



**HAL**  
open science

# L' idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires

Philippe Maisonobe

► **To cite this version:**

Philippe Maisonobe. L' idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires. 2016. hal-01320796

**HAL Id: hal-01320796**

**<https://hal.science/hal-01320796>**

Preprint submitted on 24 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# L'idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires

Ph. Maisonobe  
Université de Nice Sophia Antipolis  
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné  
Unité Mixte de Recherche du CNRS 7351  
Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2

23 mai 2016

# Introduction

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Une famille  $\{H_1, \dots, H_p\}$  d'hyperplans vectoriels de  $V$  deux à deux distincts définit un arrangement  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  de  $V$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , soit  $l_i$  une forme linéaire sur  $V$  de noyau  $H_i$ . Ces formes sont définies à un coefficient de proportionalité près.

Suivons les notations du livre de P. Orlik et H. Terao [O-T]. Notons  $L(\mathcal{A})$  l'ensemble des intersections non vides d'éléments de  $\{H_1, \dots, H_p\}$ . Si  $X \in L(\mathcal{A})$ , nous notons  $J(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} ; X \subset H_i\}$ ,  $r(x)$  le codimension de  $X$  et  $\mathcal{A}_X$  l'arrangement d'hyperplans défini par  $\{H_i\}_{i \in J(X)}$ . Un arrangement  $\mathcal{A}$  est dit irréductible s'il n'est pas isomorphe à un produit d'arrangements non vides. Soit  $S = S(V^*)$  l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel dual de  $V$ . Nous notons  $\text{Der}_{\mathbf{C}}(S)$  le  $S$ -module des dérivations de  $S$  sur  $\mathbf{C}$  et  $D(\mathcal{A})$  le sous-module de  $\text{Der}_{\mathbf{C}}(S)$  formé des dérivations  $\chi$  vérifiant pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  :  $\chi(f_i) \in l_i S$ . Nous disons que l'arrangement  $\mathcal{A}$  est libre si  $D(\mathcal{A})$  est un  $S$ -module libre.

En dimension 2, tous les arrangements d'hyperplans sont libres. En dimension quelconque, les arrangements définis par des sous-groupes de réflexion du groupe linéaire de  $V$  définissent des arrangements libres dits arrangements de réflexion. C'est le cas notamment des arrangements de tresse définis à partir des hyperplans invariants du groupe symétrique.

Soit  $A_V(\mathbf{C})$ , l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels à coefficients dans  $S$ . Suivant la démonstration de Bernstein [Be], l'idéal des polynômes  $b \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  vérifiant :

$$b(s_1, \dots, s_p) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1},$$

n'est pas réduit à zéro. Cet idéal ne dépend pas du choix des formes linéaires  $l_i$  qui définissent les hypersurfaces  $H_i$ . Nous notons cet idéal  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$  et l'appelons l'idéal de Bernstein de  $\mathcal{A}$ . Le but de cet article est de déterminer cet idéal lorsque  $\mathcal{A}$  est un arrangement d'hyperplans linéaires libre.

Si  $X \in L(\mathcal{A})$ , notons  $\mathcal{A}_X$  l'arrangement d'hyperplans défini par  $\{H_i\}_{i \in J(X)}$ .

**Théorème 1** Soit  $V$  un espace vectoriel et  $\mathcal{A}$  un arrangement d'hyperplans linéaires libre. Alors l'idéal de Bernstein de  $\mathcal{A}$  est principal et engendré par le polynôme :

$$b_{\mathcal{A}}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L'(\mathcal{A})} \prod_{j=0}^{2(\text{card} J(X) - r(X))} \left( \sum_{i \in J(X)} s_i + r(X) + j \right) \quad ,$$

où  $L'(\mathcal{A}) = \{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ est irréductible}\}$ .

Exemple 1 (en dimension 2) : Soit  $l_1, l_2, \dots, l_p$  une famille de  $p$  formes linéaires homogènes sur  $\mathbf{C}^2$  non deux à deux colinéaires. L'idéal de Bernstein de  $(l_1, \dots, l_p)$  est principal et engendré par le polynôme :

$$\prod_{i=1}^p (s_i + 1) \prod_{j=0}^{2(p-2)} (s_1 + \dots + s_p + 2 + j) \quad .$$

Exemple 2 (l'arrangement de Tresse) : Soit la famille  $(x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n}$  de formes linéaires sur  $\mathbf{C}^n$ . L'idéal de Bernstein de  $(x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n}$  est principal et engendré par le polynôme :

$$\prod_{I \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{k=0}^{(\text{card } I - 1)(\text{card } I - 2)} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n, i, j \in I} s_{i,j} + \text{card } I - 1 + k \right) \quad .$$

## 1 Compléments sur les champs de vecteurs logarithmiques

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ . Désignons par  $\mathcal{O}_X$  son faisceau structural,  $\mathcal{D}_X$  le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{O}_X$  et  $\text{Der}_X$  le sous-faisceau des champs de vecteurs holomorphes.

Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  des fonctions analytiques sur  $X$  et  $F = f_1 \dots f_p$  leur produit. Notons  $H_i$  l'hypersurface formée par les zéros de la fonction  $f_i$  et  $H$  la réunion de ces hypersurfaces ou encore l'hypersurface formée par les zéros de  $F$ .

Soit  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ . Désignons par  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ , le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module engendré par  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  dans  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \frac{1}{F}]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  muni de sa structure naturelle de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module.

Notons par  $T^*X \xrightarrow{\pi} X$  le fibré cotangent à  $X$ . Posons :

$$\Omega_{f_1, \dots, f_p} = \left\{ \left( x, \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p \right) ; s_i \in \mathbf{C}, \text{ et } F(x) \neq 0 \right\} .$$

Cet ensemble  $\Omega_{f_1, \dots, f_p}$  est sur  $\pi^{-1}(X - H) \times \mathbf{C}^p$  une sous variété analytique lisse réduite de dimension  $n + p$  définie par les équations :

$$\xi_i - \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)} = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, p\} .$$

Nous désignons par  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$  l'adhérence dans  $T^*X \times \mathbf{C}^p$  de  $\Omega_{f_1, \dots, f_p}$ . Cette adhérence est donc un sous-espace irréductible de dimension  $n + p$  de  $T^*X \times \mathbf{C}^p$ .

Suivant K. Saito, un champ de vecteurs holomorphe  $\chi$  est logarithmique pour  $H$  si et seulement l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- en tout point lisse de  $H$ , le champ de vecteurs  $\chi$  est tangent à  $H$ ,
- pour tout  $x_0$  dans  $H$ ,  $\chi(F) \in F\mathcal{O}_{X, x_0}$ .

Le sous-faisceau des dérivations logarithmiques pour  $H$  est noté  $\text{Der}_X(H)$ . De cette équivalence, résulte :

$$\text{Der}_X(H) = \bigcap_{i=1}^p \text{Der}_X(H_i) .$$

**Notation 1** Soit  $\chi \in \text{Der}_X(H)$  et tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ , soit  $b_j$  la fonction holomorphe telle que  $\chi(f_j) = b_j f_j$ . Nous noterons  $\tilde{\chi}$  l'opérateur différentiel :

$$\tilde{\chi} = \chi - \sum_{j=1}^p b_j s_j \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$$

et par

$$\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) = \{ \tilde{\chi} ; \chi \in \text{Der}_X(H) \} .$$

Si  $P$  est un opérateur de  $\mathcal{D}_X$ , nous notons  $\sigma(P)$  le symbole principal de  $P$  pour la filtration naturelle de  $\mathcal{D}_X$  par l'ordre des dérivations. En donnant à chaque  $s_i$  le poids un, cette filtration s'étend en une filtration de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  que nous appelons filtration dièse. Si  $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ , notons  $\sigma^\sharp(P)$  le symbole principal de  $P$  pour cette filtration. C'est une fonction analytique sur  $T^*X \times \mathbf{C}^p$ . Si  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent, nous noterons  $\text{car}^\sharp(M)$  sa variété caractéristique relativement à la filtration dièse.

**Proposition 1** a)  $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$  est l'ensemble des opérateurs de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  d'ordre un pour la filtration dièse annihilant  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ .

b) L'application :

$$\text{Der}_X(H) \longrightarrow \tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) \quad , \quad \chi \longmapsto \tilde{\chi}$$

est un isomorphisme  $\mathcal{O}_X$ -linéaire.

**Remarque 1** Si  $U, V \in \text{Der}_X(H)$  :

$$[U, V] = UV - VU \in \text{Der}_X(H) \quad \text{et} \quad [U, \tilde{V}] = \tilde{U}\tilde{V} - \tilde{V}\tilde{U} .$$

**Notation 2** Nous notons  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  l'idéal de  $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$  engendré par les symboles des opérateurs de  $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$ . Si  $(\delta_1, \dots, \delta_l)$  forme un système de générateurs du  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\text{Der}_X(H)$  :

$$I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_l)) \quad .$$

**Proposition 2** Si  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est un idéal premier :

1. la variété des zéros de  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$  ,
2. Nous avons (voir aussi [B-M-M1] pour le résultat général) :

$$\text{car}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad ,$$

3. pour tout système de générateurs  $(\delta_1, \dots, \delta_l)$  du  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\text{Der}_X(H)$  :

$$\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_l) \quad .$$

**Preuve de 1 :** En dehors de  $H$ ,  $\text{Der}_X(H)$  est un  $\mathcal{O}_{X-H}$ -Module libre engendré par les  $n$  dérivations :

$$F \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} s_j \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad ;$$

Il en résulte que la restriction de  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  à  $X - H$  est un idéal réduit dont le lieu des zéros est la variété lisse  $\Omega_{f_1, \dots, f_p}$ . Si  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est un idéal premier, sa variété des zéros est irréductible et est l'adhérence de  $\Omega_{f_1, \dots, f_p}$  qui est par définition  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$ .

**Preuve de 2 :** En fait ce résultat est vrai sans hypothèse sur  $f_1, \dots, f_p$  voir [B-M-M1]. Sous notre hypothèse, il se déduit simplement du premier résultat. En effet un calcul direct montre que si un opérateur  $P$  annule  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ , son symbole dièse est nul sur  $\Omega_{f_1, \dots, f_p}$ , donc sur  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$ . Nous avons alors :

$$W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \subset \text{car}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) \subset W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad .$$

**Preuve de 3 :** Si  $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  annule  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ ,  $\sigma^\sharp(P)$  appartient à l'idéal  $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_l))$ . Ainsi, il existe  $A_1, \dots, A_l \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ , tel que

$$\sigma^\sharp(P) = \sigma^\sharp \left( \sum_{j=1}^p A_j \tilde{\delta}_j \right) \quad .$$

L'opérateur  $P - \sum_{j=1}^p A_j \tilde{\delta}_j$  est un opérateur de degré dièse strictement inférieur à celui de  $P$  annulant toujours  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ . La démonstration se fait alors par récurrence sur le degré dièse de  $P$ .

## 2 Le cas localement libre quasi-homogène

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ ,  $(f_1, \dots, f_p)$  des fonctions analytiques sur  $X$  et  $F = f_1 \dots f_p$  leur produit. Nous conservons les notations du paragraphe précédent. En particulier,  $H_i$  désigne l'hypersurface formée par les zéros de la fonction  $f_i$  et  $H$  la réunion de ces hypersurfaces ou encore l'hypersurface formée par les zéros de  $F$ .

**Définition 1**  $F$  est dit localement quasi-homogène s'il existe au voisinage de tout point un système de coordonnées locales dans lequel  $F = uG$  où  $u$  est une unité et  $G$  est un polynôme quasi-homogène à poids strictement positif. Le diviseur défini par  $F$  est alors dit localement quasi-homogène.

**Proposition 3** Si  $F$  est localement quasi-homogène et que  $\text{Der}_X(H)$  est localement libre l'idéal  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est un idéal premier.

**Preuve :** Tout d'abord nous remarquons que si  $u_1, \dots, u_p$  sont des unités de  $\mathcal{O}_X$ ,  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est un idéal premier si et seulement si  $I^\sharp(u_1 f_1, \dots, u_p f_p)$  est un idéal premier. Ainsi si  $x_0 \in H$ , pour montrer notre proposition au voisinage de  $x_0$ , nous pouvons supposer  $X = \mathbf{C}^n$ ,  $x_0 = 0$  et  $F$  quasi-homogène à poids strictement positif. Ainsi, chaque  $f_i$  sont quasi-homogène à poids strictement positif. La preuve de la proposition se fait alors par récurrence. Le lemme clef, pour cette récurrence est la proposition de F. Castro, L. Narvaez et D. Mond :

**Proposition 4** [C-N-M] Soit  $X$  une variété complexe de dimension  $n$ , soit  $D$  un diviseur localement quasi-homogène dans  $X$  et  $p \in D$ . Alors, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  tel que pour tout  $q \in U \cap D$ ,  $q \neq p$ , le germe de paire  $(X, D, q)$  est isomorphe au produit  $(\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}, D' \times \mathbf{C}, (0, 0))$  où  $D'$  est un diviseur localement quasi-homogène.

Supposons la proposition que nous voulons démontrer vraie en dimension  $n - 1$ . Supposons  $X = \mathbf{C}^n$  et  $0 \in H$ . Il faut montrer que le germe de l'idéal  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est un idéal premier. Soit  $\delta_1, \dots, \delta_n$  une base de  $\text{Der}_X(H)$ , nous avons suivant la remarque 2 :

$$I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n)) \quad .$$

Les composantes irréductibles de la variété des zéros de  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  sont donc de dimension supérieure à  $n + p$ . En dehors de  $H$ ,  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  coïncide avec l'idéal premier :

$$\left( \xi_i - \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} s_j \right) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad ;$$



Ainsi,  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$  est une composante irréductible de la variété des zéros de  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ . Si cette variété avait d'autres composantes irréductibles, comme par récurrence  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est premier en dehors de  $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p$ , ses autres composantes irréductibles seraient contenues dans  $\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p$ . Soit alors  $\chi$  le champ de quasi-homogénéité de  $F$  et  $d_i$  le degré d'homogénéité de chaque  $f_i$ . Nous avons  $\chi \in \text{Der}_X(H)$  et  $\tilde{\chi} = \chi - \sum_{i=1}^p d_i s_i$ . Il en résulte que :

$$(\pi^{-1}(0) \times \mathbf{C}^p) \cap V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) \subset T_0^*X \times \left( \sum_{i=1}^p d_i s_i = 0 \right) \quad .$$

Cette composante serait donc contenue dans un espace de dimension  $n + p - 1$ . Nous en déduisons :

$$V(I^\sharp(f_1, \dots, f_p)) = W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \quad .$$

Il en résulte que  $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$  est une suite régulière. Comme  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est réduit en dehors de  $H$ , il résulte que  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  est réduit et donc premier.

**Corollaire 1** *Si  $F$  est localement quasi-homogène et que  $\text{Der}_X(H)$  est localement libre, nous avons pour toute base  $\delta_1, \dots, \delta_n$  de  $\text{Der}_X(H)$  :*

1.  $I^\sharp(f_1, \dots, f_p) = (\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$  est un idéal premier et sa variété des zéros est  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$ ,
2.  $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$  est une suite régulière de  $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$ ,
3.  $(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_n))$  est une suite régulière de  $\mathcal{O}_{T^*X}$ ,
4.  $(F, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$  est une suite régulière de  $\mathcal{O}_{T^*X}[s_1, \dots, s_p]$ ,
5.  $\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$ ,
6. Soit  $\dot{f}_1^{s_1} \dots \dot{f}_p^{s_p}$  la classe de  $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  dans le quotient  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} / \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$ , alors :  $\text{Ann}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} \dot{f}_1^{s_1} \dots \dot{f}_p^{s_p} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](F, \tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$ .

**Preuve :** Les points 1,2,5,6 résultent directement ou facilement de ce qui précède. Pour le point 3, rappelons suivant par exemple [B-M-M1] ou [B-M-M2] que  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \cap (s_1 = \dots = s_p = 0)$  s'identifie à sous-variété lagrangien de  $T^*X$ . Ses composantes irréductibles sont donc de dimension  $n$ . Il en résulte que

$(s_1, \dots, s_p, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$  est une suite régulière. Le résultat s'en déduit. Pour le point 4, cela résulte du fait que par définition de  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp$  : si  $u \in \mathcal{O}_X$  et  $Fu \in I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$  alors  $u \in I^\sharp(f_1, \dots, f_p)$ .

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons  $F$  est localement quasi-homogène et que  $\text{Der}_X(H)$  est localement libre. Notons  $\text{Sp}(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$  la suite de morphisme de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules à gauche :

$$\longrightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^k(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \xrightarrow{\epsilon_{-k}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^{k-1}(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \longrightarrow$$

ou le morphisme  $\epsilon_{-k}$  est défini par :

$$\epsilon_{-k}(P \otimes \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^i P \eta_i \otimes \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \eta_k + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} P \otimes [\eta_i, \eta_j] \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_j \wedge \dots \wedge \eta_k .$$

Suivant [N],  $\text{Sp}(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$  constitue un complexe de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Modules à gauche.

**Proposition 5** *Sous les hypothèses  $F$  localement quasi-homogène et  $\text{Der}_X(H)$  localement libre, le complexe  $\text{Sp}(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p))$  est une résolution libre de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche du Module  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ .*

**Preuve :** Ce complexe de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche est naturellement filtré . Son gradué s'identifie au complexe de Koszul de la suite régulière  $(\sigma^\sharp(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\sharp(\tilde{\delta}_n))$ . Il n'a donc de la cohomologie qu'en degré zéro. Le morphisme d'augmentation naturel (voir le corollaire 1 ) :

$$\text{Sp}(\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)) \longrightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

est donc un complexe sans cohomologie.

**Notation 3** *Soit  $\chi \in \text{Der}_X(H)$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , la fonction holomorphe  $b_i$  telle que  $\chi(f_i) = b_i f_i$ . Nous noterons  $\tilde{\chi}$  l'opérateur différentiel :*

$$\tilde{\chi} = \chi + \sum_{j=1}^p b_j (s_j + 1) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] ;$$

et par

$$\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p) = \{ \tilde{\chi} ; \chi \in \text{Der}_X(H) \} .$$

Dans la suite, nous supposons que quitte à diminuer  $X$ ,  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  est une base de  $\text{Der}_X(H)$ . Il s'en suit que  $(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$  est une base du  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre  $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$ . De même,  $(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$  est une base du  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre  $\tilde{\text{Der}}_X(f_1, \dots, f_p)$ .

Soit  $i$  et  $j$  deux entiers distincts compris entre 1 et  $n$ . Comme  $\delta_i$  appartient à  $\text{Der}_X(H)$ , il existe des  $m_{i,j} \in \mathcal{O}_X$  tels que :

$$\delta_i(f_j) = m_{i,j} f_j .$$

Nous ne déduisons que  $\delta_i(F) = (\sum_{j=1}^n m_{i,j})F$ . De plus, comme  $[\delta_i, \delta_j]$  appartient à  $\text{Der}_X(H)$ , il existe des  $\alpha_k^{i,j} \in \mathcal{O}_X$  tels que :

$$[\delta_i, \delta_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \delta_k .$$

Nous en déduisons :

$$[\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \tilde{\delta}_k \quad \text{et} \quad [\tilde{\delta}_i, \tilde{\delta}_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} \tilde{\delta}_k .$$

Notons que l'on :  $\alpha_k^{i,j} = -\alpha_k^{j,i}$ .

**Lemme 1** *Si  ${}^t\delta_i$  désigne la transposée de l'opérateur  $\delta_i$  :*

$${}^t\tilde{\delta}_i = -\tilde{\delta}_i + \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k} .$$

**Preuve :** Cela repose sur un lemme établi par F. Castro et J.-M. Ucha dans [C-U] qui assure que pour tout  $0 \leq i \leq n$  :

$${}^t\delta_i = -\delta_i - m_i + \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k} ,$$

Le lemme s'en déduit puisque  $\tilde{\delta}_i = \delta_i - \sum_{j=1}^p m_{i,j} s_j$  et  $\tilde{\delta}_i = \delta_i + \sum_{j=1}^p m_{i,j} (s_j + 1)$ .

Soit  $M$  est un  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module cohérent. Notons  $\Omega_X^n$  le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur  $X$ . Le dual de  $M$  est le complexe  $RHom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(M, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])$  transformé en un complexe de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche par application du foncteur  $Hom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], -)$ . Nous noterons  $M^*$  ce complexe. Ses groupes de cohomologie sont les

$$Hom_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], Ext_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(M, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])) .$$

**Proposition 6** *Sous les hypothèses  $F$  localement quasi-homogène et  $Der_X(H)$  localement libre :*

$$(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})^* \simeq \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1}[-n] .$$

**Preuve :** Suivant [M], le nombre grade de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$  est égal à  $n$ . Il résulte alors de la proposition 5 que le dual de  $M$  est concentré en degré  $n$ . Calculons ce groupe de cohomologie. Explicitons pour cela :

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^n(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p)) \xrightarrow{\epsilon_{-n}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} \Lambda^{n-1}(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p)) .$$

Si  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  est une base de  $Der_X(\text{Log } H)$ ,  $\Lambda^n(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p))$  est un  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre de base  $\tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n$  et  $\Lambda^{n-1}(\tilde{Der}_X(f_1, \dots, f_p))$  un  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module libre de base  $(\tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n)_{1 \leq i \leq n}$ . Nous obtenons :

$$\epsilon_{-n}(1 \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tilde{\delta}_i \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n + \sum_{1 \leq u < v \leq n} (-1)^{u+v} \otimes [\delta_u, \delta_v] \wedge \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_u \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_v \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n$$

Et nous obtenons :

$$\epsilon_{-n}(1 \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n) = (-1)^{i-1} (\tilde{\delta}_i - \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k}) \otimes \tilde{\delta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\tilde{\delta}}_i \wedge \dots \wedge \tilde{\delta}_n .$$

comme la transposée de l'opérateur  $\tilde{\delta}_i - \sum_{k \neq i, k=1}^n \alpha_k^{i,k}$  est  $-\tilde{\delta}_i$ . Nous obtenons que  $M^*$  est isomorphe au complexe concentré en degré  $n$  :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)}[-n] .$$

Il reste à utiliser le point 4 du corollaire 1.

**Remarque 2** *Sous les hypothèses de la proposition 6, nous pouvons en fait montrer l'existence d'un isomorphisme canonique entre*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\Omega_X^n[s_1, \dots, s_p], \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}(\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{D}}\mathrm{er}_X(f_1, \dots, f_p)), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])) .$$

et

$$\mathrm{Sp}(\tilde{\mathrm{D}}\mathrm{er}_X(f_1, \dots, f_p))[-n] .$$

**Proposition 7** *Sous les hypothèses  $F$  localement quasi-homogène et  $\mathrm{Der}_X(H)$  localement libre :*

$$\left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^* \simeq \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-2} \dots f_p^{-s_p-2}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1}}[-n-1] .$$

**Preuve :** En effet, nous avons le triangle dans la catégorie dérivée :

$$(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})^* \rightarrow (\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1})^* \rightarrow \left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^*[1] .$$

Il résulte de la proposition précédente l'isomorphisme :

$$\left( \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)^* \simeq \left( \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-1} \dots f_p^{-s_p-1} \rightarrow \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{-s_1-2} \dots f_p^{-s_p-2} \right)[-n-1] .$$

La proposition s'en déduit.

**Remarque 3** *Plaçons nous sous les hypothèses  $F$  localement quasi-homogène et  $\mathrm{Der}_X(H)$  localement libre. Le  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module localement libre  $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{er}_X(f_1, \dots, f_p)$  est stable par crochet. Nous pouvons lui associer un complexe de Spencer que nous noterons  $\mathrm{Sp}(\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{er}_X(f_1, \dots, f_p))$ . Suivant le corollaire 1, ce complexe est une résolution libre de  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche*

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} .$$

*Son dual s'identifie naturellement au complexe de Spencer correspondant  $\mathrm{Sp}(\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]F \oplus \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{er}_X(f_1, \dots, f_p))$ .*

Soit  $x_0 \in X$ . Nous notons  $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$  l'idéal de  $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  des polynômes  $b$  vérifiant au voisinage de  $x_0$  :

$$(*) \quad b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

Nous l'appelons idéal de Bernstein de  $(f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 8** *Sous les hypothèses  $F$  localement quasi-homogène et  $\text{Der}_X(H)$  localement libre . Le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module à gauche :*

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

*est pur de nombre grade  $n + 1$  (tous ses sous-Modules ont pour nombre grade  $n + 1$ ). Pour tout  $x_0$ , la racine de idéal de Bernstein de  $(f_1, \dots, f_p)$  au voisinage de  $x_0$  est principal. De plus :*

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p) .$$

**Preuve :** Pour la pureté, suivant la remarque 5 de [M], il suffit de remarquer sous nos hypothèses :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]) \neq 0$$

implique  $i = n + 1$ . Cela résulte directement de la proposition 7. La proposition 20 de [M] assure que la racine de l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$  est principal. Le résultat de symétrie résulte de la proposition 7.

### 3 L'idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires

Désormais  $V = \mathbf{C}^n$  ou plus généralement un espace vectoriel de dimension  $n$ . Nous considérons  $H_1, \dots, H_p$  des hyperplans linéaires de  $V$  deux à deux distincts. Ils définissent un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  de  $V$ . Notons toujours  $H$  la réunions de ces hyperplans. Tous supposons l'arrangement

défini par  $H$  libre. Pour  $1 \leq i \leq n$ , nous considérons  $l_i$  une forme linéaire homogène sur  $V$  de noyaux  $H_i$ , posons  $L = l_1 \dots l_p$ . Les formes linéaires  $l_i$  sont définies à un coefficient de proportionnalité près. Le  $\mathcal{O}_X$ -Module,  $D(\mathcal{A}) = \text{Der}_V(L)$  est donc un  $\mathcal{O}_V$ -Module libre.

Suivons les notations du livre de P. Orlik et H. Terao [O-T]. Notons  $L(\mathcal{A})$  l'ensemble des intersections non vide d'éléments de  $\{H_1, \dots, H_p\}$ . Si  $X \in L(\mathcal{A})$ , nous notons  $J(X) = \{i \in \{1, \dots, p\} ; X \subset H_i\}$ ,  $r(x)$  le codimension de  $X$  et  $\mathcal{A}_X$  l'arrangement d'hyperplans défini par  $\{H_i\}_{i \in J(X)}$ . Suivant [O-T], si  $\mathcal{A}$  est libre, l'arrangement  $\mathcal{A}_X$  reste libre.

Notons  $E$  le champ d'Euler. Dans un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $X : E = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Le champ d'Euler est un champ de vecteur logarithmique :  $E(L) = pL$  et  $E(l_i) = l_i$ . Suivant les notations du paragraphe précédent, nous avons  $\tilde{E} = E - \sum_{j=1}^p s_j$ .

Une dérivation  $\chi$  est homogène de degré  $r$ , si elle s'écrit :

$$\chi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où les  $a_i(x)$  sont des polynômes homogènes de degré  $r$ .

Suivant [O-T],  $\text{Der}_{\mathcal{O}_V}(L)$  admet une base de champs de vecteurs  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  homogènes. De plus, la suite  $(\deg(\delta_1), \dots, \deg(\delta_n))$  des degrés d'homogénéité des  $\delta_i$  est indépendant de la base et est appelée la suite des exposants de l'arrangement  $\mathcal{A}$ . Nous notons  $\exp(\mathcal{A}) = (0^{e_0}, 1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots)$  pour signifier que dans une base, il y a  $e_i$  dérivations homogènes de degré  $i$ . De plus, nous avons  $e_0 = 0$  si et seulement si le rang de la famille de formes linéaires  $(l_1, \dots, l_p)$  est égal à  $n$ . Si  $e_0 > 0$ , l'arrangement  $\mathcal{A}$  est produit de l'arrangement  $(\mathbf{C}^{e_0}, \emptyset)$  et d'un arrangement libre  $(\mathbf{C}^{n-e_0}, \mathcal{A}')$  où  $\exp(\mathcal{A}') = (0^0, 1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots)$ . Si  $e_0$  est nul, l'arrangement  $\mathcal{A}$  est isomorphe au produit de  $e_1$  arrangements libres irréductibles de rang maximal. L'arrangement  $\mathcal{A}$  est dit irréductible s'il n'est pas isomorphe à un produit d'arrangements non vides. Une caractérisation d'un arrangement irréductible est donc que son exposant  $e_1$  soit égal à 1.

Soit  $A_n(\mathbf{C})$ , l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur  $V$ . Suivant la démonstration de Bernstein [Be], l'idéal des polynômes  $b \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$  vérifiant :

$$b(s_1, \dots, s_p) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1} ,$$

n'est pas réduit à zéro. Il ne dépend pas du choix des formes linéaires  $l_i$  qui définissent les hypersurfaces  $H_i$ . Nous notons cet idéal ou  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  et l'appelons l'idéal de Bernstein de  $\mathcal{A}$ .

Pour des raisons d'homogénéité :  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) = \mathcal{B}(0, l_1, \dots, l_p)$ . De plus, si  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  est une base de champs de vecteurs homogènes de  $\text{Der}_{\mathcal{O}_V}(L)$ , nous avons montré à la proposition 8 :

$$\text{Ann}_{A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]} l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} = \mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p](\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_l) .$$

De plus, l'arrangement  $\mathcal{A}$  est localement quasi-homogène. Nous avons donc suivant le paragraphe précédent :

$$\frac{\mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}}{\mathcal{D}_V[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1}}$$

est pur de nombre grade  $n + 1$  (tous ses sous-Modules ont pour nombre grade  $n + 1$ ) et la racine de l'idéal  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  est principal. De plus, nous avons la propriété de symétrie :

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) .$$

**Lemme 2** *Supposons que  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  soit un arrangement libre et irréductible. Soit  $r$  la codimension de  $H_1 \cap \dots \cap H_p$ , alors tout  $b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  est multiple de*

$$\prod_{j=0}^{2(p-r)} (s_1 + \dots + s_p + n + j) .$$

**Preuve :** Comme l'arrangement est supposé irréductible  $e_1 = 1$ . Commençons par supposer  $r = n$  ou encore  $e_0 = 0$ .



Soit  $r = \inf \{i \in \exp(\mathcal{A}) ; i \geq 2\}$ . Montrons tout d'abord que  $\prod_{j=0}^{r+p-3} (s_1 + \dots + s_p + n + j)$  divise tout  $b$  de l'idéal de Bernstein. Soit  $v$  un polynôme homogène de degré  $0 \leq d \leq r - 2$ . Si  $b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$ , en multipliant l'identité fonctionnelle associée à  $b$  par  $vl_1 \dots l_k$  où  $k \leq p - 1$ , nous obtenons en particulier :

$$b(s_1, \dots, s_p)vl_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}+1} l_{k+2}^{s_{k+2}} \dots l_p^{s_p},$$

Donc, il existe un opérateur différentiel  $P \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$  tel que

$$b(s_1, \dots, s_p)v - Pl_{k+1} \in \text{Ann}_{A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]} l_1^{s_1+1} \dots l_k^{s_k+1} l_{k+1}^{s_{k+1}} \dots l_p^{s_p}.$$

Ainsi, il existe des  $A_i \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$  tel que :

$$(*) b(s_1, \dots, s_p)v = Pl_{k+1} + A_1 \tilde{\delta}_1(s_1 + 1, \dots, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_p) + \dots + A_n \tilde{\delta}_n(s_1 + 1, \dots, s_k + 1, s_{k+1}, \dots, s_p).$$

Un opérateur de  $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}[s_1, \dots, s_p]$  (resp  $A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p]$ ) s'écrit de façon unique :

$$P = \sum_{\alpha \in A} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} c_\alpha(s_1, \dots, s_p),$$

où  $c_\alpha(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0}[s_1, \dots, s_p]$  (resp.  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p]$ ) et  $A$  est un ensemble fini de  $\mathbf{N}^n$ . Cette écriture sera dite l'écriture à droite de  $P$ . Nous appelons  $c_0(s_1, \dots, s_p)$  le terme constant de l'écriture à droite de  $P$ .

Prenons la partie homogène de degré  $d$  des deux termes constants de l'écriture à droite dans l'égalité (\*). Sachant que l'on peut supposer que  $\delta_1$  est le champ d'Euler  $E$ , nous obtenons :

$$b(s_1, \dots, s_p)v = pl_{k+1} + \left( \sum_{j=1}^p s_j + k + d + n \right) a_1 l,$$

où  $p$  et  $a_1$  sont des polynômes homogènes de degré  $d - 1$  (resp.  $d$ ) et plus précisément les parties homogènes de degré  $d - 1$  (resp.  $d$ ) des termes constants à droite de  $P$  et  $A_1$ . En choisissant  $v$  non multiple de  $l_{k+1}$ , nous obtenons :  $\sum_{j=1}^p s_j + k + d + n$  divise  $b$ . Ainsi,  $\prod_{j=0}^{r+p-3} (s_1 + \dots + s_p + n + j)$  divise  $b$ . Or  $n + p + r - 3 \geq p - n$ ,

il reste à utiliser la propriété de symétrie de  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ .

Si  $e_0 > 0$ ,  $r = n - e_0$  : L'arrangement est le produit de l'arrangement vide sur  $\mathbf{C}^{e_0}$  et d'un arrangement  $(H'_1, \dots, H'_p)$  de  $\mathbf{C}^{n-e_0}$  d'exposant  $(0, 1, e_2, \dots)$ . Il est facile de montrer que l'idéal de Bernstein de l'arrangement  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  coïncide avec celui de l'arrangement  $\mathcal{A}(H'_1, \dots, H'_p)$ . Il reste à utiliser le premier cas  $r = n$  que nous venons de traiter.

**Proposition 9** (*diviseur évident*) *Supposons que  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  soit un arrangement libre, tout polynôme de Bernstein est multiple de :*

$$b_{de}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{2(\text{card}J(X)-r(X))} \left( \sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

**Preuve :** Soit  $X \in L(\mathcal{A})$  tel que  $\mathcal{A}_X$  soit irréductible. Nous savons voir [O-T] que  $\mathcal{A}_X$  reste un arrangement libre. Pour  $j \notin J(X)$ ,  $l_j$  est non identiquement nul sur  $X$ . Nous pouvons trouver  $x_0 \in X$  tel que pour  $j \notin J(X)$ ,  $f_j(x_0) \neq 0$  et donc tel que le germe  $f_j$  en  $x_0$  soit inversible. Il est alors facile de montrer que l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}(x_0, f_1, \dots, f_p)$  est engendré par les polynômes de l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}(x_0, (f_j)_{j \in J(X)})$ . Tous ces polynômes sont d'après le lemme 2 multiples de :

$$\prod_{j=0}^{2(\text{card}J(X)-r(X))} \left( \sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right),$$

ce qui démontre la proposition.

**Proposition 10** (*multiple évident*) *Soit  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  un arrangement d'hyperplan linéaire **non nécessairement libre**, il existe un entier  $N$  assez grand tel que :*

$$b_{me}(s_1, \dots, s_p) = \prod_{X \in L(\mathcal{A}) ; \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^N \left( \sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

*soit un polynôme de Bernstein de  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$ .*

**Preuve :** Nous pouvons supposer l'arrangement  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  irréductible et que l'intersection des hyper-surfaces de l'arrangement soit réduit au vecteur nul. Ainsi,  $r(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n$ .

Soit  $i_1, \dots, i_n \in \mathbf{N}$  tels que  $i_1 + \dots + i_n = k$ . Notons  $C_k^{i_1, \dots, i_n}$  la suite d'entiers définie par récurrence par :

$$C_k^{i_1, \dots, i_n} = C_{k-1}^{i_1-1, \dots, i_n} + \dots + C_{k-1}^{i_1, \dots, i_n-1}, \quad C_1^{0, \dots, 0^1, 0, \dots, 0} = 1.$$

Désignons par  $(x_1, \dots, x_n)$  le système de coordonnées canoniques de  $V$ . Nous vpar récurrence :

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - j \right) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}}.$$

D'où par transposition :

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + j + n \right) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Il en résulte :

**Lemme 3** *Si la famille de formes linéaires  $(l_1, \dots, l_p)$  est de rang  $n$ , nous avons :*

$$\prod_{j=0}^{k-1} (s_1 + \dots + s_p + n + j) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in \left( \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) (l_1, \dots, l_p)^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}.$$

Notons  $L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  l'ensemble des  $X \in L(\mathcal{A})$  tels que  $r(X) = n - 1$ . Nous avons par récurrence :

$$(l_1, \dots, l_p)^{p-n+1} \in \left( \prod_{j \notin J(X)} l_j \right)_{X \in L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))}.$$

Il en résulte que pour tout  $k$  il existe un entier  $K$  assez grand tel que :

$$\prod_{j=0}^{K-1} (s_1 + \dots + s_p + n + j) l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in \left( \sum_{i_1 + \dots + i_n = K} C_k^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) \left( \prod_{j \notin J(X)} l_j \right)_{X \in L''(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))}^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p}.$$

Par récurrence sur la dimension, pour tout  $X \in L''(\mathcal{A})$ , il existe  $N_X$  entier assez grand tel que :

$$\prod_{Y \in L(\mathcal{A}_X); \mathcal{A}_Y \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{N_X} \left( \sum_{j \in J(Y)} s_j + r(Y) + j \right) \prod_{j \in J(X)} l_j^{s_j} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \prod_{j \in J(X)} l_j^{s_j+1}.$$

Donc, si  $k$  est un entier assez grand :

$$\prod_{Y \in L(\mathcal{A}_X); \mathcal{A}_Y \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{N_X} \left( \sum_{j \in J(Y)} s_j + r(Y) + j \right) \left( \prod_{j \notin J(X)} l_j \right)^k l_1^{s_1} \dots l_p^{s_p} \in A_n(\mathbf{C})[s_1, \dots, s_p] l_1^{s_1+1} \dots l_p^{s_p+1},$$

La proposition s'en déduit.

**Théorème 2** *Supposons que  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  soit un arrangement libre d'hyperplans linéaires. Alors, l'idéal de Bernstein  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  est principal de générateur :*

$$\prod_{X \in \mathcal{A}_X \text{ irréductible}} \prod_{j=0}^{2(\text{card}J(X)-r(X))} \left( \sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j \right).$$

**Preuve :** Suivant la proposition 8, la racine de  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  est principal. Considérons un générateur  $c$  de cet idéal. l'idéal  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  vérifie la propriété de symétrie :

$$b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)) \iff b(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)).$$

Sa racine vérifie donc cette propriété. Il en résulte que  $c(-s_1 - 2, \dots, -s_p - 2)$  est égal à plus ou moins  $c(s_1, \dots, s_p)$ .

Puisque  $b_{de}$  est un polynôme réduit, le polynôme  $c$  est clairement multiple du polynôme  $b_{de}$ . Il divise d'autre part  $b_{me}$ . Supposons alors que  $\sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + j$  avec  $j > 2(\text{card}J(X) - r(X))$  soit un facteur de  $c$ . Le polynôme  $c$  aurait donc comme facteur :

$$- \sum_{j \in J(X)} s_j - 2\text{card}J(X) + r(X) + j = - \left( \sum_{j \in J(X)} s_j + r(X) + 2(\text{card}J(X) - r(X)) - j \right).$$

C'est impossible puisque comme  $r(X) + 2(\text{card}J(X) - r(X)) - j < 0$  et que ce facteur n'apparaît pas dans  $b_{me}$ . Il en résulte que la racine de  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p))$  est principal de générateur  $b_{de}$ .

Ecrivons  $b_{me}(s_1, \dots, s_p) = b_{de}(s_1, \dots, s_p)a(s_1, \dots, s_p)$ . Regardons le  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$  sous-Module :

$$L' = b_{de}(s_1, \dots, s_p) \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \subset L = \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} /;$$

Ce  $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -Module est supporté par les zéros du polynôme  $a(s_1, \dots, s_p)$ . Nous venons de voir que  $L$  est supporté par les zéros du polynôme  $b_{de}(s_1, \dots, s_p)$ . Il en résulte que la dimension de la variété caractéristique de  $L'$  est strictement inférieure à celle de  $L$ . Cela contredit la pureté de  $L$  établie à la proposition 8.

Terminons par un résultat sur les composantes irréductibles de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\sharp \cap H$ . Soit  $X \in L(\mathcal{A})$ . Notons pour  $V = \mathbf{C}^n$  :

$$\Omega_{T_X^* \mathbf{C}^n, (l_j)_{j \notin J(X)}} = \left\{ (x, \xi + \sum_{j \notin J(X)} s_j \frac{dl_j}{l_j}, (s_j)_{j \notin J(X)}) ; (x, \xi) \in T_X^* \mathbf{C}^n \text{ et } \prod_{j \notin J(X)} l_j(x) \neq 0 \right\}.$$

Notons  $W_{X, (f_j)_{j \notin J(X)}}^\sharp$  son adhérence. C'est un ensemble irréductible de dimension de  $T^* \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{p - \text{card}J(X)}$  de dimension  $n + p - \text{card}J(X)$  qui s'identifie à  $W_{f_1|_X, \dots, f_p|_X}^\sharp \times \mathbf{C}^{n-r(X)}$ .

Sans aucune hypothèse suivant [B-M-M1], les composantes irréductibles de  $W_{f_1, \dots, f_p}^\sharp \cap H$  sont de dimension  $n + p - 1$  et se projette apr la projection  $(x, \xi, s) \mapsto s$  sur des hyperplans linéaires appelés pentes de  $f_1, \dots, f_p$ .

**Proposition 11** *Supposons que  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  soit un arrangement libre d'hyperplans linéaires. Les composantes irréductibles de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\sharp \cap H$  sont les :*

$$W_{X, (l_j)_{j \notin J(X)}}^\sharp \times \left\{ (s_j)_{j \in J(X)} \in \mathbf{C}^{\text{card}J(X)} ; \sum_{j \in J(X)} s_j = 0 \right\}$$

où  $X$  parcourt les éléments de  $L(\mathcal{A})$  tels que  $\mathcal{A}_X$  soit irréductible.

**Preuve :** Soit  $X_0 = H_1 \cap \dots \cap H_p$ . Soit  $(e_0, e_1, \dots)$  les exposants de l'arrangement  $\mathcal{A}$ . Si  $e_1 > 1$ , aucune composante irréductible de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$  n'est contenue dans  $X_0$ . Si  $e_1 = 1$  :

$$W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap X_0 = T_{X_0}^* \mathbf{C}^n \times \{(s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{C}^p ; \sum_{j=1}^p s_j = 0\} .$$

Pour démontrer cela à un facteur trivial près, nous pouvons supposer  $e_0 = 0$ . Le résultat provient alors du fait que  $W_{l_1, \dots, l_p}^\#$  est défini par l'idéal  $(\sigma^\#(\tilde{\delta}_1), \dots, \sigma^\#(\tilde{\delta}_n))$  où  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  est une base de  $\text{Der}_{\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}(L)}$ . et que le champ d'Euler peut être choisi dans cette famille de générateurs. Dans ce cas,  $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$  est de dimension  $n + p - 1$ . C'est donc une composante irréductible de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$ .

Soit  $X \in L(\mathcal{A})$ . Cherchons les composantes irréductibles de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$  contenues dans  $X$  et non contenues dans  $X' \subset X$  et  $X' \in L(\mathcal{A})$ . Une telle composante est contenue dans l'adhérence de :

$$\{(x, \xi + \sum_{j \notin J(X)} s_j \frac{dl_j}{l_j}, s_1, \dots, s_p) ; (x, \xi, (s_l)_{l \in J(X)}) \in W_{(l_j)_{j \in J(X)}}^\# \cap X\} .$$

D'après le cas précédent, si  $\mathcal{A}_X$  n'est pas irréductible cette adhérence n'a pas la bonne dimension . Et si  $\mathcal{A}_X$  est irréductible, cette adhérence s'identifie à :

$$W_{X, (l_j)_{j \notin J(X)}}^\# \times \{(s_j)_{j \in J(X)} \in \mathbf{C}^{\text{card}J(X)} ; \sum_{j \in J(X)} s_j = 0\}$$

qui est de dimension  $n + p - 1$ . C'est donc une composante irréductible de  $W_{l_1, \dots, l_p}^\# \cap H$ .

**Remarque 4** Nous retrouvons que si  $\mathcal{A}(H_1, \dots, H_p)$  est un arrangement libre d'hyperplans linéaires, les pentes de  $l_1, \dots, l_p$  sont les hyperplans de  $\mathbf{C}^p$  d'équations  $\sum_{j \in J(X)} s_j = 0$  où  $X$  parcourt les éléments de  $L(\mathcal{A})$  tels que  $\mathcal{A}_X$  soit irréductible.

## Références

- [Be] Bernstein J., The analytic continuation of generalised functions with respect a parameter, Funz. Anal. Appl. 6, (1972), 26-40.
- [B-M-M1] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Constructibilité de l'idéal de Bernstein, Advanced Studies in Pure Mathematics 29, Singularities - Sapporo 1998 (2000) 79-95.
- [B-M-M2] Briançon J., Maisonobe Ph., Merle M., Éventails associés à des fonctions analytiques, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 238 (2002) 61-71.
- [C-U] F. Castro-Jimenez, J. M. Ucha, Free Divisors and Duality for D-Modules, Tr. Mat. Inst. Steklova, 2002, Volume 238, 97105
- [C-N-M] F. Castro-Jimenez, L. Narvaez-Macarro, D. Mond, Cohomologie of the complement of a free divisor, Transaction Of The American Mathematical Society, Volume 348, Number 8, August 1996
- [N] L. Narvaez-Macarro, A duality approach to the symmetry of BernsteinSato polynomials of free divisors, Advances in Mathematics, Volume 281, 20 August 2015, Pages 1242-1273
- [M] Maisonobe Ph., L'idéal de Bersntein et ses pentes. HAL Id : hal-01285562, version 1
- [O-T] Orlik P., Terao H., Arrangements of Hyperplanes, Grundenleheren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer Verlag.