HAL open science

Mécanique des structures et dualité

Bernard Nayroles

To cite this version:

Bernard Nayroles. Mécanique des structures et dualité. 2011. hal-01320358

HAL Id: hal-01320358

https://hal.science/hal-01320358v1

Submitted on 11 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Mécanique des structures et dualité

Bernard Nayroles
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS Marseille
bernard.nayroles@wanadoo.fr

15 septembre 2011

Ce petit ouvrage est principalement dédié à Jean-Jacques Moreau, mon maître vénéré en matière de dualité, de convexité,
mais avant tout de rigueur scientifique.

Je le dédie aussi à Michel Jean, à Michel Frémond et à Olivier Maisonneuve qui m'ont prodigué encouragements et relectures.

Sans eux je n'aurais jamais eu le courage de me replonger dans mes sujets préférés, abandonnés depuis 35 ans...

Je n'oublie pas non plus Olivier Debordes ni Michel Raous avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer quelques années.

Chapitre 1

Introduction à l'algèbre des structures

Les structures sont des ensembles de plusieurs solides déformables éventuellement assemblés par des liaisons qui en font un solide unique. La mécanique des structures passe donc par l'étude individuelle des solides qui la composent puis de leur assemblage. Si les traités classiques de Résistance des Matériaux traitent principalement des divers types de solide : poutres, arcs, plaques, coques, voiles minces etc., l'étude des structures relève plutôt des livres consacrés à leur calcul, comme les traités d'éléments finis.

Avant qu'elles soient détaillées dans les suivants ce chapitre esquisse quelques clés de voûte de la mécanique des structures en petites transformations :

- la dualité à quatre espaces :
  (déplacements-efforts)-(déformations-contraintes),
- sa transformation dans l'élimination des efforts de liaison ou dans la décomposition d'une structure en sous-structures,
- la fermeture des images des opérateurs de déformation et d'équilibre,
- la récurrence des propriétés précédentes lors des assemblages de structures diverses.

Toutes ces considérations, fondamentalement algébriques, sont fondées sur la dualité d'espaces vectoriels et sur les topologies qui lui sont compatibles. Aussi le chapitre prochain expose-t-il quelques rappels indispensables, même pour les lecteurs avertis de ces questions.

Quelle est la part de l'analyse fonctionnelle dans tout cela ? Elle intervient en premier lieu dans l'étude des solides particuliers et ensuite dans la modélisation de leurs assemblages : par exemple que faire d'une poutre droite soudée perpendiculairement à la face supérieure d'une plaque ? Il y a là un problème de charges concentrées que seule l'analyse peut résoudre correctement.

1.1 Un paradigme : la dualité à quatre espaces en mécanique des structures

FIGURE 1.1 – Dualité à quatre espaces en mécanique des structures

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Variables} & & \textit{Dualités} & & \textit{Variables} \\
u & \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} & F \\
 & \mathscr{D}\Big\downarrow & & \Big\uparrow\mathscr{D}^t & \\
\varepsilon & \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} & \sigma
\end{array}$$

La mécanique des structures s'appuie sur deux dualités décrites par la figure 1.1 : celle entre déplacements u et charges F d'une part, et celle entre déformations ε et contraintes σ d'autre part. Si le nom des variables u, ε, σ évoque évidemment celles qui interviennent dans l'étude des solides bi ou tridimensionnels il s'agira tout aussi bien des variables "généralisées" utilisées dans l'étude de solides aussi différents que les poutres et les plaques : courbure, moment de flexion etc.

Ces deux dualités sont reliées deux opérateurs :

- l'opérateur de déformation $\mathscr{D}$, qui fait passer d'un champ de déplacements u au champ de déformations ε qu'il engendre,
- l'opérateur d'équilibre $\mathscr{D}^t$, transposé du précédent, qui fait passer d'un champ de contraintes σ à sa représentation $\phi = \mathscr{D}^t\sigma$ en termes de charges.

La forme bilinéaire $\langle\ \delta u, F\rangle_u$ est celle de la puissance virtuelle des charges $F \in \mathbb{F}$ dans les vitesses virtuelles $\delta u \in \mathbb{U}$ tandis que la forme bilinéaire $\langle\delta\varepsilon, \sigma\rangle_\varepsilon$ est celle de la puissance virtuelle des contraintes $\sigma \in \mathbb{F}$ dans les vitesses virtuelles de déformation $\delta\varepsilon \in \mathbb{E}$.

Le principe des puissances virtuelles s'écrit en effet :

$$\forall\, \delta u \in \mathbb{U} :\ \langle\delta u, F\rangle_u + \langle\mathscr{D}\delta u, \sigma\rangle_\varepsilon = 0 \tag{1.1}$$

qui est l'équation d'équilibre entre une charge F et un champ de contraintes $\sigma \in \mathbb{S}$, équation équivalente à : $F + \mathscr{D}^t\sigma = 0$.

1.2 Orthogonalité

Nous allons maintenant compléter le diagramme de la figure 1.1 en introduisant les noyaux et les images des opérateurs $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^t$.

Le noyau $ker(\mathscr{D})$ de l'opérateur déformation est l'ensemble des déplacements qui n'engendrent pas de déformation, son image est l'ensemble des champs de déformations engendrés par un déplacement : ce sont les déformations usuellement dites "compatibles" ou encore "intégrables".

Le noyau $ker(\mathscr{D}^t)$ de l'opérateur d'équilibre est l'ensemble des champs de contraintes autoéquilibrés [1]. Son image $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est l'ensemble des charges $-\mathscr{D}^t(\sigma)$

1. souvent nommés "champs d'autocontraintes"

FIGURE 1.2 – Orthogonalité dans la dualité à quatre espaces

$$
\begin{array}{cccccc}
\textit{Var.} & & \textit{Dualités} & & & \textit{Var.} \\
U & \ker\mathscr{D} \subset \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} \supset (\ker\mathscr{D})^{\mathrm{o}} \supseteq \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) & & F \\
 & \mathscr{D}\Big\downarrow & & \Big\uparrow \mathscr{D}^t & & \\
\varepsilon & \mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq (\ker\mathscr{D}^t)^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} \supset (\mathscr{D}\mathbb{U})^{\mathrm{o}} = \ker\mathscr{D}^t & & \sigma
\end{array}
$$

qui peuvent être en équilibre avec un champ de contraintes $\sigma \in \mathbb{S}$.

On vérifie immédiatement l'une des propriétés classiques de la transposition :

$$\ker\mathscr{D} = \left\{u \in \mathbb{U} / \ \forall F \in \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \ : \ \langle u, F\rangle_u = 0\right\} = \mathscr{D}^t(\mathbb{S})^{\mathrm{o}} \tag{1.2}$$

$$\ker\mathscr{D}^t = \{\sigma \in \mathbb{S} \ / \ \forall \varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{U}) \ : \ \langle \varepsilon, \sigma\rangle_\varepsilon = 0\} = \mathscr{D}(\mathbb{U})^{\mathrm{o}} \tag{1.3}$$

c'est-à-dire que $\ker\mathscr{D}$ et $\ker\mathscr{D}^t$ sont *les orthogonaux* respectifs de $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ et de $\mathscr{D}(\mathbb{U})$.

On en déduit les inclusions :

$$\mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \subseteq (\ker\mathscr{D})^{\mathrm{o}} \tag{1.4}$$

$$\mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq (\ker\mathscr{D}^t)^{\mathrm{o}} \tag{1.5}$$

dont on souhaiterait qu'elles soient vraies en tant qu'égalités.

En effet l'égalité dans (1.4) signifierait qu'un champ de déformations ε est engendré par un champ de déplacements u si et seulement s'il est orthogonal à tous les champs de contraintes autoéquilibrés :

$$\text{si } \varepsilon \in \mathbb{E} \text{ alors : } [\exists\, u \ / \ \varepsilon = \mathscr{D}u] \iff [\forall \sigma \in \ker\mathscr{D}^t \ : \ \langle \varepsilon, \sigma\rangle_\varepsilon = 0] \tag{1.6}$$

Nous verrons que c'est le cas pour quelques modèles de solides usuels [2] et pour les structures qui résultent de leur assemblage. Alors, pour les topologies dites "compatibles avec la dualité" [3], l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{E}$.

Ensuite l'égalité dans (1.5) signifie que

$$\forall u \in \ker\mathscr{D} \ : \ \langle u, F\rangle_u = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une charge F puisse être équilibrée par au moins un champ de contraintes σ. L'image $\mathscr{D}^t(\mathbb{S}) = (\ker\mathscr{D})^{\mathrm{o}}$ est alors un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{F}$.

Au demeurant le noyau $\ker\mathscr{D}$ est l'espace des déplacements qui n'engendrent aucune déformation. Il est presque toujours de dimension finie, inférieure ou égal à 6 dans le cas d'un solide unique ; on montrera qu'alors l'image $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est effectivement fermée (proposition 4.2).

Lorsqu'il s'agit d'un solide unique $\ker\mathscr{D}$ est l'espace des déplacements "solidifiants" (i.e. "de corps rigide") et, pour reprendre un vocabulaire cher aux mécaniciens, son orthogonal $(\ker\mathscr{D})^{\mathrm{o}}$ est l'espace des charges "de torseur nul". On voit que l'égalité $\mathscr{D}^t(\mathbb{S}) = (\ker\mathscr{D})^{\mathrm{o}}$ est essentielle à toute construction.

2. et probablement pour tous les modèles classiques, ce qui reste à démontrer au cas par cas.
3. notion que nous préciserons au chapitre suivant.

1.3 Réductions de liberté et quotients

Nous présentons très succinctement ci-dessous les notions de quotient droit et de quotient gauche. Elles seront détaillées au chapitre 3.

1.3.1 Liaisons implicites et quotient droit

FIGURE 1.3 – Dualité pour le quotient droit

$$
\begin{array}{ccccc}
\textit{Variables} & & \textit{Dualités} & & \textit{Variables} \\[2ex]
v & \mathbb{V} & \langle\cdot,\cdot\rangle_v & \mathbb{F}/\mathbb{V}^{\mathrm{o}} & \psi \\
 & \mathscr{I}_d \big\downarrow & & \big\uparrow \mathscr{I}_d^t = \mathscr{Q}_d & \\
u & \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} & F \\
 & \mathscr{D} \big\downarrow & & \big\uparrow \mathscr{D}^t & \\
\varepsilon & \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} & \sigma
\end{array}
$$

Revenons au diagramme de la figure 1.1.Une liaison linéaire sans frottement est une loi d'effort définie par un sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ et par son orthogonal $\mathbb{V}^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{F}$:

$$u \in \mathbb{V} \text{ et } F_v \in \mathbb{V}^{\mathrm{o}} \tag{1.7}$$

où F_v désigne l'effort de liaison.

Pour rendre cette liaison implicite on accepte de perdre temporairement l'information sur l'effort de liaison et l'on remplace la dualité initiale par la dualité entre $\mathbb{V}$ et l'espace quotient $\mathbb{F}/\mathbb{V}^{\mathrm{o}}$. On obtient ainsi le diagramme 1.3.

$\mathscr{I}_d$ est l'injection de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{U}$ et sa transposée $\mathscr{Q}_d$ l'application canonique de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{F}/\mathbb{V}^{\mathrm{o}}$.

Ceci fait on peut oublier la dualité entre $\mathbb{U}$ et $\mathbb{F}$ et considérer la dualité à quatre espaces ($\mathbb{V}$, $\mathbb{F}/\mathbb{V}^{\mathrm{o}}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{S}$) avec l'opérateur de déformation $\mathscr{D} \circ \mathscr{I}$ et l'opérateur d'équilibre $\mathscr{Q} \circ \mathscr{D}^t$.

1.3.2 Sous-structuration et quotient gauche

On veut considérer la structure décrite par le diagramme 1.1 comme une sous-structure Σ_1 d'une structure Σ plus vaste ; on accepte alors de perdre temporairement l'information sur les déplacements de Σ_1 non concernés par les liaisons avec l'extérieur de celle-ci. S'ils forment un sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{W}$ de $\mathbb{U}$ on considère alors la dualité entre $\mathbb{U}/\mathbb{W}$ et l'orthogonal $\mathbb{W}^{\mathrm{o}}$ auquel appartiennent les charges utiles. On obtient alors le diagramme de dualité 1.4.

La situation ne se déduit pas de celle du quotient droit par échange des variables cinématiques et sthéniques : en effet les applications $\mathscr{Q}_g$ et $\mathscr{D}$ sont de sens contraires ainsi que $\mathscr{I}_g$ et $\mathscr{D}^t$. L'utilisation pratique du quotient gauche

FIGURE 1.4 – Dualité pour le quotient gauche

$$
\begin{array}{ccccc}
\textit{Variables} & & \textit{Dualités} & & \textit{Variables} \\
w & \mathbb{U}/\mathbb{W} & \langle\cdot,\cdot\rangle_v & \mathbb{W}^{\mathrm{o}} & F \\
 & \mathscr{Q}_g \uparrow & & \downarrow \mathscr{I}_g & \\
u & \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} & F \\
 & \mathscr{D} \downarrow & & \uparrow \mathscr{D}^t & \\
\varepsilon & \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} & \sigma
\end{array}
$$

fait intervenir la loi de comportement du matériau, c'est-à-dire une correspondance $\mathscr{F}$, en général multivoque, entre déformations et contraintes [4] :

$$\varepsilon \in \mathbb{E} \mapsto \sigma \in \mathscr{F}(\varepsilon) \subset \mathbb{S} \tag{1.8}$$

On en déduit une correspondance multivoque entre les variables w et le représentant F_{int} de σ dans $\mathbb{W}^{\mathrm{o}}$:

$$w \in \mathbb{U}/\mathbb{W} \mapsto F_{int} \in (\mathscr{D}^t \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{D} \circ \mathscr{Q}_g^{-1})(w) \cap \mathbb{W}^{\mathrm{o}} \tag{1.9}$$

et l'on obtient une dualité à deux espaces seulement entre $\mathbb{U}/\mathbb{W}$ et $\mathbb{W}^{\mathrm{o}}$.

On utilise surtout la sous-structuration lors de gros calculs en élasticité linéaire ; le produit de composition $\mathscr{D}^t \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{D} \circ \mathscr{Q}_g^{-1}$ se ramène alors à une loi matricielle.

En revanche nous utiliserons les deux quotients pour relier le modèle du solide tridimensionnel à ceux de la Résistance des Matériaux comme, par exemple, la plaque de Kirchhoff étudiée au paragraphe 3.5.

4. On se reportera à la définition 3.2 d'une loi d'effort.

Chapitre 2

Espaces vectoriels et dualité

2.1 Supplémentaires, projecteurs et pseudo-inverses

Dans ce paragraphe on n'examine que les définitions et les propriétés algébriques. Quelques propriétés topologiques feront l'objet du suivant (2.2).

Notations 2.1.
• *Si A désigne une application linéaire définie sur $\mathbb{X}$ on note indifféremment $A(x)$ ou Ax sa valeur en x.*
• *Si A et B sont deux applications linéaires on note indifféremment $A \circ B$ ou AB leur produit de composition éventuel.*
• *On notera $I_{\mathbb{X}}$ l'opération identique sur un ensemble $\mathbb{X}$.*

2.1.1 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.1.
On dit que deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ de $\mathbb{X}$ sont supplémentaires s'ils vérifient :

$$\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = \mathbb{X} \tag{2.1a}$$

$$\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 = \{0\} \tag{2.1b}$$

ce qu'on résume par la notation :

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2 \tag{2.2}$$

Rappelons que l'équation (2.1.a) signifie :

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists\, x_1 \in \mathbb{X}_1\ \exists\, x_2 \in \mathbb{X}_2\ :\ x = x_1 + x_2 \tag{2.3}$$

La proposition suivante rassemble deux résultats banals :
Proposition 2.1.
Si $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont supplémentaires :
• *la décomposition (2.3) est unique,*
• *l'espace vectoriel quotient $\mathbb{X}/\mathbb{X}_2$ est algébriquement isomorphe à $\mathbb{X}_1$.*

2.1.2 Projecteurs

Définition 2.2.
Soit $\mathscr{P}$ une application linéaire de $\mathbb{X}$ dans lui même ; on dit que $\mathscr{P}$ est un projecteur si $\mathscr{P}\mathscr{P} = \mathscr{P}$.
On dit que deux projecteurs $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont supplémentaires si $\mathbb{X} = \mathscr{P}_1(\mathbb{X}) \oplus \mathscr{P}_2(\mathbb{X})$.

Proposition 2.2.
Les opérations $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ définies par (2.3), à savoir :

$$x \in \mathbb{X} \mapsto x_1 = \mathscr{P}_1(x) \in \mathbb{X}_1$$
$$x \in \mathbb{X} \mapsto x_2 = \mathscr{P}_2(x) \in \mathbb{X}_2$$

sont des projecteurs.

En effet on vérifie immédiatement que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont linéaires.
Ensuite comme $x_1 = x_1 + 0$ avec $x_1 \in \mathbb{X}_1$ et $0 \in \mathbb{X}_2$ on a $\mathscr{P}_1(x_1) = x_1$ et donc $\mathscr{P}_1\mathscr{P}_1(x) = \mathscr{P}_1(x_1) = x_1 = \mathscr{P}_1(x)$, ce qui démontre la proposition.

On dit que $\mathscr{P}_1$ projette sur $\mathbb{X}_1$ parallèlement à $\mathbb{X}_2$ et vice-versa. Notons que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont supplémentaires.

Proposition 2.3.
Si $\mathscr{P}$ est un projecteur de $\mathbb{X}$ les sous-espaces $\mathbb{X}_1 = \mathscr{P}(\mathbb{X})$ et $\mathbb{X}_2 = (I_{\mathbb{X}} - \mathscr{P})(\mathbb{X})$ sont supplémentaires

En effet l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{X} : \ \mathscr{P}(x) + (I_{\mathbb{X}} - \mathscr{P})(x) = x$$

montre que $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ vérifient (2.1.a).
Ensuite :

$$\begin{aligned} x_1 \in \mathscr{P}(\mathbb{X}) \Rightarrow & \exists\, x \in \mathbb{X} \ : \ x_1 = \mathscr{P}(x) \\ \Rightarrow & x_1 - \mathscr{P}(x_1) = x_1 - \mathscr{P}\mathscr{P}(x) = x_1 - \mathscr{P}(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$x_1 \in \mathscr{P}(\mathbb{X}) \Rightarrow x_1 - \mathscr{P}(x_1) = 0$$

et de même, en remplaçant $\mathscr{P}$ par $I_{\mathbb{X}} - \mathscr{P}$:

$$x_1 \in (\mathscr{I}_{\mathbb{X}} - \mathscr{P})(\mathbb{X}) \Rightarrow \mathscr{P}(x_1) = 0$$

d'où, en rassemblant les deux implications précédentes :

$$\mathscr{P}(\mathbb{X}) \cap (I_{\mathbb{X}} - \mathscr{P})(\mathbb{X}) = \{0\}$$

La condition (2.1.b) est donc vérifiée, ce qui achève la démonstration.

2.1.3 Pseudo-inverses

Ce qui suit est directement inspiré d'un article de Wikipedia [47] que nous avons complété de quelques démonstrations. Une référence plus ancienne, mais limitée au cas de la dimension finie, est celle de S.L. Campbell et C.D. Meyer [9].

Définition 2.3. ***Pseudo-inverses***
Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces vectoriels, et deux applications linéaires $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ et $g : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$. Ces dernières sont dites pseudo-inverses l'une de l'autre si l'on a :

$$f \circ g \circ f = f \;\; et \;\; g \circ f \circ g = g \tag{2.4}$$

La notation en usage d'une pseudo-inverse de f est $f^{\dagger}$.

Proposition 2.4. ***Propriétés***
Si f et g sont pseudo-inverses alors :

- *1. Le produit de composition $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathbb{Y}$ parallèlement à $ker(g)$ et $g \circ f$ est un projecteur sur $\mathbb{X}$ parallèlement à* $\ker(f)$.

- *2. On a de plus :*

$$\mathbb{X} = ker(f) \oplus g(\mathbb{Y}) \; ; \; \mathbb{Y} = ker(g) \oplus f(\mathbb{X}) \tag{2.5}$$

- *3. Les applications f et g induisent des isomorphismes réciproques $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ entre leurs images. En particulier si f est inversible alors g est son inverse.*

- *4. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont des espaces vectoriels topologiques et si f est une application "ouverte" (i.e. $f(A)$ est ouvert si A est ouvert) alors g est continue.*

- 1 1. En effet, en multipliant à droite par g les deux membres de la première des relations (2.4) on obtient

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g)$$

  ce qui démontre le point 1.

- 2. Comme $(f \circ g)$ est un projecteur on a d'après la proposition 2.3 :

$$\mathbb{Y} = (f \circ g)(\mathbb{Y}) \oplus (I_{\mathbb{Y}} - f \circ g)(\mathbb{Y})$$

  et :

$$y \in \mathbb{Y} \Rightarrow (g \circ (I_{\mathbb{Y}} - f \circ g))(y) = g(y) - g(y) = 0$$

  donc :

$$(I_{\mathbb{Y}} - f \circ g)(\mathbb{Y}) \subset ker(g)$$

  Inversement :

$$y \in ker(g) \Rightarrow (f \circ g)(y) = 0 \Rightarrow y \in (I_{\mathbb{Y}} - f \circ g)$$

  ce qui achève la démonstration du point 2.

- 3. Soient $\widetilde{f}$ la restriction de f à $g(\mathbb{Y})$ et $\widetilde{g}$ celle de g à $f(\mathbb{X})$. Tout d'abord f et $\widetilde{f}$ ont la même image ainsi que g et $\widetilde{g}$. En effet, pour f par exemple, on a $\widetilde{f}(g(\mathbb{Y})) \subset f(\mathbb{X})$ et, inversement :

$$y = f(x) = (f \circ g \circ f)(x) \subset f(g(\mathbb{Y})) = \widetilde{f}(g(\mathbb{Y}))$$

Ensuite leur noyau se réduit à $\{0\}$. En effet, pour $\widetilde{g}$ par exemple :

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(y) = 0 &\Rightarrow \exists x \in \mathbb{X} : (\widetilde{g} \circ f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow y = f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = (f \circ \widetilde{g} \circ f)(x) = 0\end{aligned}$$

On a donc $\widetilde{f}^{-1} = \widetilde{g}$ ce qui démontre le point 3.

– 4. En effet si $A \subset g(\mathbb{Y})$ est un ouvert pour la topologie induite par $\mathbb{X}$ sur $g(\mathbb{Y})$ alors A est de la forme $A' \cap g(\mathbb{Y})$ où A' est ouvert de $\mathbb{X}$; $f(A) = f(A')$ est donc un ouvert dans $\mathbb{Y}$ et l'on a, d'après le point 3 :

$$g(f(A)) = A$$

ce qui établit la continuité annoncée.

Existence d'une pseudo-inverse

Soient f une application linéaire de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$, K_x un supplémentaire de $ker(f)$ dans $\mathbb{X}$, N_y un supplémentaire de $f(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{Y}$. La restriction de f à K_x est un isomorphisme f_K de K_x sur $f(K_x)$ et f_K^{-1} se prolonge en une application g de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{X}$:

$$g(y) = \begin{cases} f_K^{-1}(y) & si\ y \in f(\mathbb{X}) \\ 0 & si\ y \in N_y \end{cases} \tag{2.6}$$

et g est une pseudo-inverse de f.

Il y a donc correspondance biunivoque entre les pseudo-inverses d'une application linéaire et les couples de supplémentaires de son noyau et de son image.

Pseudo-inverse de Moore-Penrose

Un cas particulier très utilisé est celui où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont munis d'un produit scalaire ou hermitien. En choisissant pour les supplémentaires précédents les supplémentaires orthogonaux on retrouve la notion de pseudo-inverse telle qu'elle a été construite, dans le cas de la dimension finie, par E.H.Moore et par R.Penrose indépendamment l'un de l'autre. Citons la définition du premier, voisine de la nôtre 2.3 :

Définition 2.4. ***Pseudo-inverse de Moore-Penrose***
Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ alors l'inverse généralisée[1] *A est la matrice unique $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telle que*

$$AA^\dagger = \mathscr{P}_{A(\mathbb{R}^m)} \text{ et } A^\dagger A = \mathscr{P}_{A^\dagger(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7}$$

où $\mathscr{P}_{\mathbb{H}}$ désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

Remarque. La définition est encore valable dans le cas d'une matrice complexe, en remplaçant partout $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

1. synonyme courant de pseudo-inverse.

2.2 Supplémentaires et projecteurs : aspects topologiques

On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathbb{X}$, muni d'une topologie $\mathscr{T}$ d'espace vectoriel, et dans lequel $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ désignent deux sous-espaces supplémentaires associés aux projecteurs $\mathscr{P}_1 : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}_1$ et $\mathscr{P}_2 : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}_2$. Donnons quelques résultats classiques qui nous seront utiles au paragraphe 2.4.

Par un raccourci d'écriture usuel nous écrirons "EVT" en lieu et place de "espace(s) vectoriel(s) topologiques(s)".

2.2.1 Topologie projetée ou topologie quotient

Définition 2.5. ***Topologie projetée***
Par définition la partie $A_1 \subset \mathbb{X}_1$ est un ouvert de la topologie $\mathscr{T}_1$ projetée de la topologie $\mathscr{T}$ si son image réciproque $\mathscr{P}_1^{-1}(A_1)$ est un ouvert pour $\mathscr{T}$.

C'est évidemment la topologie la plus fine pour laquelle $\mathscr{P}_1$ soit continu.

On a déjà identifié algébriquement $\mathbb{X}_1$ au quotient $\mathbb{X}/\mathbb{X}_2$ et $\mathscr{P}_1$ à l'application canonique de $\mathbb{X}$ sur ce quotient ; la topologie projetée $\mathscr{T}_1$ s'identifie alors à la topologie quotient. Les propositions (2.5, 2.6, 2.8) qui suivent s'appliquent donc directement à celle-ci.

Proposition 2.5. *Le projecteur $\mathscr{P}_1$ est une application "ouverte"*
Le projecteur $\mathscr{P}_1$ est une application "ouverte", c'est-à-dire que l'image $\mathscr{P}_1(A)$ d'un ouvert de $\mathbb{X}$ (pour la topologie $\mathscr{T}$) est ouverte pour la topologie $\mathscr{T}_1$.

En effet si A est ouvert alors $\mathscr{P}_1^{-1}(\mathscr{P}_1(A)) = \bigcup_{x \in \mathbb{X}_2}(A + x)$ qui est ouvert comme réunion d'ouverts.

Proposition 2.6.
Sur $\mathbb{X}_1$ la topologie projetée $\mathscr{T}_1$ est moins fine que la topologie induite de la topologie $\mathscr{T}$.

En effet cette topologie induite est celle dont les ouverts sont les intersections du type $A_1 = A \cap \mathbb{X}_1$ où A est un ouvert de $\mathbb{X}$ pour la topologie $\mathscr{T}$; on a donc : $A_1 \subset \mathscr{P}(A)$ qui est ouvert d'après la proposition précédente, ce qui démontre la présente.

D'une façon générale le singleton $\{0\}$ n'est pas nécessairement égal à son adhérence, intersection de ses voisinages. Rappelons la propriété suivante

Proposition 2.7. *Un EVT est séparé si et seulement si $\{0\}$ (et par suite tout autre singleton) est fermé.*

En effet si l'espace est séparé tout point distinct de 0 ne peut être adhérent à $\{0\}$; inversement si $\{0\}$ est fermé (et par suite tout autre singleton) et si l'espace n'était pas séparé on aurait, V_x désignant un voisinage de x :

$$\exists x_1 \; \exists x_2 \neq x_1 \; \forall \, V_{x_1} \; \forall \, V_{x_2} \; \exists y \in \; V_{x_1} \cap V_{x_2}$$

en sorte que y serait adhérent à $\{x_1\}$ et à $\{x_2\}$ donc égal à x_1 et à x_2, ce qui est contraire à l'hypothèse. En niant celle-ci on obtient

$$\forall\, x_1\ \forall\, x_2 \neq x_1\ \exists\, V_{x_1}\ \exists\, V_{x_2}\ V_{x_1} \cap V_{x_2} = \emptyset$$

Comme $\mathbb{X}_2 = \mathscr{P}_1^{-1}(\{0\})$ on peut énoncer :

Proposition 2.8. ***Séparation de la topologie projetée***
La topologie $\mathscr{T}_1$ est séparée si et seulement si $\mathbb{X}_2$ est fermé dans $\mathbb{X}$ pour la topologie $\mathscr{T}$.

En effet $\{0\}$ est fermé pour $\mathscr{T}_1$ si et seulement si son complémentaire est ouvert, c'est-à-dire si et seulement si l'image réciproque de ce dernier est ouverte, et cette image réciproque est le complémentaire de $\mathbb{X}_2$.

2.2.2 Topologie produit et supplémentaires topologiques

Définition 2.6. ***Topologie produit***
Soient $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ deux EVT pour les topologies respectives $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$; les ouverts de la topologie produit $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$ sur $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ sont définis comme les réunions des produits d'un ouvert O_1 de $\mathbb{X}_1$ par un ouvert O_2 de $\mathbb{X}_2$.

Soient $\mathscr{T}$ une topologie sur $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ et O_1 et O_2 des ouverts respectifs de $\mathbb{X}_1$ et de $\mathbb{X}_2$ Si les projecteurs $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont continus pour $\mathscr{T}$ alors $\mathscr{P}_1^{-1}(O_1) \cap \mathscr{P}_2^{-1}(O_2)$ est un ouvert pour $\mathscr{T}$. On peut donc énoncer :

Proposition 2.9. ***Finesse de la topologie produit***
La topologie produit est la moins fine des topologies qui rendent continus les projecteurs $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

Considérons maintenant deux supplémentaires algébriques $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ de l'espace vectoriel $\mathbb{X}$. L'application S définie par :

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \mapsto S(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \in \mathbb{X} \tag{2.8}$$

est un isomorphisme algébrique de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ sur $\mathbb{X}$ et l'on a :

$$S^{-1} = (\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) \tag{2.9}$$

On peut se demander si la topologie d'un EVT s'identifie à la topologie produit des topologies induites ; la notion de supplémentaires topologiques répond à cette question.

Définition 2.7. ***Supplémentaires topologiques***
Soient $\mathbb{X}$ un EVT pour la topologie $\mathscr{T}$ et $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{X}$; on dit qu'ils sont supplémentaires topologiques si l'application S :

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \mapsto S(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \in \mathbb{X} \tag{2.10}$$

est un isomorphisme d'EVT lorsque $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ est muni de la topologie produit des topologies induites $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$.

Ceci revient à dire que les ouverts de $\mathscr{T}$ sont les réunions des sommes directes des ouverts pour $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$.

Les projecteurs $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont continus comme composantes de S^{-1}.

On note que si $\mathbb{X}$ est séparé alors deux supplémentaires topologiques sont fermés ; en effet $\{0\}$ est fermé pour la topologie induite sur $\mathbb{X}_1$; $\mathbb{X}_2 = \mathscr{P}_1^{-1}(\{0\})$ est donc fermé.

Soit $\mathbb{X}_1$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{X}$; possède-t-il un supplémentaire topologique ? La réponse est positive dans trois cas usuels :

Proposition 2.10.
Si $\mathbb{X}$ est métrisable et complet (un Banach par exemple) et si $\mathbb{X}$ est la somme directe algébrique $\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2$ alors $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont supplémentaires topologiques si et seulement s'ils sont l'un et l'autre fermés.

Proposition 2.11.
Si $\mathbb{X}_1$ est de codimension (i.e. la dimension de $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$) finie alors $\mathbb{X}_1$ possède un supplémentaire topologique dans $\mathbb{X}$.

Proposition 2.12.
Si $\mathbb{X}$ est localement convexe, $\mathbb{X}_1$ de dimension finie et si $\mathbb{X}_3$ est sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{X}$ tel que $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_3 = \{0\}$ alors $\mathbb{X}_1$ possède un supplémentaire topologique qui contient $\mathbb{X}_3$.

2.3 Dualité

Dans tous les énoncés généraux qui suivent la situation est symétrique par rapport aux deux espaces en dualité ; aussi ne les formulerons-nous que pour l'un d'entre eux.

2.3.1 Dualité et séparation

Définition 2.8.
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire sur le produit cartésien de deux espaces vectoriels réels $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

On dit alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ met en dualité les espaces vectoriels $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

- *On dit que la dualité sépare $\mathbb{X}$ si l'on a l'équivalence :*

$$\{\forall y \in \mathbb{Y} \ : \ \langle x, y \rangle = 0\} \iff x = 0$$

- *On dit que la dualité est séparante si elle sépare $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.*

- *On notera cette dualité $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathbb{Y})$.*

Exemple 1 : dualité entre $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^n$

Considérons les espaces vectoriels $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^n$ comme espaces de colonnes x ou y avec $n \leq m$. Soit $x \in \mathbb{X}$ et $r(x) \in \mathbb{Y}$ la sous-colonne constituée des n premiers éléments de x. Alors la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto r(x)^t y$ sépare $\mathbb{Y}$; elle

sépare aussi $\mathbb{X}$ si $m = n$.[2] Lorsque $m = n$ la forme bilinéaire $x^t y$ s'identifie au produit scalaire usuel qui met $\mathbb{R}^m$ en dualité avec lui-même.

Exemple 2 : dualité entre espaces fonctionnels

Une situation courante est celle où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont des espaces de champs définis sur un ouvert Ω de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ et à valeurs dans un même espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté par un point. La forme bilinéaire est l'intégrale :

$$\langle x, y \rangle = \int_{M \in \Omega} x(M) \cdot y(M) \tag{2.11}$$

Lorsqu'il s'agit d'une mesure $d\mu$ évidente dans le contexte, comme très souvent celle de Lebesgue, on omet de la signaler en écrivant $d\mu(M)$ après l'intégrande. L'intégrale de la formule (2.11) est l'écriture "naïve" de $\langle x, y \rangle$ lorsque l'une des variables est une distribution.

Une condition suffisante pour que cette dualité soit séparante est que les deux espaces contiennent l'espace $D(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables et de support compact contenu dans Ω.

On rencontrera constamment la situation où $\mathbb{X}$ est un espace de vitesses virtuelles et $\mathbb{Y}$ un espace d'efforts. La quantité $\langle x, y \rangle$ est alors la puissance virtuelle de l'effort y dans le champ de vitesses virtuelles x.

Convention importante
En suivant la définition que donne Bourbaki de la dualité ([4], chapitres II et IV \$1) nous n'envisagerons désormais que des dualités séparantes, sauf mention expresse du contraire.

Exemple 3 : continuité ou non continuité

Soient $\mathbb{X}$ l'espace des fonctions numériques définies et continues sur l'intervalle fermé [-1,+1] et la mesure de Dirac qui est la fonctionnelle linéaire δ :

$$x \in \mathbb{X} \mapsto \langle x, \delta \rangle = x(0) \tag{2.12}$$

Elle est continue pour la topologie de la convergence uniforme définie par :

$$x \to 0 \iff \max_{t \in [-1,+1]} x(t) \to 0 \Rightarrow x(0) \to 0 \tag{2.13}$$

mais elle ne l'est pas pour celle de la convergence en moyenne définie par :

$$x \to 0 \iff \int_{-1}^{+1} |x(t)|\, dt \to 0$$

En effet lorsque ε tend vers 0 la célèbre fonction-test de Schwarz :

$$x(t, \varepsilon) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{\varepsilon^2 - t^2}} \; si \; |t| < \varepsilon \\ 0 \; si \; |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

tend vers 0 en moyenne tandis que sa valeur à l'origine conserve la valeur 1.

2. $r(x)^t$ désigne évidemment la ligne transposée de $r(x)$.

2.3.2 Formes linéaires et topologies compatibles avec la dualité

Ce paragraphe donne sur ce sujet quelques informations nécessaires à une compréhension, au moins approximative, des notions liées à ces topologies. Cet exposé ne saurait remplacer les traités spécialisés et, en particulier celui de Bourbaki ([4] chapitres II et IV).

Dans ce paragraphe la situation est symétrique entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

La dualité de deux espaces vectoriels privilégie les formes linéaires qui sont définies sur l'un par un élément de l'autre ; à tout élément $y \in \mathbb{Y}$ on peut en effet associer la forme linéaire "de pente y" qu'on note généralement $\langle \cdot \, , \, y \rangle$:

$$x \in \mathbb{X} \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

Hyperplans et demi-espaces

On note $H(y,r)$, $H^{\leq}(y,r)$,resp. $H^{<}(y,r)$, l'hyperplan et les demi-espaces définis pour tout réel r par :

$$\begin{aligned} H(y,r) &= \{x \in \mathbb{X} : \langle \, x \, , \, y \, \rangle - r = 0\} \\ H^{\leq}(y,r) &= \{x \in \mathbb{X} : \langle \, x \, , \, y \, \rangle - r \leq 0\} \text{ demi-espace fermé} \\ H^{<}(y,r) &= \{x \in \mathbb{X} : \langle \, x \, , \, y \, \rangle - r < 0\} \text{ demi-espace ouvert} \end{aligned}$$

Définition 2.9. ***Topologie faible***
La topologie faible $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ sur $\mathbb{X}$ est définie par la famille fondamentale suivante de voisinages de l'origine :

$$(y \in \mathbb{Y}, \varepsilon > 0) \mapsto H^{<}(y,\varepsilon) \tag{2.15}$$

On note que $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est localement convexe[3] séparée (puisque la dualité sépare $\mathbb{X}$). Les formes linéaires du type $\langle \cdot, y \rangle$, $y \in \mathbb{Y}$ sont continues pour $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ par définition de cette dernière. Mais elles le sont aussi pour d'autres topologies :

Définition 2.10. ***Topologies compatibles avec la dualité***
Soit $\mathscr{T}$ une topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{X}$, localement convexe et séparée ; on dit qu'elle est compatible avec la dualité $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathbb{Y})$ si

$$\{\langle \cdot, b \rangle \; : \; a \in \mathbb{Y}\}$$

est l'ensemble des formes linéaires $\mathscr{T}$-continues sur $\mathbb{X}$.
Autrement dit $\mathbb{Y}$ est le dual topologique de $\mathbb{X}$ muni de la topologie $\mathscr{T}$.

Pour les topologies compatibles avec la dualité $H(y,r)$ et $H^{\leq}(y,r)$ sont fermés comme images réciproques respectives des fermés $\{r\}$ et $]-\infty, r]$ pour la forme linéaire $\langle \cdot, y \rangle$.

La topologie faible est la plus faible des topologies compatibles avec la dualité : si une forme linéaire sur $\mathbb{X}$ est continue pour $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ elle l'est aussi pour toutes les autres.

3. c'est -à-dire qu'il existe un système fondamental de voisinages convexes de l'origine

Topologie affaiblie

Très souvent $\mathbb{X}$ est défini comme un espace vectoriel muni de la topologie $\mathscr{T}$ et $\mathbb{Y}$ comme son dual topologique ; la topologie faible $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est alors nommée topologie affaiblie de la topologie initiale $\mathscr{T}$. Par exemple $\mathbb{X}$ est un espace de Banach et $\mathbb{Y}$ son dual muni de la topologie $\mathscr{T}'$ de la norme ; $\mathscr{T}$ est évidemment compatible avec la dualité ; si $\mathscr{T}'$ l'est aussi on dit que $\mathbb{X}$ est réflexif.

2.3.3 Ensembles convexes et ensembles polaires

La notion d'ensemble convexe est familière :

Définition 2.11. ***Ensembles convexes***
Une partie A d'un espace vectoriel $\mathbb{X}$ est dite convexe si elle contient tout segment dont les extrémités lui appartiennent, en d'autres termes :

$$\forall (x,y) \in A \times A \ , \ \forall \lambda \in [0,1] \ : \ \lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in A \tag{2.16}$$

Propriétés immédiates [4]

- On note que l'ensemble vide est convexe puisque l'assertion de la définition est le contraire de :

$$\exists (x,y) \in A \times A \ , \ \exists \lambda \in [0,1] \ : \ \lambda\, x + (1-\lambda)\, y \notin A$$

  évidemment fausse.
- L'intersection d'un famille de convexes (resp. convexes fermés) est convexe (resp. convexe fermée).
- L'intersection des convexes (resp. convexes fermés) qui contiennent un ensemble A est nommée "enveloppe convexe" (resp. "enveloppe convexe fermée") de A".

Proposition 2.13.
Si A est un convexe fermé il est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En effet A est évidemment contenu dans cette intersection. Inversement, s'il existait x qui n'appartiendrait pas à A, l'ensemble réduit à x serait un convexe compact disjoint de A ; d'après le théorème de Hahn-Banach (N. Bourbaki [4] théorème 1, p. II-39) il existerait un hyperplan fermé qui les séparerait strictement c'est-à-dire $y \in \mathbb{Y}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $\langle x,y\rangle > r$ et $A \subset H_X^{\leq}(y,r)$. Le point x n'appartiendrait donc pas à l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent A.

Définition 2.12. ***Ensembles polaires***
Soit A une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{X}$ en dualité avec $\mathbb{Y}$; on nomme "ensemble polaire de A" la partie A^o de $\mathbb{Y}$ définie par [5] :

$$A^o = \{y \in \mathbb{Y} / \forall x \in A : \langle x\, y\rangle \leq 1\} \tag{2.17}$$

4. c'est-à-dire dont la facile démonstration est laissée au lecteur.
5. Attention : c'est la définition adoptée par J.J.Moreau ; celle de Bourbaki remplace le "≤ 1" par "≥ -1", ce qui conduit aux mêmes propriétés, à une symétrie près par rapport à l'origine.

Proposition 2.14. ***Quelques propriétés immédiates***

- $0 \in A^o$
- *On a :* $A^o = \bigcap_{x \in A} H^{\leq}(x, 1)$
- *Le polaire de la partie vide* $\emptyset$ *de* $\mathbb{X}$ *est* $\mathbb{Y}$.
- *Le polaire d'un sous-espace vectoriel* A *de* $\mathbb{X}$ *est "l'orthogonal" de* A [6] *; on peut en effet, lorsque* A *est un sous-espace vectoriel, remplacer l'inégalité de définition (2.17) par l'égalité :*

$$A^o = \{y \in \mathbb{Y} / \forall x \in A : \langle x, y \rangle = 0\}$$

- $A \subset B \Rightarrow B^o \subset A^o$
- *On note* $A^{oo} = (A^o)^o$. *Alors* $A^o = (A^{oo})^o$
- A^{oo} *est l'enveloppe convexe fermée de* $A \cup \{0\}$

2.3.4 Transposition

Définition 2.13. *On considère deux paires d'espaces vectoriels en dualité :*

$$(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathbb{Y}) \tag{2.18}$$

$$(\mathbb{X}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, \mathbb{Y}_1) \tag{2.19}$$

et deux applications linéaires $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}_1$ *et* $A' : \mathbb{Y}_1 \mapsto \mathbb{Y}$. *On dit que* A *et* A' *sont transposées l'une de l'autre si :*

$$\forall (x, y_1) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}_1 : \ \langle x, A' y_1 \rangle = \langle A x, y_1 \rangle_1 \tag{2.20}$$

On note alors $A' = A^t$.

Proposition 2.15. ***Existence de la transposée***
A admet une transposée A^t *si et seulement si elle est continue pour les topologies compatibles avec la dualité.*

En effet la forme linéaire $x \in \mathbb{X} \mapsto \langle Ax, y_1 \rangle_1$ est continue pour tout $y_1 \in \mathbb{Y}_1$; pour tout $y_1 \in \mathbb{Y}_1$ il existe donc un unique $y \in \mathbb{Y}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{X} : \langle x, y \rangle = \langle Ax, y_1 \rangle_1$. Enfin y dépend linéairement de y_1, ce qu'on peut noter $y = A^t y_1$.
Inversement si A^t existe, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y_1) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}_1 \ \langle x, A^t y_1 \rangle = \langle Ax, y_1 \rangle_1$$

alors, pour tout $(y_1, \varepsilon) \in \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{R}$:

$$A^{-1} \left(H^{<}(y_1, \varepsilon) \right) = H^{<}(A^t y_1, \varepsilon)$$

6. Attention à l'article défini dans l'expression "l'orthogonal" ! : on dit que les sous-espaces vectoriels $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{Y}_1$ sont orthogonaux si $\forall (x, y) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1 : \langle x, y \rangle = 0$. Alors $\mathbb{Y}_1$ est *un* orthogonal de $\mathbb{X}_1$ et réciproquement.

ce qui établit la continuité de A.

La représentation schématique de la figure 2.1 illustre les propriétés de la transposition de l'opérateur déformation $\mathscr{D}$ pour la dualité à quatre espaces présentée dans l'introduction. Le noyau $ker(\mathscr{D})$ est l'espace des déplacements

FIGURE 2.1 – Dualité à quatre espaces

$$\begin{array}{cccccc}
\textit{Var.} & & \textit{Dualités} & & & \textit{Var.} \\
u & ker(\mathscr{D}) \subset \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} \supset ker(\mathscr{D})^{\mathrm{o}} \supseteq \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) & & f \\
 & \mathscr{D}\Big\downarrow & & \Big\uparrow \mathscr{D}^t & & \\
\varepsilon & \mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq (ker\mathscr{D}^t)^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} \supset (\mathscr{D}\mathbb{U})^{\mathrm{o}} = ker(\mathscr{D}^t) & & \sigma
\end{array}$$

qui n'engendrent aucune déformation dans les solides qui composent la structure. Lorsqu'il s'agit d'un solide unique on nomme souvent ce noyau "espace des déplacements solidifiants".

Dans les bons cas les inclusions indiquées par ce schéma se ramènent à des égalités. On verra que $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est fermé dès que $ker(\mathscr{D})$ est de dimension finie (cf. proposition 4.2). On peut d'autre part établir l'équivalence :

$$e \in \mathscr{D}(\mathbb{U}) \iff e \in ker(\mathscr{D}^t)^{\mathrm{o}}$$

dans des situations mécaniques courantes comme celle du solide bi ou tridimensionnel ou encore celle des plaques. Nous étudierons cela plus en détail au chapitre 5.

Proposition 2.16. ***Injectivité et surjectivité***
Soient $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$ et $(\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1, \mathbb{Y}_1)$ deux paires d'espaces en dualité séparante, A une application linéaire continue de transposée A^t
- *si A est surjective A^t est injective,*
- *si A est injective et si $A^t(\mathbb{Y}_1)$ est fermé alors A^t est surjective.*

En effet :
- si A est surjective alors $ker(A^t) = \mathbb{X}_1^{\mathrm{o}} = \{0\}$
- si A est injective alors l'adhérence de $A^t(\mathbb{Y}_1)$ est $ker(A)^{\mathrm{o}} = \{0\}^{\mathrm{o}} = \mathbb{Y}$.

Proposition 2.17. ***La transposition commute avec la pseudo-inversion***
Soient
- *$(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$ et $(\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1, \mathbb{Y}_1)$ deux paires d'espaces en dualité séparante,*
- *A une application linéaire continue, ouverte, et de transposée A^t,*
- *$A^\dagger$ et $A^{t\dagger}$ des pseudo-inverses respectives de ces dernières ;*

on a :

$$(A^\dagger)^t = (A^t)^\dagger = A^{t\dagger} \tag{2.21}$$

ce qu'on pourra donc noter indifféremment : $A^{t\dagger}$ ou $A^{\dagger t}$

Soient en effet :

$$x \in \mathbb{X}' = A^\dagger(\mathbb{X}_1) \ ; y_1 \in \mathbb{Y}_1' = (A^t)^\dagger(\mathbb{Y})$$
$$x_1 = A(x) \ \Leftrightarrow x = A^\dagger(x_1)$$
$$y = A^t(y_1) \Leftrightarrow \ y_1 = (A^t)^\dagger(y)$$

N.B. *Les pseudo-inverses $A^\dagger$ et $(A^t)^\dagger$ sont associées aux supplémentaires respectifs $\mathbb{X}'$ et $\mathbb{Y}'_1$ des noyaux de A et de A^t. On note qu'on peut choisir ces supplémentaires indépendamment l'un de l'autre.*

On a :

$$\langle x, y\rangle = \langle A^\dagger(x_1), A^t(y_1)\rangle = \langle AA^\dagger(x_1), y_1\rangle_1 = \langle x_1, y_1\rangle_1$$

Maintenant le point 4 de la proposition 2.4 assure que $A^\dagger$ est continue et qu'elle admet donc une transposée $(A^\dagger)^t$.
On peut alors écrire :

$$\langle x_1, (A^\dagger)^t y\rangle_1 = \langle A^\dagger x_1, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle_1 = \langle x_1, (A^t)^\dagger y\rangle_1$$

et finalement, x_1 étant arbitraire dans $A(\mathbb{X}')$ et y dans $A^t(\mathbb{Y}'_1)$:

$$(A^\dagger)^t = (A^t)^\dagger \tag{2.22}$$

Cas de deux espaces munis d'un produit scalaire

Considérons deux espaces vectoriels $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ munis chacun d'un produit scalaire, respectivement $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$. Soit une application linéaire $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. Sa transposée $A^t : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$, lorsqu'elle existe, est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \ : \ \langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^t y\rangle_X \tag{2.23}$$

c'est-à-dire qu'on se retrouve dans le cas de la dualité à quatre espaces, chacun des deux espaces $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ étant mis en dualité avec lui-même par son produit scalaire comme le décrit la figure 2.2. Le cas le plus courant est celui de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leur produit scalaire usuel ; l'application linéaire est définie par une matrice A^{nm} et sa transposée par la matrice transposée A^{mn}.

FIGURE 2.2 – Cas de deux espaces munis d'un produit scalaire

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Var.} & & \textit{Dualités} & & \textit{Var.} \\
x & \mathbb{X} & \langle\cdot,\cdot\rangle_X & \mathbb{X} & x \\
 & A\downarrow & & \uparrow A^t & \\
y & \mathbb{Y} & \langle\cdot,\cdot\rangle_Y & \mathbb{Y} & y
\end{array}$$

2.3.5 Dualité entre un sous-espace vectoriel et un espace quotient

Définition 2.14. ***Dualité quotient***
Considérons la dualité $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$*, un sous-espace vectoriel* $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$ *et son polaire* $\mathbb{X}_1^o \subseteq \mathbb{Y}$*. On note* $\mathbb{Z} = \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o$ *l'espace quotient de* $\mathbb{Y}$ *par la relation d'équivalence :*

$$y_1 \sim y_2 \iff y_1 - y_2 \in \mathbb{X}_1^o \tag{2.24}$$

On note Q *l'application canonique :* $Q(\mathbb{Y}) = \mathbb{Z}$ *et* $I_{\mathbb{X}_1}$ *l'injection de* $\mathbb{X}_1$ *dans* $\mathbb{X}$*.*
D'après (2.24) la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ *définie sur* $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{Z}$ *par :*

$$(x_1, z) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Z} \mapsto \langle x_1, z\rangle_1 = \langle x_1, y\rangle \text{ où : } y \in Q^{-1}(z) \tag{2.25}$$

est indépendante du choix de y *dans* $Q^{-1}(z)$*. Elle met donc en dualité* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathbb{Z}$*.*

Viennent immédiatement les trois propriétés énoncées par la proposition suivante :

Proposition 2.18.
Cette dualité est séparante.
L'injection $I_{\mathbb{X}_1} : \mathbb{X}_1 \mapsto \mathbb{X}$ *et l'application canonique* $Q : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$ *sont transposées l'une de l'autre.*
La topologie $\sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o)$ *est identique à la topologie induite sur* $\mathbb{X}_1$ *par* $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*.*

En l'absence de dualité on définit la codimension d'un sous-espace vectoriel $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$ comme la dimension du quotient $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$. La dualité quotient fournit le complément suivant :

Proposition 2.19. ***Codimension et polarité***
La codimension de $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$ *est la dimension de son polaire* $\mathbb{X}_1^o$

En effet la dualité quotient étant séparante, $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_1^o$ sont de même dimension, finie ou infinie.

La notion de topologie quotient est naturelle et identique à celle de "topologie projetée" (cf. définition 2.5) :

Définition 2.15. ***Topologie quotient***
Soit $\mathscr{T}$ *une topologie sur* $\mathbb{Y}$*; par définition les ouverts de la topologie quotient sont les parties* $A \in \mathbb{Z}$ *dont l'image réciproque* $Q^{-1}(A)$ *est ouverte pour* $\mathscr{T}$*.*

On établit facilement le premier point de la proposition suivante tandis que nous renvoyons à Bourbaki pour le second ([4], chap. IV, § 1, prop. 7) :

Proposition 2.20. ***Topologie quotient et topologie faible***
• *La topologie quotient de* $\sigma(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ *est plus fine que la topologie faible* $\sigma(\mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o, \mathbb{X}_1)$*.*
• *Pour qu'elles soient identiques il faut et il suffit que* $\mathbb{X}_1$ *soit fermé.*

Une propriété particulièrement utile à notre propos est un corollaire de Bourbaki (cf. [4], ch.II § 6 n°5 corollaire 4) :

Proposition 2.21. *Soient* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *et* $(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)$ *deux couples d'espaces en dualité séparante, A une application linéaire de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{X}_1$*, continue pour les topologies faibles* $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *et* $\sigma(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)$*. Pour qu'elle soit surjective il faut et il suffit que* A^t *soit un morphisme de* $\mathbb{Y}_1$ *dans* $A^t(\mathbb{Y}_1)$ *pour les topologies faibles* $\sigma(\mathbb{Y}_1,\mathbb{X}_1)$ *et* $\sigma(\mathbb{Y},\mathbb{X})$*.*

Revenons maintenant à la figure 2.1 que nous complétons par la dualité entre le quotient $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ où $\mathbb{U}_s$ est le noyau de l'opérateur $\mathscr{D}$ et l'orthogonal de $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$:

FIGURE 2.3 – Espace $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ des configurations déformées et espace des déformations

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{U}/\mathbb{U}_s & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_d & \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \\
Q\uparrow\downarrow Q^\dagger & & \downarrow\mathscr{I} \\
\mathbb{U}_s\oplus\mathbb{U}_d=\mathbb{U} & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_u & \mathbb{F}\supset\mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \\
\mathscr{D}\downarrow & & \uparrow\mathscr{D}^t \\
\mathscr{D}(\mathbb{U})\subset\mathbb{E} & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_e & \mathbb{S}\supset\ \mathscr{D}(\mathbb{U})^{\mathrm{o}}
\end{array}$$

On peut nommer $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ "espace des configurations déformées" ; on va voir qu'il est isomorphe à $\mathscr{D}(\mathbb{U})$.

Soient en effet $\mathbb{U}_d$ un supplémentaire de $\mathbb{U}_s$ dans $\mathbb{U}$ et $Q^\dagger$ la pseudo-inverse de Q associée à $\mathbb{U}_d$. $Q^\dagger$ est bijective de $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ sur $\mathbb{U}_d$ et $\mathscr{D}\circ Q^\dagger$ bijective de $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$.
Alors pour $(q,s)\in\mathbb{U}/\mathbb{U}_s\times\mathbb{S}$ on a :

$$\langle\mathscr{D}\circ Q^\dagger(q),s\rangle_e=\langle q,\mathscr{D}^t s\rangle_d \tag{2.26}$$

Soit alors $H^<(f,r)=H^<(\mathscr{D}^t s,r)\in\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ un demi-espace ouvert ; son image est :

$$\mathscr{D}\circ Q^\dagger(H^<(f,r))=\left\{e=\mathscr{D}\circ Q^\dagger(q),\ q\in\mathbb{U}/\mathbb{U}_s,\ \langle q,\mathscr{D}^t s\rangle<r\right\}$$

donc, en vertu de 2.26 :

$$\begin{aligned}
&=\left\{e\in\mathscr{D}\circ Q^\dagger(\mathbb{U}/\mathbb{U}_s)/\langle e,s\rangle<r\right\}\\
&=H^<(s,r)
\end{aligned}$$

qui montre que $\mathscr{D}\circ Q^\dagger$ est un isomorphisme de $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$, muni de la topologie $\sigma(\mathbb{U}/\mathbb{U}_s,\mathscr{D}^t(\mathbb{S}))$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ muni de la topologie induite par $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{S})$.
Mais, d'après la proposition 2.20 $\sigma(\mathbb{U}/\mathbb{U}_s,\mathscr{D}^t(\mathbb{S}))$ s'identifie à la topologie quotient de $\sigma(\mathbb{U},\mathbb{F})$ si et seulement si $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est fermé. On peut donc énoncer la proposition :

Proposition 2.22. ***Cas où*** $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ ***est fermé***
$\mathscr{D}\circ Q^\dagger$ est un isomorphisme de $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$
(resp. $\mathscr{D}$ un homomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$)
pour les topologies faibles $\sigma(\mathbb{U}/\mathbb{U}_s,\mathscr{D}^t(\mathbb{S}))$ et $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{S})$
(resp. $\sigma(\mathbb{U},\mathbb{F})$ et $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{S})$)
si et seulement si l'image $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est fermée pour la topologie faible sur $\sigma(\mathbb{F},\mathbb{U})$.

2.3.6 Dualités entre espaces produits

Considérons une famille finie[7] de paires d'espaces vectoriels en dualité séparante :

$$(\mathbb{X}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle_k, \mathbb{Y}_k)\ k = 1...n$$

On considère la dualité entre les espaces produits :

Définition 2.16. ***Dualité produit***

$$(\mathbb{X} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle\cdot,\cdot\rangle_k, \mathbb{Y} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{Y}_k) \tag{2.27}$$

On a alors la

Proposition 2.23. *La dualité produit est séparante et la topologie faible $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est le produit des topologies faibles $\sigma(\mathbb{X}_k,\mathbb{Y}_k)$.*

Un cas particulier est le suivant : considérons la dualité des espaces produits :

$$(\mathbb{U}\times\mathbb{E}, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_u + \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon, \mathbb{F}\times\mathbb{S})$$

On établit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 2.24. *Soient $\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{E}_1$ deux sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{E}$; on a*

$$(\mathbb{U}_1\times\mathbb{E}_1)^o = \mathbb{U}_1^o\times\mathbb{E}_1^o \tag{2.28}$$

On a aussi :

Proposition 2.25. *Si $\mathscr{D}$ est une application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{E}$ et de transposée $\mathscr{D}^t$ alors les sous-espaces vectoriels :*

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{(u,\varepsilon)\in\mathbb{U}\times\mathbb{E}/\varepsilon = \mathscr{D}(u)\} \\ \mathbb{M} &= \left\{(\phi,s)\in\mathbb{F}\times\mathbb{S}/\phi = -\mathscr{D}^t(s)\right\} \end{aligned} \tag{2.29}$$

sont mutuellement polaires.

en effet on a par exemple :

$$\begin{aligned} (\phi,s)\in\mathbb{L}^{\mathrm{o}} &\iff \forall u\in\mathbb{U} : \langle u,\phi\rangle_u + \langle\mathscr{D}u,s\rangle_\varepsilon = 0 \\ &\iff \forall u\in\mathbb{U} : \langle u,\phi+\mathscr{D}^t s\rangle_u = 0 \iff \phi+\mathscr{D}^t s = 0 \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{L}^{\mathrm{o}} = \mathbb{M}$
et la démonstration "transposée" pour $\mathbb{M}^{\mathrm{o}} = \mathbb{L}$.

7. Plus généralement Bourbaki ([4] chapitre II) considère une famille éventuellement infinie.

2.3.7 Caractérisation des topologies compatibles avec la dualité : $\mathfrak{S}$-familles et théorèmes de Mackey

Définition 2.17. ***$\mathfrak{S}$-familles et $\mathfrak{S}$-topologies***
Soit $\mathfrak{S}$ une famille de parties V de $\mathbb{Y}$, munies des propriétés suivantes :
- *les ensembles V sont bornés,*[8] *pour la topologie faible $\sigma(\mathbb{Y},\mathbb{X})$.*
- *la famille $\mathfrak{S}$ est stable par homothétie (de rapport non nul), par enveloppe convexe fermée et par réunion finie.*

Alors la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathbb{X}$ est, par définition, celle de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire la topologie définie par le système fondamental de voisinages de l'origine $\mathfrak{B} = \{V^o, V \in \mathfrak{S}\}$.

Deux théorèmes de Mackey (cf. [4], ch.III §2) précisent la situation :

Théorème 2.1. ***Mackey, théorème 1***
Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces vectoriels en dualité. Pour qu'une topologie localement convexe séparée $\mathscr{T}$ sur $\mathbb{X}$ soit compatible avec la dualité il faut et il suffit que $\mathscr{T}$ soit identique à une $\mathfrak{S}$-topologie, où $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de $\mathbb{Y}$ formé de parties convexes équilibrées et compactes pour la topologie faible $\sigma(\mathbb{Y},\mathbb{X})$.

- La topologie faible $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est associée à la $\mathfrak{S}$-famille des parties finies de $\mathbb{Y}$
- la topologie de Mackey, notée $\tau(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, est définie comme celle associée à la $\mathfrak{S}$-famille des parties convexes équilibrées et compactes pour la topologie faible $\sigma(\mathbb{Y},\mathbb{X})$.

Corollaire 2.1. ***Finesse des topologies compatibles avec la dualité***
Toute topologie localement convexe séparée compatible avec la dualité est plus fine que la topologie faible et moins fine que celle de Mackey.

Théorème 2.2. ***Mackey, théorème 2***
Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces vectoriels en dualité ; les ensembles bornés dans $\mathbb{X}$ sont les mêmes pour toutes les topologies localement convexes séparées compatibles avec la dualité.

Proposition 2.26. ***Isomorphisme de dualités***
Considérons deux dualités séparantes $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$, $(\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1, \mathbb{Y}_1)$, et une application linéaire A continue de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}_1$, de transposée A^t.
- *1. Si A est un isomorphisme de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{X}_1$ pour les topologies faibles $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\sigma(\mathbb{X}_1,\mathbb{Y}_1)$ alors A^t est un isomorphisme de $\mathbb{Y}_1$ sur $\mathbb{Y}$ pour les topologies faibles $\sigma(\mathbb{Y}_1,\mathbb{X}_1)$ et $\sigma(\mathbb{Y},\mathbb{X})$;*
- *2. de plus A et A^t sont des isomorphismes pour les $\mathfrak{S}$-topologies et donc pour les topologies localement convexes séparées compatibles avec la dualité.*

On dira alors qu'il y a isomorphisme des dualités.

En effet :
- 1. le noyau de A^t est $\{0\}$ comme orthogonal de $\mathbb{X}_1 = A(\mathbb{X})$; A^t est donc injective. Ensuite, d'après la proposition 2.21, la surjectivité de A entraîne que A^t est un morphisme et d'autre part que A soit un isomorphisme topologique entraîne que A^t est surjective.
- 2. Le point 2 découle immédiatement du précédent les $\mathfrak{S}$-familles étant isomorphes dans $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}_1$, d'une part, dans $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Y}_1$ d'autre part.

8. Par définition un ensemble $\mathfrak{B}$ est borné s'il est "absorbé" par tout voisinage de l'origine, c'est-à-dire tel que pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de l'origine il existe un $\lambda > 0$ tel que $\lambda\mathfrak{B} \subset \mathscr{V}$.

2.4 Topologie et point de vue des mécaniciens

2.4.1 Motivation

Le choix de l'espace fonctionnel $\mathbb{U}$ est en pratique dicté par celui la loi de comportement.

Ainsi, en élasticité linéaire, l'espace $\mathbb{E}$ est celui des champs de déformations d'énergie élastique $\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}K_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ sommables sur le domaine Ω occupé par le solide. Si la raideur K est bornée et définie positive $\mathbb{E}$ s'identifie au Hilbert $L^2(\Omega)^6$. L'espace naturel des déplacements est alors le Sobolev $H^1(\Omega)^3$.

L'intérêt des espaces de Sobolev réside principalement dans les très nombreuses études qu'on leur a consacrées. On peut ainsi utiliser nombre d'inégalités, de résultats sur les traces de u sur $\partial\Omega$ etc. Cependant les normes qui leur sont associées n'ont pas de signification directe pour le mécanicien.

Ainsi, dans le cas du solide élastique tridimensionnel, la norme

$$||u||_{(H^1)^3} = \sqrt{||u||^2_{(L^2)^3} + ||\nabla u||^2_{(L^2)^9}} \tag{2.30}$$

fait intervenir la partie antisymétrique du gradient, notée $\nabla_a u$, alors que la norme $||\nabla_s u||_{(L^2)^9}$ est plus intéressante puisque $\nabla_s u$ caractérise l'état déformé. De même la norme $||u||_{(L^2)^3}$ ne distingue pas dans u la partie déplacement rigide $u_s \in \mathbb{U}_s$ de celle qui engendre la déformation, soit u_d ; on doit d'ailleurs préciser cette distinction, a priori arbitraire, par le choix d'un supplémentaire $\mathbb{U}_d$ de $\mathbb{U}_s$ dans $\mathbb{U}$. Bref on souhaiterait disposer d'une norme du type :

$$||u||_M = \sqrt{||u_s||^2_{\mathbb{U}_s} + ||\nabla_s u||^2_{(L^2)^6}} \tag{2.31}$$

équivalente à celle de $(H^1)^3$, et dont l'indice M rappelle qu'elle est naturelle pour les mécaniciens.

En plasticité le choix qui s'impose pour l'espace des contraintes $\mathbb{S}$ est celui des fonctions continues $C^0(\bar{\Omega})^6$ en dualité avec l'espace $\mathbb{E}$ des mesures bornées [9] à valeurs dans $\mathbb{R}^6$. Ce choix conduit à un espace $\mathbb{U}$ des vitesses constitué de champs à variation bornée. C'est Pierre Suquet, en 1981, ([46]) qui développa ces prémices en les complétant par les nécessaires théorèmes de trace.

Très généralement on souhaite privilégier la "bonne" topologie sur l'espace $\mathbb{E}$ et en déduire celle de $\mathbb{U}$.

2.4.2 Deux dualités isomorphes

Revenons au schéma de dualité de la figure 2.1 et supposons fermées les images $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ et $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$. [10]

Proposition 2.27. ***Existence d'un supplémentaire topologique $\mathbb{U}_d$ de $\mathbb{U}_s$***
Si $\mathbb{U}_s$ est de dimension finie il admet au moins un supplémentaire topologique $\mathbb{U}_d$.

9. Pour le solide tridimensionnel, par exemple, on rencontre en effet des vitesses de déformation concentrées sur des surfaces, et très souvent même sur la frontière du domaine.

10. Effectivement nous montrerons (proposition 4.2) que, son polaire $\mathbb{U}_s$ étant de dimension finie, $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est fermée. Par ailleurs nous verrons, au chapitre consacré à l'intégrabilité des déformations, que $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ s'identifie au polaire de $ker(\mathscr{D}^t)$, au moins pour les opérateurs de déformation classiques (cf. 5.3).

En effet si $\mathbb{U}_s \pm \mathbb{U}$ il existe au moins un supplémentaire algébrique de $\mathbb{U}_s$; soit u un point de ce dernier : la droite portée par u est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{U}$ dont l'intersection avec $\mathbb{U}_s$ se réduit à$\{0\}$. D'après la proposition 2.12 $\mathbb{U}_s$, de dimension finie, admet un supplémentaire topologique $\mathbb{U}_d$ qui contient cette droite.

Deux remarques

- Il arrive très souvent qu'on puisse se donner un projecteur surjectif $\mathscr{P}$ de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}_s$, continu (cf. remarque 2.4.2-1) pour les topologies compatibles avec la dualité. Alors $\mathbb{U}_d = \mathscr{P}^{-1}(0)$.
  Un projecteur de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}_s$ familier aux mécaniciens est celui qui confère à la composante u_s les quantités cinétiques du champ u considéré comme un champ de vitesses. Ainsi, pour le solide tridimensionnel de volume Ω, par exemple, on pose les équations :

$$\begin{aligned} m\vec{u}(G) &= \int_{P\in\Omega} \vec{u}(P)dm(P) \\ \vec{\vec{I}}_G.\vec{\omega} &= \int_{P\in\Omega} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}(P)dm(P) \\ u_s &= \vec{u}(G) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP} \end{aligned}$$

  où dm est une mesure de masse totale m, $\vec{\vec{I}}_G$ le tenseur d'inertie en G, $\vec{\omega}$ le vecteur rotation.
  Ce projecteur est continu dès que la topologie de $\mathbb{U}$ est plus fine que celle de $L^1(\Omega)^3$
- Plutôt que les supplémentaires $\mathbb{U}_d$ et $\mathbb{I}'$ on peut utiliser les quotients $\mathbb{U}/\mathbb{U}_s$ et $\mathbb{E}/\mathbb{I}^o$ et les dualités quotients correspondantes. Elles sont évidemment isomorphes.

La dualité réduite

Soit $\mathbb{I}'$ un supplémentaire (quelconque) de $\mathscr{D}(\mathbb{U})^o$ dans $\mathbb{S}$. On note alors :
- $\mathscr{D}_d$ la restriction de $\mathscr{D}$ à $\mathbb{U}_d$, $\mathscr{D}_d^t$ la restriction de $\mathscr{D}^t$ à $\mathbb{I}'$,
- $\mathbb{I} = \mathscr{D}_d(\mathbb{U}_d) = \mathscr{D}(\mathbb{U})$,
- $\mathbb{F}' = \mathscr{D}_d^t(\mathbb{I}') = \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \subset \mathbb{F}$

On obtient alors le schéma de dualité de la figure 2.4.

FIGURE 2.4 –

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_d & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_u & \mathbb{F}' \\ \mathscr{D}_d \downarrow & & \uparrow \mathscr{D}_d^t \\ \mathbb{I} & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_e & \mathbb{I}' \end{array}$$

Proposition 2.28.
- *1. Les applications $\mathscr{D}_d$ et $\mathscr{D}_d^t$ sont transposées l'une de l'autre.*
- *2. Les dualités $(\mathbb{U}_d, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathscr{D}^t(\mathbb{S}))$ et $(\mathbb{I}, \langle\cdot,\cdot\rangle_e, \mathbb{I}')$ sont isomorphes.*

En effet :
- Le point 1 est trivial,
- en vertu de la proposition 2.26 le point 3 résulte de la surjectivité des applications transposées $\mathscr{D}_d$ et $\mathscr{D}_d^t$.

Définition 2.18. ***Topologie des mécaniciens et topologie initiale***
Soit $\mathscr{T}$ une topologie "initiale" définie sur $\mathbb{U}$ et compatible avec la dualité $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{F})$. Elle est équivalente à la topologie produit des topologies qu'elle induit sur $\mathbb{U}_s$ et sur $\mathbb{U}_d$, respectivement $\mathscr{T}_s$ et $\mathscr{T}_d$. La topologie des mécaniciens associée à $\mathscr{T}$ est la topologie produit $\mathscr{T}_s \times \mathscr{T}_I$ où $\mathscr{T}_I$ est la topologie définie sur $\mathbb{I}$ par l'isomorphisme de dualités sujet de la proposition 2.28.

Inversement on pourra se donner la paire d'espaces en dualité $\mathbb{I}$ et $\mathbb{I}'$ et la topologie $\mathscr{T}_I$ compatible avec la dualité, puis $\mathbb{U}_d = \mathscr{D}_d^{-1}(\mathbb{I})$ muni de la topologie $\mathscr{T}_d$ dont les ouverts sont les images par $\mathscr{D}_d^{-1}$ des ouverts de $\mathscr{T}_I$.

2.4.3 Espaces de Sobolev, norme des mécaniciens et inégalité du type de Korn

Considérons un solide tridimensionnel muni d'une densité d'énergie élastique de la forme $|\nabla_s|^p$ pour $|\nabla_s| = \sqrt{tr(\nabla_s \cdot \nabla_s^t)}$ et $1 \leq p < +\infty$. Il s'agit donc d'une loi de comportement non linéaire dès que $p \neq 2$. L'espace de Sobolev correspondant est $(W^{1,p})^3$ et la restriction de la norme de Sobolev au sous-espace $\mathbb{U}_d$ est :

$$u_d \in \mathbb{U}_d \mapsto ||u_d||_{\mathbb{U}_d} = ||u_d||_{(L^p)^3} + ||\nabla u_d||_{(L^p)^6} \tag{2.32}$$

La proposition 2.28 nous assure maintenant qu'il y a isomorphisme entre la topologie forte définie par cette norme sur $\mathbb{U}_d$ et la topologie forte définie par la norme $||\cdot||_{(L^p)^6}$ sur $\mathbb{I}$. Autrement dit les applications $\mathscr{D}_d$ et $\mathscr{D}_d^{-1}$ sont continues, donc bornées, d'où l'encadrement :

$$\begin{aligned} &\exists\, K_1 > 0\ \exists\, K_2 \geq 1 \\ &K_1 ||\mathscr{D}_d||^{-1} ||\nabla_s u_d||_{(L^p)^6} \leq ||u_d||_{\mathbb{U}_d} \leq K_2 ||\mathscr{D}_d^{-1}||\ ||\nabla_s u_d||_{(L^p)^6} \end{aligned} \tag{2.33}$$

qui implique l'équivalence de $||u_d||_{\mathbb{U}_d}$ et de $||\nabla_s u_d||_{(L^p)^6}$ sur $\mathbb{U}_d$ et donc, puisque $\mathbb{U}_s$ et $\mathbb{U}_d$ sont des supplémentaires topologiques :

Théorème 2.3. ***Équivalence des normes de Sobolev et des mécaniciens***
Sur $\mathbb{U}$ la norme de Sobolev est équivalente à la "norme des mécaniciens" :

$$||u||_M = ||u_s||_{(L^p)^3} + ||\nabla_s u||_{(L^p)^6} \tag{2.34}$$

résultat qui s'étend évidemment aux autres opérateurs de déformation de la mécanique des structures.

Remarque

Ce résultat est général et purement "dualistique" : à l'inverse de l'inégalité de Korn il est indépendant de la régularité sur la frontière du domaine comme de la réflexivité du Sobolev initial (p>1).

Comparaison avec l'inégalité de Korn

L'inégalité de Korn, valable pour $p > 1$, s'écrit :

$$\exists\, C_K > 0 \ : \ K = ||u||_{(L^p)^3} + ||\nabla_s u||_{(L^p)^6} \geq C_K ||u||_{(W^{1,p})^3} \tag{2.35}$$

Le premier membre, soit K, de l'inégalité (2.35) est proche de la norme $||u||_M$ des mécaniciens (2.34) et lui est égal si le champ u est un déplacement de corps rigide. Au demeurant le théorème 2.3 implique l'inégalité :

$$\exists\, C_M > 0 \ : \ ||u||_M \geq C_M ||u||_{(W^{1,p})^3} \tag{2.36}$$

Plus généralement on a, par l'inégalité triangulaire :

$$u = u_s + u_d \Rightarrow ||u||_{(L^p)^3} \leq ||u_s||_{(L^p)^3} + ||u_d||_{(L^p)^6} \tag{2.37}$$

d'où :

$$K = ||u||_{(L^p)^3} + ||\nabla_s u||_{(L^p)^6} \leq ||u_s||_{(L^p)^3} + ||u_d||_{(L^p)^3} + ||\nabla_s u||_{(L^p)^6}$$

et finalement :

$$K \leq ||u||_M + ||u_d||_{(L^p)^3}$$

Or l'inégalité (2.37) est stricte dès que u_s et u_d ne sont pas colinéaires, c'est à dire dès que u_d n'est pas nul. Autrement dit : lorsque l'inégalité de Korn 2.35 est valide ($p > 1$ et frontière lipschitzienne) son premier membre est inférieur à la norme des mécaniciens et strictement inférieur lorsque u_d n'est pas nul ; on peut donc choisir $C_M = C_K$.

Cas de la plasticité

P. Suquet [46] a montré qu'en plasticité du solide tridimensionnel le "bon" espace $\mathbb{U}$ est celui qu'il nomme $BD(\Omega)$ c'est à dire celui des champs u de $L^1(\Omega)^3$ tels que $\nabla_s u$ appartienne à l'espace $\mathbb{E} = \mathscr{M}$ des mesures bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^6$ et dont le support est l'adhérence de Ω. L'espace $BD(\Omega)$ est alors muni de la norme

$$||u||_{BD} = ||u||_{(L^1)^3} + ||\nabla_s u||_{\mathscr{M}}$$

qui en fait un Banach non réflexif.

En choisissant pour espaces $\mathbb{F}$ et $\mathbb{S}$ les duaux respectifs de $\mathbb{U}$ et de $\mathbb{E}$ les topologies de la norme sur ces derniers sont compatibles avec la dualité ; on retrouve donc, malgré l'absence de réflexivité, les éléments qui conduisent au théorème 2.3. La norme des mécaniciens :

$$||u||_M = ||u_s||_{(L^1)^3} + ||\nabla_s u||_{\mathscr{M}}$$

est donc équivalente à $||u||_{BD}$.

Remarques

- 1. Pour $p > 1$ et dans le cas du solide tridimensionnel, on peut donner une démonstration directe du théorème 2.3 en utilisant les inégalités de Poincaré-Wirtinger et de Nečas. On peut aussi en construire une démonstration directe pour les plaques de Kirchhoff et le Sobolev adéquat ; le chemin n'est pas des plus simples mais surtout les inégalités précédentes ne sont démontrées que pour $p > 1$ et dans le cas d'une frontière lipschitzienne.
- 2. Il semble que Campanato ait obtenu en 1959 des résultats analogues pour des équations aux dérivées partielles linéaires et elliptiques très générales ([7], [8]).

2.5 Différentiabilité faible et stationnarité

Nous considérons dans tout ce paragraphe une fonction f définie sur $\mathbb{X}$ et à valeurs réelles, ce qui se note classiquement $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$.

Définition 2.19.
On nomme dérivée directionnelle de la fonction f en $x \in \mathbb{X}$ dans la direction $u \in \mathbb{X}$ la limite éventuelle :

$$f'(x,u) = lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x+\lambda u) - f(x)}{\lambda} \tag{2.38}$$

Notons qu'on prend la limite pour des λ décroissants afin de distinguer les deux demi-droites orientées par u et par $-u$. Lorsque, par exemple, $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ cette précaution permet de considérer les dérivées à droite et à gauche comme directionnelles.

On montre très aisément que :

Proposition 2.29.
La dérivée directionnelle est positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire que :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ : f'(x, ru) = r f'(x,u) \tag{2.39}$$

Définition 2.20. ***Gradient faible***
Soient la dualité $(\mathbb{X}, \langle x,y \rangle, \mathbb{Y})$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$; on dit que $y \in \mathbb{Y}$ est un gradient faible de f en x si

$$\forall\, u \in \mathbb{X} \ : \ f'(x,u) = \langle u, y \rangle \tag{2.40}$$

et, comme la dualité sépare $\mathbb{Y}$, ce gradient, noté $\nabla f(x)$, est unique. [11]

Les règles de dérivation sont identiques à celles d'un gradient ordinaire.

On démontre sans difficulté la propriété suivante :

Proposition 2.30. ***Formes quadratiques***
Soit A une application linéaire de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. La forme quadratique :

$$x \in \mathbb{X} \mapsto Q(x) = \langle x, Ax \rangle$$

11. Attention à ne pas confondre ce nabla : "∇" avec le symbole "$\triangledown$" que l'analyse convexe utilise pour l'inf-convolution.

a pour dérivée directionnelle :

$$Q'(x,u) = \langle u, Ax\rangle + \langle x, Au\rangle$$

Elle est faiblement différentiable si et seulement si A admet une transposée (cf. 2.3.4) et dans ce cas :

$$\nabla Q(x) = (A + A^t)x \tag{2.41}$$

Plaçons-nous maintenant dans la situation de dualité à quatre espaces illustrée par la figure 2.1 et considérons la fonctionnelle :

$$v \in \mathbb{U} \mapsto g(v) = f(\mathscr{D}v) \in \mathbb{R}$$

où $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{E}}$ est différentiable, comme par exemple l'énergie élastique associée à la déformation $\mathscr{D}v$. On calcule facilement son gradient :

$$\nabla g(v) = \mathscr{D}^t \nabla f(\mathscr{D}v) \tag{2.42}$$

qui étend au gradient le résultat classique sur la dérivation des fonctions composées.

On établit enfin le résultat suivant :

Proposition 2.31. ***Stationnarité d'une restriction***
Soient :

- $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{X}}$ *une fonctionnelle faiblement différentiable sur* $\mathbb{X}$,
- $\mathbb{X}_1$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{X}$ *mis en dualité avec le quotient* $\mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o$,
- f_1 *la restriction de* f *à* $\mathbb{X}_1$,
- Q *l'application canonique de* $\mathbb{Y}$ *sur* $\mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o$,

alors f_1 *est faiblement différentiable et :*

$$\forall x \in \mathbb{X}_1 \ \nabla f_1(x) = Q\nabla f(x) \in \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o \tag{2.43}$$

En particulier f_1 *est stationnaire en* x *si et seulement si* $\nabla f(x) \in \mathbb{X}_1^o$.

En effet, par définition du gradient et de la dualité quotient (cf.2.25) :

$$\forall u \in \mathbb{X}_1 \ : \ lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda u) - f(x)}{\lambda} = \langle u, \nabla f(x)\rangle = \langle u, Q\nabla f(x)\rangle_1$$

ce qui établit (2.43). Enfin l'équivalence :

$$Q\nabla f(x) = 0 \iff \nabla f(x) \in \mathbb{X}_1^o$$

achève cette facile démonstration.

Comme nous le verrons dans un autre chapitre l'analyse convexe généralise la notion de différentiabilité faible à celle de sous-différentiabilité.

Chapitre 3

Opérations algébriques en mécanique des structures

3.1 Éléments mécaniques et lois d'effort

3.1.1 Introduction

Dans la pratique une structure est une collection de pièces détachées assemblées par des liaisons et l'utilisateur ne peut intervenir que sur un sous-ensemble des paramètres de liberté de cet assemblage. Les opérations de produit, de quotient droit et de quotient gauche schématisent ces diverses étapes de la pratique dans le cadre des transformations géométriques infinitésimales.

- Chacune des pièces détachées est un "élément mécanique".

- Leur collection constitue un "élément mécanique produit" ; à ce stade les liaisons qui assurent l'assemblage sont nécessairement explicites.

- L'opération qui consiste à rendre implicites certaines liaisons sans frottement est ce que nous nommons "quotient droit" : le nouvel espace des efforts est le quotient de l'ancien par le sous-espace vectoriel engendré par les efforts de liaison ainsi éliminés [1].

- Ne prendre en compte que certains paramètres de liberté (ce qui correspond à la "méthode frontale" ou encore à la "sous-structuration") revient à prendre pour nouvel espace des déplacements le quotient de l'ancien par celui qu'engendrent les autres paramètres de liberté : c'est ce que nous appelons le "quotient gauche" [2].

1. quotient "droit" parce que l'espace des efforts est situé à droite dans nos notations de la dualité
2. quotient "gauche" parce que l'espace des déplacements est situé à gauche dans nos notations de la dualité

La structure est elle-même un élément mécanique qu'on modifie par ces quotients.

Remarque

Nous avions introduit ces notions simples dès 1971 ([28], [29]). L'idée directrice est d'aller le plus loin possible dans la mise en évidence des propriétés algébriques, communes à toutes les structures, avant d'entrer, le plus tard possible, dans les considérations d'analyse fonctionnelle qui dépendent de la loi de comportement envisagée.

3.1.2 Quelques définitions

On commence donc par une définition toute simple :

Définition 3.1. ***Élément mécanique***
On appellera "élément mécanique" $\mathscr{E} = (\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_x, \mathbb{Y})$ une dualité séparante de deux espaces vectoriels dont le premier est nommé conventionnellement "espace cinématique" (ou "espace géométrique") et le second "espace des efforts" (ou "espace sthénique").

Le choix de $\mathbb{X}$ peut être très varié en fonction des problèmes : il peut effectivement s'agir de déplacements ou de déformations au sens usuel, mais aussi des dérivées de ces variables par rapport au temps. Rappelons que nous restons dans le cadre des *petites transformations géométriques* ; ainsi l'espace $\mathbb{X}$ est-il à la fois celui des déplacements et celui des vitesses en sorte qu'*échappent à la définition précédente les lois d'effort qui font intervenir les uns et les autres.* C'est en particulier le cas des lois de viscoélasticité ou d'élasto-plasticité. On peut combler cette lacune conceptuelle en utilisant pour $\mathbb{X}$ et pour $\mathbb{Y}$ des espaces d'histoires de la géométrie et des efforts.

Par exemple si l'on considère la dualité $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathbb{F})$ entre un espace de déplacements au sens usuel et un espace d'efforts, et si T est un intervalle de temps, on peut considérer l'espace $\mathbb{X} = \tilde{\mathbb{U}}$ des histoires $t \in T \mapsto \tilde{u}(t) \in \mathbb{U}$ placé en dualité avec l'espace $\mathbb{Y} = \tilde{\mathbb{F}}$ des histoires $t \in T \mapsto \tilde{f}(t) \in \mathbb{F}$ par la forme bilinéaire :

$$(\tilde{u}, \tilde{f}) \in \tilde{\mathbb{U}} \times \tilde{\mathbb{F}} \mapsto \langle \tilde{u}, \tilde{f} \rangle_{\tilde{u}} = \int_{(t_1,t_2)} \langle \tilde{u}(t), \tilde{f}(t) \rangle_u \, dt \tag{3.1}$$

Les notions d'éléments produits ou quotients que nous allons introduire sont toutefois indépendantes de la nature des éléments mécaniques en cause.

Rappelons qu'une multi-application (ou correspondance multivoque) $\mathscr{F}$:

$$x \in \mathbb{X} \mapsto \mathscr{F}(x) \subset \mathbb{Y}$$

peut aussi être définie par son graphe $G(\mathscr{F})$:

$$G(\mathscr{F}) = \{(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} / y \in \mathscr{F}(x)\}$$

qui est aussi le graphe de son inverse $\mathscr{F}^{-1}$.

Définition 3.2. *Lois d'effort*
On appellera "loi d'effort" sur $\mathscr{E}$ une multi-application :

$$\mathscr{F} \ : \ x \in \mathbb{X} \mapsto \mathscr{F}(x) \subset \mathbb{Y} \tag{3.2}$$

La somme (ou "somme droite") de n lois d'effort est définie par la formule

$$(\mathscr{F}_1 + ... + \mathscr{F}_n)(x) = \mathscr{F}_1(x) + ... + \mathscr{F}_n(x) \tag{3.3}$$

tandis que, de façon duale, la "somme gauche" est définie par la somme des inverses :

$$(\mathscr{F}_1 \triangle ... \triangle \mathscr{F}_n)(x) = \left\{ y \in \mathbb{Y} / x \in \mathscr{F}_1^{-1}(y) + ... + \mathscr{F}_n^{-1}(y) \right\} \tag{3.4}$$

3.1.3 Équilibre d'un élément mécanique

Considérons un élément mécanique soumis à des lois d'effort de somme $\mathscr{F}$. On pose la définition suivante :

Définition 3.3. *On dit qu'un élément mécanique $\mathscr{E}$ soumis à des lois d'effort de somme $\mathscr{F}$ est en équilibre au point x si :*

$$0 \in \mathscr{F}(x) \tag{3.5}$$

On notera qu'il n'y a pas d'équilibre lorsque $\mathscr{F}(x)$ est vide.

Exemple d'un effort donné et d'un effort de liaison

Soient $\mathbb{I}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{X}$, $\mathbb{I}^o$ son orthogonal dans $\mathbb{Y}$, $x_1 \in \mathbb{X}$ et $f_1 \in \mathbb{Y}$ deux points donnés. Considérons les deux lois d'effort $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ données par :

$$\mathscr{F}_1(x) = \{f_1\} \tag{3.6}$$

$$\mathscr{F}_2(x) = \begin{cases} \mathbb{I}^o \text{ si } x \in x_1 + \mathbb{I} \\ \emptyset \text{ si } x \notin x_1 + \mathbb{I} \end{cases} \tag{3.7}$$

$\mathscr{F}_1$ est une loi d'effort donné tandis que $\mathscr{F}_2$ est la loi de liaison affine sans frottement qui impose à x de rester dans $x_1 + \mathbb{I}$, avec un effort de liaison arbitraire dans $\mathbb{I}^o$. La condition d'équilibre 3.5 se réduit bien à la formulation classique

$$x \in x_1 + \mathbb{I} \, , \exists f_2 \in \mathbb{I}^o \ : \ f_1 + f_2 = 0 \tag{3.8}$$

soit plus simplement, puisque $\mathbb{I}^o$ est vectoriel :

$$x \in x_1 + \mathbb{I} \text{ et } f_1 \in \mathbb{I}^o \tag{3.9}$$

On note que cette condition d'équilibre 3.8 sur la somme des lois d'effort implique les deux aspects, cinématique et sthénique.

3.1.4 Configurations déformées et lois d'effort intérieur

La notion usuelle d'effort intérieur, duale de celle de déformation, n'a pas de sens précis dans la tendance axiomatique adoptée dans ce chapitre. Ce sont plutôt celles de "configuration non déformée" (c'est-à-dire obtenue par un "déplacement d'ensemble" dans la terminologie usuelle) et de loi d'effort intérieur qui nous semblent fondamentales. On peut en effet emprunter deux voies différentes :

- La première consiste à définir un espace vectoriel $\mathbb{E}$ des déformations et une application linéaire $\mathscr{D} : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{E}$ dont le noyau $\mathbb{X}_s = ker(\mathscr{D})$ est l'espace des déplacements d'ensemble, ou plutôt l'espace des déplacements sans déformations. C'est la voie choisie lorsque des considérations physiques guident le choix de la nature des déformations et donc celui de l'espace $\mathbb{E}$. Elle conduit au diagramme de dualité à quatre espaces introduit au chapitre précédent dans la définition 2.13.
  On peut d'ailleurs considérer, en accord avec la définition 3.1, que ce diagramme présente deux éléments mécaniques distincts relié par les opérateurs de déformation et d'équilibre.

- La seconde, que nous adoptons ici, consiste à définir directement l'espace $\mathbb{X}_s$ des configurations non déformées.
  Le choix et la dimension de $\mathbb{X}_s$ sont arbitraires en l'absence d'un référentiel qui permette de définir les déplacements au sens des transformations géométriques dans un espace euclidien. [3]

Définition 3.4. ***Configurations déformées***
On choisit un sous espace vectoriel $\mathbb{X}_s \subset \mathbb{X}$ pour espace des "configurations non déformées" ; on nomme alors "espace des configurations déformées" le quotient $\mathbb{X}_d = \mathbb{X}/\mathbb{X}_s$.

Dans ce qui suit on note $\mathscr{Q}$ l'application canonique de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{X}_d$.

Définition 3.5. ***Lois normales à un sous-espace vectoriel et lois d'effort intérieur***
On dit qu'une loi d'effort $\mathscr{F}$ sur l'élément mécanique $\mathscr{E}$ est normale au sous-espace vectoriel $\mathbb{X}_1 \in \mathbb{X}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{X} \ : \ \mathscr{F}(x) \subset \mathbb{X}_1^o \tag{3.10}$$

$$\forall x \in \mathbb{X} \ \forall x' \in \mathbb{X}_1 \ : \ \mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(x + x') \tag{3.11}$$

On dit qu'une loi d'effort $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est une loi d'effort intérieur si elle est normale à l'espace $\mathbb{X}_s$ des configurations non déformées.

On note que :
- la loi de liaison affine sans frottement 3.7 est normale à $\mathbb{I}$,
- si $\mathscr{F}$ est une loi d'effort intérieur elle est équivalente à la loi $\mathscr{F}_d$:

$$\mathscr{F}_d \ : \ q \in \mathbb{X}_d \mapsto \mathscr{F}_d(q) = \mathscr{F}(x) \subset \mathbb{X}_s^o \ , \ x \in \mathscr{Q}^{-1}(q) \tag{3.12}$$

puisque $\mathscr{F}(x)$ est indépendant du représentant x de q dans $\mathbb{X}$.

3. Par exemple on pourrait envisager un fil élastique parfait et ne considérer comme déformation que son allongement (fonction de l'abscisse curviligne) : $\mathbb{X}_s$ serait alors de dimension infinie.

Cette équivalence entre $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_d$ incite à se demander se demander s'il y a équivalence entre une loi d'effort intérieur sur l'élément mécanique $\mathscr{E}$ et une loi de comportement entre les espaces de déformations et de contraintes dont on peut le compléter. C'est l'objet de l'alinéa suivant.

3.1.5 Lois d'effort intérieur et lois de comportement

Dans la pratique, les lois d'effort intérieur sont engendrées par des lois de comportement définies dans le cadre de la dualité à quatre espaces introduite dans la définition 2.13. Nous en reprenons donc les notations : $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_s$,$\mathbb{U}_d$ et $\mathbb{F}$ remplacent respectivement $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_s$, $\mathbb{X}_d$ et $\mathbb{Y}$.

On choisit un espace de déformations $\mathbb{E}$ et un espace de contraintes $\mathbb{S}$ placés en dualité séparante par la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ du travail virtuel.

On choisit ensuite une application linéaire $\mathscr{D} : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{E}$ nommée "opérateur-déformation", de noyau $\mathbb{U}_s$, continue pour les dualités et de transposée $\mathscr{D}^t$. Dans les écritures à venir $\mathscr{D}^{-1}$ et $\mathscr{D}^{t-1}$ désignent les multi-applications inverses respectives de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{D}^t$:

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{D}^{-1}(\varepsilon) &\iff u + \mathbb{U}_s = \mathscr{D}^{-1}(\varepsilon) \\ s \in \mathscr{D}^{t-1}(f) &\iff s + ker\mathscr{D}^t = \mathscr{D}^{t-1}(f) \end{aligned}$$

Soient $\mathscr{Q}^\dagger$ et $\mathscr{D}^\dagger$ deux pseudo-inverses, l'une de $\mathscr{Q}$ l'autre de $\mathscr{D}$, pour le même supplémentaire $\mathbb{U}'_s$ de $\mathbb{U}_s$ dans $\mathbb{U}$. Le point 3 de la proposition 2.4 montre que $\mathbb{U}'_s$ est isomorphe à $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ d'une part, et à $\mathbb{U}_d$ d'autre part. L'application

$$\Delta = \mathscr{D} \circ \mathscr{Q}^\dagger$$

est donc un isomorphisme de $\mathbb{U}_d$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$, d'où la proposition :

Proposition 3.1.
L'espace quotient $\mathbb{U}_d$ et l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ sont isomorphes

Observons maintenant le diagramme 3.1

FIGURE 3.1 – Loi de comportement $\mathscr{K}$ et lois d'effort intérieur équivalentes

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{U}_d = \mathbb{U}/\mathbb{U}_s & \mathscr{F}_d \longmapsto & \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \\ \mathscr{Q}\uparrow\downarrow\mathscr{Q}^\dagger & & \mathscr{I}^\dagger\uparrow\downarrow\mathscr{I} \\ \mathbb{U}_s \oplus \mathbb{U}_d = \mathbb{U} & \mathscr{F} \longmapsto & \mathbb{F} \supset \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \\ \mathscr{D}\downarrow & & \uparrow\mathscr{D}^t \\ \mathscr{D}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{E} & \mathscr{K} \longmapsto & \mathbb{S} \supset \mathscr{D}(\mathbb{U})^{\mathrm{o}} \end{array}$$

C'est le diagramme 2.3 du paragraphe 2.3.5 auquel nous avons ajouté la pseudo-inverse $\mathscr{I}^\dagger$ associée à $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ et remplacé les symboles des formes bilinéaires par ceux des multiapplications $\mathscr{F}_d$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{K}$.

Alors :

$$\Delta^t = \mathscr{I}^\dagger \circ \mathscr{D}^t$$

Comme pour les lois d'efforts sur $\mathscr{E}$ on définit les lois de comportement comme des multi-applications :

Définition 3.6. ***Loi de comportement***
On nommera loi de comportement toute multi-application $\mathscr{K}$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{S}$.

Soit $\mathscr{K}$ une loi de comportement ; on a l'implication :

$$\mathscr{F} = \mathscr{D}^t \circ \mathscr{K} \circ \mathscr{D} \Rightarrow \mathscr{K} = \mathscr{D}^{t-1} \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{D}^{-1} \tag{3.13}$$

qui permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.2. ***Loi d'effort intérieur engendrée par une loi de comportement***
Si $\mathscr{K}$ est une loi de comportement elle équivaut à la loi d'effort intérieur

$$\mathscr{F} = \mathscr{D}^t \circ \mathscr{K} \circ \mathscr{D} \tag{3.14}$$

Si la loi d'effort intérieur $\mathscr{F}$ prend ses valeurs dans $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ (condition évidemment satisfaite dès que $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est fermé donc égal à $\mathbb{U}_s^o$) l'implication 3.13 est une équivalence et l'on peut énoncer :

Proposition 3.3. ***Loi de comportement engendrée par une loi d'effort intérieur***
Si la loi d'effort intérieur $\mathscr{F}$ prend ses valeurs dans $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ elle équivaut à la loi de comportement :

$$\mathscr{K} = \mathscr{D}^{t-1} \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{D}^{-1} \text{ ou encore } \mathscr{K} = \Delta^{t-1} \circ \mathscr{F}_d \circ \Delta^{-1} \tag{3.15}$$

où :

$$\mathscr{F}_d = \mathscr{I}^\dagger \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{Q}^\dagger \tag{3.16}$$

3.1.6 Produit d'éléments mécaniques

Dans ce qui suit on note x_k la $k^{\text{ième}}$ composante d'un point x du produit cartésien $\prod_{k=1}^K \mathbb{X}_k$.

Définition 3.7.
Soit $\mathscr{E}_k$ une famille de K éléments mécaniques $\mathscr{E}_k = (\mathbb{X}_k, \langle\cdot,\cdot\rangle_k, \mathbb{Y}_k)$; on nomme élément mécanique produit des $\mathscr{E}_k$:

$$\mathscr{E} = (\mathbb{X}, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle, \mathbb{Y}) \tag{3.17}$$

où :

$$\begin{gathered} \mathbb{X} = \prod_{k=1}^K \mathbb{X}_k \ ; \ \mathbb{Y} = \prod_{k=1}^K \mathbb{Y}_k \\ (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mapsto \langle\langle x,y\rangle\rangle = \sum_{k=1}^K \langle x_k, y_k\rangle_k \end{gathered} \tag{3.18}$$

Si chacun des $\mathscr{E}_k$ est soumis à une loi d'effort $\mathscr{F}_k$ on nomme loi d'effort produit :

$$\mathscr{F}(x) = \left(\prod_{k=1}^K \mathscr{F}_k\right)(x) = \prod_{k=1}^K \mathscr{F}_k(x_k) \tag{3.19}$$

Un élément mécanique produit se présente donc comme une collection de pièces détachées qu'on assemblera par une liaison affine sans frottement définie par une variété affine $x_o + \mathbb{I}$. L'opération qui rend cette liaison implicite est l'un des objets du paragraphe suivant.

3.2 Quotient droit et quotient gauche

Introduisons maintenant les notions d'éléments mécaniques quotients ; elles correspondent à une réduction du degré de liberté de la structure en échange d'une perte d'information volontaire, sur les efforts (quotient droit) ou sur les variables géométriques (quotient gauche), ou sur les uns et les autres comme le double quotient qui fera l'objet du paragraphe suivant.

Définition 3.8. ***Éléments quotients et lois d'effort quotients***
On considère un élément mécanique $\mathscr{E} = (\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_x, \mathbb{Y})$ et deux sous-espaces vectoriels fermés $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}$. On nomme

– *élément mécanique quotient droit de $\mathscr{E}$ par $\mathbb{X}_1^o$:*

$$\mathscr{E}_I = (\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_I, \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o) \tag{3.20}$$

– *élément mécanique quotient gauche $\mathscr{E}$ par $\mathbb{Y}_1^o$:*

$$\mathscr{E}_J = (\mathbb{X}/\mathbb{Y}_1^o, \langle\cdot,\cdot\rangle_J, \mathbb{Y}_1) \tag{3.21}$$

Il s'agit donc de dualités quotients qui relèvent de la définition 2.14. On note respectivement $\mathscr{Q}_{X_1^o}$ et $\mathscr{Q}_{Y_1^o}$ les applications canoniques correspondantes.

Qu'en est-il des lois d'effort ?

Définition 3.9.
Soit $\mathscr{F}$ une loi d'effort sur $\mathscr{E}$; on nomme lois d'effort quotients de $\mathscr{F}$ les multi-applications $\mathscr{F}_{X_1^o}$ et $\mathscr{F}_{Y_1^o}$ définies par leur graphe G :

$$G(\mathscr{F}_{X_1^o}) = \left\{(x,\phi) \in \mathbb{X}_1 \times (\mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o)/\phi \in \mathscr{Q}_{X_1^o}(\mathscr{F}(x))\right\} \tag{3.22}$$

$$G(\mathscr{F}_{Y_1^o}) = \left\{(\xi,y) \in (\mathbb{X}/\mathbb{Y}_1^o) \times \mathbb{Y}_1/\xi \in \mathscr{Q}_{Y_1^o}(\mathscr{F}^{-1}(y))\right\} \tag{3.23}$$

Le quotient droit est une opération banale lorsqu'on rend implicite une liaison sans frottement définie par le sous-espace vectoriel $\mathbb{X}_1$ [4]. On perd l'information sur l'effort de liaison qui disparaît dans le quotient.

Le quotient gauche est implicitement utilisé par les techniques de sous-structuration : on ne conserve que les déplacements des éléments qui relient une sous-structure à l'extérieur, en dualité avec les efforts exercés sur ces éléments.

Ces deux exemples d'utilisation des quotients sont assez banals. Tout aussi fréquentes sont les interventions des quotients dans le passage du modèle tridimensionnel aux modèles simples de la Résistance des Matériaux. Ainsi les hypothèses "cinématiques", comme celle de Bernoulli pour les poutres ou celle de

4. Notons que, si la liaison est définie par une variété affine $x_o + \mathbb{X}_1$, on utilisera le quotient de la loi translatée $\mathscr{F}(\cdot - x_o)$.

Kirchhoff pour les plaques, doivent-elles être prises pour des liaisons sans frottement, artificielles certes, mais qui relèvent du quotient droit. De façon duale on est amené à poser des hypothèses "sthéniques", comme celle des contraintes planes dans les deux exemples précédents ; l'annulation de certaines composantes de contrainte conduit à perdre l'information sur les composantes de déplacement correspondantes ; ce type d'option relève alors du quotient gauche.

À la lumière des exemples des poutres et des plaques on note que les deux quotients peuvent être utilisés successivement ou simultanément : c'est alors la notion de double quotient qui s'introduit naturellement.

3.3 Le double quotient

On considère l'élément mécanique $\mathscr{E} = (\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$ et deux sous-espaces vectoriels fermés $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}$. Ceux-ci correspondent aux variables cinématiques et sthéniques que l'on souhaite conserver.

La figure 3.2 décrit une première approche naturelle qu'on va devoir simplifier.

FIGURE 3.2 – Doubles quotients

Var.		*Dualités*		*Var.*
x_4	$\mathbb{X}_4 = \mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1)$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_4$	$\mathbb{Y}_4 = \mathbb{Y}_1/\mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1)^{o,2}$	y_4
	$\mathscr{I}_4 \downarrow$		$\uparrow \mathscr{Q}_4$	
x'	$\mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1) \subset \mathbb{X}' = \mathbb{X}/\mathbb{Y}_1^o$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$	$\mathbb{Y}_1$	y_1
	$\mathscr{Q}_2 \uparrow$		$\downarrow \mathscr{I}_2$	
x	$\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$	$\langle\cdot,\cdot\rangle$	$\mathbb{Y} \supset \mathbb{Y}_1$	y
	$\mathscr{I}_1 \uparrow$		$\downarrow \mathscr{Q}_1$	
x_1	$\mathbb{X}_1$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$	$\mathbb{Y}' = \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o \supset \mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)$	y'
	$\mathscr{Q}_3 \downarrow$		$\uparrow \mathscr{I}_3$	
x_3	$\mathbb{X}_3 = \mathbb{X}_1/\mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)^{o,1}$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_3$	$\mathbb{Y}_3 = \mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)$	y_3

Elle schématise [5] le passage de $\mathscr{E}$ à :

1. $\mathscr{E}_3 = (\mathbb{X}_3, \langle\cdot,\cdot\rangle_3, \mathbb{Y}_3)$ obtenu par le quotient droit $\mathbb{Y}' = \mathscr{Q}_1(\mathbb{Y})$ de $\mathbb{Y}$ par $\mathbb{X}_1^o$ puis par le quotient gauche de $\mathbb{X}_1$ par le polaire de $\mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)$ pour la dualité quotient entre $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{Y}' = \mathscr{Q}_1(\mathbb{Y})$. La notation $\mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)^{o,1}$ désigne le polaire de $\mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)$ pour la dualité 1.
2. $\mathscr{E}_4 = (\mathbb{X}_4, \langle\cdot,\cdot\rangle_4, \mathbb{Y}_4)$ obtenu de façon analogue en commençant par le quotient gauche. La notation $\mathscr{Q}_2(\mathbb{Y}_1)^{o,2}$ désigne le polaire de $\mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1)$ pour la dualité 2.

5. $\mathscr{Q}_k$ désigne une application canonique ; sa transposée est l'injection $\mathscr{I}_k$.

Deux questions se posent alors :

$\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ sont-ils identiques ?

Si oui, sont-ils identiques à l'élément mécanique $\mathscr{E}_{dq} = (\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y}_1)$ que l'on souhaiterait créer ?

On va voir que la réponse est toujours oui à la première ; elle est aussi oui à la seconde si l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse 3.1. ***Hypothèse de supplémentarité***
$\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{Y}_1$ vérifient les conditions suivantes :

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{Y}_1^o \tag{3.24}$$
$$\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{X}_1^o \tag{3.25}$$

Les réponses aux questions précédentes découlent de la proposition suivante :
Proposition 3.4.
On a les égalités :

$$\mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1)^{o,2} = \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{X}_1^o \tag{3.26}$$
$$\mathscr{Q}_1(\mathbb{Y}_1)^{o,1} = \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^o \tag{3.27}$$

En effet on a pour la première :

$$\mathscr{Q}_2(\mathbb{X}_1)^{o,2} = \{y \in \mathbb{Y}_1 / \forall x \in \mathbb{X}_1 \; 0 = \langle \mathscr{Q}_2(x), y\rangle_2 = \langle x, y\rangle\} = \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{X}_1^o$$

et de même pour la seconde égalité.

Proposition 3.5.
Les éléments mécaniques $\mathscr{E}_3$ et $\mathscr{E}_4$ sont identiques.

Soit en effet $x_1 \in \mathbb{X}_1$ un représentant commun à $x_4 = \mathscr{Q}_2(x_1) \in \mathbb{X}_4$ et à $x_3 = \mathscr{Q}_3(x_1) \in \mathbb{X}_3$. On écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_4(x_4) &= x_4 = \mathscr{Q}_2(x_1) \\
(\mathscr{Q}_2^{-1} \circ \mathscr{I}_4)(x_4) &= x_1 + \mathbb{Y}_1^o \\
(\mathscr{I}_1^{-1} \circ \mathscr{Q}_2^{-1} \circ \mathscr{I}_4)(x_4) &= x_1 + \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^o \\
(\mathscr{Q}_3 \circ \mathscr{I}_1^{-1} \circ \mathscr{Q}_2^{-1} \circ \mathscr{I}_4)(x_4) &= \mathscr{Q}_3(x_1) + \mathscr{Q}_3(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^o)
\end{aligned}$$

et d'après 3.27 : $\mathscr{Q}_3(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^o) = \{0\}$, en sorte que :

$$\mathscr{Q}_3 \circ \mathscr{I}_1^{-1} \circ \mathscr{Q}_2^{-1} \circ \mathscr{I}_4(x_4) = x_1$$

La multi-application

$$\mathscr{Q}_3 \circ \mathscr{I}_1^{-1} \circ \mathscr{Q}_2^{-1} \circ \mathscr{I}_4 \tag{3.28}$$

est donc une application ordinaire de $\mathbb{X}_4$ dans $\mathbb{X}_3$.

Dans le sens inverse on écrit en utilisant tout d'abord l'égalité (3.27) :

$$\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{Q}_3^{-1}(x_3) = x_1 + \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}}$$

puis :

$$\mathscr{Q}_2 \circ \mathscr{I}_1 \circ \mathscr{Q}_3^{-1}(x_3) = \mathscr{Q}_2(x_1) + \{0\} = x_4$$
$$\mathscr{I}_4^{-1} \circ \mathscr{Q}_2 \circ \mathscr{I}_1 \circ \mathscr{Q}_3^{-1}(x_3) = x_4$$

Comme lorsque x_1 parcourt $\mathbb{X}_1$ x_4 parcourt $\mathbb{X}_4$ tandis que x_3 parcourt $\mathbb{X}_3$ on en déduit que 3.28 est une bijection de $\mathbb{X}_4$ sur $\mathbb{X}_3$.

De même le produit de composition

$$\mathscr{I}_3^{-1} \circ \mathscr{Q}_1 \circ \mathscr{I}_2 \circ \mathscr{Q}_4^{-1} \tag{3.29}$$

est une bijection de $\mathbb{Y}_4$ sur $\mathbb{Y}_3$.

Il reste enfin à montrer l'égalité des dualités 3 et 4 ; on a par construction :

$$\langle x_4, y_4 \rangle_4 = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_3, y_3 \rangle_3$$

où $y_1 \in \mathbb{Y}_1$ désigne un représentant commun à $y_4 \in \mathbb{Y}_4$ et à $y_3 \in \mathbb{Y}_3$...
...ce qui achève la démonstration de la proposition 3.5.

Par construction les dualités $\mathscr{E}_4$ et $\mathscr{E}_3$ sont séparantes. En revanche la dualité $(\mathbb{X}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathbb{Y}_1)$ ne l'est pas dès que l'une des deux intersections $\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{X}_1^{\mathrm{o}}$ ou $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}}$ n'est pas réduite à $\{0\}$. Les vecteurs contenus dans ces intersections sont éjectés des quotients, ce qui n'était pas le but recherché.

L'hypothèse 3.1 simplifie beaucoup la situation.

Proposition 3.6. *Un double quotient idéal*
Si l'hypothèse de supplémentarité 3.1 est vérifiée alors les deux doubles quotients $\mathscr{E}_4$ et $\mathscr{E}_3$ s'identifient à l'élément mécanique $\mathscr{E}_1 = (\mathbb{X}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathbb{Y}_1)$.

En effet on note tout d'abord que $\mathbb{X}_1$ étant supplémentaire de $\mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}}$ il s'identifie (cf. proposition 2.1) au quotient $\mathbb{X}/\mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}}$ et donc à $\mathbb{X}_4$. Pour la raison analogue $\mathbb{Y}_1$ s'identifie au quotient $\mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^{\mathrm{o}}$ et donc à $\mathbb{Y}_3$. Comme les seconds membres des égalités 3.26 et 3.27 se réduisent à $\{0\}$ on a $\mathbb{X}_3 = \mathbb{X}_1$ et $\mathbb{Y}_4 = \mathbb{Y}_1$, ce qui achève la démonstration.

3.4 Deux exemples en dimension 3

On considère la dualité entre $\mathbb{R}^3$ et lui même et l'on note :

$$\mathbb{X} = \left\{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \ ; \ \mathbb{Y} = \left\{y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \tag{3.30}$$

Variante 1

On choisit les sous-espaces :

$$\mathbb{X}_1 = \{(\xi_1, \xi_2, 0)\} \ ; \ \mathbb{Y}_1 = \{0, \eta_2, \eta_3)\} \tag{3.31}$$

ce qui entraîne pour le double quotient droite-gauche, en identifiant un espace quotient au supplémentaire du sous-espace "diviseur" :

$$\mathbb{X}_1^{\mathrm{o}} = \{(0, 0, \eta_3)\} \tag{3.32a}$$
$$\mathbb{Y}' = \mathscr{Q}_1(\ \mathbb{Y}) = \{(\eta_1, \eta_2, 0)\} \tag{3.32b}$$
$$\mathbb{Y}_3 = \mathscr{Q}_1(\ \mathbb{Y}_1) = \{(0, \eta_2, 0)\} \tag{3.32c}$$
$$\mathscr{Q}_1(\ \mathbb{Y}_1)^{\mathrm{o},1} = \{(\xi_1, 0, 0)\} \tag{3.32d}$$
$$\mathbb{X}_3 = \{(0, \xi_2, 0)\} \tag{3.32e}$$

puis, pour le double quotient gauche-droite :

$$\mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}} = \{(\xi_1, 0, 0)\} \tag{3.33a}$$
$$\mathbb{X}' = \mathscr{Q}_2(\ \mathbb{X}) = \{(0, \xi_2, \xi_3)\} \tag{3.33b}$$
$$\mathbb{X}_4 = \mathscr{Q}_2(\ \mathbb{X}_1) = \{(0, \xi_2, 0)\} \tag{3.33c}$$
$$\mathscr{Q}_2(\ \mathbb{X}_1)^{\mathrm{o},2} = \{(0, 0, \eta_3)\} \tag{3.33d}$$
$$\mathbb{Y}_4 = \{(0, \eta_2, 0)\} \tag{3.33e}$$

On voit, dans cet exemple, que l'hypothèse de supplémentarité (3.1) n'est pas satisfaite puisque, bien au contraire : $\mathbb{X}_1^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{Y}_1$ et $\mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{X}_1$. Elle l'est trivialement dans l'exemple suivant.

Variante 2

On choisit les sous-espaces :

$$\mathbb{X}_1 = \{(\xi_1, \xi_2, 0)\} \ ; \ \mathbb{Y}_1 = \{\eta_1, \eta_2, 0)\} \tag{3.34}$$

alors :

$$\mathbb{X}_1^{\mathrm{o}} = \{(0, 0, \eta_3)\} \tag{3.35a}$$
$$\mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}} = \{(0, 0, \xi_3)\} \tag{3.35b}$$
$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{Y}_1^{\mathrm{o}} \tag{3.35c}$$
$$\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{X}_1^{\mathrm{o}} \tag{3.35d}$$
$$\mathbb{X}_3 = \mathbb{X}_4 = \mathbb{X}_1 \tag{3.35e}$$
$$\mathbb{Y}_3 = \mathbb{Y}_4 = \mathbb{Y}_1 \tag{3.35f}$$

3.5 Exemple de double quotient : la théorie des plaques de Kirchhoff

3.5.1 Introduction

Pour passer du modèle tridimensionnel à un modèle de plaque la théorie de Kircchoff pose deux hypothèses, la première cinématique la seconde sthénique :
1. les déformées des normales sont rectilignes et orthogonales à la déformée de la surface moyenne,
2. les contraintes sont planes, c'est-dire que les composantes $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ sont nulles.

On imagine donc que cela devrait correspondre à un quotient droit sur la dualité déplacements-efforts extérieurs $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathbb{F})$, à un quotient gauche sur la dualité déformations-contraintes $(\mathbb{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon, \mathbb{S})$ et donc finalement à un quotient double.

Dans la pratique les auteurs posent en une fois toutes les hypothèses précédentes, sans se préoccuper des aspects algébriques qu'elles impliquent. On peut ne voir, dans ce paragraphe, qu'un exercice de style en illustration du précédent.

Deux remarques toutefois :

1. Sans y prêter attention beaucoup de traités présentent deux hypothèses contradictoires : les normales sont indéformables, donc ε_{33} est nul, et, d'autre part, la contrainte σ_{33} est nulle. Ici on ne pose que la seconde, le quotient gauche rendant indifférente la valeur de ε_{33} ; ainsi les normales peuvent-elles s'allonger librement pour laisser place à un véritable état de contraintes planes.

2. Nous avons publié un article [34] dans lequel l'approche des plaques est fort différente : le déplacement est décomposé en la somme d'un déplacement "principal" qui vérifie les hypothèses cinématiques, et d'un déplacement complémentaire de valeur moyenne nulle sur la normale. Les seules hypothèses concernent les charges dont on prend une représentation commode, en appliquant le principe de Saint-Venant : parmi tous les systèmes de charges qui présentent les mêmes éléments de réduction en tout point de la surface moyenne on choisit celui qui convient le mieux à la suite des calculs. On n'utilise donc que le seul quotient gauche.

3.5.2 Géométrie et coordonnées

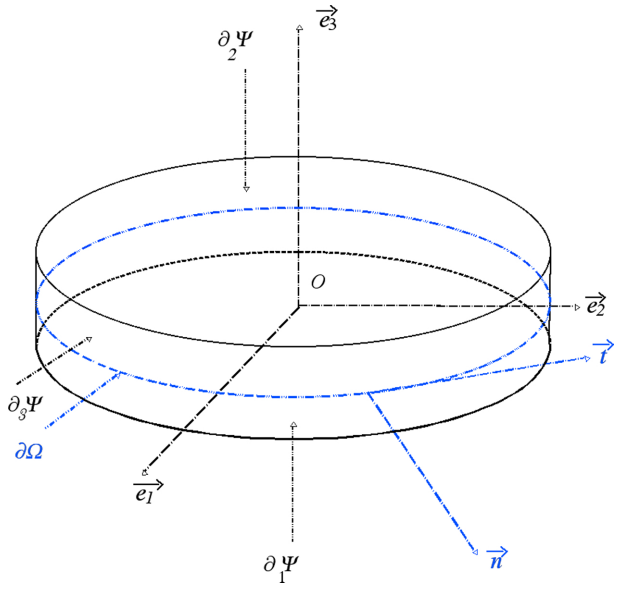
L'espace euclidien tridimensionnel est rapporté aux coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, z). On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ les vecteurs unitaires des axes. Nous limitant ici à l'acception étroite du terme [6] nous nommerons plaque un solide qui, dans l'état de référence, occupe un volume Ψ du type :

$$\Psi = \Omega \times]-h/2, h/2[\tag{3.36}$$

où l'épaisseur h est une constante, Ω un domaine ouvert borné du plan (x_1, O, x_2), et de frontière $\partial\Omega$. C'est le cas de la plaque représentée par la figure 3.3.

6. plus généralement on considère des solides d'épaisseur variable, symétriques par rapport au plan (x_1, O, x_2)

FIGURE 3.3 – Plaque plane et coordonnées



La frontière $\partial\Psi$ du domaine Ψ est la réunion des faces inférieure $\partial_1\Psi$, supérieure $\partial_2\Psi$ et latérale $\partial_3\Psi$:

$$\partial_1\Psi = \left\{(x_1,x_2,z) \in \mathbb{R}^3/(x_1,x_2) \in \Omega \text{ et } z = -h/2\right\} \tag{3.37}$$

$$\partial_2\Psi = \left\{(x_1,x_2,z) \in \mathbb{R}^3/(x_1,x_2) \in \Omega \text{ et } z = h/2\right\} \tag{3.38}$$

$$\partial_3\Psi = \{(x_1,x_2) \in \partial\Omega \text{ et } |z| \in]-h/2,h/2[\} \tag{3.39}$$

On notera $\vec{n}$ le vecteur normale extérieure à $\partial\Omega$, $\vec{t}$ le vecteur unitaire tangent choisi en sorte que la base $\left(\vec{n},\vec{t},\vec{e}_3\right)$ soit orthonormée directe. On notera encore s l'abscisse curviligne sur $\partial\Omega$.

3.5.3 Notations

On notera, pour une dimension ν égale à 2 ou 3 :

E^ν l'espace euclidien de dimension ν,

$\mathbb{T}_\nu$ l'espace des tenseurs symétriques du deuxième ordre sur l'espace euclidien E^ν,

$\mathbb{V}_\nu$ l'espace des vecteurs de E^ν

Si $\vec{\vec{\varepsilon}} \in \mathbb{T}_3$ on note $\vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}$ la partie plane de ce tenseur, de composantes $\varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}$ pour les valeurs 1 et 2 de i et de j.

De même si Δ désigne un opérateur différentiel sur E^3 on notera $\Delta^{(2)}$ l'opérateur de même nom sur E^2 ; ainsi pour la divergence :

$$div^{(2)}\vec{u} = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2$$

– Le symbole "**.**" désigne indifféremment, le contexte levant toute ambiguïté, un produit scalaire de deux vecteurs, ou encore le produit contacté

d'un tenseur par un vecteur, ou encore le double produit contracté de deux tenseurs. Ainsi, avec la convention de sommation des indices répétés :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_i v_j \ ; \ (\vec{\vec{T}}\,.\,\vec{v})_i = T_{ij} v_j \ ; \ (\vec{v}\,.\,\vec{\vec{T}})_i = T_{ji} v_j$$
$$\vec{u}\,.\,\vec{\vec{T}}\,.\,\vec{v} = u_i T_{ij} v_j \ ; \ \vec{\vec{S}}\,.\,\vec{\vec{T}} = S_{ij} T_{ji}$$

On reprend les notations déjà utilisées pour décrire la dualité à quatre espaces dans le cas du solide tridimensionnel et, pour la commodité du lecteur, la figure 3.4 ci-dessous reproduit le diagramme de dualité à quatre espaces 2.1 en tenant compte, par anticipation, des résultats des chapitres suivants (propositions 4.2 et 5.3) qui assurent que $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ et $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ sont fermés (figure 3.4).

FIGURE 3.4 – Dualité à quatre espaces pour le solide tridimensionnel

Var.		*Dualités*		*Var.*
$\vec{U}$	$ker(\mathscr{D}) \subset \mathbb{U}$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_u$	$\mathbb{F} \supset ker(\mathscr{D}^t)^o = (\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$	$(\vec{f},\vec{F})$
	$\mathscr{D}\downarrow$		$\uparrow\mathscr{D}^t$	
$\vec{\vec{\varepsilon}}$	$\mathscr{D}(\mathbb{U}) = (ker\mathscr{D}^t)^o \subset \mathbb{E}$	$\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$	$\mathbb{S} \supset \mathscr{D}(\mathbb{U})^o = ker\mathscr{D}^t$	$\vec{\vec{\sigma}}$

3.5.4 Efforts extérieurs ou charges

Les "charges" (ou efforts extérieurs) sur un solide tridimensionnel sont en général représentées par une densité volumique de force $\vec{f}$ exercée dans Ψ et par une densité surfacique de force $\vec{F}$ exercée sur sa frontière. Compte tenu de la géométrie particulière du solide étudié les charges sont mises sous la forme :

$$\varphi = \left(\vec{f}, \vec{F^1}, \vec{F^2}, \vec{F^3}\right) \tag{3.40}$$

où les densités surfaciques $\vec{F^1}$, $\vec{F^2}$ et $\vec{F^3}$ sont exercées respectivement sur les surfaces $\partial_1\Psi$, $\partial_2\Psi$ et $\partial_3\Psi$.

La puissance virtuelle de ces efforts est donc : [7]

$$(\delta\vec{u}, \Phi) \in \mathbb{U} \times \mathbb{F} \mapsto \langle \delta\vec{u}, \Phi\rangle_u = \int_\Psi \delta\vec{u}\cdot\vec{f} + \sum_{k=1,2,3} \int_{\partial\Psi_k} \delta\vec{u}\cdot\vec{F_k} \tag{3.41}$$

On part maintenant de la dualité entre espaces produits :

$$(\mathbb{X} = \mathbb{U} \times \mathbb{E}, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_u + \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon, \mathbb{Y} = \mathbb{F} \times \mathbb{S}) \tag{3.42}$$

7. On omet de noter la mesure lorsqu'il s'agit de celle de Lebesgue

3.5.5 Quotient droit

Définition 3.10. ***Surface déformée moyenne***
On nomme ainsi la surface d'équation $z = w(x_1, x_2)$ où w est la valeur moyenne du déplacement u_3 sur l'épaisseur[8] *:*

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} u_3(x_1, x_2, z)dz \tag{3.43}$$

On posera

$$u_3 = w + \tilde{u}_3 \tag{3.44a}$$

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} F_3^3 \tag{3.44b}$$

$$F_3^3 = P/h + \tilde{F}_3^3 \tag{3.44c}$$

où $\tilde{u}_3$ et $\tilde{F_3^3}$ sont de valeur moyenne nulle sur l'épaisseur.

On considère alors le sous-espace vectoriel $\mathbb{X}_1 \in \mathbb{X}$ constitué des couples $(\vec{u}, \vec{\vec{\varepsilon}})$

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{E} = \left\{ (\vec{u}, \vec{\vec{\varepsilon}}) \in \mathbb{X} / \; u_1 = -z\frac{\partial w}{dx_1}, u_2 = -z\frac{\partial w}{dx_2} \right\} \tag{3.45}$$

$\mathbb{U}_1$ est l'espace des déplacements qui vérifient l'orthogonalité des normales déformées à la surface déformée moyenne.

L'orthogonal de $\mathbb{X}_1$ est le produit $\mathbb{U}_1^o \times \{0\}$. Étudions donc la restriction à $\mathbb{U}_1$ de la forme linéaire $\langle \cdot, \varphi \rangle_u$, puis caractérisons $\mathbb{U}_1^o$.

Le calcul de $\langle \delta u, \varphi \rangle_u$ nécessite diverses intégrations en z qui conduisent à poser :

$$p = F_3^1 + F_3^2 + \int_{-h/2}^{h/2} f_3 \tag{3.46a}$$

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} F_3^3 \text{ (déja vue en (3.44b))} \tag{3.46b}$$

$$\vec{c}' = -\int_{-h/2}^{h/2} z(f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2) \tag{3.46c}$$

$$\vec{c}'' = h/2\left[(F_1^1 - F_1^2)\vec{e}_1 + (F_2^1 - F_2^2)\vec{e}_2\right] \tag{3.46d}$$

$$\vec{c} = \vec{c}' + \vec{c}'' \tag{3.46e}$$

$$\vec{C} = -\int_{-h/2}^{h/2} z(F_1^3\vec{e}_1 + F_2^3\,\vec{e}_2) \tag{3.46f}$$

Chacune des intégrales qui interviennent dans (3.41) est la somme de deux termes indépendants : l'un en δw l'autre en $\delta\tilde{u}_3$; en notant $\Pi_w(\delta w)$ et $\Pi_{\tilde{u}_3}(\delta\tilde{u}_3)$ les puissances virtuelles développées pour les vitesses virtuelles δw et $\delta\tilde{u}_3$, on

8. Les traités considèrent le plus souvent la surface $z = u_3(x_1, x_2, z)$ traditionnellement nommée "surface moyenne déformée". L'introduction de cette variable w simplifie beaucoup la théorie, comme nous l'avons montré dans ().

trouve par un calcul banal :

$$\Pi_w(\delta w) = \int_\Omega (\delta w\, p + grad^{(2)} \delta w \cdot \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} (\delta w P + grad^{(2)} \delta w \cdot \vec{C}) \tag{3.47a}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{u}_3}(\delta \tilde{u}_3) = & \int_\Omega \left[F_3^1 \delta \tilde{u}_3(-h/2) + F_3^2 \delta \tilde{u}_3(h/2) + \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tilde{u}_3 \tilde{f}_3 \right] \\ & + \int_{\partial\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \delta \tilde{u}_3 \tilde{F}_3^3 f_3 \end{aligned} \tag{3.47b}$$

On voit donc que l'orthogonal de $\mathbb{U}_1$ est le sous-espace vectoriel des charges qui annulent les quantités $p, P, \vec{c}, \vec{C}, \tilde{f}_3, F_3^1, F_3^2, \tilde{F}_3^3$, quantités qui fournissent une représentation naturelle du quotient $\mathbb{F}' = \mathbb{F}/\mathbb{U}_1^o$ dont les éléments peuvent s'écrire comme des paires (W, Φ), avec :

$$W = (p, P, \vec{c}, \vec{C}) \tag{3.48a}$$

$$\Phi = (\tilde{f}_3, F_3^1, F_3^2, \tilde{F}_3^3) \tag{3.48b}$$

tandis que la forme bilinéaire :

$$((w, \tilde{u}_3)(W, \Phi)) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{F}' \mapsto \langle (w, \tilde{u}_3), (W, \Phi) \rangle_{w1} = \Pi_w(w) + \Pi_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_3) \tag{3.49}$$

met en dualité les espaces $\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{F}'$.

Pour la dualité produit le quotient droit précédent met en dualité les espaces $\mathbb{X}_1 = \mathbb{U}_1 \times \mathbb{E}$ et $\mathbb{Y}' = \mathbb{F}' \times \mathbb{S}$:

$$\begin{aligned} & (((w, \tilde{u}_3), \varepsilon), ((W, \Phi), \sigma)) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}' \mapsto \\ & \qquad \langle ((w, \tilde{u}_3), \varepsilon), ((W, \Phi), \sigma) \rangle_1 = \langle (w, \tilde{u}_3), (W, \Phi) \rangle_{w1} + \langle \vec{\vec{\varepsilon}}, \vec{\vec{\sigma}} \rangle_\varepsilon \end{aligned} \tag{3.50}$$

Notons qu'on a conservé les indices des espaces et des formes bilinéaires utilisés dans l'alinéa 3.2, et en particulier dans la figure 3.2.

3.5.6 Quotient gauche pour la flexion pure

On considère maintenant le sous-espace $\mathbb{Y}_3 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{S}_3$ de $\mathbb{F}' \times \mathbb{S}$ défini par :

$$\mathbb{F}_3 = \{(W, \Phi / \Phi = 0\} \tag{3.51}$$

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ \vec{\vec{\sigma}} \in \mathbb{S} / \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \right\} \tag{3.52}$$

dont l'orthogonal est, pour la dualité précédente :

$$\mathbb{Y}_3^{o,1} = \{((w, \tilde{u}_3), \varepsilon) \in \mathbb{X}_1 / w = 0, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0\} \tag{3.53}$$

Le choix de $\mathbb{Y}_3$ a deux effets :
1. Il annule les efforts $\Phi = (\tilde{f}_3, F_3^1, F_3^2, \tilde{F}_3^3)$ qui travaillent dans le déplacement vertical de moyenne nulle $\delta \tilde{u}_3$.
2. Il définit un état de contraintes planes au sens strict de l'élasticité plane.

Ainsi le modèle devient-il indifférent aux variables $\delta\tilde{u}_3, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ ainsi qu'à l'effort tranchant classiquement noté :

$$\vec{T} = \int_{-h/2}^{h/2} (\vec{e}_1 \sigma_{13} + \vec{e}_2 \sigma_{23}) \tag{3.54}$$

C'est pourquoi cette situation est qualifiée de "flexion pure".

Les variables de cisaillement précédentes restent actives lorsqu'on remplace (3.52) par la seule condition $\sigma_{33} = 0$ couramment utilisée dans les manuels ; elle engendre des calculs un peu plus compliqués, sans modification notable du résultat final.

Rappelons qu'on note respectivement $\vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}$ et $\vec{\vec{\sigma}}^{(2)}$ les parties planes des tenseurs $\vec{\vec{\varepsilon}}$ et $\vec{\vec{\sigma}}$ et $\langle \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}, \vec{\vec{\sigma}}^{(2)} \rangle_{\varepsilon^{(2)}}$ leur produit de dualité.

L'espace quotient gauche $\mathbb{X}_3 = \mathbb{X}_1 / \mathbb{Y}_3^{o,1}$ est donc celui des variables $(w, \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)})$, en dualité avec l'espace $\mathbb{Y}_3$ des variables $(W, \vec{\vec{\sigma}}^{(2)})$.

$$\begin{aligned} \left((w, \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}), (W, \vec{\vec{\sigma}}^{(2)}) \right) \in \mathbb{X}_3 \times \mathbb{Y}_3 &= \langle (w, \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}), (W, \vec{\vec{\sigma}}^{(2)}) \rangle_3 \\ &= \langle w, W \rangle_w + \langle \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}, \vec{\vec{\sigma}}^{(2)} \rangle_{\varepsilon^{(2)}} \end{aligned} \tag{3.55}$$

On notera $\mathbb{U}_3$ l'espace des w, $\mathbb{E}_3$ celui des $\vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}$. On a donc $\mathbb{X}_3 = \mathbb{U}_3 \times \mathbb{E}_3$ et $\mathbb{Y}_3 = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{S}_3$ et l'on retrouve un schéma classique de dualité à quatre espaces décrit par la figure 7.1.

FIGURE 3.5 – Dualité à quatre espaces pour la plaque en flexion pure

Var.		*Dualités*		*Var.*
w	$ker(\mathscr{D}_3) \subset \mathbb{U}_3$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_w$	$\mathbb{F}_3 \supset \mathscr{D}_3^t(\mathbb{S})$	W
	$\mathscr{D}_3 \downarrow$		$\uparrow \mathscr{D}_3^t$	
$\vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}$	$\mathscr{D}_3(\mathbb{U}_3) \subset \mathbb{E}_3$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon^{(2)}}$	$\mathbb{S}_3 \supset ker\mathscr{D}_3^t$	$\vec{\vec{\sigma}}^{(2)}$

Nous allons maintenant étudier les opérateurs $\mathscr{D}_3, \mathscr{D}_3^t$

3.5.7 Opérateur déformation des plaques de Kirchhoff

L'opérateur de déformation est maintenant :

$$w \in \mathbb{U}_3 \mapsto \vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)} = \mathscr{D}_3(w) = -z\, \vec{\vec{\chi}} \tag{3.56}$$

où la déformation généralisée $\vec{\vec{\chi}}$ est, au signe près, le tenseur de courbure de la surface déformée moyenne :

$$\left[\vec{\vec{\chi}} \right] = -grad^{(2)} grad^{(2)} w = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

On note que $ker(\mathscr{D}_3)$, espace des déplacements d'ensemble, est celui des fonctions affines $w(x,y)$.

Compte tenu de (5.6a) on remplace l'opérateur de déformation $\mathscr{D}_3$ par $\mathscr{D}_4 = -grad^{(2)}grad^{(2)}$.

On nomme tenseur des moments de flexion-torsion le tenseur plan $\vec{\vec{M}}$:

$$\vec{\vec{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\vec{\vec{\sigma}}^{(2)} \tag{3.58}$$

C'est la contrainte généralisée associée à la déformation généralisée $\vec{\vec{\chi}}$. La puissance virtuelle des contraintes vaut en effet :

$$\langle \mathscr{D}_3(\delta w), \vec{\vec{\sigma}}^{(2)} \rangle_{\varepsilon^{(2)}} = -\int_{\Psi} z\,\delta\vec{\vec{\chi}} : \vec{\vec{\sigma}}^{(2)} \tag{3.59}$$

$$= -\int_{\Omega} \delta\vec{\vec{\chi}} : \vec{\vec{M}} \tag{3.60}$$

ce qui introduit la nouvelle forme bilinéaire $\langle \cdot,\cdot \rangle_\chi$:

$$\langle \vec{\vec{\chi}}, \vec{\vec{M}} \rangle_\chi = -\int_{\Omega} \vec{\vec{\chi}} : \vec{\vec{M}} \tag{3.61}$$

On note maintenant $\mathbb{E}_4$ et $\mathbb{S}_4$ les espaces des champs de tenseurs plans symétriques, mathématiquement identiques à $\mathbb{E}_3$ et $\mathbb{S}_3$, mais mécaniquement différents : les composantes de $\vec{\vec{\chi}} \in \mathbb{E}_4$ ont la dimension d'une courbure (L^{-1}) tandis que celles de $\vec{\vec{M}} \in \mathbb{S}_4$ ont la dimension d'un moment de flexion de plaque, c'est-à-dire F. La forme bilinéaire $\langle \cdot,\cdot \rangle_\chi$ les place en dualité.

Le schéma de dualité à quatre espaces devient finalement :

FIGURE 3.6 – Dualité à quatre espaces pour la plaque en flexion pure

Var.		*Dualités*		*Var.*
w	$ker(\mathscr{D}_3) \subset \mathbb{U}_3$	$\langle \cdot,\cdot \rangle_w$	$\mathbb{F}_3 \supset \mathscr{D}_3^t(\mathbb{S})$	W
	$\mathscr{D}_4 = grad^{(2)}grad^{(2)} \downarrow$		$\uparrow \mathscr{D}_4^t$	
$\vec{\vec{\chi}}$	$\mathscr{D}_4(\mathbb{U}_3) \subset \mathbb{E}_4$	$\langle \cdot,\cdot \rangle_\chi$	$\mathbb{S}_4 \supset ker\mathscr{D}_4^t$	$\vec{\vec{M}}$

3.5.8 Équations d'équilibre

Calculons la puissance virtuelle des efforts dans un couple $(\delta w, \mathscr{D}_4\delta w) \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{E}_4$.

La relation (3.47a) donne celle de la charge W sous le nom de Π_w ; elle devient, après application du théorème flux-divergence :

$$\langle w, W \rangle_w = \int_{\Omega} \delta w (p - div^{(2)}\vec{c}) + \int_{\partial\Omega} \left[\delta w\,(P + c_n) + \frac{\partial \delta w}{\partial s} C_t + \frac{\partial \delta w}{\partial n} C_n \right]$$

Les variations δw et $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ ne sont pas indépendantes sur $\partial\Omega$; en intégrant par parties le terme en $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ sur le contour fermé $\partial\Omega$ on obtient :

$$\langle w, W\rangle_w = \int_\Omega \delta w(p - div^{(2)}\vec{c}) + \int_{\partial\Omega} \left[\delta w(P + c_n - \frac{\partial C_t}{\partial s}) + \frac{\partial \delta w}{\partial n} C_n\right] \tag{3.62}$$

où maintenant les variations δw et $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ sont indépendantes sur $\partial\Omega$.

Pour $\delta\chi = -grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w$ la puissance virtuelle de la contrainte généralisée $\vec{\vec{M}}$ vaut :

$$\langle -grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w, \vec{\vec{M}}\rangle_\chi = \int_{\partial\Omega} grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w : \vec{\vec{M}}$$

En utilisant la formule écrite ici sous forme indicielle :

$$w_{,ij}\, M_{,ij} = (w_{,i}\, M_{,ij})_{,j} - (w\, M_{ij,j})_i + w\, M_{ij,ji}$$

pour appliquer le théorème flux-divergence au deux premiers termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w : \vec{\vec{M}} = &\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \vec{n} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \vec{t} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} - \delta w\, \vec{n} \cdot div^{(2)} \vec{\vec{M}}\right) \\ &+ \int_\Omega \delta w\, div^{(2)} div^{(2)} \vec{\vec{M}}\end{aligned}$$

puis, après intégration par parties du terme en $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} grad^{(2)} grad^{(2)} \delta w : \vec{\vec{M}} = &\int_\Omega \delta w\, div^{(2)} div^{(2)} \vec{\vec{M}} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \delta w}{\partial n} \vec{n} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} - \delta w \left(\frac{\partial}{\partial s} \vec{t} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot div^{(2)} \vec{\vec{M}}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.63}$$

En annulant la somme, terme à terme, des puissances virtuelles des charges (3.62) et des contraintes (3.63) on obtient les équations d'équilibre :

$$\text{dans } \Omega : \; div^{(2)} div^{(2)} \vec{\vec{M}} = -p + div^{(2)} \vec{c} \tag{3.64}$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \; \vec{n} \cdot div^{(2)} \vec{\vec{M}} + \frac{d(\vec{t} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n})}{ds} = P - \frac{dC_T}{ds} + c_n \tag{3.65}$$

$$\text{sur } \partial\Omega : \; \vec{n} \cdot \vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} = -C_N \tag{3.66}$$

Chapitre 4

Structures en petites transformations

D'une façon générale une structure est un assemblage de sous-structures ; il en est de même pour chacune de celles-ci et ainsi de suite. Tout en haut de cette arborescence les "feuilles" sont des solides des divers types envisagés par la Résistance des Matériaux, solides qu'on peut également considérer comme des structures réduites à un seul composant. Finalement l'étude peut se réduire à deux sujets :

- les propriétés individuelles des structures,
- les propriétés des assemblages.

L'idée générale de ce chapitre est de construire un schéma de dualité qui soit indifférent au nombre des assemblages successifs et aux types de solides qui les constituent. Bref, on s'y intéresse aux propriétés de dualité [1] qui sont invariantes dans les assemblages. Ce sont le théorème 4.1 et son corollaire 4.1 qui sont l'aboutissement de cette courte étude.

Notons toutefois que l'assemblage de solides de types différents présente souvent de grandes difficultés sur le plan mathématique ; elles rejaillissent non seulement sur les formulations par éléments finis mais aussi sur les techniques que doivent utiliser les constructeurs de structures matérielles. On doit citer, entre autres, les travaux de P. G. Ciarlet et de son équipe sur ce type de difficultés (cf. en particulier [10]).

Pour éviter au lecteur de nombreux retours en arrière le paragraphe 4.2 présente de nombreuses redites par rapport au chapitre 1, seulement destiné à une présentation rapide des divers sujets.

4.1 Les variables mécaniques

La modélisation d'une structure introduit en général quatre variables mécaniques : le champ de déplacements ou de vitesses u, les efforts extérieurs ϕ, les champs de déformations ou de vitesses de déformation e et ceux de contraintes

1. y compris la topologie faible avec elle qui est une notion purement "dualistique".

s. Par un raccourci de langage nous écrirons souvent "le déplacement" plutôt que "le champ de déplacements" et de même pour les autres variables.

Dans le cas d'un solide tridimensionnel on indique souvent par des flèches la nature tensorielle des variables, comme par exemple $\vec{u}$ ou encore $\vec{\vec{\sigma}}$; la notation des charges n'est pas aussi simple puisqu'une charge ϕ est un couple de champs vectoriels $(\vec{f}, \vec{F})$ de forces réparties dans le volume pour le premier, sur la frontière pour le second. Peu importe ici cette précision : le souci de généralité nous conduit à considérer toutes les variables comme généralisées au sens de la Résistance des Matériaux ; par exemple la déformation peut-être la courbure d'une poutre et la contrainte son moment de flexion. Le discours est indépendant de leur nature.

On ne se soucie pas non plus de savoir si u et e sont ou non des vitesses puisqu'on reste dans l'hypothèse des petites transformations et que l'espace des vitesses se confond avec celui des déplacements. On parlera donc de déplacements et de déformations et non de vitesses des uns ou des autres. Enfin nous nommerons le plus souvent u "déplacement" plutôt que "champ de déplacements" ; de même pour e et s.

Le fait essentiel est qu'il s'agit de deux paires de variables, (u, ϕ) et (e, s), qui appartiennent à deux paires d'espaces vectoriels réels en dualité, respectivement $(\mathbb{U}, \langle u, \phi \rangle_u, \mathbb{F})$ et $(\mathbb{E}, \langle e, s \rangle_e, \mathbb{S})$. Les produits de dualité $\langle u, \phi \rangle_u$ et $\langle e, s \rangle_e$ sont les puissances virtuelles respectives de ϕ dans la vitesse virtuelle u et de s dans la vitesse de déformation virtuelle e [2].

Pour reprendre une terminologie de J.J.Moreau on qualifiera u et e de variables cinématiques (ou géométriques), ϕ et s de variables "sthéniques". [3]

4.2 Opérateurs de déformation et d'équilibre

4.2.1 Définitions

Dans une structure $\mathscr{S}$ les déplacements engendrent des déformations selon la formule :

$$u \in \mathbb{U} \mapsto e = \mathscr{D}u + e^{\mathrm{o}} \in \mathbb{E} \tag{4.1}$$

où $\mathscr{D}$ est linéaire et où e^{o} est une déformation imposée, due par exemple à la dilatation thermique [4] ou encore à des déformations plastiques résiduelles.

On nomme $\mathscr{D}$ opérateur de déformation [5].

Reprenons maintenant le schéma de dualité à quatre espaces.

2. Compte tenu de l'alinéa précédent nous préférerions parler de déplacements virtuels et de travaux virtuels...mais il faut bien suivre la mode !

3. du grec "$\sigma\theta\varepsilon\nu o\varsigma$" « force »" ; sthénique n'est pas un néologisme puisqu'il figure dans le Grand Robert pour "tonique, vigoureux ; qui possède la plénitude de sa capacité fonctionnelle", donc avec un sens différent du nôtre ; celui-ci reste toutefois conforme à l'étymologie.

4. Dans l'état de référence déplacements et déformations sont nuls et la température est partout égale à θ_0 ; on écrit $e^{\mathrm{o}} = -\chi(\theta - \theta_0)$, χ étant le tenseur des coefficients de dilatation thermique. Le signe $-$ est dû au fait que si $\theta - \theta_0$ est positif l'élément de volume est comprimé dans l'état géométrique de référence.

5. Nous commettons un abus de langage courant : ni $\mathscr{D}$ ni $\mathscr{D}^t$ ne sont des opérateurs au sens strict des mathématiques puisqu'ils ne sont pas des applications d'un espace dans lui-même.

FIGURE 4.1 – Dualité à quatre espaces

$$
\begin{array}{llcll}
\textit{Var.} & & \textit{Dualités} & & \textit{Var.} \\
u & \mathscr{D}^t(\mathbb{S})^{\mathrm{o}} = \mathbb{U}_s = ker\mathscr{D} \subset \mathbb{U} & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_u & \mathbb{F} \supset \mathbb{U}_s^{\mathrm{o}} \supseteq \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) & \phi \\
 & \mathscr{D} \downarrow & & \uparrow \mathscr{D}^t & \\
e & \mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq (ker\mathscr{D}^t)^{\mathrm{o}} \subset \mathbb{E} & \langle\,.\,,\,.\,\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} \supset \mathscr{D}(\mathbb{U})^{\mathrm{o}} = ker\mathscr{D}^t & s
\end{array}
$$

Le principe des puissances virtuelles donne pour condition d'équilibre d'une charge ϕ et une contrainte s :

$$\forall \delta u \in \mathbb{U} \;:\; \langle \delta u, \phi \rangle_u + \langle \mathscr{D}\delta u, s \rangle_e = 0 \tag{4.2}$$

Si $\mathscr{D}$ admet un transposé $\mathscr{D}^t$, c'est-à-dire si $\mathscr{D}$ est continu pour les topologies compatibles avec la dualité sur $\mathbb{U}$ et sur $\mathbb{E}$, ce que nous supposerons dans toute la suite, alors (4.2) est équivalente à :

$$\mathscr{D}^t s + \phi = 0 \tag{4.3}$$

On nomme $\mathscr{D}^t$ opérateur d'équilibre.

- La quantité $\mathscr{D}^t s$ représente la contribution des contraintes à l'équilibre des efforts.
- $\mathbb{U}_s = ker(\mathscr{D})$ est le noyau de l'opérateur de déformation : c'est l'espace des champs de déplacements qui n'engendrent pas de déformations ; ils sont donc solidifiants pour tous les solides qui constituent la structure. $\mathbb{U}_s$ est donc, en général et sauf modélisation exotique [6], de dimension inférieure ou égale à 6 fois le nombre de ceux-ci.
- $\mathscr{D}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{E}$ est l'espace des déformations engendrées par un déplacement.
- $ker(\mathscr{D}^t)$ est l'espace des contraintes auto-équilibrées, dites aussi auto-contraintes.
- $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est l'espace des charges de torseur nul, par extension du vocabulaire utilisé pour les solides tridimensionnels [7].

4.2.2 Orthogonalités

Orthogonalité du noyau de l'un à l'image de l'autre
Proposition 4.1.
On a les égalités et inclusions suivantes

$$\mathbb{U}_s = \mathscr{D}^t(\mathbb{S})^o \Rightarrow \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \subseteq (\mathbb{U}_s)^o \tag{4.4}$$

$$\ker(\mathscr{D}^t) = \mathscr{D}(\mathbb{U})^o \Rightarrow \mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq ker(\mathscr{D}^t)^o \tag{4.5}$$

qui découlent directement de la définition de la transposée (cf.2.20).

6. On pourrait considérer, par exemple, que seul l'allongement d'un fil constitue sa déformation.

7. Un torseur est une classe d'équivalence, élément du quotient de l'espace des charges par la relation d'équivalence : $\phi 1 \sim \phi 2 \iff \forall u \in \mathbb{U}_s \;:\; \langle u, \phi 1 - \phi 2 \rangle_u = 0$

On peut tout de suite préciser (4.4) dans le cas très général où l'espace des déplacements sans déformations est de dimension finie :

Proposition 4.2. ***Fermeture de l'image*** $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$
Si l'espace $\mathbb{U}_s$ *est de dimension finie alors l'image* $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ *est fermée pour les topologies compatibles avec la dualité.*

En effet la codimension de $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ est la dimension de son polaire $\mathbb{U}_s$; d'après la proposition 2.11 $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ admet un supplémentaire topologique. Comme ces topologies sont séparées ce sous-espace est fermé.

Au chapitre suivant l'étude de l'intégrabilité (on dit aussi compatibilité) des déformations permettra de conclure à des inégalités et non à des inclusions strictes dans quelques cas usuels.

En attendant de démontrer sa véracité nous poserons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1. ***Fermeture des images*** $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ ***et*** $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$
Les images $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ *et* $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ *sont fermées pour les topologies compatibles avec les dualités en sorte que les inclusions (4.4) et (4.5) sont vérifiées comme égalités.*

Son intérêt mécanique réside principalement dans les deux truismes de la proposition suivante :

Proposition 4.3.
Si $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ *(resp.* $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$*) est fermé on a l'équivalence :*

$$e \in \mathscr{D}(\mathbb{U}) \iff \forall s \in ker\mathscr{D}^t \ : \ \langle e, s\rangle_e = 0 \tag{4.6}$$

$$resp \ : f \in \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) \iff \forall u \in ker\mathscr{D} \ : \ \langle u, f\rangle_u = 0 \tag{4.7}$$

En effet si $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ (resp. $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$) est fermé il est son propre bipolaire.

L'équivalence (4.6) permet, entre autres, de chercher des minimums de fonctionnelle sur $\mathscr{D}(\mathbb{U})$; l'équivalence (4.7) permet d'affirmer que toute charge de "torseur nul" peut être équilibrée par au moins une contrainte. Notons que cette équivalence (4.7) est déjà assurée par le proposition 4.2 lorsque $\mathbb{U}_s$ est de dimension finie.

4.3 Cas d'un assemblage de sous-structures

Considérons tout d'abord le produit de plusieurs sous-structures $\mathscr{S}^n, n = 1, 2, ..., N$ au sens du paragraphe 3.1.6.

4.3.1 Structure produit

La structure produit présente les deux dualités suivantes :

– l'élément mécanique produit des éléments déplacements-charges :

$$\left(\mathbb{U} = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{U}^n \ , \ \langle\cdot,\cdot\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle\cdot,\cdot\rangle_{v_n} \ , \ \mathbb{F} = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{F}^n\right) \tag{4.8}$$

– l'élément mécanique produit des éléments déformations-contraintes :

$$\left(\mathbb{E} = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}^n \ , \ \langle\cdot,\cdot\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle\cdot,\cdot\rangle_{e_n} \ , \ \mathbb{S} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{S}^n\right) \tag{4.9}$$

L'opérateur déformation est évidemment :

$$v \in \mathbb{U} \mapsto \mathscr{D}(\mathbb{U}) = (\mathscr{D}_1(v_1), ..., \mathscr{D}_n(v_N))$$

où $\mathscr{D}_n$ est l'opérateur déformation de la structure $\mathscr{S}^n$,
et l'opérateur d'équilibre :

$$s \in \mathbb{S} \mapsto \mathscr{D}^t(\mathbb{S}) = \left(\mathscr{D}_1^t(s_1), ..., \mathscr{D}_n^t(s_N)\right)$$

Comme produit de fermés les images $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ et $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ sont fermées s'il en est de même pour toutes les $\mathscr{D}_n(\mathbb{U})$ et $\mathscr{D}_n^t(\mathbb{S})$. Autrement dit :

Proposition 4.4.
Si les structures composantes vérifient l'hypothèse 4.1 il en est de même pour la structure produit.

4.3.2 Structure assemblée

D'une façon générale on définit les liaisons qui assemblent ces sous-structures par un sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ tandis que les charges exercées sur la structure assemblée sont les éléments du quotient $\mathbb{G} = \mathbb{F}/\mathbb{V}^o$. On note $\mathscr{I}$ l'injection de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{U}$ et $\mathscr{Q}$ l'application canonique de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$.

L'opérateur déformation et l'opérateur d'équilibre de la structure assemblée sont donc :

$$\mathscr{D}_V = \mathscr{D} \circ \mathscr{I} \ ; \ \mathscr{D}_V^t = \mathscr{Q} \circ \mathscr{D}^t \tag{4.10}$$

N.B. $\mathscr{D}_V$ est la restriction de $\mathscr{D}$ à $\mathbb{V}$.

Théorème 4.1. ***Fermeture des images*** $\mathscr{D}_V(\mathbb{V})$ ***et*** $\mathscr{D}_V^t(\mathbb{S})$
Soient :
- *une structure représentée par la dualité à quatre espaces de la figure 4.1,*
- $\mathbb{V}$ *un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathbb{U}$*,*
- $\mathscr{I}$ *l'injection de* $\mathbb{V}$ *dans* $\mathbb{U}$*,*
- $\mathscr{Q}$ *l'application canonique de* $\mathbb{F}$ *sur le quotient* $\mathbb{F}/\mathbb{V}^o$*.*
- $\mathscr{D}_V$ *et* $\mathscr{D}_V^t$ *les opérateurs définis en (4.10).*

Si l'image $\mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ *est fermée alors l'image* $\mathscr{D}_V^t(\mathbb{S})$ *l'est aussi.*
Si l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ *est fermée alors l'image* $\mathscr{D}_V(\mathbb{V})$ *l'est aussi.*

En effet comme nous l'avons vu en 2.5, l'application canonique est "ouverte" ; $\mathscr{D}_V^t(\mathbb{S}) = \mathscr{Q}(\mathscr{D}^t(\mathbb{S}))$ est donc fermée.

Montrons maintenant que $\mathscr{D}_V(\mathbb{V}) = \mathscr{D}(\mathbb{V})$ est fermée si $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ l'est. On a en effet :

$$\mathscr{D}_V(\mathbb{V}) \subset ker(\mathscr{D}_V^t)^o$$

Il reste à établir l'inclusion inverse.
A partir de l'égalité :

$$ker(\mathscr{D}_V^T) = (\mathscr{D}^t)^{-1}(\mathbb{V}^o) \tag{4.11}$$

on écrit la suite d'assertions équivalentes :

$$\begin{aligned} s \in ker(\mathscr{D}_V^T) &\iff s \in (\mathscr{D}^t)^{-1}(\mathbb{V}^o) \\ &\iff \mathscr{D}^t s \in \mathbb{V}^o \\ &\iff \forall\, v \in \mathbb{V} \ : \ \langle \mathscr{D}v, s\rangle_e = \langle v, \mathscr{D}^t s\rangle_v = 0 \\ &\iff s \in \mathscr{D}(\mathbb{V})^o \end{aligned}$$

qui aboutit à :

$$ker(\mathscr{D}_V^T) = \mathscr{D}(\mathbb{V})^o \tag{4.12}$$

Ensuite si e est orthogonal à $ker(\mathscr{D}_V^T) = \mathscr{D}(\mathbb{V})^o$ il est a fortiori orthogonal à $\mathscr{D}(\mathbb{U})^o$ et il existe donc un champ $v \in \mathbb{U}$ avec $e = \mathscr{D}v$.

Il reste à montrer que v appartient effectivement à $\mathbb{V}$. En appliquant $\mathscr{D}^t$ au deux membres de (4.12) puis en utilisant 4.11, on obtient l'égalité $\mathbb{V}^o = \mathscr{D}^t(\mathscr{D}(\mathbb{V})^o)$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &\forall\, \phi \in \mathbb{V}^o\ \exists\, s \in \mathscr{D}(\mathbb{V})^o : \mathscr{D}^t s = \phi \\ &\qquad \Rightarrow \langle v, \phi \rangle_v = 0 \Rightarrow v \in (\mathbb{V}^o)^o = \mathbb{V} \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{V}$ est fermé, ce qui démontre bien que $\mathscr{D}_V(\mathbb{V}) = ker(\mathscr{D}_V^t)^o$.

Du théorème 4.1 on déduit le corollaire :

Corollaire 4.1. ***Structure assemblée***
Si toutes les sous-structures vérifient l'hypothèse 4.1 il en est de même pour la structure assemblée.

Chapitre 5

La compatibilité des déformations

5.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent (corollaire 4.1) que l'hypothèse de fermeture [1] de l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ se valide de proche en proche lors des assemblages de sous-structures qui la vérifient. Il suffit donc de la justifier pour les solides modélisés par la Résistance des Matériaux : ce sont les constituants élémentaires des structures.

C'est précisément le but de ce chapitre : on étudie trois modèles pour lesquels on montre qu'une déformation e est engendrée par un déplacement u si et seulement si elle est orthogonale à toute contrainte auto-équilibrée, autrement dit, avec nos notations usuelles :

$$e \in \mathscr{D}(\mathbb{U}) \iff \forall s \in ker(\mathscr{D}^t) \ : \langle e, s \rangle_u = 0 \tag{5.1}$$

ce qui équivaut encore à dire que $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ est fermé.

Pour le modèle tridimensionnel et pour ceux des plaques de Reissner-Mindlin ou de Kircchoff nous allons établir les conditions d'intégrabilité des champs de déformations (ordinaires ou généralisées), d'une part sous la forme de relations différentielles comme on les trouve dans les ouvrages classiques, d'autre part sous la forme "globale (5.1). On peut faire le pari raisonnable qu'il en est de même pour les autres modèles de la Résistance des Matériaux, ce qui peut fournir quelques sujets de thèse [2] !

Cette voie doit presque tout à l'article fondateur de J.J.Moreau ([23]). Elle permet de couvrir sans difficulté particulière le cas d'un domaine multiplement connexe, et s'étend à celui d'un solide soumis à des liaisons linéaires, ce que nous avons déjà traité au chapitre précédent (théorème 4.1).

1. pour les topologies compatibles avec la dualité, bien sûr.
2. Le cas des plaques de Kircchoff était précisément celui de M. Ros [25]

Notations 5.1.
On notera, pour une dimension ν égale à 2 ou 3 :
E^ν l'espace euclidien de dimension ν,
$\mathbb{T}^s_\nu$ l'espace des tenseurs symétriques du deuxième ordre sur E^ν,
$\mathbb{V}_\nu$ l'espace des vecteurs de E^ν
Si $\vec{\vec{\varepsilon}} \in_3$ on note $\vec{\vec{\varepsilon}}^{(2)}$ la partie plane de ce tenseur, de composantes $\varepsilon^{(2)}_{ij} = \varepsilon_{ij}$ pour les valeurs 1 et 2 de i et de j.
De même si Δ désigne un opérateur différentiel sur $\mathbb{E}_3$ on notera $\Delta^{(2)}$ l'opérateur de même nom sur $\mathbb{E}_2$; ainsi pour la divergence :

$$div^{(2)}\vec{u} = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2$$

Le symbole "·" désigne un produit scalaire de deux vecteurs et, plus généralement, un simple produit contracté, tandis que le symbole ":" désigne un double produit contracté de deux tenseurs qui appartiennent à $_\nu$; ainsi, avec la convention de sommation des indices répétés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_j$$
$$(\vec{\vec{T}} \cdot \vec{v})_i = T_{ij} v_j$$
$$(\vec{v} \cdot \vec{\vec{T}})_i = T_{ji} v_j$$
$$\vec{u} \cdot \vec{\vec{T}} \cdot \vec{v} = u_i T_{ij} v_j$$
$$\vec{\vec{S}} : \vec{\vec{T}} = S_{ij} R_{ji}$$

De même si K désigne une matrice $n \times n$ et v et w des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on utilisera plutôt la notation[3] $v \cdot K \cdot w = v_i K_{ij} w_j$ plutôt que la traditionnelle $v^t K w$ qui considère ces vecteurs comme des colonnes et v^t comme la ligne transposée de v.

5.2 Formulation différentielle de la compatibilité locale

5.2.1 Rappel de résultats pour le solide tridimensionnel

Tous les ouvrages de mécanique des milieux continus s'intéressent à la "compatibilité" d'un champ de tenseurs de déformation $\vec{\vec{\varepsilon}}$ à valeurs dans $_2$ ou dans $\mathbb{T}^s_3$, c'est-à-dire aux conditions d'existence d'un champ de déplacements $\vec{u}$ à valeurs dans $\mathbb{V}_2$ ou dans $\mathbb{V}_3$ et tel que :

$$\vec{\vec{\varepsilon}} = grad_s \vec{u} \tag{5.2}$$

Classiquement les conditions citées dans les livres s'expriment à l'aide de relations différentielles dues à Saint-Venant ; on peut les écrire sous la forme indicielle (cf. L. Solomon [45], J. Salençon [41]) :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \tag{5.3}$$

3. C'est la notation utilisée par le logiciel de calcul formel et/ou numérique "*Mathematica*" ; elle a l'avantage de distinguer le "vecteur" ou n-uple $\{1, ..., n\}$ de la matrice de ses composantes, que ce soit une ligne ou une colonne.

Compte tenu des symétries, elles conduisent, en dimension 3, à six relations indépendantes déduites des deux suivantes par permutation circulaire :

$$2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} = 0 \tag{5.4a}$$

$$\varepsilon_{13,23} - \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{33,21} + \varepsilon_{32,31} = 0 \tag{5.4b}$$

En dimension 2 ces conditions se réduisent à la seule relation (5.4a).

Il s'agit de conditions nécessaires qui deviennent suffisantes lorsque le domaine est simplement connexe. Lorsqu'il est multiplement connexe on doit écrire la nullité de certaines intégrales pour assurer l'existence d'un champ $\vec{u}$ uniforme (cf. L. Solomon [45]).

5.2.2 Formulation différentielle de la compatibilité locale pour le modèle de Reissner-Mindlin

La théorie des plaques soumis à des effets de cisaillement "transverse" s'est développée à partir de 1945, d'abord grâce à E. Reissner [35] probablement pour traiter des plaques épaisses, puis à R.D.Mindlin [**?**] en 1951 pour affiner la modélisation de leurs vibrations. Ensuite Reissner a publié de nombreux articles sur la question, par exemple [36], [37]. Plus récemment J.L. Batoz et G. Dhatt en ont donné un exposé détaillé dans leur livre consacré à la modélisation des structures par éléments finis [1]. Enfin l'auteur a reconstruit la modélisation des plaques en suivant une autre voie de passage du tridimensionnel au bidimensionnel, d'abord dans [33], puis dans une version complétée [34].

Formalisme des plaques de Reissner-Mindlin

Une plaque est modélisée par un jeu de variables définies sur un ouvert Ω [4] du plan (x, O, y) de E_3 rapporté aux coordonnées cartésiennes (O, x, y, z). On ne considère que la flexion, laissant de côté les déformations et les déplacements plans dits de *membrane* qui relèvent d'un problème plan ordinaire, du moins en ce qui concerne la compatibilité des déformations. Dans ce modèle les normales restent rigides mais peuvent s'incliner sur la surface moyenne déformée.

• Les *déplacements généralisés* sont une paire $u = (w, \vec{\beta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}_2$ où :
w est la *flèche*, déplacement selon Oz, $\vec{\beta}$ est un vecteur du plan qui indique l'inclinaison de la normale déformée sur le plan (O, x, y).

L'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{V}_2$ est muni du produit scalaire naturel :

$$\Big((w, \vec{\beta}), (p, \vec{c})\Big) \in \times\mathbb{R} \times \mathbb{V}_2 \longmapsto$$
$$\langle (w, \vec{\beta}), (p, \vec{c}) \rangle_\Omega = w\, p + \vec{\beta} \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$$

• Les *charges généralisées* sont définies comme

$$\phi = \Big((p, \vec{c}), (P, \vec{C})\Big) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{V}_2) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{V}_2)$$

où p et $\vec{c}$ sont des densités surfaciques de force et de couple, exercées dans Ω tandis P et $\vec{C}$ sont des densités linéiques de force et de couple exercées sur la frontière $\partial\Omega$.

4. et éventuellement par leur trace sur sa frontière

Ainsi la forme bilinéaire qui définit la dualité entre déplacements et efforts généralisés s'écrit-elle [5] :

$$\langle u, \phi \rangle_u = \int_\Omega (w\,p + \vec{\beta} \cdot \vec{c}) + \int_{\partial\Omega} (w\,P + \vec{\beta} \cdot \vec{C}) \tag{5.5}$$

• Les *déformations généralisées* sont de la forme $e = (\vec{\vec{\chi}}, \vec{\gamma}) \in \mathbb{T}_2^s \times \mathbb{V}_2$ où $\vec{\vec{\chi}}$ est un tenseur de type *courbure* et $\vec{\gamma}$ le *vecteur de cisaillement transverse*. L'opérateur de déformation est défini par :

$$\vec{\vec{\chi}} = grad^{(2)} \vec{\beta} \tag{5.6a}$$

$$\vec{\gamma} = grad^{(2)} w + \vec{\beta} \tag{5.6b}$$

$\vec{\gamma}$ est, dans l'état déformé, l'inclinaison de la normale sur le plan tangent à la surface moyenne déformée, tandis que le tenseur de courbure de cette dernière est

$$grad^{(2)} grad^{(2)} w = -\vec{\vec{\chi}} + grad^{(2)} \vec{\gamma}$$

• Les *contraintes généralisées* sont de la forme $s = (\vec{\vec{M}}, \vec{T})$ où ($\vec{\vec{M}}$ est nommé *tenseur de flexion-torsion* et $\vec{T}$ *effort tranchant*). La forme bilinéaire qui place en dualité déformations et contraintes généralisées est :

$$\langle e, s \rangle_e = -\int_\Omega (\vec{\vec{\chi}} \cdot \vec{\vec{M}} + \vec{\gamma} \cdot \vec{T}) \tag{5.7}$$

Enfin le principe des puissances virtuelles :

$$\forall \delta u \in \mathbb{U} \ : \langle \delta u, \phi \rangle_u + \langle e, s \rangle_e = 0$$

fournit les équations différentielles d'équilibre à l'intérieur de Ω :

$$div^{(2)} \vec{T} = -p \tag{5.8a}$$

$$div^{(2)} \vec{\vec{M}} - \vec{T} = -\vec{c} \tag{5.8b}$$

et sur son contour $\partial\Omega$:

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = P \tag{5.9a}$$

$$\vec{\vec{M}} \cdot \vec{n} = \vec{C} \tag{5.9b}$$

Conditions différentielles de compatibilité

Proposition 5.1. Compatibilité locale des déformations généralisées [6]
Soit $e = (\vec{\vec{\chi}}, \vec{\gamma})$ un champ de déformations généralisées défini sur l'ouvert simplement connexe Ω et deux fois continûment différentiable ;
pour qu'il existe un champ de déplacements généralisés $u = (w, \vec{\beta})$ tel que $e = \mathscr{D}(u)$, c'est à dire solution du système (5.6a,5.6b)
il est nécessaire et suffisant que e soit solution du système suivant :

$$\chi_{22,11} + \chi_{11,22} - 2\chi_{12,12} = 0 \tag{5.10a}$$

$$\gamma_{1,12} - \gamma_{2,11} + 2(\chi_{12,1} - \chi_{11,2}) = 0 \tag{5.10b}$$

$$\gamma_{2,12} - \gamma_{1,22} + 2(\chi_{12,2} - \chi_{22,1}) = 0 \tag{5.10c}$$

5. on omet l'élément de mesure lorsqu'il s'agit de celle de Lebesgue ; on omet aussi le symbole "trace" pour simplifier les écritures.
6. Il y a probablement de la littérature sur cette question, mais où ?

En effet la condition (5.10a), identique à 5.4a à la nature des variables près, est nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\vec{\beta}$ solution de (5.6a). Notons que $\vec{\beta}$ n'est défini qu'à une fonction affine près (un "déplacement rigide") :

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}^1 + \vec{\beta}^0 - \theta^0 x_2 \vec{e}_1 + \theta^0 x_1 \vec{e}_2 \tag{5.11}$$

où $\vec{\beta}^1$ désigne une solution particulière, $\vec{\beta}^0$ et θ^0 des constantes arbitraires.

Il reste donc à montrer qu'il existe une fonction w et une détermination de $\vec{\beta}$ solutions de (5.6b) si et seulement si le couple $(\vec{\gamma}, \vec{\vec{\chi}})$ est solution du système (5.10b, 5.10c).

Pour que (5.6b) ait lieu il est nécessaire et suffisant que $r = rot(-\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ soit nul[7] :

$$r = 2\theta^0 - \beta^1_{2,1} + \beta^1_{1,2} + \gamma_{2,1} - \gamma_{1,2} = 0 \tag{5.12}$$

Pour que r soit nul il est nécessaire que son gradient soit nul :

$$-\beta^1_{2,11} + \beta^1_{1,21} + \gamma_{2,11} - \gamma_{1,21} = 0 \tag{5.13a}$$

$$-\beta^1_{2,12} + \beta^1_{1,22} + \gamma_{2,12} - \gamma_{1,22} = 0 \tag{5.13b}$$

et, pour la première composante par exemple, on vérifie que :

$$\beta^1_{2,11} - \beta^1_{1,21} = 2(\chi_{12,1} - \chi_{11,2}) \tag{5.14}$$

en sorte que les relations (5.10b) et (5.10c) sont équivalentes aux relations (5.13a) et (5.13b).

Inversement si ces dernières ont lieu le rotationnel r est une constante qu'on annule en choisissant :

$$\theta^0 = \frac{1}{2}(\beta^1_{2,1} - \beta^1_{1,2} + \gamma_{1,2} - \gamma_{2,1}) \tag{5.15}$$

Finalement, en accord avec (5.11), où θ^0 est maintenant déterminé, $\vec{\beta}$ est défini à la constante arbitraire $\vec{\beta}^0$ près tandis que w est définie à la fonction affine $w^0 - \beta^0_1 x_1 - \beta^0_1 x_2$ près.

Les conditions différentielles de compatibilité locale pour le modèle de **Kirchoff** se déduisent des précédentes pour $\vec{\gamma} = 0$.

7. Nous utilisons la notation indicielle de la dérivation pour terminer cet alinéa

5.3 Formulation duale de la compatibilité

5.3.1 Deux théorèmes de base

On doit à Jean-Jacques Moreau deux théorèmes qui couvrent la quasi-totalité des cas usuels[8]. On désigne par Ω ouvert de E^{ν} avec $\nu = 2$ ou 3 :

Théorème 5.1. (J.J. Moreau 1979 [23] "théorème 0")
Soit $\vec{g} \in D'(\Omega, E^{\nu})$; pour qu'il existe une distribution $f \in D'(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\vec{g} = grad^{(\nu)} f$ il est nécessaire et suffisant que $\langle \vec{g}, \vec{u} \rangle = 0$ pour tout champ $\vec{u} \in D(\Omega, \mathbb{V}_{\nu})$ et de divergence nulle.

Théorème 5.2. (J.J. Moreau 1979 [23] "théorème 1")
Soit $\vec{\vec{\varepsilon}} \in D'(\Omega, \mathbb{T}^s_{\nu})$; pour qu'il existe un $\vec{u} \in D'(\Omega, \mathbb{V}_{\nu})$ tel que $\vec{\vec{\varepsilon}} = grad_s \vec{u}$ il est nécessaire et suffisant que, pour tout $\vec{\vec{\sigma}} \in D(\Omega, \mathbb{T}^s_{\nu})$ et de divergence nulle on ait :

$$\langle \vec{\vec{\varepsilon}}, \vec{\vec{\sigma}} \rangle = 0 \tag{5.16}$$

Remarque
On note l'absence d'hypothèse sur le connexité de l'ouvert Ω

5.3.2 Hypothèses générales sur le choix fonctionnel pour un solide isolé

Lorsque le solide est discrétisé, c'est-à-dire lorsque le déplacement ne dépend que d'un nombre fini de paramètres de liberté, les divers espaces en cause sont des espaces vectoriels de dimension finie et aucun problème d'analyse fonctionnelle ne se pose. En dimension infinie les éléments de ces espaces vectoriels sont des distributions à valeurs vectorielles de dimension finie.

Le choix fonctionnel des divers espaces n'est évidemment pas indifférent et c'est presque toujours la loi de comportement du matériau qui l'impose. À ce stade de l'exposé nous devons élargir au maximum les hypothèses de travail.

Opérateur de déformation formel
L'opérateur de déformation $\mathscr{D} : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{E}$ est en général défini par un opérateur différentiel $\mathscr{D}_{dif}$ pris au sens des distributions sur Ω. Ainsi

$$\mathscr{D}_{dif} = grad_s$$

dans le cas du solide tridimensionnel tandis que, en se reportant aux relations (5.6a) et (5.6b) on peut écrire, pour la plaque de Reissner-Mindlin :

$$\mathscr{D}_{dif}(w, \vec{\beta}) = (grad^{(2)} \vec{\beta},\ grad^{(2)} w + \vec{\beta})$$

On nomme souvent $\mathscr{D}_{dif}$ "opérateur formel".

8. c'est-à-dire lorsque les divers champs sont des distributions sur Ω

Hypothèse 5.1. ***Propriété*** $\mathscr{P}$
Le solide occupe un domaine Ω de l'espace euclidien E^p avec $p = 1, 2,$ ou 3. Les quatre espaces $\mathbb{U}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{S}$ sont des espaces de distributions sur E^p, de support contenu dans l'adhérence $\overline{\Omega}$, à valeurs dans un espace vectoriel réel de dimension finie.
Ces espaces possèdent ce que nous nommons la ***propriété*** $\mathscr{P}$ *: ils contiennent les restrictions à $\overline{\Omega}$ de toutes les fonctions indéfiniment dérivables et de support compact dans E^p.*
Les formes bilinéaires $\langle u, f\rangle_u$ et $\langle e, s\rangle_e$ existent.
L'opérateur $\mathscr{D}\ :\ \mathbb{U} \mapsto \mathbb{E}$ est continu pour les topologies compatibles avec les dualités.
Hypothèse 5.2.
L'espace $\mathbb{U}$ contient tous les champs de déplacements $u \in D'(\Omega, \mathbb{T}^s_v)$ tels que $\mathscr{D}_{dif}\ u \in \mathbb{E}$.

L'hypothèse 5.1 suppose que $\mathscr{D}_{dif}$ définit une application $\mathscr{D}$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{E}$ et donc que celui-ci est suffisamment riche par rapport à celui-là ; inversement l'hypothèse 5.2 suppose $\mathbb{U}$ suffisamment riche par rapport à $\mathbb{E}$. Elle implique en outre que le sous-espace $\mathbb{U}_s$ contient tous les déplacements d'ensemble possibles, c'est-à-dire, par exemple, qu'il est bien de dimension 6 pour un solide tridimensionnel. Autrement dit le solide considéré n'est soumis à aucune liaison.

5.3.3 Solide bidimensionnel ou tridimensionnel

Revenons au schéma de dualité à quatre espaces présenté par la figure 4.1, figure qu'on a modifiée en reprenant les noms de variables couramment utilisés dans l'étude des solides tridimensionnels.

On a également posé l'égalité $\mathbb{U}^o_s = \mathscr{D}^t(\mathbb{S})$ en s'appuyant sur la proposition 4.2 du chapire précédent.

FIGURE 5.1 – Dualité à quatre espaces pour le solide 3D ou 2D

Var.		*Dualités*		*Var.*
$\vec{u}$	$\mathscr{D}^t(\mathbb{S})^o = \mathbb{U}_s = ker(\mathscr{D}) \subset \mathbb{U}$	$\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_u$	$\mathbb{F} \supset \mathbb{U}^o_s = \mathscr{D}^t(\mathbb{S})$	ϕ
	$\mathscr{D} \downarrow$		$\uparrow \mathscr{D}^t$	
$\vec{\vec{\varepsilon}}$	$\mathscr{D}(\mathbb{U}) \subseteq (ker\mathscr{D}^t)^o \subset \mathbb{E}$	$\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_\varepsilon$	$\mathbb{S} \supset \mathscr{D}(\mathbb{U})^o = ker\mathscr{D}^t$	$\vec{\vec{\sigma}}$

En vertu de l'hypothèse 5.1 l'espace $\mathbb{S}$ possède la propriété $\mathscr{P}$. Le noyau $ker\mathscr{D}^t$ contient donc tous les champs $\vec{\vec{\sigma}} \in D(\Omega, \mathbb{T}^s_v)$ et de divergence nulle. Le théorème 5.2 permet donc d'écrire :

$$\vec{\vec{\varepsilon}} \in ker(\mathscr{D}^t)^o \Rightarrow \exists\ \vec{u} \in D'(\Omega, \mathbb{T}^s_v) :\ \vec{\vec{\varepsilon}} = grad_s\vec{u} \tag{5.17}$$

et l'hypothèse 5.2 nous assure que ce déplacement $\vec{u}$ appartient à $\mathbb{E}$. On peut donc énoncer :

Corollaire 5.1.
Si les hypothèses 5.1 et 5.2 sont vérifiées alors :

$$\mathscr{D}(\mathbb{U}) = \left(ker\mathscr{D}^t\right)^o \tag{5.18}$$

5.3.4 Plaques de Reissner-Mindlin

Rappelons les équations différentielles d'équilibre (5.8), en l'absence de charge, pour des champs de contraintes généralisées $s = (\vec{\vec{M}}, \vec{T})$ indéfiniment différentiables et de support compact contenu dans Ω :

$$div^{(2)}\vec{T} = 0 \tag{5.19a}$$

$$div^{(2)}\vec{\vec{M}} - \vec{T} = 0 \tag{5.19b}$$

Notons $\mathbb{J}$ l'ensemble des ces champs s, évidemment contenu dans $ker(\mathscr{D}^t)$. On va maintenant démontrer la

Proposition 5.2.
On suppose que le choix fonctionnel vérifie les hypothèses 5.1 et 5.2.
Soit $e = (\vec{\vec{\chi}}, \vec{\gamma}) \in \mathbb{E}$ un champ de déformations généralisées ; pour qu'il existe un champ de déplacements généralisés $u = (w, \vec{\beta}) \in \mathbb{U}$ tel que $e = \mathscr{D}(u)$ il est nécessaire et suffisant que e soit orthogonal à $\mathbb{J}$; autrement dit l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ est fermée. [9]

En effet la condition est évidemment nécessaire puisque $\mathbb{J}$ est contenu dans $\mathscr{D}(\mathbb{U})^o$.

Ensuite, d'après le théorème 5.1, l'orthogonalité de s aux champs de la forme $(\vec{\vec{M}}, 0) \in \mathbb{J}$ entraîne l'existence d'un champ $\vec{\beta}$ solution de (5.6a) et défini à une fonction affine près de la forme explicitée par (5.11).

Il reste à établir l'existence d'une fonction w solution de (5.6b).

Exprimons maintenant l'orthogonalité de $e = (\vec{\vec{\chi}}, \vec{\gamma})$ à $\mathbb{J}$ en utilisant la relation $\chi = grad_s^{(2)}\vec{\beta}$; il vient :

$$\langle grad_s^{(2)}\beta, \vec{\vec{M}}\rangle + \langle \vec{\gamma}, \vec{T}\rangle = 0 \tag{5.20}$$

et comme :

$$\langle grad_s^{(2)}\beta, \vec{\vec{M}}\rangle = -\langle \vec{\beta}, div^{(2)}\vec{\vec{M}}\rangle = 0 \tag{5.21}$$

on obtient finalement :

$$\langle -\vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{T}\rangle = 0 \tag{5.22}$$

pour tous les $\vec{T}$ de divergence nulle. Nous sommes donc dans la situation du théorème 5.1, ce qui assure l'existence de w solution de (5.6b) et achève ainsi la démonstration.

5.3.5 Plaques de Kirchhoff

On peut considérer ce modèle comme un cas particulier du précédent pour $\vec{\gamma} = 0$: les normales restent orthogonales à la surface moyenne. Le seul déplacement généralisé est la flèche w et la seule déformation est

$$\vec{\vec{\chi}} = -grad^{(2}grad^{(2)}w$$

9. Remarque : une hypothèse équivalente à l'hypothèse **??** est contenue dans cet énoncé. Nous n'avons pas jugé utile de lui donner une formulation séparée.

tandis que l'équation d'équilibre est

$$div^{(2}div^{(2}M = -p$$

Les champs de moments auto-équilibrés et de support compact sont solutions de $div^{(2)}div^{(2)}\vec{\vec{M}} = 0$. Ils sont orthogonaux à tous les champs de courbure de la forme $\vec{\vec{\chi}} = -grad^{(2)}grad^{(2)}w$. En effet, par définition de la dérivée d'une distribution, on a :

$$\langle w_{,ij}, M_{ji}\rangle = \langle w, M_{ij,ji}\rangle$$

La condition d'intégrabilité globale suivante est analogue à celles énoncées pour les modèles précédents :

Proposition 5.3. (J.J. Moreau et M. Ros) ([25])
Pour qu'un champ $\vec{\vec{\chi}}$ appartenant à $D'(\Omega, \mathbb{T}_2^s)$ soit de la forme $\vec{\vec{\chi}} = -grad^{(2)}grad^{(2)}w$ où $w \in D'(\Omega, \mathbb{R})$ il est nécessaire et suffisant que $\langle \vec{\vec{\chi}}, \vec{\vec{M}}\rangle = 0$ pour tout $\vec{\vec{M}} \in D(\Omega, \mathbb{T}_2^s)$ et tel que $div^{(2)}div^{(2)}\vec{\vec{M}} = 0$.
En particulier l'image $\mathscr{D}(\mathbb{U})$ est fermée.

N.B. ***La compatibilité globale en présence de liaisons linéaires a fait l'objet du théorème 4.1 du chapitre précédent. Il s'applique à toutes les structures, complexes ou réduites à un solide unique.***

Chapitre 6

Quelques notions d'analyse convexe

6.1 Intérêt pour la mécanique

Les fondateurs

L'étude des chocs et des liaisons unilatérales a conduit Jean-Jacques Moreau à utiliser l'analyse convexe créée par W. Fenchel [13] puis à l'épanouir dans une concertation amicale avec Robert Tyrell Rockafellar [38]. La référence principale est son traité d'analyse convexe, d'abord rédigé dans le cadre de conférences au Collège de France ([20]), puis réédité, après révision de l'auteur, par les éditions de l'Université de Rome [24].

Liaisons unilatérales et plasticité

Liaisons unilatérales sans frottement et plasticité présentent un même thème fondamental : celui de la normale extérieure à un convexe.

Lorsqu'une liaison unilatérale sans frottement contraint le point figuratif x à rester dans un convexe fermé C la réaction y est nulle si le point est à l'intérieur de C, et orientée selon la normale intérieure lorsque x est sur sa frontière. En dimension finie ceci s'exprime par :

$$x \in C \ , \ \forall x' \in C \ : \ (x' - x) \cdot y \geq 0 \tag{6.1}$$

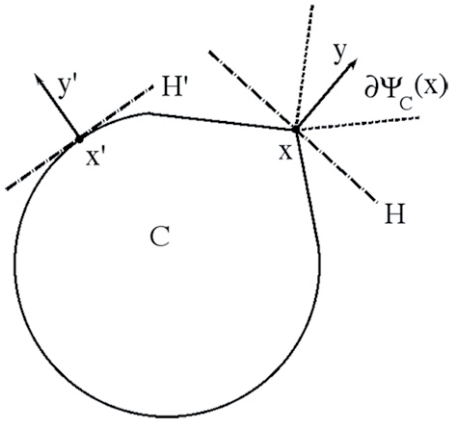
où le point "$\cdot$" indique le produit scalaire du vecteur position $x' - x$ par le vecteur effort y.

En plasticité parfaite la vitesse de déformation est nulle lorsque le point x figuratif de la contrainte est intérieur à C et orientée selon la normale extérieure lorsque x est sur sa frontière. C'est ce qu'exprime le *Principe du travail maximum* de Hill [16] qui s'écrit localement :

$$x \in C \ , \ \forall x' \in C \ : \ (x - x') \cdot y \geq 0 \tag{6.2}$$

où cette fois le point "$\cdot$" indique le produit scalaire d'un vecteur vitesse de déformation y par un vecteur contrainte $x - x'$.

FIGURE 6.1 – Normales extérieures à un convexe



La figure 6.1 illustre cette notion dans le cas de la plasticité (6.2). En x', où la frontière du convexe est régulière la normale extérieure y' est orthogonale à l'hyperplan H' tangent à la celle-là ; en x, où la frontière présente un point anguleux, il y a tout un cône, noté $\partial\Psi_C(x)$, de normales extérieures y et chacune d'entre elles est orthogonale à un des hyperplans H ; le convexe C est situé d'un même côté de chacun de ces hyperplans comme il est situé d'un même côté de H'. H' et les divers H sont des "hyperplans d'appui" du convexe C.

On note que les deux inégalités 6.1 et 6.2 impliquent la nullité de y lorsque x est intérieur à C.

Lois de comportement en élasticité

En élasticité, linéaire ou non, la contrainte σ est le gradient de la densité d'énergie élastique de déformation $w(\varepsilon)$.

$$\sigma = -grad\ w(\varepsilon) \tag{6.3}$$

pour la dualité associée à la forme bilinéaire

$$(\varepsilon, \sigma) \mapsto \langle \varepsilon, \sigma \rangle = -\varepsilon \cdot \sigma \tag{6.4}$$

travail de la contrainte σ dans la déformation ε.

Lorsque w est une fonction convexe on peut écrire une inégalité équivalente à (6.3) :

$$\forall \varepsilon' \ : \ w(\varepsilon') \geq (\varepsilon' - \varepsilon) \cdot \sigma + w(\varepsilon) = \langle \varepsilon' - \varepsilon, -\sigma \rangle + w(\varepsilon) \tag{6.5}$$

qui définit $-\sigma$ comme un *sous-gradient* de w en ε et ne nécessite pas sa différentiabilité.

Remarque 6.1. ***Formulation globale***
Ces formulations locales deviennent globales, c'est-à-dire qu'on peut remplacer les produits scalaires locaux par des produits de dualité entre les champs dans les inégalités (6.1), (6.2) et (6.5 tandis que, dans 6.3, le champ de contraintes σ est le gradient, éventuellement faible, de l'énergie élastique $W = \int_\Omega w$.

Toutes ces notions trouvent un cadre mathématique idoine dans les notions de *fonction polaire* f^* d'une fonction f et de *fonctions duales* (ou mutuellement polaires). La fonction polaire est la généralisation que Fenchel a donnée de la transformée de Legendre.

Dans l'exposé qui suit la plupart des propriétés sont énoncées sans démonstration ; très souvent le lecteur pourra la faire presque aussi vite qu'il pourrait la lire et la comprendre ; c'est cas de celles que nous qualifions d'immédiates. Parfois, à l'inverse, elle nécessite des connaissances pointues d'analyse : son exposé ne ferait donc que déplacer la difficulté. Nous avons cependant conservé certaines démonstrations qui présentent une sorte d'intérêt pédagogique.

6.2 Bases de l'analyse convexe

6.2.1 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

Il est commode d'utiliser la valeur $+\infty$. On pose les définitions suivantes :

Définition 6.1.
On note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ l'ensemble $\mathbb{R}$ complété par les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ et muni des règles opératoires suivantes :

1. Addition "supérieure" (commutative) $\dot{+}$

$$(\rho_1, \rho_2) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mapsto \rho_1 \dot{+} \rho_2 = \begin{cases} +\infty \; si \; \rho_1 = +\infty \\ -\infty \; si \; \rho_1 = -\infty \; et \; si \; \rho_2 < +\infty \\ \rho_1 + \rho_2 \; si \; \rho_1 \in \mathbb{R} \; et \; si \; \rho_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.6}$$

En particulier $(+\infty) \dot{+} (-\infty) = +\infty$.

2. Addition "inférieure" (commutative) $\dot{-}$

$$(\rho_1, \rho_2) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mapsto \rho_1 \dot{-} \rho_2 = \begin{cases} -\infty \; si \; \rho_1 = -\infty \\ +\infty \; si \; \rho_1 = +\infty \; et \; si \; \rho_2 > -\infty \\ \rho_1 + \rho_2 \; si \; \rho_1 \in \mathbb{R} \; et \; si \; \rho_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.7}$$

En particulier $(+\infty) \dot{-} (-\infty) = -\infty$.

2. Multiplication (commutative) par un réel strictement positif

$$(r, \rho) \in]0, +\infty[\times \overline{\mathbb{R}} \mapsto r\rho = \begin{cases} +\infty \; si \; \rho = +\infty \\ -\infty \; si \; \rho = -\infty \\ r\rho \in \mathbb{R} \; si \; \rho \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.8}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas un corps comme $\mathbb{R}$ mais un "cône convexe", c'est-à-dire qu'il a la propriété suivante :

$$\forall (\rho_1, \rho_2) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \; \forall (r_1, r_2) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\; : r_1\rho_1 \dot{+} r_2\rho_2 \in \overline{\mathbb{R}} \tag{6.9}$$

Le prolongement naturel à $\overline{\mathbb{R}}$ de la relation d'ordre $\leq$ est une relation d'ordre total.

Notations 6.1.
On note classiquement $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{X}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On note ω_X, resp. ω_Y, la fonction constante égale à $+\infty$ sur $\mathbb{X}$, resp. $\mathbb{Y}$.
Soit A un partie de $\mathbb{X}$.
On nomme fonction indicatrice de A :

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in A \\ +\infty \; si \; x \notin A \end{cases} \tag{6.10}$$

On nomme domaine effectif d'une fonction $f : \mathbb{X} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $dom(f)$ des points :

$$dom(f) = f^{<}(+\infty) = \{x \in \mathbb{X} \; / \; x < +\infty\}$$

On nomme "épigraphe (resp. épigraphe strict) de la fonction f" l'ensemble :

$$Epi(f) = \{(x,r) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \; / f(x) \leq r\}$$
$$Epi_s(f) = \{(x,r) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \; / f(x) < r\}$$

Proposition 6.1.
L'épigraphe de f est fermé si et seulement f est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire si et seulement si, V_x désignant un voisinage de x :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \; \forall \varepsilon > 0, \; \exists V_x \; \forall x' \in V_x \; : \; f(x') > f(x) - \varepsilon \tag{6.11}$$

ce qui se note aussi :

$$f(x) = \liminf_{x' \to x} f(x')$$

6.2.2 Fonctions et ensembles convexes, ensembles polaires

Définition 6.2.
Soient $\mathbb{X}$ un espace vectoriel réel et une fonction $f : \mathbb{X} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$; on dit que f est convexe si :

$$\forall \lambda \in]0,1[, \; \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) \dot{+} (1-\lambda) f(x_2) \tag{6.12}$$

Remarque
Lorsque f prend des valeurs finies en x_1 et en x_2 cette définition coïncide évidemment avec la définition classique qui ne considère que de tels points ; cette restriction de la définition complique beaucoup d'énoncés que l'introduction de $\overline{\mathbb{R}}$ simplifie considérablement.

La notion d'ensemble convexe est familière :

Définition 6.3. ***Ensembles convexes***
Une partie A d'un espace vectoriel $\mathbb{X}$ est dite convexe si elle contient tout segment dont les extrémités lui appartiennent, en d'autres termes :

$$\forall (x,y) \in A \times A \; , \; \forall \lambda \in [0,1] \; : \; \lambda x + (1-\lambda) y \in A \tag{6.13}$$

Propriétés immédiates

- La fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.
- Si f est convexe alors les ensembles $f^{\leq}(r) = \{x \in \mathbb{X}/f(x) \leq r \in \overline{\mathbb{R}}\}$ sont convexes.
- Si f est semi-continue inférieurement les ensembles $f^{\leq}(r)$ sont fermés.
- Si, pour une topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{X}$, f est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines g_i continues :

$$f = \sup_{i \in \mathscr{I}} g_i$$

  alors f est convexe et semi-continue inférieurement.
- L'ensemble A est convexe si et seulement si son indicatrice Ψ_A est convexe.
- On note que l'ensemble vide est convexe puisque l'assertion de la définition est le contraire de :

$$\exists (x,y) \in A \times A \ , \ \exists \lambda \in [0,1] \ : \ \lambda x + (1-\lambda) y \notin A$$

  évidemment fausse.
- L'intersection d'un famille de convexes (resp. convexes fermés) est convexe (resp. convexe fermée).
- L'intersection des convexes (resp. convexes fermés) qui contiennent un ensemble A est nommée "enveloppe convexe" (resp. "enveloppe convexe fermée") de A".

Un théorème classique est le suivant (Bourbaki [4]) :

Théorème 6.1. ***Continuité d'une fonction convexe***
Si, pour une topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{X}$, f est convexe et majorée sur un ouvert non vide alors elle est continue sur l'intérieur de son domaine effectif.

Dans ce qui suit (6.9) on s'intéressera plus particulièrement à l'ensemble :

Définition 6.4. $\Gamma(\mathbb{X})$
On note $\Gamma(\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions convexes semi-continues inférieurement. D'après ce qui précède leur épigraphe est un convexe fermé.

Proposition 6.2.
Si A est un convexe fermé il est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En effet A est évidemment contenu dans cette intersection. Inversement s'il existait x qui n'appartiendrait pas à A l'ensemble réduit à x serait un convexe compact disjoint de A ; d'après le théorème de Hahn-Banach (N. Bourbaki [4] théorème 1, p. II-39) il existerait un hyperplan fermé qui les séparerait strictement donc $y \in \mathbb{Y}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $\langle x, y \rangle > r$ et $A \subset H^{\leq}(y,r) \leq 0$. x n'appartiendrait donc pas à l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent A.

Définition 6.5. ***Ensembles polaires***
Soit A une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{X}$ en dualité avec $\mathbb{Y}$; on note A^o la partie de $\mathbb{Y}$ définie par :

$$A^o = \{y \in \mathbb{Y} / \forall x \in A : \langle x, y \rangle \leq 1\} \tag{6.14}$$

Propriétés immédiates
- $0 \in A^o$
- On a : $A^o = \bigcap_{x \in A} H^{\leq}(x, 1)$
- Le polaire de la partie vide $\emptyset$ de $\mathbb{X}$ est $\mathbb{Y}$.
- Le polaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{X}$ est son orthogonal (cf. **??**).
- $A \subset B \Rightarrow B^o \subset A^o$
- On note $A^{oo} = (A^o)^o$. Alors $A^o = (A^{oo})^o$
- A^{oo} est l'enveloppe convexe fermée de $A \cup \{0\}$

La fonction indicatrice d'une partie $C \in \mathbb{X}$ a les propriétés suivantes :

Proposition 6.3.
• *Ψ_C est convexe si et seulement si C est convexe.*
• *Pour toute topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{X}$ l'indicatrice Ψ_C est semi-continue inférieurement si et seulement si C est fermé.*

6.2.3 L'inf-convolution

Définition 6.6.
Soient f et g deux fonctions appartenant à $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$, on nomme inf-convolution de ces deux fonctions la fonction notée $f \nabla g$ et définie par :

$$x \in \mathbb{X} \mapsto (f \nabla g)(x) = \inf_{u \in \mathbb{X}} [f(u) \dotplus g(x-u)] \tag{6.15}$$

On dit que l'inf-convolution est exacte si cette borne inférieure est un minimum c'est-à-dire si elle est atteinte pour une certaine valeur de u.

Le lecteur pourra démontrer les propriétés suivantes

Proposition 6.4. *Quelques propriétés simples*
- *L'inf-convolution est commutative et associative.*
- *Si A et B sont deux parties de $\mathbb{X}$ on a $\Psi_A \nabla \Psi_B = \Psi_{A+B}$*
- *$\forall a \in \mathbb{X}$: $(\Psi_{\{a\}} \nabla f)(x) = f(x-a)$*
  en particulier $\Psi_{\{0\}}$ est l'élément neutre de la convolution.
- *Si f et g sont convexes il en est de même pour $f \nabla g$.*

Notations 6.2. *Translations*
On notera T_a la translation de a d'une fonction ; ainsi, dans le troisième point de la proposition précédente :

$$(T_a f)(x) = f(x-a) \text{ ou en plus concis : } T_a f = f(\centerdot - a)$$

6.3 Fonctions polaires

6.3.1 Définition et propriétés générales

On continue de considérer la dualité $(\mathbb{X}\ \langle \centerdot, \centerdot \rangle\ \mathbb{Y})$

Définition 6.7. ***Fonctions polaires***
On nomme fonction polaire (ou transformée de Fenchel[1]*) de $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ la fonction $f^* \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Y}}$ définie par :*

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{X}} [\langle x, y \rangle - f(x)] \tag{6.16}$$

Indiquons maintenant quelques propriétés dont la démonstration est le plus souvent immédiate.

Valeurs infinies

$$\{\exists x \in \mathbb{X} : f(x) = -\infty\} \Rightarrow f^* = \omega_Y \tag{6.17}$$

$$\{\exists y \in \mathbb{Y} : f^*(y) = -\infty\} \iff f = \omega_X \iff f^* = -\omega_Y \tag{6.18}$$

Inégalité de Fenchel

$$\forall\, x \in \mathbb{X}\ \forall\, y \in \mathbb{Y}\ f(x) \dot{+} f^*(y) \geq \langle x, y \rangle \tag{6.19}$$

Minorantes affines continues
Comme enveloppe supérieure de minorantes affines continues f^* appartient à $\Gamma(\mathbb{Y})$.
Soient $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ et $r \in \mathbb{R}$; on a l'équivalence :

$$\langle \centerdot, y \rangle - r \leq f \iff r \geq f^*(y) \tag{6.20}$$

Relations d'ordre

$$f \leq g \Rightarrow g^* \leq f^* \tag{6.21a}$$

$$(\inf_{i \in \mathscr{I}} f_i)^* = \sup_{i \in \mathscr{I}} f_i^* \tag{6.21b}$$

$$(\sup_{i \in \mathscr{I}} f_i)^* \leq \inf_{i \in \mathscr{I}} f_i^* \tag{6.21c}$$

Homothéties
Soit $r \in \mathbb{R}$ une constante non nulle ; on note $f \circ r$ le produit de composition de f par l'homothétie $(0, \sigma)$: $(f \circ r)(x) = f(r\,x)$. On a :

$$(f \circ r)^* = f^* \circ \frac{1}{r} \tag{6.22}$$

1. La transformation de Fenchel est le prolongement à $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ de la transformation de Legendre définie pour les fonctions convexes dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$; on a :

$$(\lambda f)^* = \lambda f^*(\frac{1}{\lambda}y) \tag{6.23}$$

Translations
Soient $a \in \mathbb{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on a :

$$(\alpha + T_a f)^* = f^* + \langle a, \cdot \rangle - \alpha \tag{6.24}$$

où $T_a f$ désigne la fonction translatée $f(\cdot - a)$.

Polaire d'une inf-convolution

$$(f \triangledown g)^* = f^* \dot{+} g^* \tag{6.25}$$

6.3.2 Fonctions indicatrices et fonctions d'appui

Définition 6.8.
On nomme fonction d'appui de $A \in \mathbb{X}$ pour la dualité $(\mathbb{X}\ \langle \cdot, \cdot \rangle\ \mathbb{Y})$:

$$y \in \mathbb{Y} \mapsto \Psi_A^*(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle = \sup_{x \in \mathbb{X}} (\langle x, y \rangle - \Psi_A(x)) \in \overline{\mathbb{R}} \tag{6.26}$$

On note que : $\Psi_\emptyset = +\omega_X$ et que : $\Psi_\emptyset^* = -\omega_Y$.

Proposition 6.5.
Soit A une partie de $\mathbb{X}$.

- *Le demi espace*

$$H^{\leq}(y, \Psi_A^*(y)) = \{x \in \mathbb{X} / \langle x, y \rangle \leq \Psi_A^*(y)\}$$

  est le plus petit des demi-espaces fermés $H^{\leq}(y, r)$ qui contiennent A. On le qualifie d'hyperplan d'appui de A.

- *L'intersection*

$$\bigcap_{y \in \mathbb{Y}} H^{\leq}(y, \Psi_A^*(y))$$

  est l'enveloppe convexe fermée de A.

- *On a :*

$$A^o = \{y \in \mathbb{Y} / \Psi_A^*(y) \leq 1\}$$

6.3.3 Bipolaire et Γ-régularisée

Définition 6.9. Γ***-régularisée***
On nomme Γ-régularisée f^{**} d'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ l'enveloppe supérieure des minorantes affines de f.

Comme enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines elle est convexe et semi-continue inférieurement c'est-à-dire qu'elle appartient à $\Gamma(\mathbb{X})$.

Proposition 6.6.
La Γ-régularisée f^{**} de f n'est autre que sa bipolaire : $f^{**} = (f^*)^*$.

D'après (6.20) les minorantes affines de f sont en effet de la forme $\langle \bullet, y\rangle - r$ avec $r \geq f^*(y)$. Pour $r = f^*(y)$ on obtient donc la valeur de f^{**} :

$$f^{**}(x) = \sup_{y\in\mathbb{Y}}[\langle x, y\rangle - f^*(y)] \tag{6.27}$$

Définition 6.10. ***Γ-convolution***
On note $f \underline{\triangledown} f'$ la Γ-régularisée de l'inf-convolution. On a donc :

$$f \underline{\triangledown} f' = (f \triangledown f')^{**} \tag{6.28}$$

6.4 Fonctions duales et sous-gradients

6.4.1 Quelques définitions

Définition 6.11. ***Fonctions duales***
On dit que $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ et $g \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Y}}$ constituent un paire de fonctions duales si elles sont mutuellement polaires :

$$g = f^* \text{ et } f = g^* \tag{6.29}$$

Si f et g sont duales elles vérifient l'inégalité de Fenchel (6.16) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \; f(x) \dot{+} g(y) \geq \langle x, y\rangle \tag{6.30}$$

Définition 6.12. ***Points conjugués***
Si f et g sont duales et si l'on a l'égalité dans (6.30) on dit que x et y forment une paire de points conjugués pour la paire de fonctions duales (f, g). Les valeurs $f(x)$ et $g(y)$ sont alors finies et :

$$f(x) + g(y) = \langle x, y\rangle \tag{6.31}$$

Définition 6.13. ***Sous-gradients et sous-différentiels***
Soit $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$. On dit que $y_0 \in \mathbb{Y}$ est un sous-gradient de f en x_0 si l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{X} \; f(x) \geq \langle x - x_0, y_0\rangle + f(x_0) \tag{6.32}$$

c'est-à-dire que y_0 est la pente d'une minorante affine continue de f, "exacte" en x_0. L'ensemble des sous gradients de f en x_0 est nommé sous-différentiel de f en x_0 et noté $\partial f(x_0)$. S'il n'est pas vide on dit que f est sous-différentiable en x_0.

L'intérêt de cette notion découle de la remarque tautologique suivante :
La fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ est minimum en x_0 si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.

6.4.2 Quelques propriétés

En effet :

$$\begin{aligned} y \in \partial f(x) &\Rightarrow \forall x' \in \mathbb{X}\ f(x') \geq \langle x'-x, y\rangle + f(x) \\ &\Rightarrow \forall x' \in \mathbb{X}\ \langle x', y\rangle - f(x') \leq \langle x, y\rangle - f(x) \\ &\Rightarrow f^*(y) = \sup_{x' \in \mathbb{X}} (\langle x', y\rangle - f(x')) \leq \langle x, y\rangle - f(x) \\ &\Rightarrow f(x) + f^*(y) - \langle x, y\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Fenchel :

$$\Rightarrow f(x) + f^*(y) - \langle x, y\rangle = 0$$

On peut donc énoncer :

Proposition 6.7.
Pour toute fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ on a l'équivalence :

$$y \in \partial f(x) \ \Rightarrow\ f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle \tag{6.33}$$

...sans pour autant que x appartienne nécessairement à $\partial f^*(y)$. Cependant, lorsque f est convexe et s.c.i. f et $g = f^*$ sont duales ; alors :

$$\begin{aligned} 0 = f(x) + g(y) - \langle x, y\rangle &= \sup_{x' \in \mathbb{X}} [\langle x', y\rangle - f(x')] + f(x) - \langle x, y\rangle \\ \iff \forall x' \in \mathbb{X}\ f(x') \geq \langle x'-x, y\rangle + f(x) &\iff y \in \partial f(x) \end{aligned}$$

de sorte qu'on a les équivalences :

Proposition 6.8. ***Points conjugués et sous-gradients***
Si (x, y) est une paire de points conjugués pour la paire de fonctions duales (f, g) alors :

$$y \in \partial f(x) \iff x \in \partial g(y) \iff f(x) + g(y) - \langle x, y\rangle = 0 \tag{6.34}$$

Notons maintenant une autre propriété analogue à celle énoncée par la proposition 2.31 :

Proposition 6.9. ***Polaire et sous-différentiels d'une restriction***
On considère
- *$\mathbb{X}_1$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{X}$,*
- *la dualité quotient $(\mathbb{X}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1, \mathbb{Y}/\mathbb{X}_1^o)$ et l'application canonique Q,*
- *une fonction f définie sur $\mathbb{X}$ et f_1 désigne la restriction à $\mathbb{X}_1$.*

Alors :
- *la polaire de f_1 vérifie :*

$$\forall y \in \mathbb{Y}\ f_1^*(Qy) = (f + \Psi_{\mathbb{X}_1})^*(y) \tag{6.35}$$

- *et les sous-différentiels (éventuellement vides) de f et de f_1 vérifient :*

$$x_1 \in \mathbb{X}_1 \mapsto \partial f_1(x_1) = Q(\partial f(x_1)) \tag{6.36}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{X}_1} [\langle x, Qy\rangle_1 - f_1(x)] &= \sup_{x \in \mathbb{X}} [\langle x, Qy\rangle_1 - f_1(x) - \Psi_{\mathbb{X}_1}(x)] \\ &= \sup_{x \in \mathbb{X}} [\langle x, y\rangle - f(x) - \Psi_{\mathbb{X}_1}(x)] \end{aligned}$$

ce qui démontre (6.35).
Ensuite on a l'équivalence des lignes suivantes pour $x_1 \in \mathbb{X}_1$:

$$\begin{gathered} y_1 \in \partial(f+\Psi_{\mathbb{X}_1})(x_1) \\ \forall\, x \in \mathbb{X} \ : \ f(x)+\Psi_{\mathbb{X}_1}(x) \geq f(x_1)+\Psi_{\mathbb{X}_1}(x_1)+\langle x-x_1, y_1\rangle \\ \forall\, x \in \mathbb{X}_1 \ : \ f(x) \geq f(x_1)+\langle x-x_1, y_1\rangle \\ \forall\, x \in \mathbb{X}_1 \ : \ f_1(x) \geq f_1(x_1)+\langle x-x_1, Qy_1\rangle_1 \\ Qy_1 \in \partial f_1(x_1) \end{gathered}$$

ce qui démontre (6.36).

Proposition 6.10. ***Existence d'un sous-différentiel non vide****(cf.[24], proposition 10.2)*
Si $h \in \mathbb{X}$ est convexe et continue en un point $a \in \mathbb{X}$ pour une topologie compatible avec la dualité, alors $\partial h(a)$ est une partie faiblement compacte non vide de $\mathbb{Y}$

Dans les théories de plasticité ou de liaisons unilatérales on utilise la propriété suivante :

Proposition 6.11. ***Normale extérieure à un convexe***
Si C est une partie convexe de $\mathbb{X}$, d'indicatrice Ψ_C, alors $\partial\Psi_C(x)$ est le cône convexe des normales extérieures à C en x.

Proposition 6.12. ***Hyperplan d'appui d'un épigraphe***
Si (x_0, y_0) est une paire de points conjugués pour la paire de fonctions duales (f, g), alors l'hyperplan de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ défini par l'équation :

$$H((x_0, f(x_0)), (y_0, -1)) = \{(x, r) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} / \langle x-x_0, y_0\rangle - r + f(y_0) = 0\} \tag{6.37}$$

est un hyperplan d'appui de l'épigraphe $Epi(f)$. Autrement dit $(y_0, -1)$ est un sous-gradient en $(x_0, f(x_0))$ de l'indicatrice de $Epi(f)$.

En effet on a l'inégalité de Fenchel pour (x, y_0) et l'égalité de conjugaison pour (x_0, y_0) :

$$\forall x \in \mathbb{X} \ : \ f(x)+g(y_0) \geq \langle x, y_0\rangle \tag{6.38}$$

$$f(x_0)+g(y_0) = \langle x_0, y_0\rangle \tag{6.39}$$

En retranchant membre à membre la seconde de la première on obtient successivement :

$$\begin{gathered} \langle x-x_0, y_0\rangle + f(x_0) \leq f(x) \\ \langle x-x_0, y_0\rangle - r + f(x_0) \leq f(x) - r \end{gathered}$$

en sorte que les deux membres sont négatifs ou nuls lorsque (x, r) appartient à l'épigraphe.
Remarque. Cette démonstration s'applique au cas où (x_0, y_0) vérifie (6.39) et sous la seule autre hypothèse que f est la polaire d'une quelconque fonction g : (6.50) est alors vraie pour tout x.

6.4.3 Addition des sous-différentiels

Soient f et f' deux éléments de $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$. Si en un point x chacune d'elles admet une minorante affine continue exacte la somme de ces minorantes est une minorante affine exacte de $f + f'$. On a donc, d'une façon générale :

$$\partial(f+g)(x) \supset \partial f(x) + \partial g(x) \tag{6.40}$$

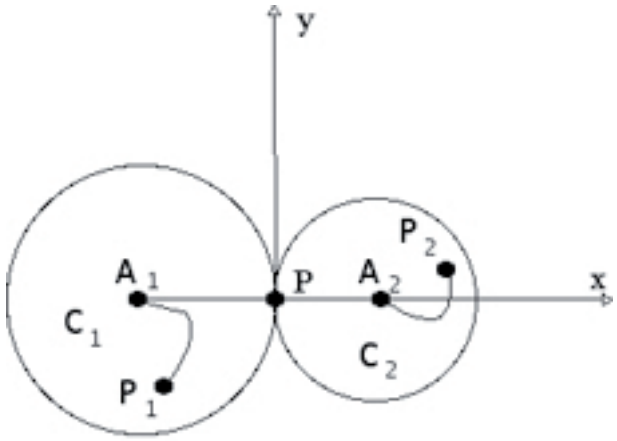
Une situation souvent rencontrée en mécanique des structures est celle où l'une des deux fonctions est continue en un point où l'autre est finie. Dans ce cas on a le

Théorème 6.2. *(cf. [24], proposition 10.3)*
Soient $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ et $g \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ deux fonctions convexes ; s'il existe un point x_0 où les deux sont finies et l'une continue pour une topologie compatible avec la dualité on a :

$$\forall x \in \mathbb{X} \ : \ \partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \tag{6.41}$$

Contre-exemple : un cas pathologique de la mécanique

FIGURE 6.2 – Un cas de non additivité des sous-différentiels



Le contre-exemple suivant me fut proposé par J.J.Moreau il y a quelques décennies...

Considérons le système représenté par la figure 6.2 : il est composé de deux fils inextensibles attachés à leur extrémité A_1 pour le premier, A_2 pour le second. La somme de leurs longueurs est égale à la distance de ces points. Ainsi chacune des deux extrémités libres, P_1 et P_2, est-elle soumise à une liaison unilatérale : rester dans le cercle C_1 ou C_2. Les tensions T_1 et T_2 de ces fils vérifient les lois sous-différentielles :

$$T_1 \in \partial C_1(P_1) \text{ et } T_2 \in \partial C_2(P_2)$$

Si maintenant on noue les extrémités libres de ces fils, sans modifier leur longueur, l'extrémité commune P est assujettie à coïncider avec le point de contact des deux cercles. On a alors pour les fils liés :

$$(\Psi_{C_1} + \Psi_{C_2})(P) = 0$$

$$\partial(\Psi_{C_1} + \Psi_{C_2})(P) = \{\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}/(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\partial\Psi_{C_1}(P) = \{\lambda\,\vec{x}/\lambda \leq 0\} \text{ et } \partial\Psi_{C_2}(P) = \{\lambda\,\vec{x}/\lambda \geq 0\}$$

C'est une alerte pour le mécanicien : si l'on veut déplacer le nœud dans la direction de $\vec{y}$ on engendrera des tensions infinies dans les fils !

6.5 Existence et unicité éventuelles d'un minimum

6.5.1 La minimisation de l'énergie potentielle

Lorsqu'on étudie un système physique, et en particulier un système purement mécanique, on est souvent conduit à en rechercher les états d'équilibre stables par minimisation de l'énergie potentielle. Celle-ci est une fonction, convexe ou non, des variables d'état.

En mécanique on rencontre fréquemment le cas d'une structure élastique soumise à des liaisons. Il peut s'agir de liaisons qui imposent au déplacement u de rester dans une variété affine $A_1 = x_1 + \mathbb{V}_1 \in \mathbb{X}$ ou, plus généralement, dans un convexe $C \in \mathbb{X}$ s'il s'agit de liaisons unilatérales.

On écrit l'équation d'équilibre en minimisant la restriction de l'énergie potentielle totale à ce convexe.

Pour une charge donnée a cette énergie potentielle est de la forme

$$w = f - \langle \cdot, a \rangle \tag{6.42}$$

où f est l'énergie élastique tandis que $-\langle \cdot, a \rangle$ est l'énergie potentielle associée à la charge donnée a.

Nous ne considérons que des énergie potentielles convexes. On se préoccupe donc tout d'abord du minimum d'une restriction pour étendre la proposition 2.31 au cadre de l'analyse convexe.

Soit C une partie quelconque de $\mathbb{X}$; s'il s'agit seulement de chercher le minimum sur C d'une fonction $h \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ on peut identifier sa restriction $h_{|C}$ à la somme $h \dotplus \Psi_C$. C'est une des jolies commodités apportées par les fonctions indicatrices.

Proposition 6.13. ***Minimum d'une restriction***
Soient $w \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ une fonction convexe continue en $x \in C$ où C une partie convexe quelconque de $\mathbb{X}$; la restriction $w + \Psi_C$ est minimum en x si et seulement si

$$0 \in \partial w(x) + \partial\Psi_C(x) \tag{6.43}$$

En particulier si C est un sous-espace vectoriel V la formule (6.43) devient :

$$0 \in \partial w(x) + V^o \tag{6.44}$$

Nous sommes en effet dans les hypothèses qui assurent l'addition des sous-différentiels (cf théorème 6.2).

6.5.2 Certaines circonstances assurent l'existence d'un minimum

Le théorème suivant assure souvent cette existence :

Théorème 6.3. ***Existence d'un minimum****(cf.[24] corollaire 7.2)*
Si f est la polaire d'une fonction $g \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{Y}}$ qui, pour une topologie $\mathscr{T}$ compatible avec la dualité, est majorée sur un voisinage de $a \in \mathbb{Y}$ alors la "section oblique" $w^{\leq r} = (f - \langle \centerdot, a \rangle)^{\leq r}$ est, pour tout $r \in \mathbb{R}$, une partie faiblement compacte de $\mathbb{Y}$. Comme $f - \langle \centerdot, a \rangle$ est semi-continue inférieurement elle atteint son minimum sur toute partie fermée de $\mathbb{X}$.

Une autre situation intéressante est celle où la borne inférieure de l'inf-convolution :

$$(f \nabla g)(x) = \sup_{x_1 \in \mathbb{X}} [f(x - x_1) \dot{+} g(x_1)] \tag{6.45}$$

est un minimum (inf-convolution exacte) :

$$(f \nabla g)(x) = \min_{x_1 \in \mathbb{X}} [f(x - x_1) \dot{+} g(x_1)] = (f \underline{\nabla} g)(x) \tag{6.46}$$

Proposition 6.14. ***Un cas d'inf-convolution exacte****(cf. [24], proposition 7.4)*
Soient g et g' deux fonctions faiblement s.c.i sur $\mathbb{Y}$; s'il existe $a \in \mathbb{X}$ où leurs polaires g^* et g'^* sont finies, l'une d'elles y étant continue pour une topologie compatible avec la dualité, alors la fonction $g \nabla g'$ est faiblement s.c.i sur $\mathbb{Y}$ et cette inf-convolution est exacte.

De cette proposition découle le

Corollaire 6.1. ***Cas de deux paires de fonctions duales****(cf.[24] proposition 9.2)*
Soient g et g' dans $\Gamma(\mathbb{Y})$; s'il existe un point $a \in \mathbb{X}$ où leurs duales respectives f et f' prennent des valeurs finies, l'une d'elles étant continue en ce point pour une topologie compatible avec la dualité,
l'inf-convolution $g \nabla g'$ est exacte et l'on a :

$$g \nabla g' = (g \nabla g')^{**} = g \underline{\nabla} g' = (f + f')^* \tag{6.47}$$

En effet $g \nabla g'$ est convexe ; elle est aussi faiblement s.c.i d'après la proposition 6.14. Elle appartient donc à $\Gamma(\mathbb{Y})$.
La dernière égalité découle alors de la relation (6.25)

La proposition 6.14 est à rapprocher de celle qui assure l'addition des sous-différentiels (théorème 6.2) puisqu'elles présentent les mêmes hypothèses : nous allons d'ailleurs établir que :

Proposition 6.15.
Soient f et g dans $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$, f^* et g^* leurs polaires respectives ; on a l'implication :

$$\exists\, a \in \mathbb{X} \ : \partial(f+g)(a) = \partial f(a) + \partial g(a) \tag{6.48}$$

$$\Rightarrow \forall\, b \in \ \partial(f+g)(a)\ \exists\, d \in \mathbb{Y} : \ (f^* \nabla g^*)(b) = f^*(b-d) + g^*(d) \tag{6.49}$$

Supposons en effet que (6.48) ait lieu ; alors pour tout $b \in \partial(f+g)(a)$ il existe $d \in \mathbb{Y}$ tel que $(b-d) \in \partial f(a)$ et $d \in \partial g(a)$, autrement dit :

$$\begin{aligned}(f+g)(a)+(f+g)^*(b)-\langle a,b\rangle &= 0\\ f(a)+f^*(b-d)-\langle a,b-d\rangle &= 0\\ g(a)+g^*(d)-\langle a,d\rangle &= 0\end{aligned}$$

ce qui entraîne par soustraction des deux dernières à la première :

$$(f+g)^*(b) = f^*(b-d)+g^*(d) \tag{6.50}$$

En écrivant les inégalités de Fenchel pour les couples (f,f^*) et (g,g^*) on obtient pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$:

$$\begin{aligned}f^*(b-y)+f(x) &\geq \langle x,b-y\rangle\\ g^*(y)+g(x) &\geq \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

puis, par addition membre à membre des précédentes :

$$f^*(b-y)+g^*(y) \geq \sup_{x\in\mathbb{X}}[\langle x,b\rangle - f(x)-g(x)] = (f+g)^*(b)$$

qui, associée à (6.50), entraîne l'égalité :

$$f^*(b-d)+g^*(d) = \min_{y\in\mathbb{Y}}[f^*(b-y)+g^*(y)] = (f^*\nabla g^*)(b)$$

et démontre ainsi la proposition 6.15.

Quant à l'unicité elle découle souvent du caractère strictement convexe de la fonction à minimiser. Rappelons que, par définition, la fonction $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbb{X}}$ est strictement convexe si :

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \forall y \in \mathbb{X}\ \forall \lambda \in]0,1[\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \tag{6.51}$$

Proposition 6.16. *Si f est strictement convexe alors*

$$x \neq y \Rightarrow \partial f(x)\cap\partial f(y) = \varnothing$$

en particulier si f admet un minimum, celui-ci est unique.

En effet si $z \in \partial f(x)\cap\partial f(y)$ alors il existe un minorante affine de pente z exacte en x et en y et donc tout le long du segment $[x,y]$.

6.6 Intégrandes convexes et dualité

6.6.1 Motivation

Nous allons nous intéresser à des lois de comportement qui sont définies en (presque) tout point $x \in \Omega$ par une égalité de conjugaison du type de (6.31) qui définit la correspondance entre la déformation $e(x)$ et la contrainte $s(x)$ comme une multi-application sous-différentielle qui peut s'écrire sous les trois formes équivalentes :

$$(e(x),x)+g(s(x))-e(x)\,\centerdot\, s(x) = 0 \tag{6.52a}$$

$$s(x) \in \partial f(\centerdot,x)(e(x)) \tag{6.52b}$$

$$e(x) \in \partial g(\centerdot,x)(s(x)) \tag{6.52c}$$

L'exemple le plus simple est celui de l'élasticité linéaire où f est la densité d'énergie élastique de déformation et sa duale g celle de contrainte.

Comme on l'a noté dans la remarque 6.1 les inégalités (6.1), (6.2) et (6.5) peuvent s'intégrer terme à terme pour devenir globales. C'est dire que, sous réserve d'intégrabilité des fonctions en cause, on souhaite remplacer (7.2) par :

$$F(e) + G(e) - \langle e, s \rangle = 0$$

où :

$$F(e) = \int_\Omega f(e(x)) \; ; \; G(s) = \int_\Omega g(s(x)) \; ; \; \langle e, s \rangle = \int_\Omega e(x) \centerdot s(x)$$

Ce sont précisément l'intégrabilité et la dualité de F et de G qui font l'objet de l'article [39] de Rockafellar et de cette fin de chapitre.

6.6.2 Intégrabilité

Dans ce qui suit on considère, muni de la mesure de Lebesgue, un ensemble Ω qui n'est pas nécessairement de mesure finie, même s'il l'est toujours en mécanique des structures.

Définition 6.14. ***Intégrandes convexes normaux***
On dit que la fonction

$$(e, x) \in (\mathbb{R}^n \times \Omega) \mapsto f(e, x) \in]-\infty, +\infty]$$

est un intégrande convexe normal si :
- *1. $f(\centerdot, x)$ est, pour tout x, convexe et semi-continue inférieurement et différente de $+\infty$*
- *2. et s'il existe une collection dénombrable U de fonctions $\Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, collection munie des deux propriétés suivantes :*
  - *2.1 pour tout $u \in U$ la fonction $x \mapsto f(u(x), x)$ est mesurable*
  - *2.2 pour tout x l'intersection $U_x \cap dom\ f(\centerdot, x)$ est dense dans $dom\ f(\centerdot, x)$, où U_x désigne :*

$$U_x = \{u(x)/u \in U\}$$

conditions qui, comme l'écrit Rockafellar, "seem offhand to be rather complicated" (semblent plutôt compliquées à première vue)...

Cependant elles sont vérifiées dans presque tous les cas rencontrés par le mécanicien ; en effet :

Proposition 6.17. ***Deux conditions suffisantes de normalité***
Si l'intégrande f est convexe et semi-continu inférieurement en e alors il est normal dès que l'une des deux situations suivantes a lieu :
- *1. f est indépendante de x et son domaine effectif n'est pas vide,*
- *2. pour tout e fixé $f(e, \centerdot)$ est mesurable et pour tout x l'intérieur de $dom\ f(\centerdot, x)$ n'est pas vide.*

En outre si f est un intégrande convexe normal il en est de même pour $g = f^*$.

Considérons maintenant la dualité qui nous est familière $(\mathbb{E}, \langle \centerdot, \centerdot \rangle \mathbb{S})$. Rockafellar énonce le

Théorème 6.4. ***Intégrabilité***
Soit f un intégrande convexe normal. S'il existe au moins un $s \in \mathbb{S}$ tel que $f^*(s(x),x)$ soit sommable alors la fonction :

$$e \in \mathbb{E} \mapsto F(e) = \int_{x\in\Omega} f(e(x),x)$$

est définie sur $\mathbb{E}$ et prend ses valeurs dans $]-\infty,+\infty]$.

6.6.3 Dualité des intégrales pour une paire d'espaces "décomposables"

Définition 6.15. ***Espaces décomposables***
Un espace fonctionnel, $\mathbb{E}$ par exemple, est dit décomposable s'il possède les deux propriétés suivantes :
- *1. $\mathbb{E}$ contient tous les champs mesurables bornés nuls en dehors d'un ensemble de mesure finie,*
- *2. Si $e \in \mathbb{E}$ et si $\Omega' \subset \Omega$ est de mesure finie alors $\mathbb{E}$ contient le produit $\chi_{\Omega'}e$ où $\chi_{\Omega'}$ est la fonction caractéristique de Ω'.*

La décomposabilité des deux espaces est la situation de référence pour démontrer un premier théorème. C'est celle des espaces de type $L^p_n(\Omega)$ [2] mais évidemment pas celle des espaces de fonctions continues ; en effet la multiplication par $\chi_{\Omega'}$ détruit la continuité des fonctions de support strictement plus grand que Ω'. Néanmoins nous verrons que le résultat se prolonge au cas de la dualité entre un espace de fonctions continues ou différentiables et l'espace de mesures ou de distributions qui est son dual (cf. corollaire 6.2).

Citons le théorème fondamental (cf. [39], théorème 2) :

Théorème 6.5. ***Dualité des intégrales sur des espaces décomposables***
- *Si les espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{S}$ sont décomposables,*
- *si f est un intégrande convexe normal,*
- *si $f(e(x),x)$ est sommable pour au moins un $e \in \mathbb{E}$,*
- *si $g(s(x),x) = f^*(s(x),x)$ est sommable pour au moins un $s \in \mathbb{S}$,*

alors leurs intégrales F et G sont duales l'une de l'autre.

6.6.4 Cas où $\mathbb{E} = L^\infty_n(\Omega)$ ou $C^o_n(\Omega)$

Si la dualité entre $L^\infty_n(\Omega)$ et $L^1_n(\Omega)$ ne pose aucun problème puisque les deux sont décomposables, il est plus délicat de manier celle entre $L^\infty_n(\Omega)$ et $L^{\infty\prime}_n(\Omega)$: en effet ce dernier contient les fonctions sommables mais aussi des fonctionnelles linéaires qui ne sont pas des fonctions intégrables. C'est l'objet du théorème suivant (cf. [39], théorème 4) :

Théorème 6.6. ***Dualité entre $L^\infty_n(\Omega)$ et $L^{\infty\prime}_n(\Omega)$***
On suppose
- *Ω de mesure finie,*
- *$f(\cdot,x)$ convexe et finie pour tout $x \in \Omega$,*
- *$f(e,\cdot)$ mesurable et bornée pour tout $e \in \mathbb{E} = L^\infty_n(\Omega)$,*

2. Avec Rockafellar nous préférons la notation $L^p_n(\Omega)$ à $(L^p(\Omega))^n$, plus encombrante.

alors F est une fonction convexe finie continue sur $L_n^\infty(\Omega)$. La fonction duale F^* est de la forme :

$$\begin{aligned} &s \in L_n^1(\Omega) \mapsto F^*(s) = G(s) = \int_{x\in\Omega} g(s(x),x) \\ &s \notin L_n^1(\Omega) \mapsto F^*(s) = +\infty \end{aligned} \tag{6.53}$$

avec pour corollaire :

Corollaire 6.2. ***Dualité pour les espaces de fonctions continues***
On considère un sous-espace $\mathbb{E}_c \subset L_n^\infty(\Omega)$, muni d'une topologie au moins aussi forte que celle de ce dernier, et son dual topologique $\mathbb{E}'_c$.
On suppose qu'aucune des fonctionnelles de la forme

$$e \in \mathbb{E}_c \mapsto \langle e, s\rangle \text{ où } s \in L_n^1(\Omega)$$

n'est identiquement nulle sur $\mathbb{E}_c$.
Alors sous les hypothèses du théorème 6.6 la fonction F est convexe finie et continue sur $\mathbb{E}_c$ et sa duale F^* est de la forme (6.53).
C'est en particulier le cas d'un espace de fonctions continues ou différentiables et l'espace de mesures ou de distributions qui est son dual.

Chapitre 7

Convexité, lois d'effort et problèmes d'équilibre

7.1 Introduction

Les lois d'effort, au sens général que nous en avons donné en 3.2 dérivent très souvent d'un potentiel : l'une des deux variables, cinématique ou sthénique, est le gradient d'une fonction de l'autre. Le cas le plus banal est celui de l'élasticité linéaire : la contrainte est, au signe près, le gradient de l'énergie élastique de déformation [1].

Grâce à la théorie des fonctions duales cette formulation se généralise à un vaste domaine de lois d'effort, comme l'élasticité non linéaire et le comportement rigide-plastique (Nayroles [26]) tout en symétrisant le rôle des deux variables. On peut ainsi étendre les propriétés de stationnarité qui caractérisent les solutions comme nous le détaillions dans [28] et [29] et dans le présent chapitre.

D'une façon générale on pourra parler de "surpotentiels" puisque l'analyse convexe étend la notion de gradient à celle de sous-gradient. Ainsi les théories de plasticité expriment-elles la vitesse de déformation plastique comme un sous-gradient du surpotentiel constitué par la fonction indicatrice du domaine d'élasticité.

Plus tard Géry de Saxcé et ses élèves développèrent la "méthode du bipotentiel" (fonction de deux variables convexe pour chacune d'elles) pour modéliser des situations plus complexes comme celle du frottement sec (Saxcé [43]). Il en a donné récemment une présentation synthétique qui peut agréablement initier le lecteur à cette approche (Saxcé [44]).

Dans ce chapitre nous considérons un solide de type quelconque : tridimensionnel, plaque ou autre. Il occupe un domaine Ω de l'espace euclidien E^p, $1 \leq p \leq 3$, muni de la mesure de Lebesgue.

1. Il s'agit bien sûr de ce que certains puristes nomment "hyper-élasticité linéaire", vocable pesant pour dire qu'on est dans le cas banal...

7.2 Fonctions duales et lois d'effort dans la dualité déplacements-charges

Considérons la dualité $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathbb{F})$. Très souvent les lois d'efforts sur cet élément mécanique dérivent d'un potentiel $U(u)$ de déplacement ou de vitesses c'est-à-dire que la loi d'effort est $F = -grad\, U(u)$ ou, plus généralement si U est convexe (voire un sous-espace vectoriel dans le cas d'une liaison bilatérale), $F \in -\partial U(e)$.

Comme exemples banals citons le cas d'un effort constant F_o pour lequel $U = \langle\cdot, F_o\rangle_u$, ou encore celui d'une liaison unilatérale : $F \in -\partial\Psi_C(u)$ où C désigne un convexe dans lequel doit rester le point figuratif u tandis que la réaction d'appui F est nulle ou dirigée vers l'intérieur de C.

En un point $x \in \Omega$ la déformation généralisée $e(x)$ et la contrainte généralisée $s(x)$ sont représentées par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, leur véritable nature tensorielle étant indifférente dans ce qui suit. Dans les théories de viscosité ou de plasticité on doit d'ailleurs remplacer $e(x)$ par la vitesse de déformation $\dot{e}(x)$.

7.3 Fonctions duales et lois d'effort dans la dualité déformations-contraintes

Définition 7.1.
En (presque) tout point $x \in \Omega$ on se donne une fonction :

$$e \in \mathbb{R}^n \mapsto w(e,x) \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^n} \tag{7.1}$$

convexe et semi-continue inférieurement par rapport à la variable e.

On considère sa duale $w^*(\cdot,x)$ pour la forme bilinéaire du travail virtuel :

$$\begin{aligned}(e,s) \mapsto \langle e,s\rangle_x &= -e \cdot s \\ w^*(s,x) &= \sup_{\varepsilon}\left[\langle e,s\rangle_x - w(e,x)\right]\end{aligned}$$

On nomme souvent $w(\cdot,x)$ sur-potentiel de déformation et sa duale $w^*(\cdot,x)$ sur-potentiel de contrainte.

La forme locale de la loi de comportement définit alors le couple $(e,-s)$ comme couple de points conjugués par rapport au couple de fonctions duales (w,w^*) :

$$A(x) = 0 \text{ avec : } A(x) = w(e(x),x) + w^*(-s(x),x) - \langle e(x), -s(x)\rangle_x \tag{7.2}$$

tandis que sa forme globale s'écrit, sous les hypothèses du théorème 6.4 :

$$p.p.x \in \Omega \ : \ A(x) = 0 \iff W(e) + W^*(-s) - \langle e,-s\rangle = 0 \tag{7.3}$$

Lorsque w est différentiable par rapport à e la relation (7.2) équivaut évidemment à :

$$s = -\frac{\partial w}{\partial e}$$

et $w(e,x)$ est, au sens large des surpotentiels, la densité d'énergie potentielle de déformation.

7.3.1 Un exemple en l'élasticité non-linéaire

Dans tout cet alinéa on considère la dualité $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$ et deux convexes $C \in \mathbb{X}$, $C^o \in \mathbb{Y}$ mutuellement polaires.

Définition 7.2. ***Jauge d'un convexe***
Soit C un convexe contenant l'origine de $\mathbb{X}$. On nomme jauge de ce convexe la fonction $\mathscr{J}_C$:

$$\mathscr{J}_C(x) = \inf\{k \in]0, +\infty[\ / \ x \in k\,C\} \tag{7.4}$$

Proposition 7.1. ***Jauges conjuguées***
On considère la dualité $(\mathbb{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{Y})$ et deux convexes $C \in \mathbb{X}$, $C^o \in \mathbb{Y}$ mutuellement polaires. La fonction d'appui de l'un, C^o par exemple, est la jauge $\mathscr{J}_C$ de l'autre ; On dit que les jauges $\mathscr{J}_C$ et $\mathscr{J}_{C^o}$ sont conjuguées.

En effet :

$$\mathscr{J}_C(x) = \inf\{k \in]0, +\infty[\ / \ x \in k\,C\} = \sup_{y \in C^o} \langle x, y\rangle = \Psi^*_{C^o}(x) \tag{7.5}$$

Rappelons au passage une propriété des jauges :

Proposition 7.2. ***Jauges et normes***
Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel réel et C une partie convexe de $\mathbb{X}$; si C a les trois propriétés suivantes :

- *C est "absorbant" i.e. :*

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad \exists\, r > 0 \ : \ r\,x \in C$$

  ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{J}_C$ soit finie partout,
- *C ne contient pas de demi-droite issue de l'origine,*
- *C est "équilibré" :*

$$x \in C^o \Rightarrow -x \in C^o$$

alors $\mathscr{J}_{C^o}$ est une norme.

On a la propriété suivante :

Proposition 7.3. ***Un exemple de "duales de Young"***
Soient :

- *C et Co deux convexes mutuellement polaires,*
- *p et q deux réels l'un et l'autre inclus dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qui vérifient :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{7.6}$$

Alors la fonction $w = \frac{1}{p}(\mathscr{J}_C)^p$ a pour duale $w^* = \frac{1}{q}(\mathscr{J}_{C^o})^q$.

Calculons en effet la polaire de w ; on a :

$$w^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{X}} \left[\langle x, y\rangle - \frac{1}{p}(\mathscr{J}_C(x))^p \right]$$

et, comme C est absorbant on peut écrire :

$$w^*(y) = \sup_{J_C(x)=1} \sup_{r\geq 0} \left[r\,\langle x,y\rangle - r^p \frac{1}{p} (\mathscr{J}_C(x))^p \right]$$

et aprés du maximum par rapport à r :

$$w^*(y) = \sup_{J_C(x)=1} \frac{1}{q} [\langle x,y\rangle]^q$$
$$w^*(y) = \frac{1}{q} [\Psi_C^*(y)]^q = \frac{1}{q} [\mathscr{J}_{C^o}(y)]^q$$

Les notions de jauges conjuguées et de duales de Young sont détaillées par Moreau dans le chapitre 14 de[24].

Cas particuliers

Le cas de l'élasticité linéaire est celui où $p = q = 2$.

Pour ($p = 1$; $q = +\infty$) on est dans le cas de la plasticité classique lorsque y est une vitesse de déformation plastique ; w est la fonction d'appui du domaine d'élasticité C^o tandis que w^* est son indicatrice.

Il s'agit bien d'un cas limite ; en effet si p est fini et tend vers 1 alors q tend vers l'infini en sorte que :

$$s \in C^o \Rightarrow \mathscr{J}_{C^o}(s) \leq 1 \Rightarrow \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q} (\mathscr{J}_{C^o}(s))^q = 0$$
$$s \notin C^o \Rightarrow \mathscr{J}_{C^o}(s) > 1 \Rightarrow \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q} (\mathscr{J}_{C^o}(s))^q = +\infty$$

comme on pouvait s'y attendre.

L'autre cas limite est celui où ($p = +\infty$, $q = 1$) ; il concerne généralement la dualité entre déplacements et efforts : c'est celui d'une liaison unilatérale sans frottement qui impose à la variable géométrique x de rester dans le convexe C tandis que l'effort de liaison y est nul si u est intérieur à C et dirigé selon sa normale intérieure si x est sur sa frontière. Les "matériaux à blocage" relèvent aussi de ce schéma : x est une déformation et y une contrainte.

7.4 Problèmes d'équilibre

7.4.1 Les données d'un problème d'équilibre

Hypothèse 7.1. ***État de référence***
Les contraintes sont nulles et la température uniforme dans l'état de référence à partir duquel sont comptées les déformations.

Équations de liaison et diagrammes de dualité

On note $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathbb{F})$ la dualité entre l'espace vectoriel des déplacements de la structure libre de toute liaison explicite et l'espace des charges qui lui est

associé.

De *nouvelles*[2] *liaisons affines sans frottement* imposent un déplacement u de la forme :

$$u = u^o + v \in u^o + \mathbb{V} \tag{7.7}$$

où u^o est un déplacement imposé connu et $\mathbb{V}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{U}$.

Le diagramme de la figure 7.1 complète notre diagramme classique à quatre espaces par la dualité quotient $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_v, \Phi)$ où $\Phi = \mathbb{F}/\mathbb{V}^o$.

$\mathscr{I}$ désigne l'injection de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{U}$ et sa transposée $\mathscr{Q}$ l'application canonique du quotient.

FIGURE 7.1 – Dualité à six espaces

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Variables} & & \textit{Dualités} & & \textit{Variables} \\
v & \mathbb{V} & \langle\cdot,\cdot\rangle_v & \Phi = \mathbb{F}/\mathbb{V}^o & \varphi \\
 & \mathscr{I}\big\downarrow & & \big\uparrow\mathscr{Q} & \\
u, u^o & \mathbb{V} \subset \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle_u & \mathbb{F} & F \\
 & \mathscr{D}\big\downarrow & & \big\uparrow\mathscr{D}^t & \\
e, e^o, \varepsilon & \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} & s, \sigma
\end{array}$$

En posant $\Delta = \mathscr{D} \circ \mathscr{I}$ on a $\Delta^t = \mathscr{Q} \circ \mathscr{D}^t$ on réduit le diagramme utile aux quatre espaces de la figure 7.2.

FIGURE 7.2 – Dualité réduite à quatre espaces

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Variables} & & \textit{Dualités} & & \textit{Variables} \\
v & \mathbb{V} & \langle\cdot,\cdot\rangle_v & \Phi & \varphi \\
 & \Delta\big\downarrow & & \big\uparrow\Delta^t & \\
e, e^o, \varepsilon & \mathbb{E} & \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon & \mathbb{S} & s, \sigma
\end{array}$$

La *déformation totale* est de la forme

$$e = \varepsilon + e^o \tag{7.8}$$

$$\text{avec : } \varepsilon = \mathscr{D}v = \Delta v \tag{7.9}$$

$$\text{et : } e^o = \mathscr{D}u^o + e^{oo} \tag{7.10}$$

2. c'est-à-dire indépendantes des éventuelles liaisons implicites qui interviennent dans la définition de $\mathbb{U}$.

où $\mathscr{D}$ est l'opérateur de déformation tandis que e^o est la déformation imposée totale, somme de la contribution de u^o et d'un second terme e^{oo}, dû par exemple à la dilatation thermique[3], ou encore à un quelque autre phénomène physico-chimique.
On suppose qu'aucun de ces deux termes n'a d'influence sur la loi de comportement qui s'écrit comme en (7.18).

Efforts et équation d'équilibre

Dans les diagrammes 7.1 et 7.2 on a noté F la charge vue de la dualité $(\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle_u, \mathbb{F})$ et $\varphi = \mathscr{Q}F$ sa traduction en termes de la dualité quotient $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_v, \Phi)$.
L'équation d'équilibre entre charge et contraintes s'écrit donc,
soit :

$$F + \mathscr{D}^t s = 0 \tag{7.11}$$

pour la première dualité, soit :

$$\varphi + \Delta^t s = 0 \tag{7.12}$$

pour la seconde.

Dans tout ce qui suit on suppose que les lois d'effort sont formulées en termes de points conjugués par rapport à un couple de fonctions duales.

Lois de charge

On suppose la loi de charge de la forme $F \in -\partial U(u)$ où U est convexe s.c.i. et admet donc une duale U^*. On écrit donc :

$$U(u) + U^*(-F) - \langle u, -F\rangle_u = 0 \tag{7.13}$$
$$V(v) + V^*(-\varphi) - \langle v, -\varphi\rangle_v = 0 \tag{7.14}$$

où :

$$V(v) = U(v + u^{\mathrm{o}}) \tag{7.15}$$

Il est intéressant de calculer la duale de V pour la dualité $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_v, \Phi)$. On a d'après (6.24) :

$$U^*(\cdot + u^{\mathrm{o}}) = U^* - \langle u^{\mathrm{o}}, \cdot\rangle_u$$

et d'après (6.47), *en supposant que le sous-espace vectoriel* $\mathbb{V}$ *rencontre l'intérieur de* $domU$:

$$\begin{aligned} V^*(QF) &= [U(\cdot + u^{\mathrm{o}}) + \Psi_{\mathbb{V}}]^*(F) \\ &= \min_{F' \in \mathbb{V}^{\mathrm{o}}} [U^*(F - F') - \langle u^{\mathrm{o}}, F - F'\rangle] \end{aligned}$$

Alors d'après le corollaire 6.1 :

$$V^*(\varphi) = \min_{F \in Q^{(}-1)(\varphi)} [U^*(F) - \langle u^{\mathrm{o}}, F\rangle] \tag{7.16}$$

3. dans ce cas $e^{oo} = -\chi\theta$, où $\chi \in \mathbb{E}$ est le tenseur des coefficients de dilatation thermique et θ la différence entre la température actuelle et celle de l'état de référence.

Loi de comportement

Elle s'exprime en termes des fonctions duales W et W^* :

$$W(e) + W^*(-s) - \langle e, -s \rangle_e = 0 \tag{7.17}$$

soit, en tenant compte de la liaison (7.8) et de la règle de translation (6.24) :

$$W(\varepsilon) + W^*(-s) - \langle \varepsilon + e^{\mathrm{o}}, -s \rangle_e = 0 \tag{7.18}$$

Système à résoudre

En ne gardant que les quatre inconnues $v \in \mathbb{V}, \varepsilon \in \mathbb{E}, \varphi \in \Phi, s \in \mathbb{S}$ les équations précédentes se réduisent au système suivant :

$$\varepsilon = \Delta v \tag{7.19a}$$

$$\Delta^t s + \varphi = 0 \tag{7.19b}$$

$$V(v) + W(\varepsilon + e^{\mathrm{o}}) + V^*(-\varphi) + W^*(-s) - \langle v, -\varphi \rangle_v - \langle \varepsilon + e^{\mathrm{o}}, -s \rangle_e = 0 \tag{7.19c}$$

où, en vertu de l'inégalité de Fenchel, l'unique équation (7.19c) équivaut aux deux lois d'effort (7.14) et (7.18).

7.4.2 Propriétés d'extremum et existence des solutions

Éliminons maintenant les inconnues ε et φ en utilisant les relations (7.19a, 7.19b) et en utilisant la transposition pour faire disparaître v et ε du second membre de (7.30).

Considérons les fonctions

$$v \in \mathbb{V} \mapsto \mathscr{E}_p(v) = V(v) + W(\Delta v + e^{\mathrm{o}}) \tag{7.20a}$$

$$s \in \mathbb{S} \mapsto \mathscr{E}_c(s) = -V^*(\Delta^t s) - W^*(-s) - \langle e^{\mathrm{o}}, s \rangle_e \tag{7.20b}$$

en sorte que le système précédent équivaut à l'équation :

$$\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_c \tag{7.21}$$

La fonction $\mathscr{E}_p$ est classiquement l'énergie potentielle du système mécanique.
Les mécaniciens des structures utilisent traditionnellement un vocabulaire plus confidentiel en nommant $\mathscr{E}_c$ "énergie complémentaire".

Utilisation de la dualité produit

La dualité produit

$$(\mathbb{V} \times \mathbb{E},\ \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_v + \langle \cdot, \cdot \rangle_e,\ \Phi \times \mathbb{S})$$

simplifie les concepts et les démonstrations.

Proposition 7.4.

- *1. Les sous-espaces* $\mathbb{P} = \{(v, \Delta v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{E}\}$ *et* $\mathbb{Q} = \{(-\Delta^t s, s) \in \Phi \times \mathbb{S}\}$ *sont mutuellement polaires.*
- *2. Pour la dualité produit la fonction*

$$(v, e) \in \mathbb{V} \times \mathbb{E} \mapsto E_p(v, e) = V(v) + W(e + e^o) \tag{7.22}$$

a pour duale la fonction

$$(\varphi, s) \in \Phi \times \mathbb{S} \mapsto -E_c(\varphi, s) = V^*(\varphi) + W^*(s) - \langle e^o, s\rangle_e \tag{7.23}$$

- *La fonction* $\mathscr{E}_p$ *est la restriction de* E_p *à* $\mathbb{P}$ *et* $\mathscr{E}_c$ *celle de* E_c *à* $\mathbb{Q}$.

En effet le point 1. a fait l'objet de la proposition 2.25.
Le point 2. résulte immédiatement du découplage des variables (v, φ) et (ε, e).
Le point 3. est tautologique.

Existence et propriétés des minimums

Hypothèse 7.2.
Les fonctions V, $W(\cdot + e^o)$, V^* *et* $W^* - \langle e^o, \cdot\rangle_e$ *sont majorées au voisinage de l'origine.*

Comme (V, V^*) et $(W(\cdot + e^o), W^* - \langle e^o, \cdot\rangle_e)$ sont deux paires de fonctions duales le théorème 6.3 assure alors l'existence d'un minimum de chacune des fonctions E_p et $-E_c$ sur les sous-espaces fermés respectifs $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$, c'est -à-dire l'existence d'un minimum pour chacune des restrictions $\mathscr{E}_p$ et $-\mathscr{E}_c$.

Si maintenant E_c est minimum en $(v_1, \Delta v_1) \in \mathbb{P}$ alors, comme l'énonce la formule (6.44) de la proposition 6.13 :

$$\exists(-\Delta^t s_1, s_1) \in \partial E_p(v_1, \Delta v_1)$$

soit en exprimant la conjugaison des vecteurs orthogonaux $(v_1, \Delta v_1)$ et $(-\Delta^t s_1, s_1)$: par rapport au couple de fonctions duales E_p et $-E_c$:

$$E_p(v_1, \Delta v_1) - E_c(-\Delta^t s_1, s_1) = 0$$

c'est-à-dire, pour leurs restrictions :

$$\mathscr{E}_p(v_1) - \mathscr{E}_c(s_1) = 0$$

et donc (v_1, s_1) est solution de l'équation (7.21).
La démonstration symétrique s'applique aux couples $(\Delta s_1, s_1)$ qui maximisent l'énergie complémentaire E_c.
Enfin si (v_1, s_1) est une solution et si $\mathscr{E}_p$ (resp. $\mathscr{E}_c$) est strictement convexe alors v_1 (resp. s_1) est unique.
On peut donc énoncer le théorème :

Théorème 7.1. ***Existence et propriétés extrémales des solutions***
Sous l'hypothèse 7.2 le système (7.19a,7.19b,7.19c), équivalent à l'équation $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_c$, *admet des solutions qui minimisent l'énergie potentielle* $\mathscr{E}_p$ *et maximisent l'énergie complémentaire* $\mathscr{E}_c$.

7.4.3 La fonctionnelle de Reissner

On nomme ainsi la fonctionnelle

$$(v,s) \in \mathbb{V} \times \mathbb{S} \mapsto \mathscr{R}(v,s) = -W^*(-s) - \langle e^{\mathrm{o}}, s\rangle_e + V(v) - \langle v, \Delta^t s\rangle_v \tag{7.24}$$

est une "fonction-selle" c'est-à-dire que, pour tout s, elle est convexe par rapport à v et, pour tout v, concave par rapport à s.

On dit que (v_1, s_1) est un "col" de $\mathscr{R}$ si :

$$\mathscr{R}(v_1,s_1) = \min_{v\in\mathbb{V}} \mathscr{R}(v,s_1) = \max_{s\in\mathbb{S}} \mathscr{R}(v_1,s) \tag{7.25}$$

(v_1, s_1) vérifie alors :

$$0 \in \partial_v \mathscr{R}(v_1,s_1) \tag{7.26}$$

$$0 \in \partial_s[-\mathscr{R}(v_1,s_1)] \tag{7.27}$$

et $\mathscr{R}$ est stationnaire en (v_1, s_1).

Théorème 7.2. ***Stationnarité de la fonctionnelle de Reissner***
Le couple (v_1, s_1) est solution du problème d'équilibre si et seulement s'il est un col de $\mathscr{R}$.

En effet on a :

$$0 \in \partial_v \mathscr{R}(v_1,s_1) = \partial V(v_1) - \Delta^t s_1 \iff \exists\, \varphi_1 \in \partial V(v_1) \ : \ \varphi_1 + \Delta^t s = 0$$

$$0 \in \partial_s \mathscr{R}(v_1,s_1) = \partial W^*(-s_1) - e^{\mathrm{o}} - \Delta v \iff \exists\, e_1 \in \partial W^*(-s_1) \ : \ e_1 = e^{\mathrm{o}} + \Delta v$$

en sorte que la stationnarité en v équivaut à l'équilibre entre une charge φ_1 et la contrainte s_1,
tandis que la stationnarité en v équivaut à la vérification de la loi de comportement par $e^{\mathrm{o}} + \Delta v$ et s_1.

Cas où la charge est une constante donnée φ^{o}

C'est la situation communément traitée dans la littérature. Que deviennent les formules précédentes ?

On note s^{o} une solution particulière de l'équation d'équilibre :

$$\varphi^{\mathrm{o}} + \Delta s^{\mathrm{o}} = 0$$

et l'on pose :

$$\varepsilon = \Delta v \in \Delta(\mathbb{V})$$

$$\sigma = s - s^{\mathrm{o}} \in \Delta^{t\,-1}(\Phi)$$

L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\mathscr{E}_p(v) = W(\Delta v + e^{\mathrm{o}}) - \langle v, \varphi^{\mathrm{o}}\rangle_v = W(\varepsilon + e^{\mathrm{o}}) + \langle \varepsilon, s^{\mathrm{o}}\rangle_e \tag{7.28}$$

On calcule maintenant les expressions de V et de sa duale :

$$V = -\langle \cdot, \varphi^{\mathrm{o}}\rangle_e \ ; \ V^* = \Psi_{\{-\varphi^{\mathrm{o}}\}} \tag{7.29}$$

ce qui donne pour l'énergie complémentaire :

$$s \in \mathbb{S} \mapsto \mathscr{E}_c(s) = -W^*(-\sigma - s^{\mathrm{o}}) - \langle e^{\mathrm{o}}, \sigma + s^{\mathrm{o}}\rangle_e \tag{7.30}$$

et pour la fonctionnelle de Reissner :

$$\mathscr{R}(v,s) = -W^*(-s) - \langle e^{\mathrm{o}}, s\rangle_e - \langle v, \varphi^{\mathrm{o}} + \Delta^t s\rangle_v \tag{7.31}$$

Chapitre 8

Réduction du nombre de degrés de liberté en élasticité linéaire

8.1 Pourquoi réduire le nombre des degrés de liberté

La modélisation numérique des structures utilise un nombre de degrés de liberté dont la croissance accompagne celle de la puissance de calcul disponible ; parallèlement l'amélioration des techniques de résolution des grands systèmes d'équations permet de conserver une précision satisfaisante. On peut donc espérer que ce développement engendrera des codes plus généraux et plus précis.

De fait la majorité de ces codes concerne surtout les types de structures qu'ils permettent de calculer pour les lois de comportement disponibles ; cependant ils se limitent le plus souvent à des problèmes courants pour des structures banales, ce qui couvre en effet la quasi totalité de la demande industrielle.

À côté de cette situation courante il est cependant bien des problèmes peu banals qui sont à la modélisation ce que les maladies orphelines sont à la médecine ! Leur résolution demande un utilisateur averti qui sache tenir compte de leurs spécificités : précision souhaitée, distribution très particulière des champs, zones connues pour leur fragilité, mécanismes de flambement connus expérimentalement etc.

S'ils sont suffisamment conviviaux les codes "ouverts" permettent effectivement une intervention minutieuse de l'ingénieur ou du chercheur ; la construction d'une modélisation adéquate est alors beaucoup plus efficace que la mise en œuvre d'un processus standard.

Il arrive aussi qu'on ne dispose que d'un ordinateur personnel pour construire la bonne modélisation ; la réduction du nombre des degrés de liberté est alors nécessaire à sa mise en œuvre. Au demeurant cette modélisation ne servira qu'un petit nombre de fois : une dizaine d'heures de calcul sur un ordinateur personnel reste un délai très raisonnable pour son exécution, et même négligeable à côté du temps passé à imaginer et à construire la bonne solution.

En fin de compte, quelle que soit la puissance de calcul disponible, les techniques de réduction permettent de traiter des problèmes dont la taille excède les capacités de la machine.

Solutions quasi-exactes

La solution numérique qu'on obtiendrait par une modélisation très fine de la structure est très voisine de la solution exacte. Nous nommerons "solution quasi-exacte" cette solution finement approchée qui peut servir de référence pour l'évaluation d'approximations plus grossières qui l'encadrent : c'est l'écart entre ces dernières qui témoigne de la précision obtenue. Encore faudra-t-il préciser ce qu'on entend par encadrement.

Les grandes structures sont le plus souvent composées de nombreuses sous-structures ; on peut réaliser une modélisation très fine de celles-ci, mais leur nombre rend impraticable l'assemblage qui conduirait à une solution quasi-exacte pour la structure complète. En pratique on réduit le nombre de ddl des sous-structures avant leur assemblage.

On dispose de deux types de réduction : cinématique d'une part, sthénique de l'autre, pour obtenir un encadrement de la raideur de chacune des sous-structures, et, après assemblage, un encadrement de la raideur globale.

L'*approximation cinématique* est banale : elle consiste à construire des champs cinématiquement admissibles dont on minimise l'énergie potentielle. C'est une des bases de la méthode des éléments finis.

L'*approximation sthénique* consiste à construire des champs statiquement admissibles dont on maximise l'énergie complémentaire.

Cette construction est difficile pour un milieu continu, sauf si l'on connaît une sorte de fonction d'Airy qui permette d'engendrer une famille de champs auto-équilibrés dense dans le noyau de l'opérateur d'équilibre. Mais lorsqu'on dispose d'un maillage fin d'une sous-structure on peut réaliser une réduction sthénique qui, associée à une réduction cinématique, fournira un encadrement, non pas de la solution exacte, mais de la solution quasi-exacte, sans qu'on ait besoin de calculer cette dernière.

En menant en parallèle les réductions sthéniques et cinématiques des sous-structures on obtient, après assemblage, un encadrement de la solution quasi-exacte globale.

Cette technique de calcul nous a permis, dans une étude de stabilité des grilles d'assemblage réalisée pour Framatome, de réduire le nombre de nœuds utiles (6 ddl par nœud) de plusieurs dizaines de milliers à 18 pour un encadrement de la solution quasi-exacte à 2 ou 3% près, encadrement confirmé par l'expérience.

Nous verrons que la méthode dite "frontale" [5] ou encore de "condensation statique" est une variante, sans perte de précision, de la méthode de réduction sthénique.

Terminologie Les réductions du nombre de ddl engendrent des solutions approchées du problème initial. C'est pourquoi nous utiliserons indifféremment

les vocables "approximation" ou "réduction".

8.2 Méthode générale de réduction en élasticité linéaire

Notations 8.1. ***Formes bilinéaires et matrices***
Pour simplifier les notations on notera toujours par $\langle u, f\rangle$ la forme bilinéaire $u^t f$ où u et f sont des colonnes de $\mathbb{R}^n$.
Toutes les matrices seront encadrées par des crochets indépendamment de leur nature (rectangulaire, colonnes, lignes) comme par exemple dans la formule (8.4)

8.2.1 Deux éléments mécaniques pour la même structure

On considère une structure élastique dite *"originelle"*, représentée par l'élément mécanique S :

$$S = (\mathbb{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{F})$$

où les espaces $\mathbb{U}$ et $\mathbb{F}$ sont identifiés à $\mathbb{R}^n$. On note K sa raideur et $ker(K)$ le noyau de celle-ci.

On souhaite remplacer S par une structure *"réduite"* :

$$S^r = (\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{G})$$

où les espaces $\mathbb{V}$ et $\mathbb{G}$ sont identifiés à $\mathbb{R}^p$, avec $p < n$. A cette fin on se donne un système linéaire :

$$Au - Bv = 0 \ , \ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ , \ B \in \mathbb{R}^{m\times p} \ , \ n \geq m \ , \ n \geq p \tag{8.1}$$

et l'on pose le problème suivant :

Problème 8.1. ***Problème de base***
Soit $g \in \mathbb{G}$ un effort exercé sur S^r ; trouver $(u, v, f) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{F}$ solution du système

$$Ku = f \tag{8.2a}$$
$$Au - Bv = 0 \tag{8.2b}$$
$$A\delta u - B\delta v = 0 \Rightarrow f^t\delta u = g^t\delta v \tag{8.2c}$$

où l'équation (8.2c) demande l'égalité des puissances virtuelles.

Si λ désigne une colonne de multiplicateurs de Lagrange on a l'équivalence classique :

$$(8.2c) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}^m : \left\{ \begin{array}{l} f = A^t\lambda \\ g = B^t\lambda \end{array} \right. \tag{8.3}$$

ce qui permet d'énoncer la proposition :

Proposition 8.1. ***Cas où l'effort g est donné***
Le problème 8.1 se ramène à la résolution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} K & 0 & -A^t \\ 0 & 0 & B^t \\ -A & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Ensuite, si l'on pose :

$$M = \begin{bmatrix} K & -A^t \\ -A & 0 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

on déduit de (8.4) la proposition suivante :

Proposition 8.2. ***Cas où c'est le déplacement*** v ***qui est donné***
Si l'on choisit de se donner v et de considérer g comme une inconnue, le triplet (g, u, λ) est solution du système (8.6a,8.6b) suivant :

$$M \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Bv \end{bmatrix} \tag{8.6a}$$

$$g = B^t \lambda \tag{8.6b}$$

8.2.2 Deux remarques

1. Conditionnement de la matrice M

Très souvent les termes de la matrice K prennent de grandes valeurs, de l'ordre de 10^6 par exemple, alors que ceux de la matrice de liaison A sont de l'ordre de l'unité. Il en résulte un mauvais conditionnement de M ; on y remédie en remplaçant (8.6a) par :

$$\begin{bmatrix} K & -\alpha A^t \\ -\alpha A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Bv \end{bmatrix} \; ; \; u = \alpha u_1 \; ; \; \lambda = \alpha^2 \lambda_1 \tag{8.7}$$

où $\alpha > 0$ est de l'ordre de grandeur des termes de K.

2. Un troisième élément mécanique, implicite

Nous avons implicitement introduit une structure intermédiaire entre la structure originelle et la structure réduite, comme l'explique le diagramme suivant.

FIGURE 8.1 – Structure intermédiaire

	Dimension	*Variables*		*Dualités*		*Variables*
str.initiale	n	u	$\mathbb{U}$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_u$	$\mathbb{F}$	f
			$A \downarrow$		$\uparrow A^t$	
str.intermédiaire	$m \leq n$	w	$\mathbb{W}$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_w$	$\mathbb{H}$	λ
			$B \uparrow$		$\downarrow B^t$	
str.réduite	$p \leq n$	v	$\mathbb{V}$	$\langle \cdot, \cdot \rangle_v$	$\mathbb{G}$	g

8.2.3 Existence et unicité de la solution

Sous un jeu d'hypothèses, toujours vérifiées lorsque le changement de variables est convenablement choisi, on va montrer la

Proposition 8.3. ***Régularité de la matrice M***
Sous les hypothèses suivantes :

- *1. A comporte m colonnes non nulles et linéairement indépendantes. ainsi :*

$$A^t\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \tag{8.8}$$

- *2. Les liaisons (8.1) interdisent, lorsque $v = 0$, tout déplacement de corps rigide, autrement dit*

$$ker(A) \cap ker(K) = \{0\} \tag{8.9}$$

la matrice M (cf.8.5) est régulière.

En effet :

$$M\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u \in ker(A) \iff u^tA^t = 0$$

$$M\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow Ku - A^t\lambda = 0 \Rightarrow u^tKu - u^tA^t\lambda = 0 \Rightarrow u \in ker(K)$$

et donc, en vertu de l'hypothèse 2 : $u = 0$.
Enfin, comme $m \leq n$, on a en vertu de l'équivalence (8.8) :

$$(u = 0 \; et \; Ku - A^t\lambda = 0) \Rightarrow \lambda = 0$$

ce qui achève la démonstration.

La matrice M est composée de quatre blocs de dimensions $\begin{bmatrix} n\times n & n\times m \\ m\times n & m\times m \end{bmatrix}$
On décompose son inverse N en quatre blocs de mêmes dimensions :

$$N = M^{-1} = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{12} \\ N^{21} & N^{22} \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

ce qui permet, lorsque v est donné, d'écrire la solution sous la forme :

$$\begin{aligned} u &= -N^{12}Bv \\ \lambda &= -N^{22}Bv \\ f &= -A^tN^{22}Bv \\ g &= -B^tN^{22}Bv \end{aligned} \tag{8.11}$$

On dispose alors de l'élément mécanique S^r dont la raideur est

$$K^r = -B^tN^{22}B \tag{8.12}$$

On va voir que K^r est positive.

En effet notons I_n et I_m les matrices unités $n\times n$ et $m\times m$ et développons la relation $MN = I_{n+m}$:

$$KN^{11} - A^tN^{21} = I_n \tag{8.13a}$$

$$KN^{12} - A^tN^{22} = 0 \tag{8.13b}$$

$$-AN^{11} = 0 \tag{8.13c}$$

$$-AN^{12} = I_m \tag{8.13d}$$

De (8.13b et de (8.13d) on déduit :

$$N^{22}A = N^{21}K \Rightarrow -N^{22} = N^{21}KN^{12}$$

ce qui montre la

Proposition 8.4. ***La nouvelle raideur K^r est positive***
N^{22} est négative et K^r positive.

8.2.4 Correspondance entre les noyaux de K et de K^r

On va démontrer la

Proposition 8.5. ***Correspondance des noyaux***
Si v appartient au noyau de B alors u est nul. Plus généralement v appartient au noyau de K^r si et seulement si u appartient à celui de K.

En effet si v appartient au noyau de B, donc à celui de K^r, alors la solution (8.11) indique que f et g sont nuls en sorte que u appartient au noyau de K ; d'après la relation de liaison (8.2b) u appartient aussi au noyau de A ; la relation (8.9) entraîne que u est nul.

Examinons maintenant le cas où v appartient au noyau de K^r sans appartenir à celui de B.

Comme

$$K^r = B^t N^{21}\, K\, N^{12}\, B$$

on a les équivalences :

$$\left.\begin{array}{c} v \in ker(K^r) \\ v \notin ker(B) \end{array}\right\} \iff N^{12}A\,u \in ker(K) \iff A\,u \in A\,ker(K) \tag{8.14}$$

la seconde étant obtenue à l'aide de (8.13d).

Maintenant, $A^\dagger$ désignant une pseudo-inverse de A, on a les implications :

$$v \notin ker(B) \Rightarrow u \notin ker(A) \Rightarrow A^\dagger A\,u = u$$
$$ker(A) \cap ker(K) = \{0\} \Rightarrow A\,ker(K) = ker(K)$$

en sorte que les équivalences (8.14) conduisent à

$$v \in ker(K^r) \iff u \in ker(K)$$

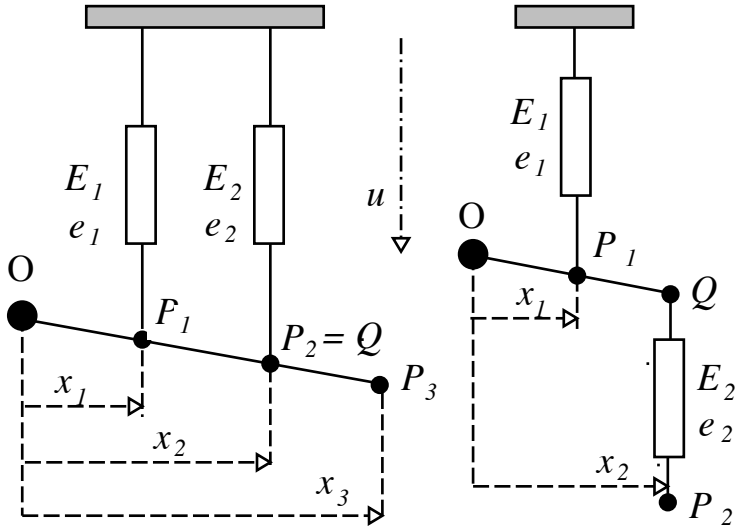
que v appartienne au noyau de B ou non.

8.2.5 Modèles rhéologiques

Les enseignants de mécanique des solides illustrent souvent leur propos par des "modèles rhéologiques" qui favorisent la compréhension intuitive des lois de comportement, au moins dans leur forme unidimensionnelle. On pourra consulter en ligne l'exposé de Georges Cailletaud [6] 2010. Un modèle rhéologique consiste en l'assemblage de "briques" de type répertorié comme le ressort pour l'élasticité linéaire, le patin de frottement pour le rigide-plastique, l'amortisseur pour la viscosité etc.

C'est bien évidemment l'assemblage lui-même, et non ses composants, que nous observerons ici pour donner des exemples simples de la théorie précédente. L'assemblage "en parallèle " et l'assemblage "en série" sont des exemples types des réductions du type "cinématique" ou du type "sthénique" que nous étudierons plus loin. La figure 8.2 en montre une généralisation parmi d'autres. Quant au "pont de Wheatstone", représenté par la figure 8.3, c'est un exemple plus général qui ne se ramène pas à une combinaison des assemblages précédents.

FIGURE 8.2 – Montages en parallèle et en série généralisés



On désigne par x^i l'abscisse d'un point P^i, par $u^i = u(P^i)$ son déplacement.

On considère deux éléments élastiques unidimensionnels E^1 et E^2 d'allongements respectifs e^1 et e^2, liés à un bras rigide le premier en P^1, le second en Q. Ce bras est articulé en un point fixe O.

Dans le **montage en parallèle généralisé** le point P^2 coïncide avec le point Q ; l'autre extrémité de E^1 ou de E^2 est fixe, en sorte que :

$$e^1 = u^1 \ , e^2 = u^2$$

La nouvelle variable est le déplacement $v = u^3$ d'un point P^3 du bras. Le montage en parallèle classique est le cas particulier où $x^1 = x^2 = x^3$.

Dans le **montage en série généralisé** l'autre extrémité de E^1 est fixe ; l'élément E^2, situé de l'autre côté du bras, a pour extrémités Q et P^2, point dont le

déplacement est nouvelle variable $v = u^2$. On a donc :

$$e^1 = u^1 \ , \ e^2 = v - \frac{x^2}{x^1} u^1$$

Le montage en série classique est le cas particulier où $x^1 = x^2$.

Dans les formules suivantes k^i désigne la raideur de l'élément E^i ; K^p et K^s désignent les raideurs des assemblages par rapport aux u^i tandis que K^{pg} et K^{sg} désignent leur raideur globale par rapport à la variable unidimensionnelle v.

$$A^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.15a}$$

$$B^p = \begin{bmatrix} x^1/x^3 \\ x^2/x^3 \end{bmatrix} \qquad B^s = [1] \tag{8.15b}$$

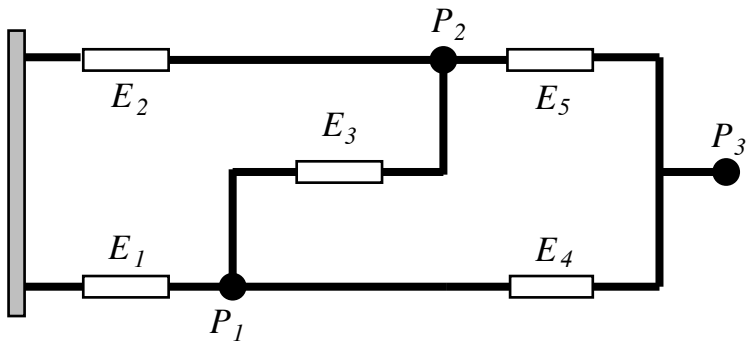
$$K^p = \begin{bmatrix} k^1 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} \qquad K^s = \begin{bmatrix} k^1 + k^2 (x^2/x^1)^2 & -k^2 x^2/x^1 \\ -k^2 x^2/x^1 & k^2 \end{bmatrix} \tag{8.15c}$$

$$K^{pg} = (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2)/x_3^2 \qquad K^{sg} = k_1 k_2 x_1^2/(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \tag{8.15d}$$

On a déduit les matrices K^p et K^s de l'expression de l'énergie élastique.

Association en pont de Wheatstone
Représenté par la figure 8.3, ce montage ne peut être identifié à une combinaison de montages en série et en parallèle ; il entre toutefois dans le cadre général décrit par le problème 8.1 pour les matrices A, B et K^w suivantes :

FIGURE 8.3 – **Association en pont de Wheatstone**



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ B = [1]$$

$$K^w = \begin{bmatrix} k^1 + k^3 + k4 & -k^3 & -k^4 \\ -k^3 & k^2 + k^3 + k^5 & -k^5 \\ -k^4 & -k^5 & k^4 + k^5 \end{bmatrix}$$

qui conduisent à la raideur globale :

$$K^{wg} = \frac{k_1k_2k_4 + k_1k_3k_4 + k_2k_3k_4 + k_1k_2k_5}{(k_1+k_3+k_4)(k_2+k_3+k_5) - k_3^2} + \frac{k_1k_3k_5 + k_2k_3k_5 + k_1k_4k_5 + k_2k_4k_5}{(k_1+k_3+k_4)(k_2+k_3+k_5) - k_3^2}$$

8.3 Rappel sur les faisceaux de formes quadratiques

8.3.1 Faisceaux libres

Généralités

De nombreux ouvrages traitent des faisceaux de formes quadratiques. Deux bonnes références sont, pour la mathématique, la traduction en français de l'ouvrage de F. R. Gantmacher ([15] tome 2 chapitre 10) et, pour la théorie des vibrations, celui de L. Meirovitch ([19], chapitre 4).

Notations 8.2. ***Notations vectorielles et matricielles***
On identifie un vecteur $\vec{u}$ de l'espace euclidien E^n à la colonne u de ses composantes u^k dans la base naturelle de $\mathbb{R}^n$, elle même identifiée à la matrice unité I_n.
Toute autre base est représentée par une matrice W $(n \times n)$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. On a donc $u = W v$ où v est la colonne des composantes v^k de $\vec{u}$ dans la base U.

Définition 8.1. ***Faisceaux de formes quadratiques***

- *On appelle ainsi une application :*

$$(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto F(u, \lambda) = u^t A u - \lambda u^t B u \in \mathbb{R} \tag{8.16}$$

  où A et B sont des matrices symétriques réelles $n \times n$.
- *On dit que le faisceau est "régulier" si A est non négative et si B est définie positive.*
- *On dit que $\lambda(k)$ est une valeur propre*[1]*associée au vecteur propre u^k si*

$$F(u_k, \lambda(k)) = 0 \text{ i.e. : } u_k^t K u - \lambda(k) u^t B u = 0 \tag{8.17}$$

Pour faciliter une étude complémentaire du lecteur sur l'ouvrage de Gantmacher nous avons repris ses notations : en particulier les matrices A et B de la définition précédente n'ont-elles rien à voir avec leur homonymes du paragraphe 8.2.

La plupart des applications utilisent cette notion dans trois situations différentes :

- 1. A est une matrice de raideur et B est la matrice unité dans le calcul des *valeurs propres de A*, ou encore des *axes principaux de la quadrique* d'équation $u^t A u = 1$.
- 2. A est une matrice de raideur et B une matrice de masse dans le calcul des *fréquences propres d'une structure*,
- 3. A est une matrice de "raideur géométrique" et B une matrice de raideur définie positive dans le calcul des *charges critiques de flambement*.

1. Traditionnellement les mathématiciens français les nomment "valeurs caractéristiques" et leurs inverses "valeurs propres". C'est contraire à l'usage international et notre appellation "valeur propre" est directement traduite du mot universel "eigenvalue".

Remarque 8.1. ***Caractère intrinsèque des vecteurs et des valeurs propres***
Les matrices A et B représentent des opérateurs linéaires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ de l'espace euclidien E^n. La relation matricielle de définition (8.16) équivaut donc à son expression vectorielle :

$$(\vec{u}, \lambda) \in E^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathscr{F}(\vec{u}, \lambda) = \vec{u} \cdot \mathscr{A}(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \mathscr{B}(\vec{u}) \tag{8.18}$$

qui n'est pas affectée par le changement de base $u = W\,v$ dans $\mathbb{R}^n$. Celui-ci conduit à l'expression matricielle G du même faisceau :

$$(v, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto G(v, \lambda) = v^t W^t A\, W\, v - \lambda v^t W^t B W\, v \in \mathbb{R}$$

lui aussi équivalent à $\mathscr{F}$.

Valeurs et vecteurs propres

On nomme

$$\det(A - \lambda B) = 0 \tag{8.19}$$

"équation caractéristique du faisceau".

C'est une équation algébrique de degré n. On a tout d'abord :

Proposition 8.6.
Les valeurs propres $\lambda(k)$ sont les n racines, éventuellement multiples, de l'équation caractéristique (8.19).

En effet à chaque $\lambda(k)$ est associé au moins un vecteur u^k solution de $(A - \lambda B) = 0$.

Remarque
Comme certaines valeurs propres peuvent être multiples on a noté $\lambda(k)$ plutôt que λ^k la valeur propre associée au vecteur propre u^k pour éviter une confusion entre le numéro de ce dernier, qui va de 1 à n et celui de la valeur propre associée qui peut être inférieur à k s'il y a des racines multiples.

On pose

$$D = B^{-1} A \tag{8.20}$$

$$\langle u_1 | u_2 \rangle = u_1^t B\, u_2 \tag{8.21}$$

Proposition 8.7. ***Le faisceau et la matrice D ont le même jeu de valeurs et de vecteurs propres***

- *1. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire qui définit une métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$;*
- *2. D est un opérateur symétrique pour ce produit scalaire ; il possède donc n valeurs propres réelles ;*
- *3. les valeurs et vecteurs propres de D sont les valeurs et vecteurs propres de F*

En effet

- 1. B est symétrique définie positive ce qui démontre le point 1.

- 2. On a ensuite, en utilisant les symétries de A et de B comme indiqué dans les formules suivantes :

$$\langle D\, u_1 | u_2 \rangle = u_1^t D^t B\, u_2 = (\text{sym de } B) = u_2^t B\, D\, u_1 = u_2^t A\, u_1$$
$$\langle u_1 | D\, u_2 \rangle = u_1^t\, B D\, u_2 = u_1^t A\, u_2 = (\text{sym de } A) = u_2^t A\, u_1 = \langle D\, u_1 | u_2 \rangle$$

ce qui établit le point 2.

– 3. Enfin on a l'implication :

$$B^{-1}A\,u_k = \lambda(k)u_k \iff A\,u_k = \lambda(k)B\,u_k \Rightarrow u_k^t A\,u_k = \lambda(k)u_k^t B\,u_k \tag{8.22}$$

en sorte que les n valeurs propres de D sont des valeurs propres du faisceau, et coïncident donc avec les n solutions de l'équation caractéristique (8.19) tandis que les n vecteurs propres de D sont les n vecteurs propres associés du faisceau, ce qui démontre le point 3.

Matrices principales et diagonalisation simultanée de A et de B

On sait que D admet n vecteurs propres linéairement indépendants. On peut donc les orthonormaliser par rapport à B. Ils sont alors les colonnes d'une matrice U, nommée *matrice principale du faisceau*, qui vérifie $U^t\,B\,U = I_n$ et le changement de variables $u = U\,v$ diagonalise simultanément K et B :
Proposition 8.8.

– *1. Le changement de variable $u = U\,v$ simultanément les matrices A et B, i.e. :*

$$U^t B\,U = I_n \tag{8.23a}$$

$$U^t A\,U = Diag(\lambda(k)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda(k) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{8.23b}$$

$$u^t A\,u = \sum_{k=1\dots n} \lambda(k) y_k^2\ ,\ u^t B\,u = \sum_{k=1\dots n} y_k^2 \tag{8.23c}$$

Où les y_k sont les composantes de u dans la base U.

– *2. Inversement si la matrice de changement de variables U vérifie les relations (8.23) c'est une matrice principale du faisceau.*

En effet :
– 1. (8.23a) et (8.23b) découlent de la définition de U comme matrice principale du faisceau tandis que (8.23c) découle des deux précédentes

– 2. Inversement si U est une matrice de changement de base qui vérifie les relations (8.23) alors (8.23b) signifie que les colonnes de U sont des vecteurs propres de A donc aussi vecteurs propres du faisceau $v^t A\,v - \lambda v^t\,v$ pour les valeurs propres $\lambda(k)$; (8.23a) montre que ces colonnes sont orthonormées.

8.3.2 Faisceaux contraints et quotient de Rayleigh

On numérote les vecteurs propres dans l'ordre croissant de leur valeurs propres :

$$\lambda(k-1) \leq \lambda(k) \leq \lambda(k+1)$$

et l'on considère le "quotient de Rayleigh"

$$R(u) = \frac{u^t A\,u}{u^t B\,u}$$

qui vaut d'après (8.23c) :

$$R(u) = \frac{\sum_{k\in\{1,\dots,n\}} \lambda(k) y_k^2}{\sum_{k\in\{1,\dots,n\}} y_k^2} \tag{8.24}$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 8.1. ***Extremums du quotient de Rayleigh***
On note
- N_{p-1} *l'orthogonal des* $p-1$ *premiers vecteurs propres,*
- N'_{p+1} *l'orthogonal des* $p+1$ *derniers vecteurs propres.*

Autrement dit :

$$u \in N_{p-1} \Rightarrow \forall\, k < p\ u_k^t B u = 0$$
$$u \in N'_{p+1} \Rightarrow \forall\, k > p\ u_k^t B u = 0$$

Alors $\lambda(p)$ *minimise le quotient de Rayleigh sur* N_{p-1} *et le maximise sur* N'_{p+1} *:*

$$\lambda(p) = \min_{u\in N_{p-1}} R(u) = \max_{u\in N'_{p+1}} R(u) \tag{8.25}$$

et ces extremums sont atteints pour les vecteurs propres associés à $\lambda(p)$*. En particulier le quotient de Rayleigh atteint son minimum* $\lambda(1)$ *pour* $u = u_1$ *et son maximum* $\lambda(n)$ *pour* $u = u_n$*.*

En effet on déduit de (8.24) que :

$$u \in N_{p-1} \mapsto R(u) = \frac{\sum_{k\in\{p,\dots,n\}} \lambda(k) y_k^2}{\sum_{k\in\{p,\dots,n\}} y_k^2}$$
$$u \in N'_{p+1} \mapsto R(u) = \frac{\sum_{k\in\{1,\dots,p\}} \lambda(k) y_k^2}{\sum_{k\in\{1,\dots,p\}} y_k^2}$$

Comparaison de deux faisceaux

On démontre le théorème suivant :

Théorème 8.2.
Soient deux faisceaux réguliers :

$$u^t K u - \lambda u^t B u \text{ et } u^t K_1 u - \lambda u^t B_1 u$$

de valeurs propres respectives $\lambda(k)$ *et* $\lambda_1(k)$*.*
Alors l'inégalité

$$\frac{u^t K u}{u^t B u} \leq \frac{u^t K_1 u}{u^t B_1 u}$$

entraîne :

$$\forall k\ : \lambda(k) \leq \lambda_1(k)$$

Dans la démonstration du théorème 8.1 on a introduit les relations $u \in N_{p-1}$ et $u \in N'_{p+1}$ qui sont des contraintes qu'on impose à u ; plus généralement on pose la

Définition 8.2. ***Faisceaux contraints***
Soit L une matrice $h \times n$ qui définit h liaisons linéaires scalaires et indépendantes :

$$Lu = 0 \tag{8.26}$$

On nomme faisceau contraint par L et l'on note $F(u,\lambda,L)$ la restriction de $F(u,\lambda)$ au noyau de L.

Notations 8.3. *Autre notation d'un faisceau contraint*
Si $\mathbb{Z}$ désigne le noyau de L on notera aussi :

$$F(u,\lambda,L) = F(u,\lambda;\mathbb{Z})$$

Cette nouvelle notation simplifie passablement quelques écritures à venir.

Dans ce qui précède les colonnes de L^t sont, ou bien les $p-1$ premiers vecteurs propres et alors $ker(L) = N_{p-1}$, ou bien ceux associés aux $n-p+1$ derniers vecteurs propres et alors $ker(L) = N'_{p+1}$.

Considérons maintenant une matrice L de $p-1$ lignes arbitraires et la matrice $\tilde{L}$ constituée des lignes u_k^t pour $k = p+1,\ldots,n$. Puisqu'à elles deux L et $\tilde{L}$ ne définissent que $n-1$ liaisons scalaires indépendantes au plus, il existe un vecteur non nul x qui vérifie :

$$Lx = 0 \textit{ et } \tilde{L}x = 0$$

Soient ξ_j les coordonnées de x sur la base orthonormée des vecteurs propres ; elles sont nulles pour $j > p$ puisque $\tilde{L}x = 0$. On a donc :

$$\frac{x^t A x}{x^t B x} = \frac{\sum_{j=1,\ldots,p} \lambda(j)\xi_j^2}{\sum_{j=1,\ldots,p} \xi_j^2} \leq \lambda(p)$$

avec l'égalité si tous les ξ_j sont nuls sauf ξ_p.

Inversement, mais par un raisonnement identique, si L comporte $n-p$ lignes et si $\tilde{L}$ est construite sur les transposés des $p-1$ premiers vecteurs propres :

$$\frac{x^t A x}{x^t B x} = \frac{\sum_{j=p,\ldots n} \lambda(j)\xi_j^2}{\sum_{=p,\ldots n} \xi_j^2} \geq \lambda(p)$$

avec l'égalité si tous les ξ_j sont nuls sauf ξ_p.

On peut donc énoncer :

Théorème 8.3. ***Maximin et minimax de R***
Soit $\mathscr{L}^-(p)$ l'ensemble des matrices de liaison $(p-1)\times n$ et $\mathscr{L}^+(p)$ l'ensemble des matrices de liaison $(n-p)\times n$. On a :

$$\lambda(p) = \max_{L\in\mathscr{L}^-(p)} \min_{u\in\ker(L)} R(u) = \min_{L\in\mathscr{L}^+(p)} \max_{u\in\ker(L)} R(u) \tag{8.27}$$

Entrelacement des valeurs propres

Considérons maintenant le faisceau libre $F(u,\lambda)$ et le faisceau contraint $F(u,\lambda^c,L^c)$ où L^c est constituée de h lignes linéairement indépendantes.

Soit W une matrice $n \times (n-h)$ dont les colonnes forment une base de $\ker(L^c)$; le changement de variables $u = W\,v$ transforme ce faisceau contraint en un faisceau libre $A^c - \lambda^c B^c$ sur $\mathbb{R}^{n-h}$ avec :

$$A^c = W^t A W \ , \ B^c = W^t B W \ , \ R^c(v) = v^t A^c v / v^t B^c v$$

A^c est non négative et B^c définie positive.

D'autre part, si L est une matrice de liaison quelconque, on a l'équivalence triviale :

$$\left.\begin{array}{c} L^c u = 0 \\ Lu = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u = W\,v \\ LW\,v = 0 \end{array}\right. \tag{8.28}$$

On peut donc écrire d'après (8.27) :

$$\lambda^c(p) = \max_{L \in \mathscr{L}^-(p)} \ \min_{v \in \ker(LW)} R^c(v) = \max_{L \in \mathscr{L}^-(p)} \ \min_{u \in \ker L^c \cap \ker(L)} R(u)$$

et donc

$$\lambda^c(p) \leq \max_{L \in \mathscr{L}^-(p)} \ \min_{u \in \ker(L)} R(u) = \lambda(p) \tag{8.29}$$

Inversement, puisque $\mathscr{L}^-(p+h)$ contient en particulier la matrice constituée des h lignes de L^c suivies de $p-1$ lignes arbitraires :

$$\lambda^c(p) = \max_{L \in \mathscr{L}^-(p)} \ \min_{u \in \ker L^c \cap \ker(L)} R(u) \leq \max_{L \in \mathscr{L}^-(p+h)} \ \min_{u \in \ker(L)} R(u) = \lambda(p+h) \tag{8.30}$$

On peut donc énoncer le

Théorème 8.4. ***Entrelacement des valeurs propres***
Si $\lambda^c(1), \ldots, \lambda^c(n-h)$ désigne les valeurs propres du faisceau contraint et $\lambda(1), \ldots \lambda(n)$ celles du faisceau libre (les unes et les autres ordonnées dans l'ordre croissant) on a les inégalités :

$$\lambda(p) \leq \lambda^c(p) \leq \lambda(p+h) \ , \ p = 1, \ldots n-h \tag{8.31}$$

Faisceau contraint et faisceau libre associé

Le théorème 8.4, fondé sur les propriétés de stationnarité du "quotient de Rayleigh" $u^t A\,u / u^t B\,u$, donne un résultat indépendant de la façon dont on exprime la contrainte Lu. En particulier si

$$Lu = 0 \iff u = W\,v \text{ où } v \in \mathbb{R}^{n-h} \tag{8.32}$$

alors le faisceau contraint

$$(u, \lambda) \in \mathbb{V}^L \times \mathbb{R} \mapsto F^c(u, \lambda, L) = u^t A\,u - \lambda\,u^t\,u \in \mathbb{R} \tag{8.33}$$

s'identifie au faisceau libre régulier :

$$(v, \lambda) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \mapsto F^l(v, \lambda) = v^t\,W^t A W\,v - \lambda\ v^t\,W^t\,W\,v \tag{8.34}$$

qui admet les mêmes valeurs propres λ_k^c et les v_k pour vecteurs propres, les $W\,v_k$ désignant les vecteurs propres de $F_c(u, \lambda^c, L)$.

Proposition 8.9.
Si la contrainte L exercée sur le faisceau F_c est définie par le changement de variables (8.32), alors les faisceaux F_l et F_c possèdent les mêmes valeurs propres pour les vecteurs propres respectifs v_k et $W\,v_k$.

Remarque 8.2. On peut toujours supposer W et W^t pseudo-inverses
Lorsque W et W^t sont pseudo-inverses, i.e. $W^tW = I_{n-h}$, les v_k sont les vecteurs propres de W^tAW.

Lorsque W et W^t ne sont pas pseudo-inverses il reste que, W étant de noyau réduit à $\{0\}$, la matrice W^tW est définie positive. Si T est une base orthonormée de ses vecteurs propres alors $T^tW^tWT = I_{n-h}$ en sorte que WT et T^tW^t sont pseudo-inverses. On peut donc remplacer W par WT dans la définition du changement de variables pour se ramener au cas précédent. La raideur initiale K n'est pas concernée par cette opération qui constitue une sorte de mise à l'échelle de W.

Le calcul effectif de T est inutile : son existence permet de supposer que W et W^t sont pseudo-inverses dans les considérations théoriques, ce qui évitera, dans les paragraphes qui suivent, d'invoquer à nouveau cette mise à l'échelle.

8.4 L'approximation cinématique

Reportons-nous à la théorie générale exposée au paragraphe 8.2, et au sens qu'on y a conféré aux matrices A et B. L'approximation cinématique, notée S_c, consiste à choisir $m = n$ et $A = I_n$ en sorte que :

$$u = Bv \ , \ g = B^t f \tag{8.35}$$

où, comme indiqué par la remarque 8.2, on peut toujours se ramener au cas où :

$$B^tB = I_p \tag{8.36}$$

Le déplacement u de S est donc fonction de celui de S^c tandis que l'effort g sur S^c est fonction de l'effort f sur S. La raideur de la réduction est alors simplement :

$$K^c = B^tKB \tag{8.37}$$

FIGURE 8.4 – approximation cinématique

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V} & \langle\cdot,\cdot\rangle & \mathbb{G} = B^t(\mathbb{F}) & S^c \text{ (raideur } K^c) \\ B\ (n\times p)\Big\downarrow & & \Big\uparrow B^t\ (p\times n) & \\ B(\mathbb{V}) \subset \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle & \mathbb{F} & S \text{ (raideur } K) \end{array}$$

Le noyau $ker(B^t) = B(\mathbb{V})^o$ contient les efforts associés à la liaison

$$u \in B(\mathbb{V})$$

La notion d'approximation cinématique coïncide avec celle de quotient droit objet de la définition 3.8 du chapitre 3.

Les valeurs propres du faisceau libre

$$F(u,\lambda) = u^tKu - \lambda u^t u$$

sont celles de la raideur "originelle" K,
tandis que, d'après (8.35) et (8.37), le faisceau contraint

$$F(u,\lambda;B(\mathbb{V})) = u^t K u - \lambda u^t u$$

s'identifie, d'après la proposition 8.9 et la relation (8.36), au faisceau libre

$$(v,\lambda) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \mapsto G(v,\lambda^{\mathrm{o}}) = v^t K^c v - \lambda v^t B_c^t B_c v = v^t K^c v - \lambda v^t v$$

Le théorème 8.4 permet alors d'énoncer la
Proposition 8.10.
La réduction cinématique S^c est plus raide que la structure originelle S. Plus précisément on a les inégalités[2] *:*

$$\forall\, k \in [1,\ldots,p]\ \lambda^k \leq \lambda_k^c \leq \lambda_{k+n-p} \tag{8.38}$$

8.5 L'approximation sthénique

Inversibilité de K
Les déplacements rigides d'une structure constituent le noyau de sa raideur K et sont donc les vecteurs propres associés à la valeur propre nulle. Dans ce paragraphe on ne s'intéresse qu'aux états déformés sur lesquels K est définie positive. On peut donc considérer l'espace $\mathbb{U}$ comme le quotient de l'espace des déplacements par celui des déplacements rigides, quotient en dualité avec $\mathbb{F}$, espace des charges de torseur nul.

FIGURE 8.5 – Approximation sthénique

$$\begin{array}{rcl} K^{-1}A^t(\mathbb{G}) \oplus^K ker(A) = \mathbb{U} & \langle\cdot,\cdot\rangle & \mathbb{F} = (K^{-1}A^t(\mathbb{G}))^{\mathrm{o}} \oplus^{K^{-1}} A^t(\mathbb{G}) \\ A\ (p\times n)\Big\downarrow & & \Big\uparrow A^t(\ n\times p) \\ \mathbb{V} = A(\mathbb{U}) & \langle\cdot,\cdot\rangle & \mathbb{G} \end{array} \qquad S_s \text{ (raideur } K_s)$$

8.5.1 Définition et propriétés algébriques

Généralités
Revenons à la théorie générale de la réduction, exposée au paragraphe 8.2. La réduction sthénique (plus généralement qualifiée d'"approximation statique" dans la littérature) choisit $m = p$ et $B = I_p$ en sorte que :

$$v = A\,u\ ,\ f = A^t g$$

où, comme précédemment, on s'est ramené au cas où :

$$A\,A^t = I_p \tag{8.39}$$

2. qui sont les inégalités (8.31) où l'indice supérieur "o" a été remplacé par "c"

La figure 8.5 décrit la situation dont cet alinéa développe quelques propriétés.

La raideur de la réduction sthénique est :

$$K^s = \left(A\,K^{-1}A^t\right)^{-1} \tag{8.40}$$

Le noyau $ker(A) = A^t(\mathbb{G})^o$ contient les déplacements $u \in \mathbb{U}$ dans lesquels les efforts $f = A^t\,g$ ne travaillent pas.

C'est la situation duale de la précédente : la notion de réduction sthénique coïncide avec celle de quotient gauche objet de la définition 3.8 du chapitre 3.

Proposition 8.11. ***Deux couples de supplémentaires orthogonaux***
Les sous-espaces $ker(A)$ et $K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))$ sont des supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire $(u_1, u_2) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \mapsto u_1^t K\,u_2$. On note cette propriété par :

$$\mathbb{U} = K^{-1}(A^t(\mathbb{G})) \oplus^K ker(A) \tag{8.41}$$

Symétriquement on a :

$$\mathbb{F} = K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))^o \oplus^{K^{-1}} A^t(\mathbb{G})) \tag{8.42}$$

Si $A^\dagger$ est la pseudo-inverse de A le projecteur de $\mathbb{U}$ sur $K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))$ est $A^\dagger A$.

En effet, notons temporairement $K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))^\perp$ l'orthogonal de $K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))$ pour le produit scalaire associé à K dans $\mathbb{U}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u_2 \in K^{-1}(A^t(\mathbb{G}))^\perp &\iff \forall u_1 \in K^{-1}(A^t(\mathbb{G})) \;:\; u_2^t\,K\,u_1 = 0 \\ &\iff \forall f_1 \in A^t(\mathbb{G}) \;:\; u_2^t f_1 = 0 \iff u_2 \in A^t(\mathbb{G})^o = ker(A) \end{aligned}$$

Proposition 8.12.
Soit K' la restriction de K à $(K^{-1}A^t(\mathbb{G}))$; on a l'égalité

$$K' = A^t\,K_s\,A \tag{8.43}$$

en sorte que la structure originelle et sa réduction répondent identiquement aux efforts $f = A^t(g)$ et $g \in \mathbb{G}$.

En effet :

$$\begin{aligned} &u \in K^{-1}(A^t(\mathbb{G})) \mapsto g = K\,Au \in \mathbb{G} \mapsto f = A^t K_s\,A\,u \in A^t(\mathbb{G}) \\ &K_s^{-1}\,g = A\,u \Rightarrow A\,K^{-1}A^t g = Au \Rightarrow A(K^{-1}f - u) = 0 \end{aligned}$$

L'équivalence des réponses de la structure originelle et de sa réduction sthénique, pour la classe de sollicitations définie par la proposition 8.12, fonde la méthode de "condensation statique" :

8.5.2 La condensation statique

La condensation, ou "méthode frontale" est une réduction sthénique dans laquelle A est une matrice d'extraction, i.e. une matrice dont toutes les lignes et toutes les colonnes ne contiennent que des 0, à l'exception d'une fois et une seule la valeur 1. La matrice B est unité.

Dans les calculs par éléments finis on considère une partie $\mathscr{P}$ de la structure ; A sélectionne alors les ddl des nœuds de $\mathscr{P}$ qui sont effectivement en relation avec l'extérieur de $\mathscr{P}$. Cette opération permet d'éliminer d'un coup un grand nombre de ddl sans engendrer d'erreur théorique. En contrepartie la matrice de raideur obtenue est quasi-pleine et l'on perd les facilités d'inversion propres aux matrices "creuses".

N.B. On peut légèrement généraliser la méthode au cas où certains efforts donnés constants s'exercent sur les nœuds qu'on veut éliminer.

8.5.3 Liaisons et réduction sthénique

Lorsque la structure originelle S est soumise à une liaison, sa réduction sthénique S^{sth} ne lui est plus équivalente en général, mais plus souple.

Considérons en effet une liaison définie sur la structure originelle par

$$u \in \mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U} \tag{8.44}$$

qui, sur la réduction sthénique, engendre la liaison

$$u \in \mathbb{V}_1 = A(\mathbb{U}_1) \tag{8.45}$$

La raideur de la structure originelle S soumise à la liaison (8.44) a pour valeurs propres λ_k^1 celles du faisceau contraint

$$F_1(u, \lambda; \mathbb{U}_1) = u^t\, K\, u - \lambda\, u^t\, u$$

Tandis que celle de la réduction S_s a pour valeurs propres celles du faisceau contraint

$$G(v, \lambda; \mathbb{V}_1) = v^t\, K_s\, v - \lambda v^t\, v \tag{8.46}$$

Considérons maintenant un autre faisceau contraint de la structure originelle :

$$F_2(u, \lambda; ker(A) + \mathbb{U}_1) = u^t\, A^t\, K_s A\, u - \lambda u^t\, u$$

Comme F_2 est moins contraint que F_1 ses valeurs propres λ_k^2 sont inférieures à celles λ_1^k de F_1.

D'après ce qui précède u admet la décomposition orthogonale

$$u = u_1 + u_2 \ : \begin{cases} u_1 = A^\dagger A\, u \in K^{-1}(A^t(\mathbb{G})) \\ \\ u_2 \in ker(A) \end{cases}$$

de sorte que :

$$u \in \mathbb{U}_1 \Rightarrow u_1 \in A^\dagger A(\mathbb{U}_1)$$

Comme

$$u^t\, K\, u = u_2^t\, K\, u_2 + u_1^t\, K\, u_1 \geq u_1^t\, K\, u_1 = u_1^t\, A^t\, K_s A\, u_1 = u^t\, A^t\, K_s A\, u$$

le théorème 8.2 montre que les valeurs propres λ_k^3 du faisceau

$$F_3(u, \lambda; A\dagger A(\mathbb{U}_1)) = u^t\, A^t\, K_s A\, u - \lambda u^t\, u$$

sont elles-mêmes inférieures aux λ_k^2.

Mais, en utilisant de nouveau la proposition 8.9 pour la dernière égalité :

$$\left.\begin{array}{l} u = A^{\dagger} v \\ A^t = A^{\dagger} \end{array}\right\} \Rightarrow F_3(u, \lambda; A^{\dagger} A(\mathbb{U}_1)) = v^t K^s v - \lambda v^t A^{\dagger t} A^{\dagger} v = v^t K_s v - \lambda v^t v$$

en sorte que F_3 s'identifie au faisceau G de la structure réduite.

On peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 8.13. ***En présence d'une liaison la réduction sthénique est plus souple que la structure originelle***
Soient λ_k les valeurs propres de la structure originelle K soumise à la liaison (8.44) et λ_k^s celles de la réduction soumise à la liaison correspondante (8.45). On a :

$$\forall k \in \{1, \ldots, q\} \ : \ \lambda_k^s \leq \lambda_k \tag{8.47}$$

où q est la dimension de $\mathbb{V}_1$.

8.6 Charges critiques, stabilité et fréquences propres de vibration

Charges critiques

On connaît la notion de "raideur géométrique" K_g ; calculée pour une charge de référence $F_0 = 1$ elle modélise, au second ordre près, l'influence des déplacements finis sur la raideur globale de la structure. qui s'écrit $K - \lambda K_g$ où λ est la charge de la structure et K la raideur habituelle, dite aussi "raideur matérielle".

Le calcul de K_g permet de définir les "modes de flambement" u_k et les charges critiques λ_k qui leurs sont associées : ce sont les vecteurs propres et les inverses des valeurs propres ω_k du faisceau régulier :

$$u^t K^g u - \omega \, u^t K u$$

En pratique seule est intéressante la plus petite des charges critiques puisqu'elle correspond déjà à la ruine de la structure.

Notons λ_k^s et λ_k^c les charges critiques calculées pour une approximation sthénique et pour une approximation cinématique ; la comparaison des trois quotients de Rayleigh conduit facilement à l'encadrement

$$\lambda_k^s \leq \lambda_k \leq \lambda_k^c$$

Modes et fréquences propres

Par le même type de comparaison on obtient le résultat analogue pour les pulsations propres de vibration ω_k qui sont les racines carrées des valeurs propres du faisceau :

$$u^t K u - \omega_k^2 \, u^t M u$$

où M est la matrice de masse de la structure, définie positive.

8.7 Éléments finis : approximations cinématiques et sthéniques

Dans cette section nous considérons les méthodes d'éléments finis fondées sur les petits déplacements de nœuds dotés de six paramètres de liberté : trois

de translation et trois de rotation. Nous noterons $\mathscr{N}^6$ la famille des structures ainsi modélisées, famille dont plaques et coques constituent les membres les plus courants. Les méthodes de réduction décrites ci-dessous s'appliquent évidemment à des modèles où les nœuds présentent une liberté moindre.

Nous parlerons plutôt de champs de vitesses que de champs de déplacements afin d'utiliser le vocabulaire de la cinématique et de la cinétique. Nous verrons en effet les quantités de mouvement et les moments cinétiques permettent une représentation familière des grandeurs utilisées.

8.7.1 Notations diverses

Formes vectorielles et matricielles

On écrit souvent avec une flèche, $\vec{V}$ par exemple, les vecteurs de l'espace euclidien ordinaire. On notera, sans flèche la colonne V de ses composantes. Le numéro de la composante, s'il en est besoin, sera placé en indice supérieur, tandis que l'indice inférieur sera réservé au numéro du vecteur concerné. Ainsi $\vec{V}_j^i$ est-elle la $i^{ème}$ composante du vecteur $\vec{V}_j$.

Plus généralement on désignera par $Mat(x)$ l'expression matricielle de la quantité x, par exemple $V = Mat(\vec{V})$.

Alterneur de Levi-civita et produit vectoriel

On nomme ainsi le tenseur totalement antisymétrique à trois indices R_{ijk} :

$$\{i = j \; ou \; j = k \; ou \; k = i\} \longmapsto R_{ijk} = 0$$
$$\{i \neq j \; et \; j \neq k \; et \; k \neq i\} \longmapsto R_{ijk} = signature \; de\{i, j, k\}$$

Sa représentation matricielle dans le langage *Mathematica* [3]est

$$R = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (0,0,1) & (0,-1,0) \\ (0,0,-1) & (0,0,0) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (-1,0,0) & (0,0,0) \end{bmatrix} \tag{8.48}$$

et celle de sa transposée (par rapport aux deux premiers indices) :

$$R^t = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (0,0,-1) & (0,1,0) \\ (0,0,1) & (0,0,0) & (-1,0,0) \\ (0,-1,0) & (1,0,0) & (0,0,0) \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

On a aussi :

$$R^t R = R R^t$$

On a alors les formules suivantes :
Pour le **produit vectoriel** :

$$\Omega^t R^t X = X^t R \Omega = Mat(\vec{\Omega} \wedge \vec{X}) \tag{8.50}$$

Pour les **champs équiprojectifs** de rotation $\vec{\Omega}$:

$$Mat(\vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_j}) = V_G + \Omega . R^t \, (X_j - X_G) \tag{8.51}$$

3. l'instruction est "R=Table[Signature[{i,j,k}],{i,3},{j,3},{k,3}]"

Pour les **tenseurs d'inertie**, x, y, z désignant les composantes de X :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto In_X = X^t R^t R X = X^t R R^t X = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

Pour les **moments cinétiques à l'origine** :

$$In_X \Omega = X^t R^t \Omega R^t X = (X^t R^t R X)\Omega = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

Les notations *Mathematica*

La présence de la matrice à trois indices R peut ne pas être familière au lecteur. Les choix de *Mathematica* sont différents de ceux du calcul matriciel classique,et plus riches de possibilités.

Tout d'abord les quantités qui dépendent d'un seul indice sont tous nommés "vecteurs". La distinction entre ligne et colonne disparaît donc avec la possibilité de passer de l'une à l'autre par transposition, celle-ci consistant toujours en la permutation de deux indices. Une matrice-colonne M_{j1} est une matrice rectangulaire ne comportant qu'un seul vecteur-colonne, l'indice de colonne ne prenant que la valeur 1. Sa transposée M_{1j} est alors une matrice-ligne qui ne comporte qu'un seul vecteur-ligne.

La notion de matrice est étendue à celle de "tableau", "array" en anglais, dépendant de un ou plusieurs indices. Le produit de deux tableaux est noté par un point et correspond au produit contracté sur les indices voisins de l'un et de l'autre. Ainsi, en traduisant deux des expressions précédentes dans l'écriture indicielle classique puis dans l'écriture *Mathematica* :

$$Mat(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{X}) = X^t R \Omega = X_i R_{ilm} \Omega_m = X.R.\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_2 z - \Omega_3 y \\ \Omega_3 x - \Omega_1 z \\ \Omega_1 y - \Omega_2 x \end{bmatrix}$$

$$R^t R = R_{jik} R_{kmn} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Attention : défaut d'associativité

Les produits multiples ne sont pas toujours associatifs ; en effet on a, par exemple :

$$\begin{bmatrix} X_3Y_2 - X_2Y_3 \\ X_1Y_3 - X_3Y_1 \\ X_2Y_1 - X_1Y_2 \end{bmatrix} = R.X.Y = (R.X).Y \neq R.(X.Y) = X.Y.R$$

$$= \begin{bmatrix} (0,0,0) & (0,0,1) & (0,-1,0) \\ (0,0,-1) & (0,0,0) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (-1,0,0) & (0,0,0) \end{bmatrix} (X_1, Y_1 + X_2, Y_2 + X_3, Y_3)$$

En effet *Mathematica* exécute les produits possibles les uns après les autres et de gauche à droite. C'est pourquoi $R.(X.Y) = X.Y.R$ où $X.Y.R$ est effectué en commençant par le produit scalaire $X.Y$ tandis que le calcul de $R.X.Y$ commence par le produit $R.X$.

Ce logiciel est merveilleux pour l'utilisateur averti qui l'utilise fréquemment. Pour la commodité du lecteur nous resterons dans les notations du calcul matriciel classique étendues aux tableaux de dimension supérieure à 2.

8.7.2 Groupes de nœuds et représentants

Notations

Lorsque la structure ainsi modélisée est de type $\mathcal{N}^6$ on souhaite que soient aussi de ce type ses approximations par réduction du nombre de ddl. La voie la plus simple consiste à définir un "représentant" P_k d'un groupe de nœuds $\Gamma_k = \{M_j / j \in K_k\}$, où K_k désigne un ensemble fini de numéros de nœud associé au représentant P_k.

On utilisera les notations suivantes, pour $j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., p$:

	Structure originelle	Structure réduite
Nœuds	M_j	P_k
Coordonnées	X_j	Y_k
Vitesses	V_j	W_k
Vitesses de rotation	ω_j	Ω_k
Numéros j des nœuds		$j \in K_k$
Centre d'inertie du groupe Γ_k		G_k
Coordonnées de G_k		Y_{G_k}
Vitesse de G_k		W_{G_k}
Tenseur ou matrice d'inertie en G_k du groupe Γ_k		$\vec{\vec{I}}n_k$ ou In_k

Tous les nœuds de la structure originelle appartiennent à un groupe dont ils sont éventuellement le seul membre et le représentant.

On a donc p groupes définis par un ensemble d'indices K_k et représentés par les P_k dont les coordonnées constituent la colonne Y_k.

Trois principes à respecter

- 1. **Principe d'appartenance unique**
  Pour assurer l'indépendance des nouveaux degrés de liberté on veillera

à ce qu'un nœud n'appartienne qu'à un seul groupe.
Notons que le numéro k du groupe est alors une fonction $k = g(j)$ du numéro de nœud j.

- 2. **Principe de conservation des champs solidifiants**
  On peut utiliser diverses stratégies pour construire les matrices de liaison A ou B ; l'une d'elles, qui s'avère très efficace, est de s'appuyer sur la cinématique des corps rigides pour la réduction cinématique et sur la cinétique des systèmes pour la réduction sthénique.
- 3. **Principe de liberté du choix géométrique**
  On doit pouvoir placer n'importe où le représentant d'un groupe ce qui permet l'assemblage de sous-structures dont les nœuds frontaliers ne coïncident pas nécessairement (incompatibilité des maillages).

Les deux premiers principes sont évidemment euristiques : le premier évite les situations pathologiques, le deuxième facilite l'intuition du mécanicien. Le troisième s'impose à l'évidence.

8.7.3 Approximation cinématique

On considère un groupe de nœuds et son représentant comme un solide indéformable : leur vecteur rotation est égal à Ω_k et leur vitesse $\vec{V}_j$ déduite de celle, $\vec{W}_k$, du point P_k et du vecteur rotation :

$$j \in K_k \mapsto \left\{ \begin{array}{c} V_j = W_k + (X_j - Y_k)^t R \Omega_k \\ \omega_j = \Omega_k \end{array} \right. \tag{8.54}$$

équations qu'on peut encore écrire en termes des colonnes

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} V_j \\ \omega_j \end{bmatrix} \text{ et } \Psi_k = \begin{bmatrix} W_k \\ \Omega_k \end{bmatrix}$$

à savoir :

$$\Phi_j = B_{jk}\Psi_k \text{ avec : } B_{jk} = \left\{ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I_3 & (X_j - Y_k)^t R \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} & \text{si } j \in K_k \\ O_6 & \text{si } j \notin K_k \end{array} \right. \tag{8.55}$$

où I_m et O_m désignent respectivement les matrices unité et nulle de dimension $m \times m$.

Alors la matrice globale B est la diagonale des blocs B_{jk} pour $j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., p$.
Elle se présente donc comme ceci :

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & O_6 & \dots & \dots & \dots & O_6 \\ B_{2,1} & O_6 & \dots & \dots & \dots & O_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & O_6 & B_{j_1,k_1} & O_6 & \dots & \dots \\ \dots & O_6 & B_{j_1+1,k_1} & O_6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & O_6 & B_{n-1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & O_6 & B_{n,p} \end{bmatrix}$$

lorsque les indices de nœud et de groupe rangés en ordre croissant les uns par rapport aux autres :

$$\left.\begin{array}{c} k > k' \\ j \in K_k \\ j' \in K'_k \end{array}\right\} \Rightarrow j > j'$$

Autrement dit si l'on note Λ_k la colonne des blocs B_{jk} pour $j \in K_k$ la matrice B est la bloc-diagonale des Λ_k.

Passons maintenant à la transposée de B_{jk}. On a :

$$j \in K_k \Rightarrow (B_{jk})^t B_{jk} = \left[\begin{array}{cc} I_3 & (X_j - Y_k)^t R \\ R^t(X_j - Y_k) & I_3 + (X_j - Y_k)^t R R^t (X_j - Y_k) \end{array} \right] \tag{8.56}$$

Rappelons qu'on note respectivement G_k et In_k le centre et le moment d'inertie du groupe H_k lorsque ses nœuds sont affectés de masses m_j de somme 1. La matrice globale $B^t B$ est alors la diagonale des blocs :

$$C_{kk} = \sum_{j \in K_k} m_j (B_{jk})^t B_{jk} = \left[\begin{array}{cc} I_3 & (Y_{G_k} - Y_k)^t R \\ R^t(Y_{G_k} - Y_k) & In_k \end{array} \right] \tag{8.57}$$

Choix d'une matrice B pseudo-inverse de sa transposée

Soit W_k une base orthonormée par rapport à C_{kk} ; alors $W_k^t C_{kk} W_k = I_6$ et si l'on remplace les B_{jk} par des $B_{jk} W_k$ on remplace aussi les C_{kk} par la matrice unité I_6. Si W désigne la colonne des blocs W_k on a donc $W^t B^t B W = I_p$.

Si nécessaire, il est donc facile et rapide d'effectuer cette opération.

8.7.4 Approximation sthénique du solide moyen

Définition

On considère le représentant P_k comme un point du "solide moyen" du groupe au sens suivant : le solide moyen est le corps rigide dont le champ de vitesses est le plus proche, au sens des moindres carrés pondérés, du groupe à représenter. On cherche donc W_k et Ω_k qui minimisent la forme quadratique :

$$Q(Y_k, W_k, \Omega_k) = \sum_{j \in K_k} m_j ||W_k + (X_j - Y_k)^t R \Omega - V_j||^2 \tag{8.58}$$

où les m_j sont des masses positives de somme 1.

Pour obtenir des équations découplées on commence par minimiser :

$$Q(Y_{G_k}, W_k, \Omega_k) = \sum_{j \in K_k} m_j ||W_k + (X_j - Y_{G_k})^t R \Omega - V_j||^2 \tag{8.59}$$

Les équations de stationnarité de cette dernière s'écrivent alors :

$$V_{G_k} = \sum_{j \in K_k} m_j V_j = Mat(\sum_{j \in K_k} m_j \vec{V}_j) \tag{8.60}$$

$$In_{G_k} \Omega = \sum_{j \in K_k} m_j (X_j - Y_{G_k})^t R^t V_j = \sum_{j \in K_k} m_j \overrightarrow{G_k M_j} \wedge \overrightarrow{V_j} \tag{8.61}$$

L'interprétation mécanique est des plus simples :

Proposition 8.14. ***Propriété du solide moyen***
Le solide moyen a la même quantité de mouvement et le même moment cinétique que le groupe qu'il représente.

On note que dans le calcul du moment cinétique on n'a pris en compte que les vitesses V_j à l'exclusion des vitesses de rotation ω_j. Rien n'interdit de prendre ces dernières en compte, ce qu'on fera d'ailleurs lorsque les nœuds sont alignés ou dans l'approximation des "paramètres moyens" que nous définissons à l'alinéa 8.7.5.

Cas où les nœuds du groupe ne sont pas alignés

La matrice d'inertie est alors régulière ; on a donc la solution :

$$W_k = \sum_{j \in K_k} m_j V_j + \Omega_k^t R^t (X_k - X_{G_k}) = Mat\left(\sum_{j \in K_k} m_j \overrightarrow{V_j} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{G_k P_k}\right) \tag{8.62}$$

$$\Omega_k = In_k^{-1} \sum_{j \in K_k} m_j (X_j - Y_{G_k})^t R^t V_j = Mat\left(\vec{In}_k^{-1} \sum_{j \in K_k} m_j \overrightarrow{G_k M_j} \wedge \overrightarrow{V_j}\right) \tag{8.63}$$

Revenant à la théorie générale des réductions on peut donc écrire la matrice de liaison A comme la diagonale des blocs :

$$j \in K_k \mapsto A_{kj} = m_j \begin{bmatrix} I_3 + (Y_k - Y_{G_k})^t R\, In_k^{-1} (X_j - Y_{G_k})^t R^t & \\ In_k^{-1} (X_j - Y_{G_k})^t R^t & O_3 \end{bmatrix} \tag{8.64}$$

$$j \notin K_k \mapsto A_{kj} = O_6 \tag{8.65}$$

Cas où les nœuds du groupe sont alignés

Soient $(\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ la base de référence et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une autre base orthonormée, le vecteur $\vec{z}$ étant porté par la droite d'alignement. on désigne par x, y, z les colonnes de composantes de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sur $(\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$.

Le tenseur d'inertie est de révolution autour de la droite $G_k z$; $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont donc tous vecteurs propres pour des valeurs propres notées respectivement $\lambda, \lambda, 0$. L'équation vectorielle (8.61) se réduit à deux équations scalaires indépendantes obtenues par projection sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tandis que la projection sur $\vec{z}$ donne $0 = 0$.

Si l'on écrit le moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ et le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$

$$\vec{\sigma}_G = \sigma_x \vec{x} + \sigma_y \vec{y}$$
$$\overrightarrow{\Omega_k} = \Omega_{k,x} \vec{x} + \Omega_{k,y} \vec{y} + \Omega_{k,z} \vec{z}$$

l'équation (8.61) impose alors :

$$\Omega_{k,x} = \sigma_x / \lambda \ , \ \Omega_{k,y} = \sigma_y / \lambda$$

tandis que la troisième composante, $\Omega_{k,z}$, est arbitraire. Comme il faut bien lui donner une valeur en fonction des ddl d'origine on choisit la moyenne pondérée :

$$\Omega_{k,z} = \sum_{j \in K_k} m_j \omega_{j,z}$$

Ω_k vaut alors :

$$\Omega_k = (xx^t + yy^t)\sigma/\lambda + zz^t \sum_{j \in K_k} \omega_j \tag{8.66}$$

Notons les projecteurs ci-dessus :

$$D_1 = xx^t + yy^t \ , \ D_3 = zz^t$$

Les équations (8.64) et (8.65) doivent être remplacées par

$$j \in K_k \mapsto A_{kj} = m_j \begin{bmatrix} I_3 + \frac{1}{\lambda}(Y_k - Y_{G_k})^t R D_1 (X_j - Y_{G_k})^t R^t & O_3 \\ \frac{1}{\lambda} D_1 (X_j - Y_{G_k})^t R^t & D_3 \end{bmatrix} \tag{8.67}$$

$$j \notin K_k \mapsto A_{kj} = O_6 \tag{8.68}$$

Remarque

Évidemment lorsque le groupe se réduit au seul nœud M_m ; $K_k = \{m\}$ on choisit

$$\overrightarrow{W}_k = \overrightarrow{V}_m + \vec{\omega}_m \wedge \overrightarrow{M_m P_k} \tag{8.69}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_k = \vec{\omega}_m \tag{8.70}$$

et la matrice de liaison :

$$A_{km} = \begin{bmatrix} I_3 & (Y_k - X_m)R \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \tag{8.71}$$

8.7.5 Approximation sthénique des paramètres moyens

Un autre choix, très simple, est de construire une approximation sthénique à l'aide des paramètres moyens ; on choisit :

$$\overrightarrow{V}_{G_k} = \sum_{j \in K_k} m_j \overrightarrow{V}_j$$

$$\overrightarrow{\Omega}_k = \sum_{j \in K_k} m_j \overrightarrow{\omega}_j$$

$$\overrightarrow{W}_k = \overrightarrow{V}_{G_k} + \overrightarrow{\Omega}_k \wedge \overrightarrow{G_k P_k}$$

d'où la matrice de liaison :

$$A_{kj} = m_j \begin{bmatrix} I_3 & (Y_k - Y_{G_k})R \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \tag{8.72}$$

qui généralise la formule (8.71) à n'importe quel groupe (non vide...).

Bibliographie

[1] **J.-L. Batoz et G.Dhatt** *Modélisation des structures par éléments finis*. Vol. 1 solides élastiques, vol. 2 Poutres et plaques, Hermès 1990

[2] **J.-L. Batoz et G.Touzot** *Présentation de la méthode des éléments finis*, Presses Universitaires de l'Université Laval, Québec 2002.

[3] **R. Bouc, G. Geymonat, M. Jean, B.Nayroles** *Cauchy and periodic unilateral problems for aging linear viscoelastic materials*. Journal of Mathematical Analysis and Applications n°1, (1977) pp. 7-39

[4] **N.Bourbaki** *Espaces vectoriels topologiques* Hermann1964

[5] **A. Bossavit et M. Frémond** The frontal method based on mechanics and dynamic programming : An algebraic account.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Volume 8, Issue 2, June 1976, Pages 153-178

[6] **G.Cailletaud** *Rhéologie* (2010). Utiliser le lien suivant : `http://mms2.ensmp.fr/mms_paris/rheologie/transparents/wf_Rheologie.pdf`

[7] **Campanato Sergio** *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità (parte I)*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Sér. 3, tome 13 no. 2, 1959 p. 223-258

[8] **Campanato, Sergio** *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità (parte II)*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Sér. 3, vol.13 no. 3, 1959, p. 275-302

[9] **S.L. Campbell and C.D. Meyer**. *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Dover Publications, 1991

[10] **P.G. Ciarlet** *Modeling and numerical analysis of junctions between elastic structures*, in ICIAM'87 : *Proceedings of the First International Conference on Industrial and Applied Mathematics* Paris , 29 juin-3juillet 1987 (J. Mc KENNA & R. TEMAM, EDITORS) PP.62-74,SIAM, Philadelphia, 1988

[11] **O. Debordes, B. Nayroles** *Sur la théorie de le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques* Journal de Mécanique, vol.15 n°1 (1976) pp. 1-53

[12] **Jérôme Droniou** *Inégalité de Necas et quelques applications* 04/08/2007. `http://fr.www.cmi.univ-mrs.fr/~droniou/DL-poly.php?fichier...ineg-necas...ps`

[13] **W. Fenchel** *On conjugate convex functions*, Lecture notes, Princeton University, 1953

[14] **Gagliardo, Emilio** *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 27 (1957), p. 284-305

[15] **F.R. Gantmacher** *Théorie des matrices* traduit du russe par Ch.Sarthou, Dunod Paris 1966

[16] **R.Hill** *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press 1950

[17] **M. Jean, B. Nayroles** *Signorini problem in linear viscoelasticity* Conference "Duality and Complementarity" Jablonna 1977 Ossolineum 1979 Varsovie.

[18] **J.Mandel** *Plasticité classique et viscoplasticité*, C.I.S.M. Udine 1971, Springer-Verlag

[19] **L. Meirovitch** *Analytical methods in vibrations* Macmillan 1967

[20] **Jean-Jacques Moreau** *Fonctionnelles convexes* Collège de France 1966-1967

[21] **Jean-Jacques Moreau** On unilateral constraints, friction and plasticity. New variational techniques in mathematical physics (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), II Ciclo, Bressanone, 1973), pp. 171–322. Edizioni Cremonese, Rome, 1974.

[22] **Jean-Jacques Moreau** *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*. J. Diff. Equations, 26 (1977), 347-374

[23] **Jean-Jacques Moreau**, *Duality Characterization of Strain Tensor Distributions in an Arbitrary Open Set*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 72, No. 2,December 1979

[24] **Jean-Jacques Moreau**, 2007, *Fonctionnelles convexes*, Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Roma "Tor Vergata", Roma, ISBN 9 788862 960014.

[25] **J.J. Moreau et M.Ros** *Tenseurs de distributions dérivées secondes sur un ouvert quelconque de* $\mathbb{R}^n$. "Séminaire d'Analyse Convexe" Montpellier Vol.6, Exposé n°12, 1979

[26] **B. Nayroles** *Essai de théorie fonctionnelle des structures plastiques parfaites*. Journal de Mécanique, vol.9 (septembre 1970) pp.491-506

[27] **B. Nayroles** *Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la Mécanique des solides*. Journal de Mécanique, vol.10 n°2 (juin 1971) pp.263-289

[28] **B. Nayroles** *Opérations algébriques en mécanique des structures*. C.R.Acad.Sc. Paris, t.273,série A,1971, p.1075-1078

[29] **B. Nayroles** *Point de vue algébrique, convexité et intégrandes convexes en mécanique des solides*. (C.I.M.E.) Bressanone 1973.Edizioni Cremonese Roma 1974

[30] **B. Nayroles** *Deux théorèmes de minimum pour certains systèmes dissipatifs* C.R.Acad Sc. Paris tome 282 (3février 1976) série A pp. 1035-1038

[31] **B. Nayroles** *Un théorème de minimum pour certains systèmes dissipatifs-Variante hilbertienne* Séminaire d'Analyse Convexe-Montpellier (1976) pp. 1-22

[32] **B. Nayroles** *Minimum theorems concerning Cauchy and periodic problems for Maxwell body Variational Methods in the Mechanics of Solids* Pergamon Press 1980 pp.296-303

[33] **B. Nayroles** *Plate theory and complementary displacement method*. International Journal of Solids an Structures 36 (1999) pp1329-1368 Elsevier Science

[34] **B. Nayroles** *Théorie des plaques, déplacement complémentaire et plaques stratifiées*. INIT 2009 `http://www.unit.eu/ori-oai-search/notice/view/unit-ori-wf-1-3231`

[35] **E. Reissner** *The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates*. JAM, vol 12, pp A69-A76, 1945

[36] **E. Reissner** *On the Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation*, Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 11, 1975, pp. 569-573

[37] **E. Reissner** *On the Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation* Reflections on the Theory of Elastic Plates,ASME, Applied Mechanics Review, vol. 38, n°11, pp. 1453-1464, 1985

[38] **R. T. Rockafellar** *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970

[39] **R. T. Rockafellar**. *Integrals which are convex functionals*. Pacific Journal of Mathematics volume 24, issue 3, (1968), pp. 525-539. Lien pour téléchargement :`http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.pjm/1102986512`

[40] **R. T. Rockafellar**. *Integrals which are convex functionals. II*. Pacific Journal of Mathematics volume 39, issue 2, (1971), pp. 439-469. Lien pour téléchargement :`http://projecteuclid.org/DPubS?verb=Display&version=1.0&service=UI&handle=euclid.pjm/1102969571`

[41] **J. Salençon** *Mécanique des milieux continus*. Tome 1, p.50. Ellipses 1988

[42] **J. Salençon** *De l'élasto-plasticité au calcul de la rupture*, Éditions de l'École Polytechnique, 2002

[43] **G. de Saxcé, Z.-Q. Feng**"The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms", Int. J. Math. and Comp. Modelling, Vol. 28, N°4-8, pp. 225-245 (1998).

[44] **Géry de Saxcé** *A survey of variational and numerical formulations using bipotentials in mechanics of structures*. 7th Meeting "Unilateral Problems in Structural Analysis" June 17-19, 2010, Palmanova

[45] **L. Solomon** *Élasticité linéaire*, p.37 Masson 1968

[46] **P. Suquet** *Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions*, Journal de Mécanique 20, 3-39 (1981)

[47] **Wikipedia** *Pseudo-inverses* Utiliser le lien suivant : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Pseudo-inverse`

Table des matières

1 Introduction à l'algèbre des structures **2**
1.1 Un paradigme : la dualité à quatre espaces en mécanique des structures . . . 3
1.2 Orthogonalité . . . 3
1.3 Réductions de liberté et quotients . . . 5
1.3.1 Liaisons implicites et quotient droit . . . 5
1.3.2 Sous-structuration et quotient gauche . . . 5

2 Espaces vectoriels et dualité **7**
2.1 Supplémentaires, projecteurs et pseudo-inverses . . . 7
2.1.1 Sous-espaces supplémentaires . . . 7
2.1.2 Projecteurs . . . 8
2.1.3 Pseudo-inverses . . . 8
2.2 Supplémentaires et projecteurs : aspects topologiques . . . 11
2.2.1 Topologie projetée ou topologie quotient . . . 11
2.2.2 Topologie produit et supplémentaires topologiques . . . 12
2.3 Dualité . . . 13
2.3.1 Dualité et séparation . . . 13
2.3.2 Formes linéaires et topologies compatibles avec la dualité 15
2.3.3 Ensembles convexes et ensembles polaires . . . 16
2.3.4 Transposition . . . 17
2.3.5 Dualité entre un sous-espace vectoriel et un espace quotient 20
2.3.6 Dualités entre espaces produits . . . 22
2.3.7 Caractérisation des topologies compatibles avec la dualité : $\mathfrak{S}$-familles et théorèmes de Mackey . . . 23
2.4 Topologie et point de vue des mécaniciens . . . 24
2.4.1 Motivation . . . 24
2.4.2 Deux dualités isomorphes . . . 24
2.4.3 Espaces de Sobolev, norme des mécaniciens et inégalité du type de Korn . . . 26
2.5 Différentiabilité faible et stationnarité . . . 28

3 Opérations algébriques en mécanique des structures **30**
3.1 Éléments mécaniques et lois d'effort . . . 30
3.1.1 Introduction . . . 30
3.1.2 Quelques définitions . . . 31
3.1.3 Équilibre d'un élément mécanique . . . 32
3.1.4 Configurations déformées et lois d'effort intérieur . . . 33

3.1.5 Lois d'effort intérieur et lois de comportement 34
3.1.6 Produit d'éléments mécaniques 35
3.2 Quotient droit et quotient gauche 36
3.3 Le double quotient 37
3.4 Deux exemples en dimension 3 40
3.5 Exemple de double quotient : la théorie des plaques de Kirchhoff 41
3.5.1 Introduction 41
3.5.2 Géométrie et coordonnées 41
3.5.3 Notations 42
3.5.4 Efforts extérieurs ou charges 43
3.5.5 Quotient droit 44
3.5.6 Quotient gauche pour la flexion pure 45
3.5.7 Opérateur déformation des plaques de Kirchhoff 46
3.5.8 Équations d'équilibre 47

4 Structures en petites transformations 49
4.1 Les variables mécaniques 49
4.2 Opérateurs de déformation et d'équilibre 50
4.2.1 Définitions 50
4.2.2 Orthogonalités 51
4.3 Cas d'un assemblage de sous-structures 52
4.3.1 Structure produit 52
4.3.2 Structure assemblée 53

5 La compatibilité des déformations 55
5.1 Introduction 55
5.2 Formulation différentielle de la compatibilité locale 56
5.2.1 Rappel de résultats pour le solide tridimensionnel 56
5.2.2 Formulation différentielle de la compatibilité locale pour le modèle de Reissner-Mindlin 57
5.3 Formulation duale de la compatibilité 60
5.3.1 Deux théorèmes de base 60
5.3.2 Hypothèses générales sur le choix fonctionnel pour un solide isolé 60
5.3.3 Solide bidimensionnel ou tridimensionnel 61
5.3.4 Plaques de Reissner-Mindlin 62
5.3.5 Plaques de Kirchhoff 62

6 Quelques notions d'analyse convexe 64
6.1 Intérêt pour la mécanique 64
6.2 Bases de l'analyse convexe 66
6.2.1 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ 66
6.2.2 Fonctions et ensembles convexes, ensembles polaires . . 67
6.2.3 L'inf-convolution 69
6.3 Fonctions polaires 70
6.3.1 Définition et propriétés générales 70
6.3.2 Fonctions indicatrices et fonctions d'appui 71
6.3.3 Bipolaire et Γ-régularisée 71
6.4 Fonctions duales et sous-gradients 72

6.4.1 Quelques définitions 72
6.4.2 Quelques propriétés 73
6.4.3 Addition des sous-différentiels 75
6.5 Existence et unicité éventuelles d'un minimum 76
6.5.1 La minimisation de l'énergie potentielle 76
6.5.2 Certaines circonstances assurent l'existence d'un minimum 77
6.6 Intégrandes convexes et dualité 78
6.6.1 Motivation 78
6.6.2 Intégrabilité 79
6.6.3 Dualité des intégrales pour une paire d'espaces "décomposables" 80
6.6.4 Cas où $\mathbb{E} = L_n^\infty(\Omega)$ ou $C_n^o(\Omega)$ 80

7 Convexité, lois d'effort et problèmes d'équilibre 82
7.1 Introduction 82
7.2 Fonctions duales et lois d'effort dans la dualité déplacements-charges 83
7.3 Fonctions duales et lois d'effort dans la dualité déformations-contraintes 83
7.3.1 Un exemple en l'élasticité non-linéaire 84
7.4 Problèmes d'équilibre 85
7.4.1 Les données d'un problème d'équilibre 85
7.4.2 Propriétés d'extremum et existence des solutions 88
7.4.3 La fonctionnelle de Reissner 90

8 Réduction du nombre de degrés de liberté en élasticité linéaire 91
8.1 Pourquoi réduire le nombre des degrés de liberté 91
8.2 Méthode générale de réduction en élasticité linéaire 93
8.2.1 Deux éléments mécaniques pour la même structure . . . 93
8.2.2 Deux remarques 94
8.2.3 Existence et unicité de la solution 94
8.2.4 Correspondance entre les noyaux de K et de K^r 96
8.2.5 Modèles rhéologiques 96
8.3 **Rappel sur les faisceaux de formes quadratiques** 99
8.3.1 Faisceaux libres 99
8.3.2 Faisceaux contraints et quotient de Rayleigh 101
8.4 L'approximation cinématique 105
8.5 L'approximation sthénique 106
8.5.1 Définition et propriétés algébriques 106
8.5.2 La condensation statique 107
8.5.3 Liaisons et réduction sthénique 108
8.6 Charges critiques, stabilité et fréquences propres de vibration . 109
8.7 Éléments finis : approximations cinématiques et sthéniques . . . 109
8.7.1 **Notations diverses** 110
8.7.2 Groupes de nœuds et représentants 112
8.7.3 Approximation cinématique 113
8.7.4 Approximation sthénique du solide moyen 114
8.7.5 Approximation sthénique des paramètres moyens 116