par les étudiants, de sorte que l'enseignant se trouverait placé dans la fonction de correcteur d'exercices ; à l'inverse, le milieu est suffisamment ouvert pour placer les étudiants dans une posture active et non en simples lecteurs de preuves.

Cependant, nos analyses ont également montré les limites de la dévolution des praxéologies structuralistes : les gestes accomplis par les participants du forum relativement aux assertions  $A_1^g$ <sup>7</sup> et  $A_1^{gg}$ <sup>8</sup> (voir Annexe 2) sont peu investis par les groupes d'étudiants. Nous avons déjà donné des facteurs explicatifs de ce phénomène liés à l'état de connaissance des étudiants. D'une façon générale, nous avons vu qu'il s'exerce toujours en algèbre abstraite une tension entre l'emploi de méthodes élémentaires (dans notre cas, liées à l'arithmétique des entiers) et l'attaque des conjectures par des points de vue conceptuels et généralisateurs, ce qui constitue un changement de paradigme. Un argument d'économie pousse dans un sens tandis qu'un argument de simplification pousse dans l'autre, autant que

---

<sup>7</sup> Stabilité par sous-anneau de la propriété de principalité.

<sup>8</sup> Stabilité par sous-anneau des propriétés remarquables des anneaux.

le caractère simplificateur puisse être rendu visible. Est-ce la cas dans le contexte de l'activité autour des décimaux ?

L'apport de  $A_1=A_0^g$  par rapport à  $A_0$  ne se situe pas au niveau de la simplification de la preuve mais de la compréhension mathématique du phénomène, c'est-à-dire des « ressorts » de la preuve : l'existence d'une preuve générale utilisant uniquement la propriété que  $\mathbf{D}$  est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est considérée par le mathématicien comme une mise en évidence des « raisons profondes » à l'origine du phénomène. Dans la tension entre logique de l'économie et apports intellectuels, l'étudiant est-il sensible à cet argument ? Fait-il sens pour lui ? Par ailleurs,  $A_1^g$  et  $A_1^{gg}$  sont deux assertions erronées, si bien que l'on peut se poser la question de la valeur que donne un étudiant à un raisonnement visant à démontrer qu'une assertion est fautive ainsi qu'à une méthode de pensée qui conduit à énoncer des généralisations abusives. Ceci suscite de façon évidente un problème de contrat. Notons qu'il existe cependant des généralisations qui sont des assertions vraies et mathématiquement éclairantes, par exemple « si  $K$  désigne le corps des fractions d'un anneau principal,  $A$  et  $B$  est un anneau tel que  $A \subset B \subset K$ , alors  $B$  est également principal ». Enfin, la preuve la plus élaborée de la non-principalité de  $\mathbf{Z}[X]$  utilise des isomorphismes d'anneaux ainsi qu'une méthode de raisonnement par l'absurde visant à mettre en défaut l'une des propriétés que la théorie nous apprend sur les anneaux principaux plutôt que la définition de la principalité. Cette praxéologie met ainsi en évidence deux obstacles : le premier concerne la structure quotient, dont de nombreux travaux didactiques montrent qu'elle pose problème (Nardi 2000, Lajoie et Mura 2004, Hausberger 2013, etc.), à la fois pour des raisons de nature didactique et, d'un point de vue épistémologique, du fait de la nouveauté et des enjeux conceptuels de ce type de raisonnement en terme d'isomorphismes, vecteur d'analogies et de simplifications ; le second obstacle est bien connu en didactique de la géométrie : un tel usage du tissu déductif n'est possible qu'à un certain niveau de l'apprentissage. Or les étudiants se situent au début de leur apprentissage des concepts structuralistes abstraits.

L'organisation didactique de l'activité pose également des questions de nature mésogénétique et chronogénétique : en ce qui concerne le milieu, les documents (medias) à disposition des étudiants, hormis le media-milieu, sont le polycopié de cours ainsi que les ouvrages éventuellement apportés par les étudiants ou les informations glanées sur internet *via* les « smartphones ». Des recherches individuelles sont encouragées entre les deux

séances, mais le contrat est-il suffisamment fort pour que les étudiants effectuent ce travail ou bien la dialectique entre les medias et les milieux se réduit-elle à des allers-retours entre le photocopié de cours et le media-milieu ? Il s'agit en effet d'une difficulté persistante dans l'enseignement supérieur : un habitus semble installé de se limiter au cours de l'enseignant, peu nombreux sont les étudiants qui fréquentent les ouvrages disponibles, lorsque les enseignants conseillent des références. Enfin, il est possible de remédier au déficit de questionnement des étudiants en termes d'ouvertures vers de nouvelles questions : on peut envisager pour cela une troisième séance dédiée à l'investigation au niveau de chaque groupe des questions ouvertes formulées. Il est possible également de procéder au préalable à la phase de mise en commun, ce qui permet de mettre à niveau les groupes moins avancés et de décider ensuite en classe entière des questions soumises à enquête complémentaire, celle-ci se déroulant cette fois en dehors du media-milieu. Bien entendu, ceci augmente considérablement le temps d'horloge, d'où des problèmes de nature chronogénétique. Notons également qu'une intervention didactique, lors de la phase de mise en commun par exemple, est probablement nécessaire afin d'ouvrir le questionnement par rapport à l'habitat des anneaux principaux dans lequel la formulation des questions posées au sein du media-milieu tend à cloisonner l'enquête.

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Nous avons envisagé dans cette communication ce que pourrait être une activité relevant du paradigme du questionnement du monde (Chevallard 2011) dans le contexte de l'algèbre abstraite. La formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction, une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique. Dans cette perspective, questionner le monde en instaurant une dialectique fertile entre medias et milieux (Chevallard 2008), c'est questionner les objets mathématiques eux-mêmes de telle sorte que l'on puisse observer, faire fonctionner et développer une dialectique entre objets et structures, les concepts structuraux étant construits ou mobilisés à travers ce jeu du questionnement.

Ce travail appelle à de nombreux développements, dont la poursuite de l'investigation des praxéologies structuralistes en

algèbre abstraite, en raffinant encore la décomposition des gestes et démarches structuralistes, en appui sur l'épistémologie contemporaine d'une part, d'autre part sur l'étude de manuels, et particulièrement de manuels anciens au sein desquels la méthodologie structuraliste n'a pas encore été naturalisée. Le rôle des dialectiques particulier-général et objets-structures est à approfondir, notamment leurs modalités de fonctionnement dans les cours et les manuels ; il s'agit ensuite de développer des ingénieries se donnant pour objectif de faire fonctionner ces dialectiques. Nos modèles praxéologiques dédiés à éclairer le processus de transposition didactique du savoir algébrique à l'université ainsi que la distinction entre approches *top-down* et *bottom-up* sont également à éclairer par des analyses praxéologiques fines. Le travail d'ingénierie sur les PER engageant des savoirs formels abstraits à l'Université et le développement d'outils théoriques afin d'en évaluer l'impact sur les apprentissages sont à poursuivre. Enfin, notre étude invite à examiner les théorèmes-en-acte en algèbre abstraite, et plus généralement les distinctions introduites par Vergnaud lorsque ce sont, par rapport au contexte classique des mathématiques du secondaire, les concepts eux-mêmes qui sont pris pour objet, autrement dit en relation avec la construction de schèmes en algèbre abstraite.

#### BIBLIOGRAPHIE

- BARBE, J., BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCON, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice : the case of limites of functions in spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235–268.
- BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de l'Université Paris 7.
- BOURBAKI (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 12/1, 73-112.
- CHEVALLARD, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. In T. Assude & B. Grugeon (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp.177-188). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes*

de la XI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques (pp.3-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2008). Un concept en émergence: la dialectique des medias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp.344-366). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

CHEVALLARD, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=161](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161) (consulté le 17 mai 2016).

CHEVALLARD, Y. (2011). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Languier, B. Pedemonte, A. Pressiat, E. Roditi (Eds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Actes de la XVI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

DIEUDONNÉ, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*. Paris : Hachette.

DURAND-GUERRIER, V., HAUSBERGER, T. & SPITALAS, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20, 101-148.

GUIN, D. (2013). *Algèbre II : Anneaux, Modules et Algèbre multilinéaire*. Collection Enseignement Sup L3M1M2. EDP Sciences.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 237-254.

HASSE, H. (1930). Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV*, 39, 22-34.

HAUSBERGER, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.), *Actes du colloque de l'EMF 2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21<sup>e</sup> siècle »* (pp.425-234). Université de Genève.

HAUSBERGER, T. (2013). On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra. In B. Ubuz, C. Haser, M.-A. Mariotti (Eds), *Proceedings of CERME 8 – Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education* (pp.2346-2355). Middle East Technical University Ankara Turkey.

HAUSBERGER, T. (2015). Dimensions collaboratives et dialectique media-milieu : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. *Communication à la 18<sup>ème</sup> Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, août 2015, Brest*.

HAUSBERGER, T. (2016a). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. *Communication présentée à la Cinquième Conférence Internationale de la Théorie Anthropologique du Didactique, janvier 2016, Madrid*.

HAUSBERGER, T. (2016b). A propos des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite. *Communication présentée au Premier Congrès de l'International Network for Didactic Research in University Mathematics, avril 2016, Montpellier*.



- LAJOIE, C. & MURA, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/1, 45-80.
- LAKATOS, I. (1984). *Preuves et Réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.
- LERON, U., & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242.
- MANDELBROJT, S. (1952). Pourquoi je fais des mathématiques. *Revue de métaphysique et de morale*, 57(4), 422-429.
- NARDI, E. (2000). Mathematics Undergrates' Responses to Semantic Abbreviations, 'Geometric' Images and Multi-level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 169-189.
- PERRIN, D. (1996). *Cours d'algèbre*. Editions Ellipses.
- ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques*, n°47. IREM de Paris 7.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/2, 139-190.
- ROGALSKI M. (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech*, n°169, 127-162. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- VERGNAUD, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2/2, 215-230.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 133-170.
- WINSLOW, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In R. Rouchier et I. Bloch (Eds), *Actes de la XIII<sup>e</sup> Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.1-12). Cédérom. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- WOZNIAK, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en Education*, 21, 152-165.

ANNEXE 1 : LE MEDIA-MILIEU

**Mic** : L'anneau des nombres décimaux, c'est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$ . Je sais que tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal mais je ne sais plus le démontrer (je crois que faut considérer un truc du genre  $\mathbf{I}$  inter  $\mathbf{Z} \dots$ ). Pouvez-vous m'aider à le démontrer ? Ensuite, comment définit-on le PGCD de nombres décimaux ? Merci

**Guillaume** : « Je sais que tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal » L'anneau des nombres décimaux est justement un contre-exemple, non ?

**Toto.Je.zero** : L'anneau des décimaux est principal. En espérant ne pas avoir dit trop de conneries.

**Fred** : La suite des  $\mathbf{Z}/10^n$  doit fournir une suite croissante d'idéaux non stationnaire, l'anneau des décimaux n'est donc pas noethérien et a fortiori pas principal. Non ? A plus

**Mic** : Ah moi j'ai lu plusieurs fois qu'il est principal...

**Domi** :  $\mathbf{D}$  est bien sûr principal. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathbf{D}$  et  $x \in I$ . Pour  $m$  entier assez grand  $10^m x \in \mathbf{Z}^*$  donc  $I$  contient des entiers strictement positifs. Si on note  $n$  le plus petit :  $\forall x \in I : x$  peut s'écrire  $x = 10^m y$  avec  $y \in \mathbf{Z}$ .

On effectue la division euclidienne de  $y$  par  $n : y = kn + q$  avec  $q$  entier et  $0 \leq q < n$ . Alors  $x = 10^m kn + 10^m q$  donc  $q \in I$  et  $q = 0$  et  $I$  est engendré par  $n$ .

**Mic** : Merci Domi !

**Trivecteur** : « Guillaume : *Je sais que tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal* ». Soit  $A$  un sous-anneau de l'anneau  $\mathbf{Q}$  des rationnels.

(1) : si  $r = a/b \in A$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers premiers entre eux alors  $1/b \in A$  (utiliser Bézout).

Maintenant soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Comme  $\mathbf{Z}$  est principal,

(2) : il existe  $g \in \mathbf{Z}$  tel que  $I \cap \mathbf{Z} = g\mathbf{Z}$ .

D'autre part, comme dans (1), soit  $r = a/b$  dans  $I$ . Alors par (2), pour un certain entier  $x$ , on a  $r = g(x/b)$  et par (1), on sait que  $x/b \in A$ . Ceci prouve que  $I$  est principal (engendré par  $g$ ).

**OlivierG** : Bonjour, Pour Fred :  $\mathbf{Z}/10^n$  n'est pas un idéal de  $\mathbf{D}$ , sinon  $1/10^{n+1} = 1/10.1/10^n$  serait un élément de  $\mathbf{Z}/10^n$ , ce qui n'est pas le cas. Amicalement.

**Mic** : Et personne ne sait comment on définit le PGCD de 2 nombres décimaux ?

**Trivecteur** : Le pgcd de deux éléments  $a$  et  $b$  d'un anneau intègre  $A$  est, s'il existe, un élément  $d$  de  $A$  qui est à la fois (1) : diviseur commun à  $a$  et à  $b$  (2) : multiple de tout diviseur commun à  $a$  et à  $b$ .

Dans un anneau principal, un pgcd existe toujours. Il ne te reste plus qu'à mettre en pratique, par exemple quel est le pgcd de  $a=0,6$  et  $b=34,8$  ?

**Mic** : PGCD(a,b) = 0,2 ?

**bs** : bonjour

Question: soit  $A$  un anneau principal; peut-on alors affirmer que tout sous-anneau de  $A$  est aussi principal ? ( par exemple:  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{D}$  )

Je n'ai pas trouvé dans mes cours un tel théorème et n'arrive pas à exhiber de contre-exemple. Merci

Mic: essaie 0,6 avec les éléments fournis par Trivecteur ?

**Toto.le.zero** :  $\mathbf{R}[X]$  est principal, mais le sous anneau  $\mathbf{Z}[X]$  ne l'est pas.

**Mic** : ah oui lol, j'ai pris le plus petit :p donc c'est 0,6.

Un autre exemple intéressant :  $\text{PGCD}(21,1.4)=1$ .

**Le barbu rasé** : Plus simplement, bs : un corps est toujours "touskonveu" (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de bezout, ...), or tout anneau commutatif intègre se plonge dans son corps des fractions.

Etant donné une propriété remarquable d'un anneau commutatif intègre, il y a donc peu de chances qu'elle soit stable par sous-anneau (sauf si tous les anneaux commutatifs intègres vérifient cette propriété, ou qu'un corps ne la vérifie pas, évidemment).

**Mic** : euh  $\mathbf{Z}[X]$  est principal, non ?

**bs** : merci Toto de me rappeler un résultat qui s'était évaporé, certainement avec la chaleur; effectivement, on le démontre en considérant l'ensemble  $I$  de  $\mathbf{Z}[X]$  formé des polynômes dont le terme constant est pair.

**bs** : merci pour toutes ces précisions et les explications de barbu rasé.

**OlivierG** : Pour Mic :  $\mathbf{Z}[X]$  n'est pas un anneau principal, car l'idéal  $(2,X)$  n'est pas principal.

**Mic** : je n'arrive pas à voir pourquoi  $(2,X)$  n'est pas principal. Faut passer par la norme ?

**Oumpapah** : pour Mic et OlivierG,  $\mathbf{Z}[X]$  n'est pas principal de façon très simple : l'idéal engendré par  $X$  est premier et non maximal: en effet le quotient de  $\mathbf{Z}[X]$  par  $(X)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$  qui est intègre et non un corps.

**Mic** : Ah oui ! Dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal !! héhéééé

**Mic** : OlivierG > tu peux quand même me dire pourquoi  $(2,X)$  n'est pas principal ?

**corentin** : Il contient  $X$ , il contient 2. Donc il contient  $2\mathbf{Z}[X]$  et  $X\mathbf{Z}[X]$ . Suppose qu'il s'écrive  $P\mathbf{Z}[X]$ . Que dire de  $\text{deg}(P)$ ?

**Gakusei** : Bonsoir, je pense que  $\text{pgcd}(21,1.4)=7$  et  $\text{pgcd}(0.6,34.8)=3$ , en fait je fais plus que le penser, j'en suis persuadé : n'oublions pas que dans  $\mathbf{D}$  2 et 5 sont des unités ! @+

**niktalop** : bonjour, peut être que tu préféreras cette réponse.  $\mathbf{Z}[X]/(X,2)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ; si  $\mathbf{Z}[X]$  était principal alors tu pourrais trouver  $P$  appartenant à  $\mathbf{Z}[X]$  tel que  $\mathbf{Z}[X]/(P)$  soit isomorphe à  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Tu n'as qu'à essayer de trouver ce  $P$  qui n'existe pas par ailleurs. Je te laisse conclure.

**Mic** :  $\text{pgcd}(21,1.4)=7$  : OK ;  $\text{pgcd}(0.6,34.8)=6$  plutôt.

corentin > je vois pas, pour moi  $P=X+2$  marche : ( je suis perdu.

*Développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite 139*

**corentin** : Tu crois que tout polynôme de  $2\mathbf{Z}[X]$  peut s'exprimer sous la forme  $(X+2)P$ ?

**Mic** : ah oui donc P est de degré 0.

## ANNEXE 2 : ANALYSE DU PREMIER PER

| sigle                                     | Description de l'argument  | acteur       |
|---|--|--------------|
| $A_0$<br>$A_1=A_0^g$<br>$Q_1, i(Q_1)$     | D est un sous-anneau principal de $\mathbf{Q}$<br>Tout sous-anneau de $\mathbf{Q}$ est principal<br>Comment le démontrer ? Considérer $\mathbf{I} \cap \mathbf{Z}$ | Mic          |
| $Q_2$                                     | Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?  | Mic          |
| $R_1(Q_1)=r(A_0)$                         | Indirect, via « principal implique noethérien »  | Fred         |
| $p(A_0)$                                  | Adaptation de la démonstration de la primalité de $\mathbf{Z}$   | Domi         |
| $R_2(Q_1)=p(A_1)$                         | Mise en œuvre de $i(Q_1)$ ; utilise la primalité de $\mathbf{Z}$   | Trivecteur   |
| $r(r(A_0))$                               | $\mathbf{Z}/10^n$ n'est pas un idéal   | Olivier G    |
| $R_1(Q_2)=R(Q_2^g)$<br>$Q_2'$             | Définition générale du pgcd dans un anneau intègre<br>pgcd(0,6;34,8) ?   | Trivecteur   |
| $R_1(Q_2')$                               | pgcd(0,6;34,8)=0,2   | Mic          |
| $Q_1^g, A_1^g$<br>$i(Q_2')$               | Tout sous anneau d'un principal est-il principal ?<br>« Essai 0,6 »  | bs           |
| $R_1(Q_1^g)=r_1(A_1^g)$                   | Contre-exemple utilisant $\mathbf{Z}[X]$ non principal (A2)  | Toto le zéro |
| $R_2(Q_2), E$<br>$A_3$                    | pgcd(0,6;34,8)=0,6, « J'ai pris le plus petit »<br>pgcd(21;1,4)=1  | Mic          |
| $R_2(Q_1^g)=r_2(A_1^g)$<br>$=r(A_1^{gg})$ | Classe de contre-exemples à la stabilité par sous-anneau<br>des propriétés d'eulidianité, primalité, etc.  | Barbu rasé   |
| $r(A_2)$                                  | « $\mathbf{Z}[X]$ est principal, non ? »   | Mic          |
| $ip_1(A_2)$                               | Considérer les polynômes à terme constant pair   | bs           |
| $p_1(A_2)$                                | $\mathbf{Z}[X]$ non principal car $(2, X)$ n'est pas principal   | Olivier G    |
| $Q_3$                                     | Pourquoi $(2, X)$ n'est-il pas principal ?   | Mic          |
| $p_2(A_2)$                                | $\mathbf{Z}[X]$ non principal car $(X)$ est premier et non maximal<br>$(\mathbf{Z}[X]/(X) \sim \mathbf{Z}$ est intègre et non un corps)                            | ompapah      |
| $cp_2(A_2)$                               | Dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal   | Mic          |
| $cp_1(A_2), Q_3'$                         | $(2, X)$ contient (2) et $(X)$ ; si $(2, X)=(P)$ , que dire de $P$ ?   | corentin     |
| $R_3(Q_2'), A_3'$<br>$E$                  | pgcd(0,6;34,8)=3, pgcd(21;1,4)=7<br>2 et 5 sont des unités de $\mathbf{D}$   | Gakusei      |
| $ip_3(A_2)$                               | « Essai de trouver ce $P$ qui n'existe pas par ailleurs. »   | niktalop     |
| $R_4(Q_2')$                               | pgcd(0,6;34,8)=6   | Mic          |
| $i(Q_3')$                                 | « Tout élément de $2\mathbf{Z}[X]$ s'exprime-t-il $(X+2)P$ ? »   | Corentin     |
| $R(Q_3')$                                 | deg(P)=0   | Mic          |

Développer des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite 141

ANNEXE 3 : RELEVÉ DES RÉPONSES DES ÉTUDIANTS AUX QUESTIONS 2 ET 3

Question 2 :

| N° groupe |  |
|-----------|--|
| 1         | <p>2) <math>\mathbb{D}</math> est un sous-anneau principal de <math>\mathbb{Q}</math></p> $\mathbb{D}^* \supset \{(-1)^c 2^a 5^b \mid c \in \{0,1\}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ <p>Question a-b on l'égalité.</p> <p>sur <math>\mathbb{D}</math> on n'a pas qu'un PGCD<br/>         si <math>c</math> est un pgcd de <math>a</math> et <math>b</math><br/> <math>\text{PGCD}(a,b) = c \cdot \mathbb{D}^*</math></p>   |
| 4         | <p>(2) Sur les décaux :</p> <p><del>il existe un pgcd non unique pour les décaux.</del></p> <p>l'anneau est principal.</p> <p>un pgcd existe.</p> <p>conjugé pgcd <math>(x,y)</math><br/> <math>\sim \text{pgcd}(a,b)</math><br/>         si <math>x = \frac{a}{10^m}</math> et <math>y = \frac{b}{10^n}</math>,<br/>         avec <math>a,b,m,n \in \mathbb{Z}</math>.</p>  |
| 5         | <p>2) Résultats obtenus à propos des nombres décimaux :</p> <p><math>\mathbb{D} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b = 10^m, m \in \mathbb{N}\}</math> est un anneau</p> <p><math>\mathbb{D}</math> sous-anneau de <math>\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}^* \}</math></p> <p><math>\mathbb{D}</math> est un anneau principal.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- tout ses idéaux sont principaux</li> <li>- tout sous-anneau de <math>\mathbb{Q}</math> est principal</li> </ul> <p>Relation d'ordre dans un anneau <math>(\mathbb{D})</math> : "   "</p> $\text{PGCD}(a\alpha, b\alpha) \sim \alpha \text{PGCD}(a,b)$ |
| 6         | <p>Résultats obtenus à propos des nombres décimaux.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\mathbb{D}</math> est principal. (cf démo de Domi)</li> <li>- <math>\frac{\mathbb{Z}}{10} \cap \mathbb{D}</math> n'est pas un idéal de <math>\mathbb{D}</math>.</li> <li>- On peut définir un pgcd sur <math>\mathbb{D}</math><br/> <math>\rightarrow</math> on choisit comme représentant le plus petit des pgcd entiers (convention choisie)<br/>         ex: <math>\text{pgcd}(0,6; 34, 8) = 3</math><br/> <math>(\text{pgcd}(0,6; 34, 8) \sim 0,6 \sim 6 \sim 3 \sim 60 \dots)</math><br/> <math>\rightarrow \text{pgcd}(24,4) = 7</math>.</li> </ul>       |

## Question 3 :

| N° groupe |   |
|-----------|---|
| 1         | <p>3) Tout anneau de <math>\mathbb{Q}</math> est principal.</p> <p>Question <math>\mathbb{R}[X]</math> est-il principal?</p> <p><math>A/\mathbb{Z}</math> intègre <math>\Leftrightarrow I</math> prime</p> <p><math>A/I</math> corps <math>\Leftrightarrow I</math> maximal</p> <p>Dans un anneau principal tout idéal non nul prime est maximal.</p>   |
| 4         | <p>(3) Sur les anneaux :</p> <p><math>\mathbb{Z}[X]</math> n'est pas principal</p> <p><math>(2) + (X) = (2, X)</math></p>   |
| 5         | <p>(3) Résultats généraux importants :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>A</math> anneau</li> <li><math>A</math> euclidien <math>\Rightarrow A</math> principal <math>\Rightarrow A</math> factoriel <math>\Rightarrow A</math> nothérien</li> <li>donc pas contraposition <math>A</math> non nothérien <math>\Rightarrow A</math> non principal</li> <li>• <math>\mathbb{Z}</math> principal <math>\Rightarrow \exists g \in \mathbb{Z} / \bigcap_{I \text{ idéal de } \mathbb{Z}} I = g\mathbb{Z}</math></li> <li>• Tout anneau commutatif intègre se plonge dans son corps des fractions.</li> <li>• Dans un anneau principal, un PGCD existe toujours.</li> <li>• <math>\mathbb{R}[X]</math> anneau principal.</li> <li>• <math>\mathbb{Z}[X]</math> n'est pas un anneau principal (<math>\mathbb{Q}[X]</math> non principal).</li> <li>• <math>\mathbb{Z}[X]/(X) \cong \mathbb{Z}</math> intègre.</li> <li>• <math>\mathbb{Q}^{\times} = \{2, 5\}</math> ?</li> </ul> |
| 6         | <p>Résultats plus généraux sur les anneaux</p> <p>Tout sous-anneau de <math>\mathbb{Q}</math> est principal (cf. démonstration 2)</p> <p>Dans un anneau principal, un pgcd existe.</p> <p>Un corps a toutes les propriétés remarquables des anneaux</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\mathbb{R}[X]</math> est principal</li> <li>- <math>\mathbb{Z}[X]</math> n'est pas principal.</li> </ul>   |