



**HAL**  
open science

# A propos des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite

Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Thomas Hausberger. A propos des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite. 1st Congress of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. pp.296-305. hal-01322982

**HAL Id: hal-01322982**

**<https://hal.science/hal-01322982>**

Submitted on 31 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# A propos des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite

Thomas Hausberger

Université de Montpellier, [thomas.hausberger@umontpellier.fr](mailto:thomas.hausberger@umontpellier.fr)

*Nous introduisons dans cet article la notion de praxéologie structuraliste en didactique de l'algèbre abstraite, en appui sur une étude épistémologique du structuralisme mathématique. Nous illustrons notre propos en détaillant les praxéologies structuralistes en arithmétique des anneaux abstraits, sur la base d'une étude de manuels, et étudions les praxéologies structuralistes développées sur un forum de mathématiques en situation adidactique. Les enjeux didactiques de la notion de praxéologie structuraliste sont discutés en relation avec les difficultés identifiées dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite, à la transition entre Licence et Master de mathématiques.*

*Mots clefs : algèbre abstraite, praxéologies, structuralisme mathématique, didactique et épistémologie des mathématiques*

## INTRODUCTION

Les difficultés que rencontrent l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université (notamment les structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps) sont reconnues par de nombreux auteurs (Nardi 2000, Durand-Guerrier et al. 2015, Hausberger 2013) et reflètent un problème de « transition » (Gueudet 2008), qui a lieu cette fois, par comparaison avec la transition lycée-université, à l'intérieur d'une même institution.

De nombreux facteurs explicatifs sont à lier à la nature épistémologique particulière du savoir enseigné (le « challenge de la pensée structuraliste », Hausberger 2012) et ses conséquences didactiques que l'on peut analyser au sein du cadre épistémologique des savoirs FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur ; Robert 1987, voir également Hausberger 2012 p. 430). Un fait nouveau par rapport à l'algèbre linéaire, souligné dans Hausberger 2012, est le suivant : l'unification se situe à plusieurs niveaux

- le niveau 1 : une même théorie s'applique à des objets de nature différente ;
- le niveau 2 : la présentation axiomatique des structures en permet un traitement unifié (on se pose à propos des différentes structures le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils) mettant en avant les ponts entre ces structures ;
- le niveau 3 : ce qui était forme (les structures) devient pleinement objet à un niveau supérieur d'organisation, la théorie des catégories ou autre méta-théorie des structures.

Si le niveau 3 ne peut guère être abordé de façon réaliste avant la seconde année de Master, l'enjeu de la pensée structuraliste se situe au niveau 2, ainsi que le mettent en

exergue les manuels d'algèbre abstraite à la suite de l'ouvrage de van der Waerden (1930). Ces manuels témoignent de l'application d'une méthode : “la méthode structuraliste” (voir ci-dessous).

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard 2002), une méthode est un *ensemble de techniques*. La TAD, en effet, “considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche t d'un certain type T*, au moyen d'une certaine *technique*  $\tau$ , justifiée par une *technologie*  $\theta$  qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie*  $\Theta$ . En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*” (loc. cit.). Alors que l'algèbre abstraite apparaît souvent, du point de vue de l'apprenant, comme un ensemble de questions et de tâches isolées dont on a saisi ou non l'astuce en permettant la résolution, nous faisons l'hypothèse que la mise en évidence des techniques structuralistes permet d'éclairer les pratiques en algèbre abstraite, de faire apparaître leurs raisons d'être et d'en fonder l'unité.

Barbé et al. (2005) montrent comment le modèle épistémologique dominant du Calculus dans l'enseignement secondaire conditionne les organisations mathématiques dédiées à l'étude des limites de fonction. De même, dans le contexte de l'algèbre abstraite, il s'agit d'étudier comment le modèle épistémologique du structuralisme mathématique se traduit en termes d'organisations praxéologiques dans l'enseignement des structures algébriques et la résolution de problèmes en algèbre abstraite.

La constitution d'un modèle praxéologique de référence pour l'algèbre abstraite vise également à éclairer le problème de transition suscité par cet enseignement, dans l'esprit du travail de Winsløw (2006), qui, étudiant les praxéologies en analyse au sein de l'institution Université, constate que la transition du concret à l'abstrait que requiert la transition secondaire-supérieur se traduit, au niveau praxéologique, par le développement de nouvelles praxéologies dont le bloc praxique est construit sur le bloc du logos d'une praxéologie que l'étudiant maîtrise déjà. Si l'algèbre abstraite provient d'une réécriture conceptuelle de l'algèbre classique selon la méthodologie structuraliste, comment cette réécriture se traduit-elle en termes praxéologiques ? Y trouve-t-on des spécificités par rapport aux praxéologies en algèbre linéaire enseignées lors des deux premières années de licence ?

Nous ne répondrons pas à toutes ces questions dans cet article mais nous poserons les fondements de la notion de praxéologie structuraliste que nous introduisons en didactique de l'algèbre abstraite, en appui sur une étude épistémologique du structuralisme mathématique. Nous détaillerons plus particulièrement les praxéologies structuralistes en arithmétique des anneaux abstraits puis nous analyserons les praxéologies développées par un collectif d'apprenants sur un forum de mathématiques à propos d'une question portant sur la structure algébrique des nombres décimaux (voir également Hausberger 2015a et 2015b pour d'autres analyses de ce corpus). Ces données empiriques permettront de donner corps à la

notion de praxéologie structuraliste, fondée épistémologiquement, et de montrer sa pertinence dans l'analyse didactique des praxéologies en algèbre abstraite.

## **ETUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE DU STRUCTURALISME MATHÉMATIQUE**

La notion de structure est issue de la constitution des mathématiques en tant que science des « relations entre objets », point de vue relationnel abstrait qui domine les mathématiques contemporaines depuis l'élaboration des axiomatiques formelles par Hilbert notamment. La pensée structuraliste se caractérise par une méthodologie et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et en mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples » :

Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts (Hasse 1930).

Il s'agit donc d'une refondation mathématique, portée par un projet qui relève également du didactique (permettre l'intelligibilité d'un contenu structuré). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets. La citation de Hasse est également intéressante par la mise en avant de la généralité, posée en principe (recherche de la généralité maximale), car vecteur de simplifications. Ce point de vue, s'il est emblématique du projet structuraliste, ne manquera pas d'être débattu au sein de la communauté mathématique ; ainsi, pour Mandelbrojt :

Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème. [...] C'est ainsi qu'on obtient la généralité explicative. Personnellement, je sens qu'il y a un optimum à cette généralité. (Mandelbrojt 1952, p. 426-427)

Les *raisons d'être* des concepts sont ainsi à trouver dans l'examen des preuves, en les faisant apparaître comme des « ressorts » (phase d'analyse). On en fait ensuite une théorie déductive, en posant ces principes isolément puis en les combinant, de façon à produire des systèmes axiomatiques fertiles (comme celui définissant un groupe) tels que les théorèmes sur les objets considérés apparaissent comme des conséquences logiques de ces derniers systèmes (phase de synthèse). Ce processus de constitution des concepts structuralistes est bien décrit dans le Manifeste (Bourbaki 1948) rédigé par un groupe de mathématiciens, Bourbaki, qui en fut l'un des grands promoteurs et qui s'est donné comme projet de diffuser à l'ensemble des mathématiques la méthodologie développée par les algébristes allemands.

Bourbaki évoque la portée applicative de la méthode structuraliste, appliquée sur des problèmes nouveaux, dans un paragraphe intitulé « La standardisation de l'outillage mathématique » :

Son trait le plus saillant, d'après ce qui précède, est de réaliser une économie de pensée considérable. Les structures sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a

discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques. (Bourbaki 1948, p. 42).

Le discours de Bourbaki est clairement de nature technologique : tous les ingrédients sont présents pour définir des praxéologies. Cependant, afin de traduire l'esprit de la méthode, les types de tâches ne doivent pas rester au niveau théorique (montrer une inférence dans le jeu axiomatique abstrait) mais attraper des objets concrets et montrer le gain du point de vue conceptuel. Comme nous allons le constater bientôt, nous nous heurtons pour cela à une difficulté liée à la présence de méthodes élémentaires qui agissent comme un pôle attractif vis-à-vis de l'apprenant comparativement au pôle conceptuel abstrait souvent répulsif.

## **LES PRAXÉOLOGIES STRUCTURALISTES DANS LE CAS DE L'ARITHMÉTIQUE DES ANNEAUX ABSTRAITS**

L'arithmétique de  $\mathbf{Z}$  et des anneaux des entiers des corps de nombres, dans le cadre de généralisations successives, a été l'une des branches prépondérantes dans le cheminement historique, progressif, de la construction de la théorie des anneaux, avec la mise en évidence des grandes classes d'anneaux : anneaux euclidiens, principaux, factoriels. La problématique est la suivante : quel est l'analogue de  $\mathbf{Z}$  si l'on remplace  $\mathbf{Q}$  par une extension finie de  $\mathbf{Q}$  (i.e. un corps de nombres) ? On veut que le théorème fondamental de l'arithmétique soit vérifié (existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers). Or ce n'est pas toujours le cas, même pour la bonne notion d'anneau des entiers ; ce résultat négatif conduit Dedekind à introduire les idéaux : dans les anneaux des entiers, tout idéal se décompose comme un produit d'idéaux premiers.

Une autre branche qui a contribué historiquement est l'arithmétique des polynômes, développée par Hilbert bien que ce dernier n'ait pas fait le lien avec les corps de nombres : il a fallu attendre Noether vers les années 1920 pour que l'on comprenne bien l'intérêt des structures comme *principe organisateur*. Le rapprochement est alors effectué entre la théorie des groupes et celle des anneaux, à travers les théorèmes d'isomorphismes par exemple (Hausberger 2013), ce qui met en évidence l'intérêt d'un traitement unifié des structures et conduit à la réécriture des deux théories selon la méthode structuraliste.

Les exemples  $\mathbf{Z}[i]$  (anneau des entiers de Gauss) et  $\mathbf{K}[X]$  apparaissent ainsi comme les deux grands exemples paradigmatiques à unifier. Certains livres (par exemple Guin 2013) préfèrent  $\mathbf{K}[X]$  en vertu de la propriété universelle d'un tel anneau (point de vue théorie des catégories). D'un autre point de vue,  $\mathbf{Z}[i]$  engendre toute une classe

d'exemples (les anneaux des entiers) que l'on peut traiter avec des techniques similaires, donc génère des *types de tâches*.

Les notions d'anneau, d'homomorphisme et d'idéal constituent un « fond théorique » dans lequel s'inscrit cette théorie des anneaux factoriels, principaux et euclidiens. De nombreux auteurs (par exemple Guin 2013, Chap. I) font ainsi précéder ce chapitre d'un chapitre « généralités sur les anneaux » très abstrait (sans problématique sur des objets), en s'appuyant sur les analogies formelles entre les groupes et les anneaux dans la structuration de la théorie : par exemple, les sous-groupes distingués et les idéaux sont les noyaux des homomorphismes. D'autres auteurs (Colmez 2011) vont plus loin et posent, au sein d'un même chapitre « structures algébriques », en début d'ouvrage, la totalité des structures usuelles en algèbre ainsi que les notions structuralistes « usuelles » (« sous-truc », morphisme, noyau et image, produits et sommes de « trucs », construction de quotients). Les concepts et résultats mis en avant dans de tels chapitres constituent typiquement, dans notre approche, les *techniques et technologies structuralistes* à dégager et mettre en relation avec les tâches en algèbres abstraites engageant des objets.

Nous donnons ci-dessous une liste de tâches qui nous apparaissent comme récurrentes dans les polycopiés et manuels que nous avons consultés (Guin 2013, Perrin 1996 par exemple) :

- $T_1^+$  (resp.  $T_2^+$ ,  $T_3^+$ ,  $T_4^+$ ) montrer qu'un anneau est intègre (resp. factoriel, principal, euclidien) et  $T_1^-$  (resp.  $T_2^-$ ,  $T_3^-$ ,  $T_4^-$ ) : non intègre (resp. non factoriel, non principal, non euclidien)
- $T_5$  : déterminer le groupe des inversibles  $A^*$  d'un anneau  $A$
- $T_6$  : déterminer les irréductibles, ou simplement montrer qu'un élément donné est irréductible, ou encore décomposer un élément en produit d'irréductibles
- $T_7$  : calculer le pgcd de 2 éléments

Il est important de noter que le domaine mathématique qui nous concerne est caractérisé par une *structure écologique en « poupées russes »* (la chaîne d'inclusions des différentes classes d'anneaux : factoriel, principal, euclidien), qui impacte les types de tâches. Se situer par rapport à des classes d'objets et en tirer parti, délimiter ces classes donc l'extension des concepts, occupent une partie importante des tâches dévolues à l'étudiant.

La réalisation des tâches nécessite également le passage à un mode de pensée ensembliste et la mise en relation de propriétés et d'opérations sur les éléments avec des propriétés et opérations correspondantes sur les ensembles, sous la forme d'un véritable « dictionnaire » : par exemple,  $a$  est un élément premier si et seulement ( $a$ ) est un idéal premier non réduit à  $(0)$ , le pgcd est lié à la somme des idéaux, un quotient  $A/I$  est intègre si et seulement si l'idéal  $I$  est premier. Cet héritage de Dedekind et Noether représente un saut conceptuel conséquent. Dans Hausberger (2013), nous mettons en relation le problème de transition généré par l'accès à

l'algèbre structuraliste à l'Université avec la transition épistémologique vers ce *mode de pensée en termes de sous-ensembles distingués et d'homomorphismes* qui engendre les praxéologies structuralistes.

### **L'exemple de la tâche $T_1^+$ (montrer qu'un anneau est intègre)**

Cette tâche peut être traitée à différents niveaux, selon l'importance de la *dimension structuraliste*. Prenons l'exemple de l'anneau  $\mathbf{Z}[i]$  :

- Au premier niveau (niveau 1), il s'agit de démontrer que la définition de l'intégrité est satisfaite, autrement dit qu'« un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul ». On écrit pour cela  $(a+ib)(c+id)=0$ , ce qui conduit à un système un peu pénible à résoudre dans les entiers, d'où probablement une impasse pour un grand nombre d'étudiants. Par contre, lorsque l'on réalise que  $\mathbf{Z}[i]$  est inclus dans l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes et qu'un élément non nul est inversible donc simplifiable, la preuve devient « triviale » :  $zz'=0$  avec  $z$  non nul, donne, en multipliant par  $z^{-1}$ , la nullité de  $z'$ .
- Au niveau 2, on utilise toujours l'inclusion de  $\mathbf{Z}[i]$  dans  $\mathbf{C}$  mais on invoque le résultat général que le sous-anneau d'un corps est intègre. Le bloc technologico-théorique, réduit dans le niveau 1 aux propriétés des nombres complexes, intègre maintenant des résultats abstraits généraux, des structures. C'est ce type d'organisation mathématique qui est visée, et non l'organisation mathématique restant au niveau de la théorie des objets.
- Au niveau 3, on invoque qu'un corps est intègre et que l'intégrité est une propriété stable par sous-anneau. C'est le même bloc théorique que le niveau 2 en apparence mais la formulation de la réponse et son mode d'obtention sont différents : on n'applique plus un théorème du cours, mais le mode de pensée structuraliste par rapport à la question posée : elle concerne l'intégrité ; on raisonne alors en termes de classes d'objets, de relation entre ces classes (anneau-corps) et de conservation de la propriété (intégrité) vis-à-vis des opérations structuralistes sur ces classes (passage à un sous-anneau).

### **L'exemple de la tâche $T_3^+$ (montrer qu'un anneau est principal)**

Dans le cas de l'anneau des entiers relatifs  $\mathbf{Z}$ , au niveau 1, on se donne un idéal  $I$  de  $\mathbf{Z}$  non réduit à  $(0)$  et considère  $a = \inf(I \cap \mathbf{N})$ . On montre alors que  $I = a\mathbf{Z}$  en utilisant la division euclidienne. C'est la même preuve que pour les sous-groupes de  $\mathbf{Z}$ . Le niveau 2 consiste à remarquer que la preuve précédente fonctionne dès que l'on a une généralisation de la division euclidienne : cela revient à effectuer  $T_3^+$  via la tâche  $T_4^+$ .

Ci-dessous, il sera question de la tâche  $T_3^+$  dans le cas de l'anneau  $\mathbf{D}$  des nombres décimaux. La première idée est de généraliser la preuve de  $\mathbf{Z}$  (niveau 1). On se rend alors compte que c'est la relation de  $\mathbf{D}$  à  $\mathbf{Q}$  qui fait fonctionner la preuve : tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal (niveau 2'). Un apprenant ayant accompli ce chemin et assimilé le nouveau contrat structuraliste retiendra par la suite cet argument plus synthétique. Il est également possible de montrer que  $\mathbf{D}$  est euclidien (donc effectuer

$T_3^+$  via  $T_4^+$ ), en généralisant à  $\mathbf{D}$  la division euclidienne de  $\mathbf{Z}$ , en appui sur l'écriture d'un décimal sous la forme  $a/10^n$ .

### Définition des praxéologies structuralistes

En définitive, chaque type de tâche présente une *dialectique entre le particulier et le général*, où l'on essaie soit de généraliser/adapter des preuves connues, soit de généraliser l'énoncé à démontrer en conjecturant que le nouvel énoncé est vrai et porteur de simplification. La *pensée structuraliste* se caractérise par des raisonnements *en termes de classes d'objets, de relations entre ces classes et de stabilité de propriétés par des opérations sur les structures*. Sur les exemples précédents, dès que le niveau 2 est atteint, nous pouvons parler de praxéologie structuraliste. De façon générale, une telle praxéologie va viser la réalisation de la tâche en se plaçant à un niveau de généralité qui soit porteur de simplification, en appui sur les concepts et sur l'*outillage technologique structuraliste* (combinatoire des structures, théorèmes d'isomorphismes, théorèmes de structures, etc.). La méthodologie structuraliste vise ainsi à remplacer une praxéologie  $(T, *, *, *)$  par une praxéologie structuraliste  $(T^g, \tau, \theta, \Theta)$ , où  $T^g$  est une généralisation de  $T$  qui permette l'usage de techniques structuralistes. Nous allons observer ce phénomène plus en détail à travers le travail réalisé par un collectif d'apprenants en situation adidactique.

### ETUDE DES PRAXÉOLOGIES STRUCTURALISTES DÉVELOPPÉES PAR UN COLLECTIF D'APPRENANTS SUR UN FORUM

Le fil de discussion qui nous concerne, intitulé « les nombres décimaux », est visible à l'adresse suivante : <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1> Les échanges ont eu lieu probablement pendant un temps assez court, en 2007. L'intervention initiatrice du fil est le fait d'un forumeur, *Mic*, lequel met avant deux assertions et deux questions :  $A_1$  ( $\mathbf{D}$  est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}$ ),  $A_2$  (Tout sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  est principal),  $Q_1$  : Comment le démontrer ?),  $Q_2$  (Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?).

D'emblée, nous remarquons que les assertions  $A_1$  et  $A_2$  sont les deux prémisses d'un syllogisme dont la conclusion est «  $\mathbf{D}$  est principal », assertion notée  $A_0$  et qui est probablement visée par *Mic*. L'assertion  $A_2$  est une généralisation de  $A_0$  (nous notons  $A_2 = A_0^g$ ), dans l'esprit de la méthode structuraliste : la preuve recherchée se place au niveau de généralité supérieur ( $A_0^g$ ), reflétant la pratique experte des mathématiciens qui d'une part postulent que cette généralisation est porteuse de simplification, d'autre part considèrent qu'elle est éclairante quant aux « raisons profondes » à l'origine du phénomène (la principalité de  $\mathbf{D}$ ). La question  $Q_2$  lui est également liée : tant l'existence du pgcd que les diverses définitions (ou propriétés) du pgcd que l'on peut énoncer dépendent du type d'anneau dans lequel on se place.

L'investigation de ces questions va conduire un autre forumeur, *bs*, à porter la question à un niveau de généralité encore supérieur et formuler  $Q_1^g$  (tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ?). Le forumeur *barbu rasé* y répond ensuite à travers une généralisation  $Q_1^{gg}$  de la question : il donne une classe de contre-exemples



à l'assertion « toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ». Un autre participant, Toto le zéro, énonce de son côté l'assertion  $A_3$  ( $\mathbf{Z}[X]$  n'est pas principal), destiné à fournir également un contre-exemple à la question  $Q_1^g$  qui porte sur une assertion universelle. Le forumier Olivier G complète l'argument en affirmant  $A_4$  (l'idéal  $(2, X)$  de  $\mathbf{Z}[X]$  n'est pas principal). L'assertion  $A_3$  fait en fait l'objet d'une pluralité de preuves, données de façon incomplète sur le forum, et qui laissent apparaître une gradation au niveau de leur *dimension structuraliste*.

- Une preuve élémentaire, via l'assertion  $A_4$ , consiste à raisonner par l'absurde et écrire  $(2, X) = (P)$ . Ceci signifie que l'idéal  $(P)$  contient 2 et  $X$ , donc que  $P$  divise 2 et  $X$ . En raisonnant sur le degré, on montre que  $P$  est une constante puis que  $P$  est une unité de l'anneau  $\mathbf{Z}$ , donc  $\pm 1$ . Or une écriture  $1 = 2U + XV$  est impossible dans  $\mathbf{Z}[X]$ , comme on le voit en l'évaluant en 0 pour des raisons de parité. La preuve utilise la propriété  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ , valable dans  $A[X]$  pour tout anneau intègre  $A$ , qui est une propriété structurale liant une structure multiplicative et additive. Cependant, la dimension conceptuelle de la preuve reste peu visible et ne met pas en jeu les techniques structuralistes au-delà des *raisonnements logiques et ensemblistes à partir des définitions*.
- Une lecture plus *conceptuelle* de la preuve, qui sert aussi d'*heuristique*, est de questionner les *propriétés des éléments* 2 et  $X$  : on montre, toujours avec le degré, que ce sont des éléments irréductibles de l'anneau. Comme les unités de  $\mathbf{Z}[X]$  coïncident avec ceux de  $\mathbf{Z}$  (propriété valable pour tout anneau  $A[X]$ ,  $A$  intègre), donc avec  $\pm 1$ , on voit que ces éléments ne sont *pas associés*, donc ils sont *premiers entre eux*. C'est pour cette raison que l'idéal  $(2, X)$  est considéré comme un bon candidat pour fournir un idéal non principal. Enfin, si  $\mathbf{Z}[X]$  était principal, l'idéal  $(2, X)$  serait engendré par un pgcd. On conclut comme précédemment.
- Une dernière preuve consiste à remarquer que l'idéal  $(X)$  est inclus strictement dans l'idéal  $(2, X)$ . Ce fait est alors relié au *théorème structuraliste* bien connu en théorie des anneaux : dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal. Il suffit donc de montrer rigoureusement que  $(X)$  est un idéal premier non maximal. Une *technique* structuraliste consiste à raisonner sur le quotient  $\mathbf{Z}[X]/(X)$  et montrer que ce dernier est un anneau intègre qui n'est pas un corps. La *technologie* repose sur les liens entre les propriétés de l'idéal et celles du quotient. Enfin, ce quotient s'interprète comme l'ajout de la relation  $X=0$  à l'anneau  $\mathbf{Z}[X]$  : cet anneau n'est autre que  $\mathbf{Z}$ , à isomorphisme près, ce que l'on démontre en utilisant le « premier théorème d'isomorphisme », selon sa dénomination officielle, qui fait partie de l'*outillage structuraliste* standard. Les propriétés visées étant *stables par isomorphisme*, le résultat est démontré.

L'étude de ce fil de discussion montre ainsi le fonctionnement de deux dialectiques fondamentales en algèbre abstraite :

- *Dialectique particulier-général*. La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (passage de A à A<sup>g</sup>) apparaît comme une démarche employée à plusieurs reprises par certains membres du collectif. Ceci reflète les démarches expertes des mathématiciens en algèbre abstraite et participe du développement de praxéologies structuralistes.
- *Dialectique objets-structures*. L'examen de la structure des objets, des généralisations éventuelles des énoncés et des preuves, de l'insertion de ces dernières dans la théorie constituée en tissu axiomatique fait des structures axiomatiques un point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur pour démontrer des propriétés sur les objets. Réciproquement, un contrôle sémantique sur les énoncés axiomatiques s'exerce en les mettant à l'épreuve des exemples connus, donc des objets. En ce sens, la dialectique objets-structures s'apparente à une dialectique syntaxe-sémantique.

## CONCLUSION

La pratique de l'algèbre abstraite, qui engage des objets et des structures dans un rapport dialectique, se caractérise par un ensemble de techniques spécifiques que nous avons appelées structuralistes. En termes praxéologistes, une tâche se décompose ainsi en sous-tâches abstraites telles que : démontrer qu'un idéal premier est maximal (en utilisant les quotients), ou « simplifier » un quotient (en utilisant les théorèmes d'isomorphisme) dont la technologie mobilise les théorèmes généraux sur les structures concernées. Ce travail de description et d'analyse des praxéologies est à poursuivre et à raffiner encore. Au stade actuel de nos recherches, l'analyse des échanges d'un collectif hétérogène sur le forum a montré le développement de praxéologies structuralistes, du fait de praticiens expérimentés. En milieu didactique, la division de la tâche en sous-tâches est souvent réalisée par l'enseignant. Nous faisons l'hypothèse qu'un manque de recul des étudiants vis-à-vis de la méthode structuraliste, qui est également une heuristique, est un réel obstacle lorsqu'il s'agit de comprendre les raisons d'être de cette division et reconstituer le fil d'une démonstration présentant une dimension structuraliste importante. Un travail sur les preuves et l'usage de l'épistémologie en tant que levier méta (Hausberger 2012) nous apparaît comme un angle d'attaque pertinent pour faire face à cet obstacle.

## BIBLIOGRAPHIE

- Barbe, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascon, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice : the case of limites of functions in spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* 59, p. 235–268.
- Bourbaki (1948). L'architecture des mathématiques. Dans Le Lionnais F. (ed.) (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.
- Chevallard Y. (2002), « Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions », Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001), La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 3-32.

- Colmez, P. (2011). *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Palaiseau : Les éditions de l'Ecole Polytechnique.
- Durand-Guerrier, V., Hausberger, T. & Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 20, 101-148.
- Guedet, G. (2008). Investigation the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.
- Guin, D. (2013). *Algèbre II : Anneaux, Modules et Algèbre multilinéaire*. Collection Enseignement Sup L3M1M2. EDP Sciences.
- Hasse H. (1930) Die moderne algebraische Methode Jahresbericht der DMV 39, 22-34.
- Hausberger, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In Dorier, J.-L., & Coutat, S. (Ed.): *Enseignement des mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21e siècle*, Actes du colloque EMF2012. Geneva: University of Geneva, 425-434.
- Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo)morphism: a key notion in the learning of abstract algebra. In B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti (Ed.): *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Ankara: Middle East Technical University, 2346-2355.
- Hausberger, T. (2015a). Dimensions collaboratives et dialectique média-milieu : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. Communication à la 18ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, août 2015, Brest.
- Hausberger, T. (2015b). Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'Université : vers un paradigme du questionnement du monde. Communication présentée à la Cinquième Conférence Internationale de la Théorie Anthropologique du Diactique, Janvier 2016, Madrid.
- Mandelbrojt, S. (1952). Pourquoi je fais des mathématiques. *Revue de métaphysique et de morale* 57(4), p. 422-429.
- Nardi, E. (2000). Mathematics Undergraduates' Responses to Semantic Abbreviations, Geometric Images and Multi-level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 169- 189.
- Perrin, D. (1996). *Cours d'algèbre*. Editions ellipses.
- Robert, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques* n°47, IREM de Paris 7.
- Waerden, B.L. van der (1930). *Moderne Algebra*. 2 vols. Berlin : Springer.
- Winsløw, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier, R. et al. (ed.), *Actes de la XIIIè Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 1-12. Cédérom. La pensée Sauvage.