



HAL
open science

**Dimensions collaboratives et dialectique médias-milieux :
un questionnement didactique autour d'une
retranscription d'échanges sur un forum de
mathématiques**

Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Thomas Hausberger. Dimensions collaboratives et dialectique médias-milieux : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. G. Gueudet; Y. Matheron. Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, pp.613-622, 2016, Recherches en didactique des mathématiques, 978 2 859 19315 7. hal-01322989

HAL Id: hal-01322989

<https://hal.science/hal-01322989>

Submitted on 29 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DIMENSIONS COLLABORATIVES ET DIALECTIQUE MEDIAS-MILIEUX : UN QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE AUTOUR D'UNE RETRANSCRIPTION D'ECHANGES SUR UN FORUM DE MATHEMATIQUES

Thomas Hausberger*

RESUME

Nous détaillons dans cette communication nos outils d'analyse des échanges tenus sur un forum ouvert de mathématiques, à propos d'une question portant sur la structure de l'anneau des nombres décimaux. La modélisation utilise le schéma herbartien en TAD, enrichi de nouvelles dialectiques, et permet d'observer le fonctionnement d'un collectif d'apprenants. Cette étude s'insère dans le cadre de nos recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université. Nous concluons en discutant les potentialités de l'usage en classe d'une retranscription des échanges du forum.

Mots-Clés : enseignement supérieur, algèbre abstraite, schéma herbartien, dialectique medias-milieus, dialectique individuel-collectif

HOW TO DEVELOP STRUCTURALIST PRAXEOLOGIES IN ABSTRACT ALGEBRA?

Abstract – We detail in this communication our tools developed in order to analyse a discussion held an open mathematical forum about a question on the structure of the ring of decimal numbers. The modelling uses the herbartian schema in ATD, enriched with new dialectics, and allows us to observe the functioning of a group of learners. This study fits in the wider context of our research on the teaching and learning of Abstract Algebra at university. We conclude by discussing the potential of the classroom use of a transcript of the forum

Key words: tertiary education, abstract algebra, herbartian schema, dialectic of the medias and milieus, dialectics of the individual and the collective

CONTEXTE GENERAL

1. Un programme de recherches

Ce travail s'inscrit dans le projet de développement d'une « didactique du structuralisme », en appui sur l'épistémologie, suscité par un constat d'importantes difficultés au niveau de l'apprentissage des structures algébriques à l'Université (Leron et Dubinsky 1995, Nardi 2000, Lajoie et Murat 2004, Durand-Guerrier et al 2015). Nous avons eu la charge de l'enseignement de la théorie des anneaux et des corps en troisième année de licence de mathématiques pendant la durée d'une habilitation (quatre années) à l'Université de Montpellier, ce qui a permis la mise en place d'expérimentations et a suscité la réflexion que nous présentons ici.

De nombreuses difficultés sont à lier à la nature épistémologique particulière du savoir enseigné (le « challenge de la pensée structuraliste », Hausberger 2012) et ses conséquences

* Equipe DEMa du laboratoire IMAG, Université de Montpellier, thomas.hausberger@umontpellier.fr

didactiques que l'on peut analyser au sein du cadre épistémologique des savoirs FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur ; Robert 1987, voir également Hausberger 2012 p. 430). Plus que des concepts (les structures), c'est l'apprentissage de la méthode structuraliste qui est en jeu, les concepts eux-mêmes trouvant leur raison d'être dans cette méthode qui a donné lieu à une véritable réécriture de l'algèbre par les mathématiciens (Hausberger 2012). Dans l'optique de développer une didactique du structuralisme algébrique, les praxéologies particulières qui interviennent en algèbre abstraite, que nous nommons « praxéologies structuralistes » (Hausberger 2015c), vont être amenées à jouer un rôle important. Il s'agit d'identifier et de décrire ces praxéologies, ce qui fournira un modèle épistémologique de référence pour le chercheur, puis de développer des situations et des stratégies d'apprentissages à même de conduire les apprenants à développer ces praxéologies.

Nous envisageons, dans notre projet très vaste, plusieurs approches possibles. L'une d'entre elles, que nous ne détaillerons pas ici, consiste à retrouver une « phénoménalité des structures mathématiques » ; pour cela, nous avons développé une ingénierie didactique destinée à l'apprentissage de la méthode axiomatique en mathématiques dans une perspective structuraliste (Hausberger 2015a). L'activité vise à rendre effectives les dialectiques fondamentales concret-abstrait, objet-structures, syntaxe-sémantique, contribuant ainsi à lutter contre un déficit sémantique que tend à produire l'enseignement traditionnel (l'écrasement des objets par les structures).

La stratégie que nous présentons dans cet article se fonde sur une approche « bottom-up » de l'enseignement des structures algébriques. Une telle approche se donne pour objectif de construire progressivement les concepts, en les faisant apparaître comme des outils performants développés afin de répondre à des questions concrètes sur des objets, puis d'instaurer progressivement une dialectique entre objets et structures. Elle s'oppose à l'approche majoritaire « top-down », c'est-à-dire un enseignement frontal des structures qui se présente comme un discours théorique (propre à la contemplation, selon l'étymologie de *theoria*), contribuant ainsi à faire des apprenants des spectateurs plutôt que des acteurs. Dans une approche « bottom-up », il est utile de disposer de moyens permettant d'« enrichir le milieu », afin de favoriser la dévolution des concepts abstraits. Il s'agit également de favoriser le questionnement des étudiants, afin de quitter le paradigme monumentaliste (Chevallard 2011) dans lequel l'on peut situer en général l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université.

Ces préoccupations nous ont conduit à développer une activité d'enseignement portant sur la structure algébrique de l'anneau des nombres décimaux et le calcul du pgcd, en appui sur des échanges recueillis sur un forum de mathématiques autour d'une question posée par l'un des participants. En d'autres termes, le forum, en tant que milieu, a conduit à la création d'un média, lequel sert de milieu dans l'activité d'enseignement (et produit l'enrichissement de milieu recherché par rapport au milieu de la classe tel qu'il se présente en général dans le cadre d'une séance classique de travaux dirigés). Pour ces raisons, nous appellerons ce média le « média-milieu ». Ce fonctionnement nous a conduit à nous emparer de la notion, introduite par Chevallard, de dialectique des médias et des milieux (Chevallard 2008). D'autre part, la structure de Parcours d'Etude et de Recherche (PER, Chevallard 2009) et ses dialectiques nous sont apparus comme des outils d'analyse intéressants pour comprendre la dynamique des échanges, à la fois sur le forum de mathématiques (ce que nous appelons le premier PER) et en classe, lors d'un travail des étudiants sur le média-milieu (le second PER).

En relation avec le thème de la 18^{ème} école d'été (la prise en compte du collectif), nous proposons essentiellement dans cette communication de détailler nos outils d'analyse des échanges du forum et les résultats obtenus, en les replaçant dans le contexte global de nos travaux en didactique de l'algèbre abstraite. Parmi les nouvelles dialectiques à prendre en compte par rapport aux dialectiques identifiées par Chevallard déjà prises en charge par la

TAD figure ainsi les dialectiques objets-structures et particulier-général ainsi que celle entre l'individuel et le collectif. La retranscription des échanges du forum ont servi de corpus à un travail d'analyse mené par un des groupes participant au TD relatif au cours de Marianna Bosch, d'autres groupes analysant en parallèle un second corpus portant sur le travail d'un collectif de professeurs du secondaire en formation. Nous renvoyons aux annexes du compte-rendu de ce TD pour une copie de cette retranscription et un aperçu du travail du groupe et des questions soulevées. Nous présentons ici une synthèse des conclusions que nous avons pu tirer en relation avec nos propres recherches.

2. *Structuralisme mathématique et praxéologies structuralistes en algèbre abstraite*

Alors que l'algèbre abstraite apparaît souvent, du point de vue de l'apprenant, comme un ensemble de questions et de tâches isolées dont on a saisi ou non le "truc" en permettant la résolution, nous allons montrer qu'il est possible de mettre en évidence un ensemble de techniques structuralistes qui permettent d'éclairer les pratiques en algèbre abstraite, de faire apparaître leurs raisons d'être et d'en fonder l'unité. Le point de départ est une étude épistémologique du structuralisme algébrique dont nous allons donner un bref aperçu, renvoyant le lecteur à Hausberger (2012) pour davantage de détails.

La pensée structuraliste se caractérise par une méthodologie et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et en mettant en avant les concepts.

Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts (Hasse 1930).

Il s'agit donc d'une refondation mathématique, portée par un projet qui relève également du didactique (permettre l'intelligibilité d'un contenu structuré). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets.

La citation de Hasse est également intéressante par la mise en avant de la généralité, posée en principe (recherche de la généralité maximale), car vecteur de simplifications. Ce point de vue, s'il est emblématique du projet structuraliste, ne manquera pas d'être débattu au sein de la communauté mathématique ; ainsi, pour Mandelbrojt :

Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème. [...] C'est ainsi qu'on obtient la généralité explicative. Personnellement, je sens qu'il y a un optimum à cette généralité. (Mandelbrojt 1952, p. 426-427)

Avant de définir plus précisément ce qu'il s'agit d'entendre par « praxéologie structuraliste », prenons tout d'abord un exemple afin d'en donner l'idée. Il s'agit de montrer qu'un anneau donné est intègre ; cette tâche peut être traitée à différents niveaux, selon l'importance de la « dimension structuraliste » :

- Au premier niveau (niveau 1), il s'agit de démontrer que la définition de l'intégrité est satisfaite, autrement dit qu'« un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul ». On écrit pour cela $(a + ib)(c + id) = 0$, ce qui conduit à un système un peu pénible à résoudre dans les entiers, d'où probablement une impasse pour un grand nombre d'étudiants. Par contre, lorsque l'on réalise que $\mathbf{Z}[i]$ est inclus dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes et qu'un élément non nul est inversible donc simplifiable, la preuve devient « triviale » : $zz' = 0$ avec z non nul, donne, en multipliant par z^{-1} , la nullité de z' .
- Au niveau 2, on utilise toujours l'inclusion de $\mathbf{Z}[i]$ dans \mathbf{C} mais on invoque le résultat général que le sous-anneau d'un corps est intègre. Le bloc technico-théorique, réduit dans le niveau 1 aux propriétés des nombres complexes, intègre maintenant des

résultats abstraits généraux, des structures. C'est ce type d'organisation mathématique qui est visée, et non l'organisation mathématique restant au niveau de la théorie des objets.

- Au niveau 3, on invoque qu'un corps est intègre et que l'intégrité est une propriété stable par sous-anneau. C'est le même bloc théorique que le niveau 2 en apparence mais la formulation de la réponse et son mode d'obtention est différent : on n'applique plus un théorème du cours, mais le mode de pensée structuraliste par rapport à la question posée : elle concerne l'intégrité ; je raisonne alors en termes de classes d'objets, de relation entre ces classes (anneau-corps) et de conservation de la propriété (intégrité) vis-à-vis des opérations structuralistes sur ces classes (passage à un sous-anneau).

Ainsi que le montre une étude plus exhaustive des praxéologies dans le domaine de l'arithmétique des anneaux abstraits (Hausberger 2015c), ce phénomène est général en algèbre abstraite : chaque type de tâche présente une dialectique entre le particulier et le général, où l'on essaie soit de généraliser/adapter des preuves connues, soit de généraliser l'énoncé à démontrer et de démontrer cette généralisation en conjecturant qu'elle est vraie et porteuse de simplification. La pensée structuraliste raisonne ainsi en termes de classes d'objets, de relations entre ces classes et de stabilité de propriétés par des opérations sur les structures.

Sur le modèle de l'exemple précédent, dès que le niveau 2 est atteint, nous pouvons parler de praxéologie structuraliste. De façon générale, une telle praxéologie va viser la réalisation de la tâche en se plaçant à un niveau de généralité qui soit porteur de simplification, en appui sur les concepts et sur l'outillage technologique structuraliste (théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La méthode structuraliste vise ainsi à remplacer une praxéologie $(T, *, *, *)$ par une praxéologie structuraliste $(T^g, \tau, \theta, \Theta)$, où T^g désigne une généralisation de T .

LE MEDIA-MILIEU ET SES DIMENSIONS COLLABORATIVES

1. Le forum et le fil de discussion choisis

Le forum qui nous concerne est accessible à l'adresse <http://www.les-mathematiques.net>. Il a été créé en janvier 2001 et est régi par une charte, rédigée par les principaux contributeurs du forum lors de l'élaboration de cette charte, dont le fondateur du forum. En voici un extrait :

Objet du forum : ce Forum est un espace convivial d'échanges sur les mathématiques et les sujets s'y rapportant, sans discrimination de niveau. Les thèmes abordés sont : la demande de précisions sur le vocabulaire et les concepts mathématiques ; la proposition de problèmes ; la demande d'éclaircissements sur des problèmes mathématiques ; l'envoi de résultats, de textes ou de démonstrations classiques ou insolites ; l'échange d'informations sur l'actualité mathématique, sur les séminaires à venir, sur les références bibliographiques, sur les logiciels de mathématique formelle, sur l'épistémologie, sur les différents cursus et les centres universitaires ; le dialogue sur les fondements d'une théorie ; etc.

Le forum est structuré selon les grands domaines mathématiques : algèbre, analyse, arithmétique, combinatoire et graphes, etc. et inclut également des entrées comme maths et société, maths et informatique, pédagogie, etc. La modération du forum a lieu sur la forme essentiellement. En ce qui concerne le fond, le contenu mathématique n'est pas modéré, la charte mentionne principalement des règles de bonne conduite (pas de propos diffamatoires, de contenu à caractère commercial, etc.). On notera cependant les deux derniers items des « conseils d'utilisation » (paragraphe 4 de la charte) :

4.11 - ne donnez pas la solution des exercices trop vite, mettez sur la piste, suggérez des indices ;

4.12 - faites preuve de tolérance, de patience, de pédagogie. Evitez la condescendance et le

dogmatisme. La critique constructive du contenu d'un message fait partie des échanges autorisés et souhaités sur le Forum, mais l'attaque nominative est mal venue.

Le fil de discussion choisi, intitulé « les nombres décimaux », est visible à l'adresse suivante : <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1>

Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007 (tous les messages sont datés de 2007, sans davantage de précision). Le contenu n'a pas évolué depuis (pas de nouvelle intervention) mais il a été vu 6897 fois (au 30 mai 2015), ce qui constitue l'un des plus gros scores (avec les suites de Cauchy dans Q qui totalise 9595 vues).

2. Le média-milieu et les deux PER

Ainsi que le définit Chevallard (2008), « le mot de média désignera ici tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias. » Par contraste, un milieu dénote « tout système qu'on peut regarder comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée » (loc. cit.). La distinction à opérer se situe donc au niveau du caractère adidactique du milieu. En effet, « les médias sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention d'informer ». Cependant, Chevallard entrevoit d'emblée l'usage possible d'un média en tant que milieu, ce qui sera notre cas : « bien entendu, un média peut, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel » (loc. cit.).

En fait, il est fait trois usages distincts du média-milieu qui bénéficie ainsi de « trois vies », de sa genèse (première vie) à sa « mise en examen » en classe (troisième vie) :

- i. *Première vie* : travail collaboratif sur le forum visant à répondre à une question Q_x posée par un forumeur x . Il s'agit d'une *première dimension collaborative* : travail d'un collectif (*ouvert, hétérogène*) d'acteurs sur la base d'une question posée par un individu
 - *Modalités* : accès libre, à distance ; le forum est le lieu du débat public ; la structure du forum organise les échanges sous forme d'un fil de discussion ; le forum est régi par une charte, mais le contenu mathématique n'est pas modéré (extérieurement au collectif de pairs) ; la charte véhicule une intention didactique (mettre sur la piste, critique constructive)
 - *Médias-milieux* : fonctionnement du forum en tant que milieu, rétroactions par les pairs uniquement ; production d'un *média M* : le fil de discussion (achevé)
 - Il s'agit d'un *premier PER* : visite d'œuvres et développement de praxéologies, par le collectif.
- ii. *Deuxième vie* : bien que potentiellement ouvert (une réponse n'est jamais définitive), le média (figé) sert de documentation à un visiteur du forum (lecteur) se posant des questions similaires. Il s'agit cette fois d'un travail individuel d'un lecteur (pas d'action sur le média), nourri du travail du collectif
 - *Médias-milieux* : Fonctionnement en tant que média principalement voire comme un milieu, au niveau individuel, sans rétroaction par des acteurs, si le lecteur en entreprend le questionnement en autonomie. Les traces des rétroactions du milieu forum, inscrites dans le média, fonctionnent comme des « rétroactions virtuelles » pour celui qui revisite l'étude.
- iii. *Troisième vie* : en classe, travail d'annotation du média (avec des sigles pour en organiser l'étude). Il s'agit d'une *deuxième dimension collaborative* : travail d'un collectif (*fermé, plus ou moins homogène*) sur la base du travail du premier collectif.

- *Modalités* : en classe, travail en petits groupes de 3-4 étudiants ; le professeur organise le travail du collectif : introduction d'un contrat spécifique (annotations) et circule entre les groupes, en tant que directeur de l'étude.
- *Médias-milieu* : fonctionnement en tant que milieu (adidactique) avec un contrat spécifique (annoter)
- Il s'agit du *second PER* : ce n'est plus Q_x qui est soumis au débat mais le média M lui-même, polarisé par une question de l'enseignant Q_M relative à M (qui nécessite cependant l'étude de Q_x).

ANALYSE DU PREMIER PER AVEC LES OUTILS DE LA TAD

1. Des outils disponibles et de nouvelles dialectiques à incorporer

Un PER est modélisé, en TAD, par un schéma herbartien :

$$[S(X, Y, Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit, \text{ avec } M = \{R_1^\spadesuit, \dots, R_n^\spadesuit, O_{n+1}, \dots, O_m, Q_{m+1}, \dots, Q_p\}$$

La question initiale Q appelle donc à la construction de réponses R_i ou à la mobilisation de réponses R_j^\spadesuit déjà construites, à déconstruire en visitant des œuvres O_k afin de produire des réponses R_i^\heartsuit en faisant émerger de nouvelles questions Q_l . Il s'agit là de la *dialectique des questions et des réponses*, ainsi que de la *dialectique des cœurs et des poinçons*. Ceci permet de décrire le milieu M ainsi que la dynamique des échanges.

Le fait qu'il s'agisse d'un PER mathématique, au niveau de l'enseignement supérieur (avec son exigence de preuve, outre le propos de la question initiale elle-même, qui est une demande de preuve : la principalité de l'anneau des décimaux) et sur l'algèbre abstraite, nous a poussé à introduire les dialectiques supplémentaires suivantes : celle des *preuves et des réfutations*, dans l'esprit de Lakatos (1984) (*point de vue logique*) d'une part et les dialectiques *particulier-général et objets-structures* (*point de vue structuraliste*) d'autre part. Elles viennent compléter les deux dialectiques précédentes (*point de vue anthropologique*). Il s'agit également de considérer la *dialectique individu-collectif* en relation avec le thème de l'Ecole d'Eté.

Nous avons proposé la méthodologie suivante d'analyse de la retranscription des échanges du forum : il s'agit tout d'abord d'annoter ce corpus à l'aide de sigles. Par rapport aux sigles R_i , R_j^\spadesuit , R_i^\heartsuit , O_k , Q_l décrits ci-dessus, nous avons rajouté, afin de prendre en charge les dialectiques supplémentaires :

- des indices afin de tenir compte des individus (par exemple Q_x) ;
- de nouveaux sigles pour décrire les gestes :
 - $i(Q)$, $E(R)$: une indication (piste) ou une explication ;
 - A : une assertion, distinction qui permet de considérer ce qui suit ;
 - $p(A)$, $r(A)$, $ip(A)$, $cp(A)$: une preuve, réfutation, indication de preuve et complément de preuve relatifs à l'assertion A ;
 - A^g : la formulation d'une généralisation de l'assertion A .

Le travail d'annotation du corpus permet ensuite de représenter, sous forme de question-gramme enrichi par les nouveaux sigles, le contenu et la dynamique des échanges.

2. Les question-grammes enrichis

L'intervention initiatrice du fil est le fait d'un forumeur noté x (Mic), lequel met en avant deux assertions et deux questions :

- $A_{x,0}$: \mathbf{D} (l'anneau des nombres décimaux) est un sous-anneau de \mathbf{Q}
- $A_{x,1}$: Tout sous-anneau de \mathbf{Q} est principal

- $Q_{x,1}$: Comment le démontrer ?
- $Q_{x,2}$: Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?

D'emblée, nous remarquons que les assertions $A_{x,0}$ et $A_{x,1}$ constituent un syllogisme dont la conclusion est « **D** est principal », assertion notée A_x et qui est probablement visée par x . L'assertion $A_{x,1}$ est une généralisation de A_x , (nous notons $A_{x,1} = A_x^g$), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur (A_x^g), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » (les ressorts) à l'origine du phénomène (la principalité de **D**). Alors que la question $Q_{x,1}$ se rapporte à l'exigence démonstrative relativement à cette propriété de principalité qui est affirmée, la question $Q_{x,2}$ lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses définitions (ou propriétés) du pgcd que l'on peut énoncer dépendent du type d'anneau dans lequel on se place.

La partie principale du question-gramme (enrichi) issu de la question $Q_{x,1}$ est représentée ci-dessous (figure 1). Nous avons noté les forumeurs par leur initiale (ou par deux lettres en cas d'ambiguïté) et ne détaillons pas la branche issue de la question généralisée Q_{bs} (voir ci-dessous). Nous constatons la présence de réfutations sans ou avec preuves, de réfutations de preuves, d'arguments du type « moi, j'ai lu plusieurs fois qu'il est principal », que nous considérons comme un poinçon qu'appose l'intervenant sur l'assertion « **D** est principal ». Cette partie des échanges est close lorsque l'assertion $A_{x,1}$ est démontrée, ce qui a finalement été effectué dans un second temps, après avoir établi la principalité de **D** par une méthode plus élémentaire (généralisation de la preuve de la principalité de **Z**). Notons que le question-gramme est construit sur la base d'une interprétation des échanges, lesquels contiennent beaucoup d'implicites ; l'architecture logique de l'argumentation se révèle un appui majeur afin d'identifier les intentions des acteurs. Notons également que la représentation sous forme de question-gramme ne conserve pas la chronologie des échanges : par exemple, $R_{tr}(Q_{x,1})$ est la dernière intervention qui clôture cette partie de la discussion.

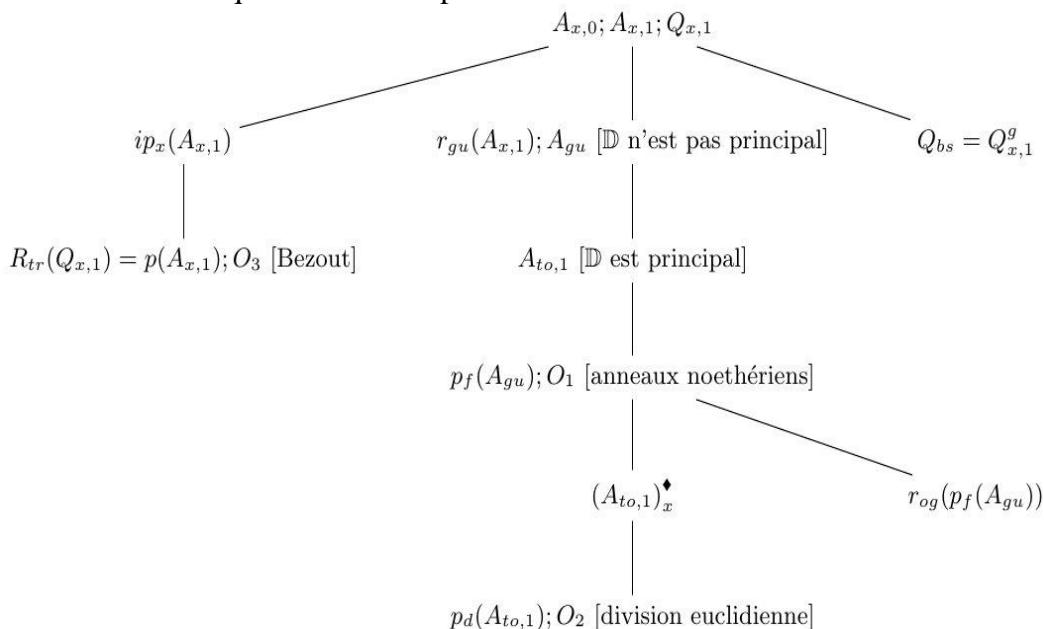


Figure 1. - Question-gramme relatif au sous-système didactique $S(\{x, gu, to, f\}, \{d, tr\}, Q_{x,1})$

Nos analyses montrent que le système didactique est en fait très labile : les $x_i \neq x$ (l'auteur de la question) présentent un très faible topos visible (sur les 29 interventions de 13 participants, 11 sont dues à x , chacun des autres participants intervenant au plus 3 fois). Le complémentaire de x , noté Y , constitue en quelque sorte un ensemble d'aides à l'étude pour x . D'un point de vue global, le système didactique est donc de la forme $S(x, Y, Q_x)$.

Localement, nous pouvons distinguer différents sous-systèmes :

- $S(\{x, gu, to, f\}, \{d, tr\}, Q_{x,1})$
- $S(bs, \{to, br\}, Q_{bs})$
- $S(x, \{bs, ol, om, n\}, A_{to,2})$
- $S(x, co, A_{ol})$
- $S(\{x, ga\}, tr, Q_{tr})$

où les questions et assertions discutées sont :

- $Q_{bs} = Q_{x,1}^g$: tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ? Le forumeur br y répond même à travers une généralisation Q_{bs}^g de la question : il donne une classe de contre-exemples à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ».
- $A_{to,2} : \mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal, destiné à fournir également un contre-exemple à la question Q_{bs} qui porte sur une assertion universelle
- A_{ol} : l'idéal $(2, X)$ de $\mathbf{Z}[X]$ n'est pas principal
- Q_{tr} : que vaut $\text{pgcd}(0,6 ; 34,8)$? Cette question a été formulée par tr après avoir répondu à la question $Q_{2,x}$ portant sur la définition du pgcd de deux décimaux : tr y répond d'ailleurs à travers une généralisation $Q_{x,2}^g$ de la question, il définit le pgcd dans un anneau intègre général (œuvre O_4) et il énonce le théorème d'existence du pgcd dans un anneau principal (œuvre O_5). La question Q_{tr} vise ainsi au développement d'une praxéologie dont la tâche est le calcul du pgcd et dont le bloc théorique contient $\{O_4, O_5\}$. Ceci conduit à la production de réponses provisoires $R_{x,1}$ ($\text{pgcd}=0,2$), $R_{x,2}$ ($\text{pgcd}=0,6$) puis à des réponses R_x^\heartsuit ($\text{pgcd}=3$) et R_{ga}^\heartsuit ($\text{pgcd}=6$)

Nous voyons que les niveaux de généralités les plus élevés ne sont pas investis par x (au niveau des observables : sous-système $S(bs, \{to, br\}, Q_{bs})$). La question $A_{to,2}$ est l'occasion d'une pluralité de preuves, dont certaines mobilisent des œuvres telles que le théorème important suivant sur les idéaux d'un anneau principal : « dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal » (œuvre O_6) ou nécessitent encore des compléments (faisant appel aux théorèmes d'isomorphismes notamment).

3. Synthèse des résultats

- *Dialectique individuel-collectif*. Bien que globalement le système didactique soit de la forme $S(x, Y, Q_x)$, certains forumeurs se rangent également, vis-à-vis de certaines sous-questions, au rang des apprenants aux côtés de x , tandis que, dans d'autre cas, l'un d'entre eux va adopter la posture de professeur, dans le sous-système $S(x, co, A_{ol})$ par exemple. Ceci s'interprète comme la conséquence d'un milieu adidactique hétérogène.
- *Dialectique des preuves et des réfutations*. Nous notons une grande vitalité des échanges en termes de preuves et de réfutations : pluralité des réponses et des preuves, d'indications et de compléments de preuves, ouverture vers des questions connexes. La multiplicité des preuves (favorisée par la présence du collectif), y compris celles qui ne débouchent pas, contribue largement à la visite des œuvres. Les preuves les plus directes et élémentaires sont les moins riches. Certaines assertions sont données sans preuve ou avec des preuves incomplètes (tout comme la littérature mathématique où le niveau de l'argumentation dépend de nombreux facteurs).
- *Dialectique particulier-général*. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A^g) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite et participe du développement de praxéologies structuralistes.

- *Dialectique médias-milieus*. La liste des concepts (anneau noethérien, euclidien, idéal premier, etc.) et théorèmes (O_5, O_6 , etc.) atteste de la visite des œuvres. La mobilisation des œuvres dans un contexte de preuve, la convocation de nouvelles œuvres afin de combler les trous des preuves ou de réfuter des preuves, qui constituent dans ce contexte la dialectique des médias et des milieux, atteste de l'appropriation de ces œuvres par le collectif.
- *Dialectique objets-structures*. La mise en relation d'objets et de structures, dans un rapport dialectique est, dans le contexte spécifique de l'algèbre abstraite, un second indicateur de l'appropriation des œuvres. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un contrôle sémantique sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets.

OUVERTURE VERS LE SECOND PER

Ainsi que nous l'avons décrit dans la « troisième vie » du média-milieu, nous proposons d'utiliser le média-milieu en tant que milieu lors d'une activité en classe s'apparentant à un second PER, mené par des étudiants de troisième année de licence de mathématiques. Ce n'est plus Q_x (l'union de $Q_{x,1}$ et de $Q_{x,2}$) qui est soumis au débat mais le média M lui-même, polarisé par une question de l'enseignant Q_M relative à M et que l'on peut résumer en ces termes : quelles connaissances sur les nombres décimaux et sur les anneaux généraux peut-on extraire de ce média-milieu ? La question Q_M nécessite ainsi l'étude de Q_x tout en amenant l'apprenant à identifier à la fois des propriétés d'objets et des résultats de structure, donc à faire fonctionner la dialectique objets-structures.

Les caractéristiques intéressantes suivantes du média-milieu permettent d'appuyer notre stratégie :

- Le média-milieu est susceptible de servir de milieu car les réponses ne sont pas institutionnalisés et en partie incomplètes ; ce n'est pas une fiction didactique mais un pan de réalité. Le média-milieu favorise la dévolution de la question Q_x car elle a déjà été réalisée au sein du forum ; les forumeurs ont le statut de pairs.
- Sans le média-milieu, le milieu est trop pauvre pour produire une résolution de Q_x à l'aide des praxéologies visées ; l'enrichissement du milieu par le média-milieu permet la discussion de conceptions erronées d'une part et de praxéologies avancées d'autre part.

Afin d'outiller les étudiants dans l'analyse, par petits groupes de 3-4 étudiants, du média-milieu, notre scénario prévoit que le professeur organise le travail via l'introduction d'un contrat spécifique d'annotation par des sigles portant sur la compréhension (?), la vérité des assertions (V et F), la validité des preuves (repérer une erreur E et la corriger si c'est possible, compléter par un argument manquant X, valider la preuve CQFD), l'appropriation et le questionnement (Q et R pour respectivement une question ou une remarque suscitées par un passage donné). La réponse à la question Q_M constitue une phase de synthèse relativement à cette phase d'analyse. L'enseignant conserve une posture de directeur d'étude tout au long du PER.

Alors que l'enseignement de l'algèbre abstraite s'apparente souvent à une visite d'œuvres dont l'appropriation par les étudiants est difficile, un tel usage des forums serait-il une piste valable pour que « la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement » (Chevallard 2008) ? Partant de l'idée que la formalisation est à la fois une mathématisation du monde (réel extra-mathématique) et, à un niveau supérieur d'abstraction,

une réécriture conceptuelle des mathématiques antérieures (pré-structuralistes) en termes de structures, les objets mathématiques usuels faisant office de réel intra-mathématique, nous proposons d'étendre le paradigme du questionnement du monde décrit par Chevallard (2011) à de tels contextes de PER formels à l'Université (Hausberger2015b). Un tel usage des forums fournit-il une piste sérieuse pour se diriger, dans le cas de savoirs formels à l'Université, vers ce nouveau paradigme que Chevallard appelle de ses vœux ? Nous nous proposons, dans des travaux à venir, d'analyser ce second PER après réalisation en classe de l'ingénierie. Il s'agit, relativement à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre abstraite, d'observer si les étudiants développent des praxéologies structuralistes. Nous souhaitons également évaluer notre stratégie en termes de chronogénèse, de topogénèse et de mésogénèse. Par exemple, permet-elle de réaliser un ratio entre le topos offert et le topos investi qui soit favorable aux apprentissages ?

REFERENCES

- Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans Gueudet, G. & Matheron, Y. (Eds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris : IREM de Paris 7 et ARDM, p. 344-366.
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. Exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161
- Chevallard, Y. (2011). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux. *Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques* (Carcassonne, août 2011).
- Durand-Guerrier, V., Hausberger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 20, p. 101-148.
- Hasse, H. (1930). Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV* 39, 22-34.
- Hausberger, T. (2012) Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. Dans *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012*, p. 425-234.
- Hausberger, T. (2013) On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra. In Ubuz, B., Haser, C., Marioti, M.-A. (eds). *Proceeding of CERME 8 – Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education, Antalya : Turkey (2013)*. Middle East Technical University Ankara Turkey, p.2346-2355.
- Hausberger, T. (2015a). Abstract algebra, mathematical structuralism and semiotics. In *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. To appear.
- Hausberger, T. (2015b). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. *Communication présentée à la Cinquième Conférence Internationale de la Théorie Anthropologique du Diactique, Janvier 2016, Madrid*.
- Hausberger, T. (2015c). A propos des praxéologies structuralistes en algèbre abstraite. *Communication au colloque INDRUM2016, avril 2016, Montpellier*.
- Lajoie, C. & Mura, R.. (2004) Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/1, 45-80.
- Lakatos, I. (1984). Preuves et Réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris : Hermann.
- Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242.
- Mandelbrojt, S. (1952). Pourquoi je fais des mathématiques. *Revue de métaphysique et de morale* 57(4), 422-429.
- Nardi, E. (2000). Mathematics Undergrates' Responses to Semantic Abbreviations, 'Geometric' Images and Multi-level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics* 34, 169-189.
- Robert, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques n°47*. IREM de Paris 7.
- Rogalski M. (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech n°169*. Grenoble : Université Joseph Fourier, p. 127-162.