



**HAL**  
open science

## Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents

Jihene Ben Rejeb, Irinel-Constantin Morarescu, Jamal Daafouz

► **To cite this version:**

Jihene Ben Rejeb, Irinel-Constantin Morarescu, Jamal Daafouz. Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 2016, 49 (1), pp.93-113. 10.3166/JESA.49.93-113 . hal-01319072

**HAL Id: hal-01319072**

**<https://hal.science/hal-01319072>**

Submitted on 26 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents

Jihene Ben Rejeb, Irinel-Constantin Morărescu, Jamal Daafouz

Université de Lorraine, CRAN, UMR 7039  
2 Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France  
jihene.ben-rejeb,constantin.morarescu,jamal.daafouz@univ-lorraine.fr

---

*RÉSUMÉ.* Cet article porte sur le problème du consensus dans un réseau partitionné en plusieurs clusters. Au sein de chaque cluster, les agents interagissent de manière continue. En plus chaque cluster contient un agent spécifique appelé leader ayant la capacité de communiquer avec d'autres leaders en vue de s'accorder avec eux. Ces interactions s'avèrent coûteuses puisqu'elles requièrent des échanges sur des distances longues ou mal protégées. Néanmoins, ces interactions sont nécessaires pour accomplir l'objectif global du réseau.

Nous traitons dans cet article différentes stratégies d'interconnexions entre les leaders en vue d'optimiser le coût et la consommation d'énergie et nous essayons, à travers quelques exemples, de mettre l'accent sur l'apport de la technique événementielle par rapport aux approches quasi périodiques classiques.

*ABSTRACT.* This paper focuses on consensus in networks partitioned in several clusters. It uses the multi-agent framework in which the network is seen as a sum of interconnected subsystems called agents. We assume that each agent updates its state continuously by taking into account the states of some other agents belonging to the same cluster. This protocol allows reaching only local agreements in the network. In order to get consensus we endow an agent per cluster with the capacity to discretely interact outside its own cluster. The discrete interaction of one agent with agents from other clusters is modeled as a state jump or reset.

The goal of the paper is to design event triggering reset strategies that guarantee the consensus is achieved. Some simulations are presented comparing the proposed approaches with classical reset strategies.

*MOTS-CLÉS :* système multi-agent, consensus, systèmes interconnectés, stratégies de réinitialisation.

*KEYWORDS:* multi-agent systems, consensus, interconnected systems, reset strategies.

---

## 1. Introduction

La dernière décennie a vu naître un regain d'attention de l'approche multi-agents et les récents développements en robotique exigent des performances de plus haut niveau en termes de minimisation du temps de traitement, adaptation du flux d'informations, temps de réponse, etc. Les problèmes qui apparaissent autour de l'étude des systèmes multi-agents se retrouvent dans des disciplines comme la biologie (Ratmann *et al.*, 2009 ; Pavlopoulos *et al.*, 2011), la sociologie (Hegselmann, Krause, 2002 ; Blondel *et al.*, 2009 ; Morărescu, Girard, 2011), l'économie (Andreoli, 1995) et l'ingénierie (Tanner *et al.*, 2003 ; Bullo *et al.*, 2009).

Ces agents qui forment le réseau sont interconnectés et peuvent interagir avec leurs semblables dans le but de s'accorder sur des valeurs communes (un objectif à atteindre, un lieu de rendez-vous, etc.). Ainsi, le problème du consensus joue un rôle central dans l'étude des systèmes multi-agents. Il a été largement traité dans le cas où le réseau est donné par un modèle linéaire (Jadbabaie *et al.*, 2003 ; Ren, Beard, 2005 ; Moreau, 2005). La littérature dans le cadre non linéaire est aussi diversifiée pour des applications telles que les oscillateurs couplés (Gfeller, Rios, 2008 ; Steur *et al.*, 2009 ; Morărescu *et al.*, 2013) et les robots non holonomes (Tanner *et al.*, 2005 ; Bullo *et al.*, 2009). En outre, les connections qui relient les agents et les échanges qu'ils peuvent établir constituent un critère majeur dans l'analyse de tels systèmes. La topologie des graphes attribués à ces systèmes peut être fixe ou variable (Hegselmann, Krause, 2002 ; Blondel *et al.*, 2009 ; Morărescu, Girard, 2011 ; Touri, Nedic, 2012). Par ailleurs, les échanges établis entre les leaders caractérisent l'évolution des agents vers un accord global au sein du réseau. En effet, ces échanges définissent la valeur du consensus mais également la vitesse de convergence. La distance et les contraintes de transmission sont notamment prises en compte dans un tel processus.

Une approche classique de communications inter-clusters est de considérer des échanges quasi périodiques traité dans (Bragagnolo *et al.*, 2014). Cette approche invoque des remises à zéro périodiques et synchrones. Le nombre de resets dans ce cas est prédéfini et les interactions sont persistantes notamment quand tous les agents sont synchronisés. Un aspect de réinitialisation asynchrone où la séquence de reset est définie indépendamment pour chaque leader, a été traité dans (Morărescu *et al.*, 2014). Les auteurs considèrent des échanges inter-clusters régis par une séquence temporelle telle que l'intervalle de temps entre deux sauts consécutifs soit borné.

L'objectif de cette communication est de caractériser les interactions établies entre les leaders dans un réseau partitionné en plusieurs communautés. Cette caractérisation repose sur une séquence événementielle propre à chaque cluster qui permet d'atteindre une valeur finale commune. Les agents d'un même cluster évoluent selon une dynamique continue vers un accord local. La loi événementielle ainsi choisie permet de ramener ces accords locaux vers un consensus global en assurant la persistance des resets et détourner tout problème d'accumulation à un instant donné connu sous le phénomène de Zeno. Un intérêt majeur de cette stratégie est d'optimiser les échanges entre les leaders et réduire les transmissions inutiles qui nécessitent généralement un apport énergétique important. Nous essayons dans cette communication de valoriser

l'apport de cette stratégie, traitée explicitement dans (BenRejeb *et al.*, 2014), à travers une analyse numérique comparant la méthode de réinitialisation événementielle à celle quasi périodique.

Le reste du papier est structuré comme suit : la section 2. introduit une formulation mathématique du problème. Nous posons dans la section 3. les hypothèses requises pour le traiter et nous rappelons quelques résultats qui seront utilisés par la suite. La section 4. présente une analyse du problème par une mise en œuvre de deux stratégies événementielles que nous proposons. Nous essayons dans la section 5. de développer une analyse numérique mettant l'accent sur l'apport de cette approche et nous concluons.

**Notations.** L'ensemble des entiers, des réels et celui des réels positifs sont donnés respectivement par  $N$ ,  $R$  et  $R_+$ . Pour un vecteur donné  $x$ , on note  $\|x\|$  sa norme Euclidienne. La transposée d'une matrice  $A$  est donnée par  $A^\top$ . Pour une matrice symétrique  $A \in R^{n \times n}$ , la notation  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) est équivalente à dire que  $A$  est définie positive (semi-définie positive). La matrice  $I_k$  est la matrice identité de dimensions  $k \times k$ . Les vecteurs colonnes de dimensions  $k$  dont tous les éléments sont 1 et 0 sont donnés par  $\mathbf{1}_k$  et  $\mathbf{0}_k$ . On définit notamment  $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k, t \leq t_k} x(t)$ .

## 2. Formulation du problème

### 2.1 Prérequis : théorie des graphes

Soit un réseau de  $n$  agents décrit par un graphe dirigé  $G = (V, E)$  tel que  $V$  décrit l'ensemble des agents et  $E \subset V \times V$  représente leurs interactions.

**DÉFINITION 1.** — *Un chemin orienté de longueur  $p$  pour un graphe dirigé  $G = (V, E)$  est l'union des liaisons dirigées  $\bigcup_{k=1}^p (i_k, j_k)$  tel que  $i_{k+1} = j_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .*

*Le sommet  $j$  est **connecté** à  $i$  dans un graph orienté  $G = (V, E)$  s'il existe au moins un chemin dirigé dans  $G$  partant de  $i$  vers  $j$ .*

*Un **graphe dirigé fortement connexe** est tel que n'importe quelle paire de sommets est connectée. On dit que le sommet  $i$  est parent de  $j$  dans un graphe dirigé  $G$  si  $(i, j) \in E$ .*

*Un **arbre dirigé** est un sous-graphe orienté pour lequel il n'existe qu'un seul sommet ne possédant aucun ascendant appelé **racine** tandis que tous les autres sommets ont exactement un seul parent.*

*Un **arbre couvrant dirigé** d'un graphe orienté est un arbre dirigé qui relie tous les sommets.*

*Un graphe orienté  $G$  est **faiblement connexe** s'il contient au moins un arbre couvrant. Pour un graphe donné  $G = (V, E)$ , le sous-graphe **induit** par un sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  est le graphe  $(U, E \cap (U \times U))$ .*

Dans ce qui suit, nous considérons un ensemble de sommets  $V$  partitionné en  $m$  communautés  $C_1, \dots, C_m$ . On note  $n_i$  le cardinal de chaque communauté  $C_i$ .

On désigne le graphe des liaisons intra-clusters  $G_l = (V, E_L)$  contenant les arêtes reliant les leaders dans  $G$  par l'ensemble :

$$E_L = \{(i, j) \in E \mid \exists k \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } i, j \in C_k\}.$$

## 2.2 Modélisation du système

L'état de chaque agent évolue de manière continue en tenant compte des états de ses voisins au sein du même cluster en vue d'atteindre un accord local qui est généralement différent d'une communauté à une autre. En vue de ramener tous les agents vers un même accord global, il est indispensable de faire interagir les leaders à des instants précis, selon une dynamique discrète.

En activant la liaison  $(j, i) \in E \setminus E_L$ , l'état de l'agent  $i$  est réinitialisé à une moyenne pondérée des états de  $i$  et de  $j$ . Si plusieurs liaisons arrivant à  $i$  sont activées simultanément, la moyenne pondérée prend en compte tous les états précédents de ces agents.

On note l'état de chaque agent par  $x_i$  tel que le vecteur global réunissant tous les états des agents est donné par  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in R^n$  et  $x_{C_i}$  regroupant tous les agents appartenant à une communauté  $i$ . Soit  $T$  un ensemble dénombrable des instants de resets décrits par la séquence croissante  $(t_k)_k$ .

Le système que nous présentons, est un système largement utilisé pour modéliser le processus du consensus linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t), & \forall t \in R_+ \setminus T \\ x(t_k) = P(t_k)x(t_k^-) & \forall t_k \in T \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $x_0 \in R^n$ ,  $L \in R^{n \times n}$  la matrice Laplacienne généralisée associée au graphe  $G_l$  et  $P(t_k) \in R^{n \times n}$  une matrice stochastique associée au graphe  $G_P(t_k) = (V, E_P(t_k))$  où  $E_P(t_k) \neq \emptyset$  est l'ensemble des arêtes entre les communautés activées à l'instant  $t_k$  ainsi  $E_P(t_k) \subseteq \{(h, l) \in E \mid \exists i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j, h \in C_i, l \in C_j\}$ .

Précisément, les composantes de  $L$  et  $P(t_k)$  vérifient :

$$\begin{cases} L_{i,j} = 0, \text{ si } (j, i) \notin E_L \\ L_{i,j} < 0, \text{ si } (j, i) \in E_L, i \neq j \\ L_{i,i} = -\sum_{j \neq i} L_{i,j}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} P_{i,j}(t_k) = 0, \text{ si } (j, i) \notin E_P(t_k), i \neq j \\ P_{i,i}(t_k) > 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \\ P_{i,j}(t_k) > 0, \text{ si } (j, i) \in E_P(t_k), i \neq j \\ \sum_{j=1}^n P_{i,j}(t_k) = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (3)$$

En se référant au système d'équations (3), pour  $i$  donné, si  $P_{i,j}(t_k) = 0$  pour tout  $j \neq i$  alors  $P_{i,i}(t_k) = 1$ , aucun saut ne se produit pour l'agent  $i$  à l'instant  $t_k$ . Les valeurs  $L_{i,j}$  et  $P_{i,j}(t_k)$  représentent le poids de l'état de l'agent  $j$  dans le processus de réinitialisation de l'agent  $i$ . Les matrices  $L$  et  $P(t_k)$  traduisent le degré d'influence de chaque agent au sein de sa communauté et en dehors de celle-ci. Les poids  $P_{i,j}$  peuvent varier dans le temps pour un même couple  $(j, i)$ .

La matrice  $L$  relative au système multi-agents défini précédemment, est donnée par une structure diagonale :  $L = \text{diag}(L_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $L_i \mathbf{1}_{n_i} = \mathbf{0}_{n_i}$  et  $P(t_k) \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m$ .

### 3. Prérequis

Dans ce paragraphe, nous introduisons les hypothèses requises à l'analyse du problème posé et nous nous penchons sur les résultats (Morărescu *et al.*, 2014) indispensables à l'analyse de stabilité.

#### 3.1 Les hypothèses

Nous nous interrogeons si, pour toute condition initiale, l'algorithme proposé (1) garantit une convergence asymptotique vers le consensus. Quelques hypothèses standards s'imposent. Une première définit une propriété de connectivité minimale pour tout le réseau ainsi que pour chaque communauté.

**HYPOTHÈSE 2.** — *Soit le graphe  $G = (V, E)$  tel que*

- *Pour chaque communauté  $C_i$ , le graphe induit  $(C_i, E_L \cap (C_i \times C_i))$  contient un arbre couvrant et une racine  $r_i$*
- *Pour tout  $i \geq 2$  il existe  $j < i$  et  $l_i \in C_j$  tel que  $(l_i, r_i) \in E$ . On note  $E_T = \{(l_i, r_i) | i \in \{2, \dots, m\}\}$  l'ensemble de ces  $m - 1$  arêtes.*

Cette supposition implique que  $G$  contient un arbre couvrant ayant une racine dans  $C_1$ . L'hypothèse est satisfaite si tous les graphes induits des communautés ainsi que  $G$  sont fortement connexes.

Le premier point de l'hypothèse 2 influe sur la dynamique continue puisque l'équation (2) impose que les valeurs  $L_{i,j} < 0$  pour  $(j, i) \in E_L$ . La deuxième partie de cette hypothèse garantit l'existence des interactions inter-clusters.

L'hypothèse qui suit, est largement utilisée dans la littérature (Blondel *et al.*, 2005) et assure une influence minimale sur les états des agents durant les phases de réinitialisation.

**HYPOTHÈSE 3 (Influence minimale).** — *Il existe une constante  $\alpha \in (0, 1)$  telle que, pour tout instant  $t_k$ , si  $P_{i,j}(t_k) \neq 0$  et  $(i, j) \in E_T$  alors  $P_{i,j}(t_k) \geq \alpha$ .*

**REMARQUE 4.** — *Comme il a été mentionné dans la section précédente,  $P_{i,j}$  peut varier dans le temps. Alors  $P_{i,j}, (i, j) \in E \setminus E_L$  peut converger vers 0. Mais, afin d'atteindre le consensus, les interactions entre les communautés ne doivent pas dis-*

paraître totalement. Dans ce contexte, l'hypothèse 3 garantit une influence minimale d'une communauté à une autre aux instants de réinitialisation.

Pour définir les agents d'une communauté  $C_i$  qui réinitialisent leurs états à l'instant  $t_k$ , nous caractérisons une fonction  $\phi_i$  par les instants  $t_{\phi_i(h)}$ ,  $h \in N$  est le  $h$ -ième instant auquel un agent de la communauté  $C_i$  remet à zéro son état :

$$\phi_i(h) = \min\{k > \phi_i(h-1) \mid \exists j \in C_i, \ell \in V \setminus C_i, P_{j,\ell}(t_k) > 0\}.$$

Pour une cohérence en termes de définition, on impose, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\phi_i(-1) = -1$ .

### 3.2 Conditions requises pour l'atteinte un consensus

Il a été démontré, dans (Morărescu *et al.*, 2014), qu'afin d'atteindre le consensus, deux hypothèses supplémentaires s'avèrent nécessaires : il s'agit de supposer que les échanges entre les clusters sont persistants dans le temps et qu'aucune racine relative aux communautés constituant le réseau, n'accumule de resets infinis à un instant donné. Un tel problème est connu sous le phénomène de Zeno. Ainsi, la stratégie de réinitialisation événementielle vient substituer de telles hypothèses et contourner un tel phénomène pouvant affecter la dynamique du système mais également sa stabilité et ses performances.

Dans ce qui suit, nous rappelons le résultat principal cité dans (Morărescu *et al.*, 2014) ainsi que les hypothèses requises.

**HYPOTHÈSE 5.** — *Il existe une constante  $\delta_{max} > 0$  satisfaisant:*

*Pour tout  $(l, r) \in E_T$ ,*

- *Il existe  $k \in N$  tel que  $t_k \leq \delta_{max}$  et  $(l, r) \in E_P(t_k)$ ,*
- *Si  $(l, r) \in E_P(t_k)$  il existe  $\tau \in [t_k, t_k + \delta_{max}]$  tel que  $(l, r) \in E_P(\tau)$ .*

**HYPOTHÈSE 6.** — *Il existe une constante  $\delta < \delta_{max}$  telle que  $t_{\phi_i(k+1)} - t_{\phi_i(k)} \geq \delta$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ .*

En d'autres termes, il existe une borne inférieure, strictement positive, minorant la période entre deux instants consécutifs de reset. Conformément aux hypothèses 2 et 5, notons que toutes les communautés  $\{2, \dots, m\}$  réinitialisent l'état de leur leader à plusieurs reprises voire infiniment, alors pour ces clusters,  $\phi_i$  est bien définies. Le cluster  $C_1$  n'effectue qu'un nombre fini de sauts, alors  $t_{\phi_1}(k)$  est uniquement défini pour  $k$  plus petit qu'une certaine borne finie, et peut aussi satisfaire l'hypothèse 6 pour ces valeurs de  $k$ . On introduit le diamètre global du réseau à l'instant  $t \in R_+$  comme étant :

$$\Delta(t) = \max_{i \in V} x_i(t) - \min_{i \in V} x_i(t)$$

**THÉORÈME 7.** — *Nous supposons que les hypothèses 2, 3, 5 et 6 sont admises. Il existe un taux de croissance  $\beta \in [0, 1)$  tel que pour tout  $t \in R_+$*

$$\Delta(2(m+1)\delta_{max} + t) \leq \beta\Delta(t)$$

*qui garantit une convergence asymptotique vers un consensus au sein du système.*

#### 4. Conception des lois de réinitialisation événementielles

Pour éviter les communications inutiles entre les leaders, nous définissons des séquences de remise à zéro fondées sur des conditions événementielles. Dans cette section, nous proposons deux lois événementielles et nous essayons de prouver qu'elles vérifient les hypothèses 5 et 6 et permettent d'appliquer le théorème ?? pour démontrer qu'un tel système converge vers un accord global.

La première condition que nous proposons, décrit une séquence d'échange semi-décentralisée entre les leaders. En effet, chaque élément de réinitialisation  $r_i$  aurait à collecter et traiter les états de tous les agents dans sa propre communauté  $C_i$  aux instants de reset  $t_{\phi_i(k)}$ . L'agent recalcule ainsi son état et interagit avec ses voisins pour les guider vers l'accord local  $x_i^*(t_k)$ . Il est à noter que cette information, qui est centralisée dans chaque cluster, n'est requise qu'aux instants de reset. Un agent n'aurait pas à rassembler tous les états de ses voisins. Cependant, la fonction  $x_i^*(\cdot)$  est constante sur l'intervalle  $[t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ .

La seconde loi proposée dans ce travail, définit une séquence de réinitialisation totalement décentralisée où chaque leader interagit uniquement avec les agents auxquels il est connecté pour collecter les informations requises à la remise à zéro. Chaque élément de réinitialisation  $r_i$  calcule, à chaque instant  $t \in [t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ , la distance maximale qui le sépare de ses voisins et définit ainsi le prochain instant de reset propre à sa communauté  $C_i$ .

REMARQUE 8. — *Les composantes de la matrice Laplacienne  $L$  sont uniformément bornées : il existe  $\bar{\alpha} > 0$  un nombre fini tel que  $|L_{i,j}| \leq \bar{\alpha}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Cette propriété garantit que, pendant la phase continue, les agents ne se rapprochent pas les uns des autres de manière infiniment rapide.*

##### 4.1 Loi de reset semi-décentralisée

Soit le diamètre de chaque communauté  $C_i$  donné par

$$\Delta_i(t) = \max_{j \in C_i} x_j(t) - \min_{j \in C_i} x_j(t).$$

DÉFINITION 9. — *La distance entre le sommet  $r_i$  et la valeur de l'accord local du cluster  $C_i$  à l'instant  $t$  est donnée par*

$$d_i(t) = |x_{r_i}(t) - x_i^*(t)|$$

Nous considérons  $\epsilon > 0$  un scalaire donné, la séquence de reset  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  associée à la dynamique (1) est définie comme suit :

Pour tout élément  $i \in \{1, \dots, m\}$  et pour tout  $k \geq 0$ ,

– Si  $d_i(t_{\phi_i(k-1)}) > \epsilon$

$$t_{\phi_i(k)} = \min_{t \geq t_{\phi_i(k-1)}} \left\{ d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k-1)})}{\alpha_i} \right\},$$



– Sinon,  $t_{\phi_i(k)} = t_{\phi_i(k-1)} + \delta$  avec

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}$$

où les constantes  $a_i > 1$  sont des paramètres fixés a priori. (Nous rappelons la notation  $t_{\phi_i(-1)} = 0$ ).

REMARQUE 10. — Les valeurs des constantes  $a_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  peuvent être conçues par l'utilisateur pour varier la fréquence des sauts d'une communauté à une autre.

THÉORÈME 11. — Soit le système (1) sous les hypothèses 2 et 3. La séquence de réinitialisation associée donnée par la définition 9 satisfait les hypothèses 5 et 6.

Preuve. — Si  $d_i(t_{\phi_i(k)}) \leq \epsilon$ , les instants de reset sont donnés par le second point de la définition et ainsi les hypothèses 5, 6 sont satisfaites.

Considérons le premier point de la définition pour une communauté donnée  $C_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . On se propose alors de démontrer que la séquence de reset satisfait les hypothèses en question.

• Nous commençons par prouver que l'hypothèse 6 est atteinte. Ceci implique l'existence d'un temps de maintien  $\delta$  entre un instant de réinitialisation  $t_{\phi_i(k)}$  et le premier instant  $t$  défini par  $d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$ . Nous rappelons que, pour tout  $t \in [t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ , nous avons  $\dot{x}_i^*(t) = 0$  et

$$\dot{x}_{r_i}(t) = - \sum_{j \in C_i} L_{r_i, j} (x_j(t) - x_{r_i}(t))$$

En se basant sur la remarque 8, nous obtenons, entre deux instants de réinitialisation

$$\dot{d}_i(t) \geq -n_i \bar{\alpha} \Delta_i(t).$$

D'autre part,  $\Delta(\cdot)$  est une fonction non-décroissante, alors

$$\dot{d}_i(t) \geq -n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0).$$

En intégrant l'équation qui précède

$$d_i(t) \geq d(t_{\phi_i(k)}) - n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)}).$$

Ainsi, pour que  $d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$  il faut que

$$\frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i} \geq d(t_{\phi_i(k)}) - n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)})$$

qui est équivalent à

$$(t - t_{\phi_i(k)}) \geq \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{d(t_{\phi_i(k)})}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)} > \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}$$

La preuve finit en choisissant :

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}.$$

• Prouvons maintenant que l'hypothèse 5 est également satisfaite. Entre  $d_i(t_{\phi_i(k)})$  et  $d_i(t_{\phi_i(k+1)})$  la dynamique générale d'un cluster  $C_i$  est décrite par une matrice Laplacienne à termes constants

$$\dot{x}_{C_i}(t) = -L_i x_{C_i}(t).$$

Il existe alors  $M_i > 0$  et  $\rho_i > 0$  tel que

$$\Delta_i(t) \leq M_i e^{-\rho_i(t-t_{\phi_i(k-1)})} \Delta_i(t_{\phi_i(k)}) \quad (4)$$

où  $\rho_i$  est la vitesse de convergence (voir(?,?)) associée à la matrice Laplacienne  $L_i$ . Toutefois, nous avons  $d_i(t) \leq \Delta_i(t)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  et  $\forall t \geq 0$ . Combiné avec l'inégalité (4), on obtient

$$d_i(t) \leq M_i e^{-\rho_i(t-t_{\phi_i(k-1)})} \Delta_i(t_{\phi_i(k)}). \quad (5)$$

Utilisant (5), une simple manipulation mathématique prouve que si  $d_i(t) > \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$  alors

$$\begin{aligned} t - t_{\phi_i(k-1)} &< \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(t_{\phi_i(k)})}{d_i(t_{\phi_i(k)})} \right) \\ &< \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(0)}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Nous définissons alors, pour clôturer la preuve :

$$\delta_{max} = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(0)}{\epsilon} \right).$$

## 4.2 Loi de reset totalement décentralisée

DÉFINITION 12. — La distance entre la racine  $r_i$  et ses voisins dans son cluster  $C_i$  à l'instant  $t$  est définie par

$$\tilde{d}_i(t) = \max_{j \in \{r_i, j\} \in E_L} |x_{r_i}(t) - x_j(t)|.$$

Nous considérons  $\epsilon > 0$  un scalaire donné, la séquence de reset  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  associée à la dynamique (1) est définie comme suit

Pour tout élément  $i \in \{1, \dots, m\}$  et pour tout  $k \geq 0$ ,

– Si  $\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k-1)}) > \epsilon$

$$t_{\phi_i(k)} = \min_{t \geq t_{\phi_i(k-1)}} \left\{ \tilde{d}_i(t) \leq \frac{\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k-1)})}{a_i} \right\},$$

– Sinon,  $t_{\phi_i(k)} = t_{\phi_i(k-1)} + \delta$  avec

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)},$$

où les constantes  $a_i > 1$  sont des paramètres fixés a priori.

THÉORÈME 13. — Soit le système (1) sous les hypothèses 2 et 3. La séquence de réinitialisation associée donnée par la définition 12 satisfait les hypothèses 5 et 6.

Preuve. — La démarche de la preuve est identique à celle du théorème 11. Cependant, quelques détails techniques doivent être adaptés.

Si  $\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)}) \leq \epsilon$ , on se réfère au second point de la définition 12. Dans ce cas, les hypothèses 5 et 6 sont satisfaites.

Considérons le premier point de la définition pour une communauté donnée  $C_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Nous démontrons, dans ce qui suit, que la séquence ainsi choisie satisfait les deux hypothèses.

• Nous commençons par démontrer l'hypothèse 6.

Pour tout  $j \in C_i$  tel que  $(r_i, j) \in E_i$  on définit la distance

$$\tilde{d}_{i,j}(t_{\phi_i(k)}) = \|x_{r_i}(t_{\phi_i(k)}) - x_j(t_{\phi_i(k)})\|.$$

Soit  $\tilde{j} \in C_i$  un élément voisin à la racine  $r_i$  tel que  $\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)}) = \tilde{d}_{i,\tilde{j}}(t_{\phi_i(k)})$ .

Pour tout  $t \in [t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ , on a :

$$\dot{x}_{r_i}(t) = - \sum_{j \in C_i} L_{r_i,j}(x_j(t) - x_{r_i}(t))$$

$$\dot{x}_{\tilde{j}}(t) = - \sum_{j \in C_i} L_{\tilde{j},j}(x_j(t) - x_{\tilde{j}}(t))$$

D'une manière similaire à la preuve du théorème 11, on obtient

$$\dot{\tilde{d}}_{i,\tilde{j}}(t) \geq -2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)$$

En intégrant l'équation précédente

$$\tilde{d}_{i,\tilde{j}}(t) \geq \tilde{d}_{i,\tilde{j}}(t_{\phi_i(k)}) - 2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)})$$

Or pour tout  $t \geq 0$  on a  $\tilde{d}_i(t) \geq \tilde{d}_{i,\tilde{j}}(t)$  et  $\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)}) = \tilde{d}_{i,\tilde{j}}(t_{\phi_i(k)})$  alors :

$$\tilde{d}_i(t) \geq \tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)}) - 2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)})$$

Ainsi, pour satisfaire l'inégalité  $\tilde{d}_i(t) \leq \frac{\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$  il faut que

$$\frac{\tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i} \geq \tilde{d}_i(t_{\phi_i(k)}) - 2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)})$$

équivalent à

$$(t - t_{\phi_i(k)}) \geq \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\tilde{d}(t_{\phi_i(k)})}{2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)} > \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}$$

La preuve finit en choisissant :

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}.$$

• Afin de prouver que l'hypothèse 5 est également satisfaite, il suffit de remarquer que  $\tilde{d}_i(t) \leq \Delta_i(t)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Ainsi la même démarche que dans la preuve du théorème 11 peut être appliquée pour définir :

$$\delta_{max} = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(0)}{\epsilon} \right)$$

### 4.3 Exemple illustratif

Dans ce qui suit, nous traitons un exemple qui valide les résultats précédents. Nous considérons un réseau formé par 5 agents, partitionné en deux communautés de 2 et 3 agents respectivement. Le graphe orienté régi par les interactions établies durant la phase continue, est décrit par la matrice Laplacienne généralisée suivante

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ayant une structure diagonale par bloc correspondant aux clusters. Nous supposons que seuls les agents 1 et 4 peuvent interagir en dehors des clusters auxquels ils appartiennent et réinitialisent leurs états suivant la dynamique :

$$\begin{aligned} x_1(t_{\phi_1(k)}) &= 0.45x_1(t_{\phi_1(k)}^-) + 0.55x_5(t_{\phi_1(k)}^-) \\ x_4(t_{\phi_2(k)}) &= 0.25x_3(t_{\phi_2(k)}^-) + 0.75x_4(t_{\phi_2(k)}^-). \end{aligned} \quad (7)$$

Soient la condition initiale  $x_0 = [8, 7, 9, 2, 3]^\top$  et les paramètres  $a_1 = a_2 = 2$ .

La figure 1 illustre les trajectoires des agents où les resets sont décrits par la loi semi-décentralisée. Cette figure met en évidence l'aspect asynchrone des sauts. En effet, chaque leader réinitialise son état indépendamment du second et peut interagir à plusieurs reprises avant que l'autre n'établisse un lien.

Afin de diminuer la fréquence des réinitialisations et mettre l'accent sur l'aspect asynchrone des sauts, nous faisons varier les paramètres  $a_1 = 200, a_2 = 2$  et nous représentons la dynamique du système par la figure 2.

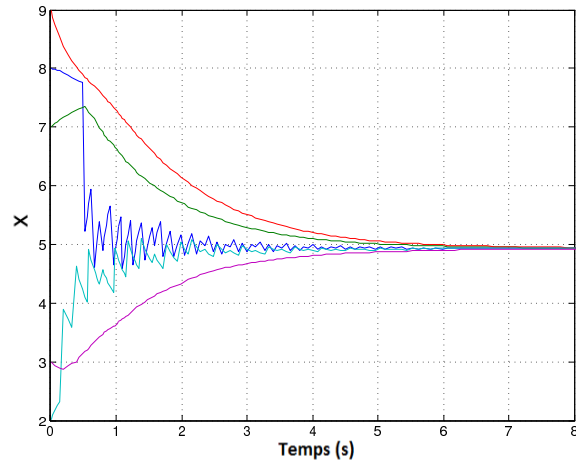


Figure 1. Consensus des cinq agents pour des réinitialisations définies par la loi semi-décentralisée avec  $a_1 = a_2 = 2$

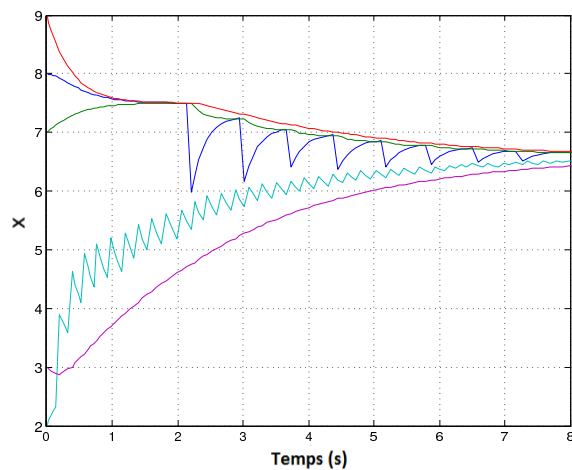


Figure 2. Consensus des cinq agents pour des réinitialisations définies par la loi semi-décentralisée avec  $a_1 = 200$  et  $a_2 = 2$

Pour les mêmes conditions de simulation, nous évaluons le comportement des agents pour la loi de réinitialisation totalement décentralisée (figures 3 et 4).

Ces simulations montrent que la valeur finale du consensus ne dépend pas uniquement des conditions initiales et de la structure du réseau mais également de la séquence de reset choisie.

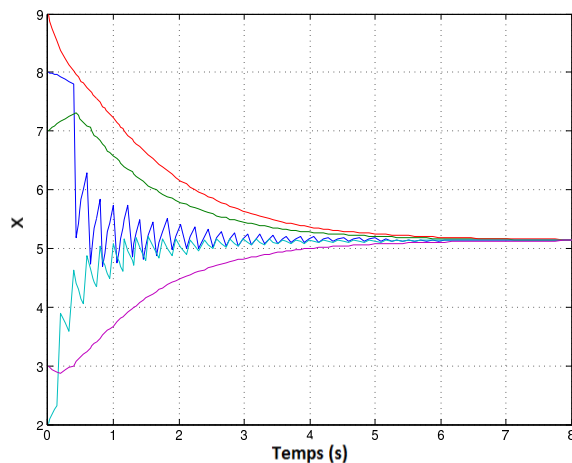


Figure 3. Consensus des cinq agents pour des réinitialisations définies par la loi décentralisée avec  $a_1 = a_2 = 2$

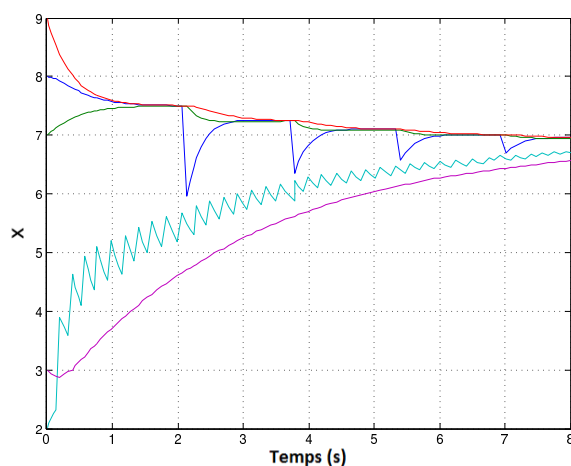


Figure 4. Consensus des cinq agents pour des réinitialisations définies par la loi décentralisée avec  $a_1 = 200$  et  $a_2 = 2$

## 5. Apports de la stratégie événementielle d'un point de vue optimisation énergétique

Dans cette section, nous présentons une analyse numérique mettant l'accent sur les performances des stratégies événementielles proposées précédemment pour atteindre un consensus pratique (la distance entre l'état des agents est négligeable - inférieure à un certain  $\epsilon \sim 0$  positif suffisamment petit). Cette analyse présente une des perfor-

mances les plus intéressantes au niveau de la consommation d'énergie discutée tout au début de cet article : l'optimisation du nombre de resets. Nous comparons la stratégie événementielle semi-décentralisée à la stratégie quasi périodique et nous essayons de mettre l'accent sur l'apport d'une telle technique qui permet d'optimiser le nombre de reset et la vitesse de convergence.

Nous traitons l'exemple du système multi-agents décrit dans la section 4.3. Soient  $\delta_{min} = 0.1s$ ,  $\delta_{max} = 1s$ ,  $\delta_{ave} = \frac{\delta_{max} + \delta_{min}}{2}$  et  $\delta'$  prenant valeur dans l'intervalle  $[0 \ 0.001]$ .

On définit les séquences de réinitialisation suivantes :

$$\begin{aligned} T_1 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{min} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_2 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{max} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_3 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{ave} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_4 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ donnée par la définition 9.} \end{aligned}$$

REMARQUE 14. —

– *Les séquences de reset  $T_1, T_2, T_3$  définissent des séquences quasi périodiques. Néanmoins ces sauts sont synchrones tels que tous les leaders interagissent simultanément. Il existe alors une matrice unique  $P(t_k) = P$  pour tout  $k$ . Dans ce cas, traité dans (Bragagnolo et al., 2014), la valeur du consensus est indépendante de la séquence de réinitialisation choisie.*

### 5.1 Cas des clusters ayant des vitesses de convergence de même ordre

Nous considérons le système multi-agent décrit dans la section 4.3. Les interactions établies durant les phases continue et discrète sont décrites respectivement par les équations (6) et (7). Il est à noter que la vitesse de convergence au sein des deux communautés est quasiment la même (les valeurs propres de  $L$  ont un ordre de multiplicité unitaire).

Dans ce qui suit, nous comparons et nous évaluons les performances du système (1) en termes de vitesse de convergence et nombre de resets pour les séquences  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4(a_1, a_2)$ .

REMARQUE 15. —

– *Pour les trois premières figures, nous observons que les agents convergent vers la même valeur avec différentes vitesses. Pour une période de réinitialisation évaluée à  $\delta_{min}$ , le consensus est atteint plus rapidement mais nécessite certainement une consommation d'énergie plus élevée vu le grand nombre de resets requis. Chaque leader effectue 300 sauts pour 30 et 55 sauts quand la période est évaluée respectivement à  $\delta_{max}$  et  $\delta_{ave}$ .*

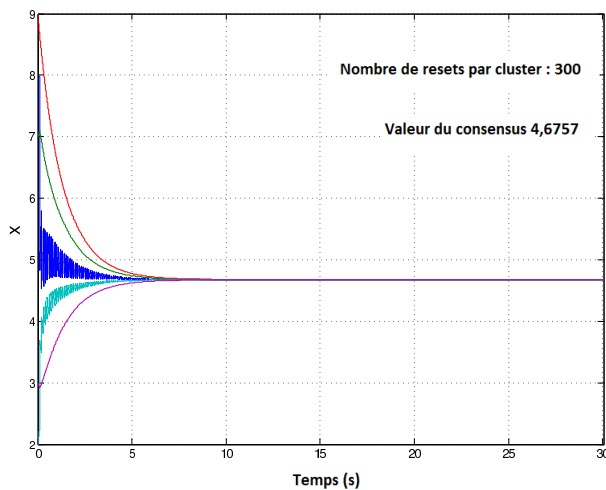


Figure 5. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenant à  $T_1$

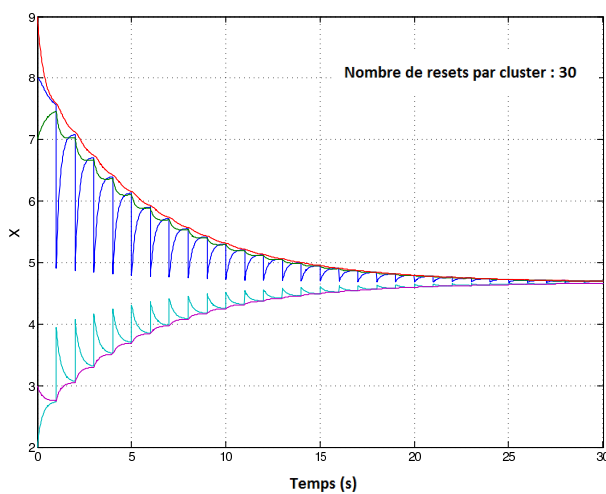


Figure 6. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenant à  $T_2$

– Les trajectoires des cinq agents illustrées par la figure 7 montrent qu’une optimisation de l’énergie consommée et celle de la vitesse de convergence est réalisée en utilisant la moyenne de  $\delta_{min}$  et  $\delta_{max}$  comme période de reset.

– Pour le cas événementiel, figures 8 et 9, les instants de réinitialisation ne sont pas synchronisés et chaque leader évolue à sa propre cadence :



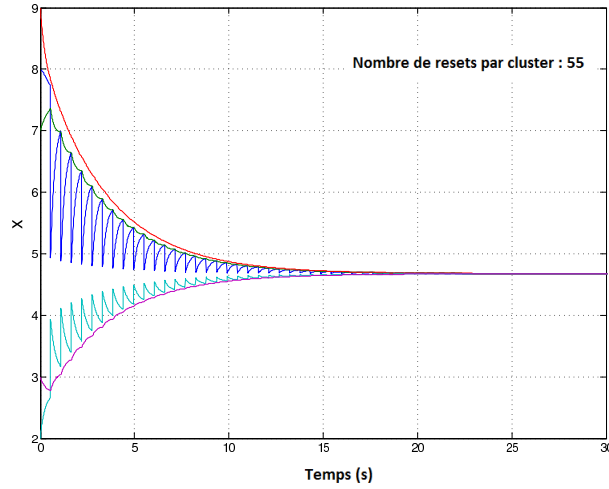


Figure 7. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenant à  $T_3$

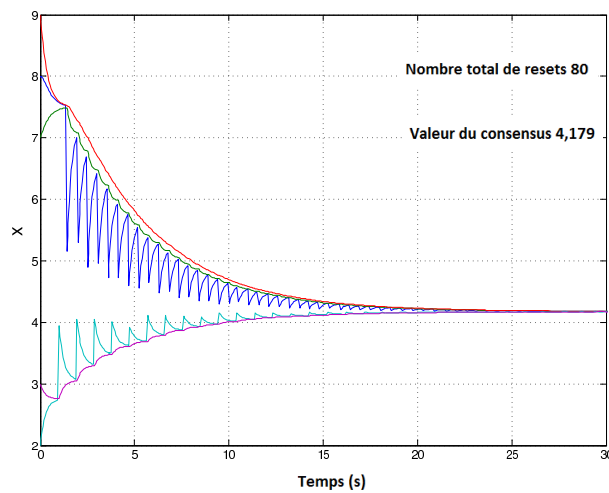


Figure 8. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)}$  et  $t_{\phi_2(k)}$  appartenant à  $T_4(20, 40)$

- Pour la séquence  $T_4(20, 40)$ , on a 53 resets pour le premier leader et 27 sauts pour le deuxième.

- Pour la séquence  $T_4(2, 2)$ , on a 71 et 41 sauts pour la première et la deuxième communauté respectivement.

– Dans la figure 9 le consensus est atteint plus rapidement que dans la Figure 7 avec une moyenne approximative de 55 sauts. La stratégie événementielle, donnée

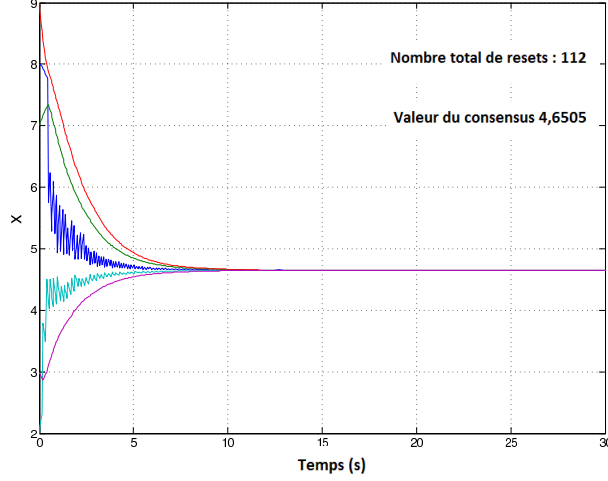


Figure 9. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)}$  et  $t_{\phi_2(k)}$  appartenant à  $T_4(2, 2)$

par la définition 9, réalise une meilleure optimisation entre l'énergie et la vitesse de convergence que dans le cas quasi périodique utilisant  $\delta_{ave}$ .

– La valeur du consensus dépend de la séquence de réinitialisation : plus nous diminuons les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  plus le nombre de resets augmente.

### 5.2 Cas des clusters ayant des vitesses de convergence différentes

Dans ce paragraphe, nous considérons un réseau de 5 agents partitionnés en deux clusters tels que la vitesse de convergence dans le premier cluster est remarquablement plus élevée qu'au second. Cette situation se réalise quand la deuxième communauté présente une réduction d'un modèle large de clusters. Nous pouvons considérer aussi que les interactions dans ce dernier sont déficientes et les agents attribuent une importance modérée à ces échanges. Soient les dynamiques (1) et (7) avec :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

Pour les mêmes conditions de simulation, nous obtenons les résultats numériques dans les figures 10 à 13.

Dans ce cas, la stratégie événementielle s'avère plus performante que l'utilisation d'une période fixe : le système évolue vers le consensus selon, principalement, la dynamique de la communauté ayant la vitesse de convergence la plus élevée et tend

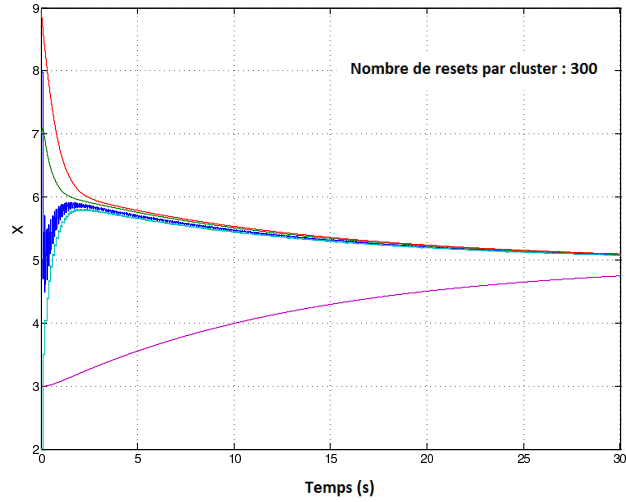


Figure 10. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)}$  appartenant à  $T_1$

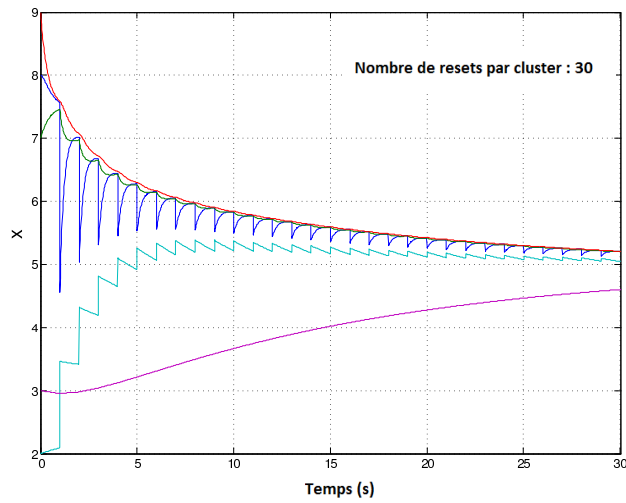


Figure 11. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenant à  $T_2$

ainsi à ramener le leader du second cluster vers cette valeur à travers les échanges établis.

Contrairement à la technique événementielle, la stratégie de reset périodique requiert que l'agent 4 établisse des liens inutiles nécessitant un échange énergétique important. Il est intéressant de souligner que la séquence  $T_3$  permet à chaque communauté d'interagir 55 fois en 30 secondes sans pouvoir converger vers la même valeur.

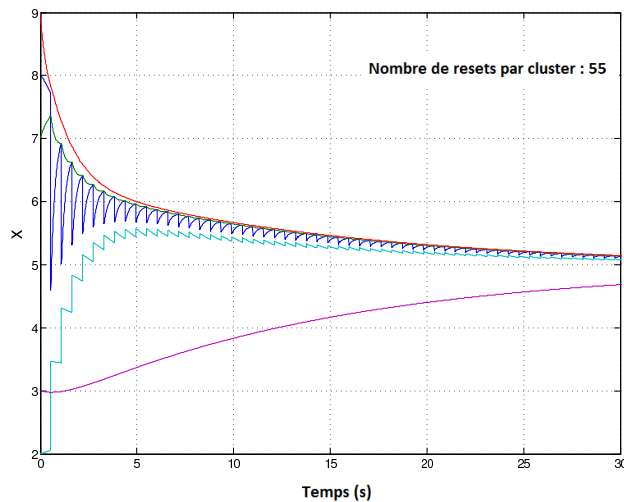


Figure 12. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenant à  $T_3$

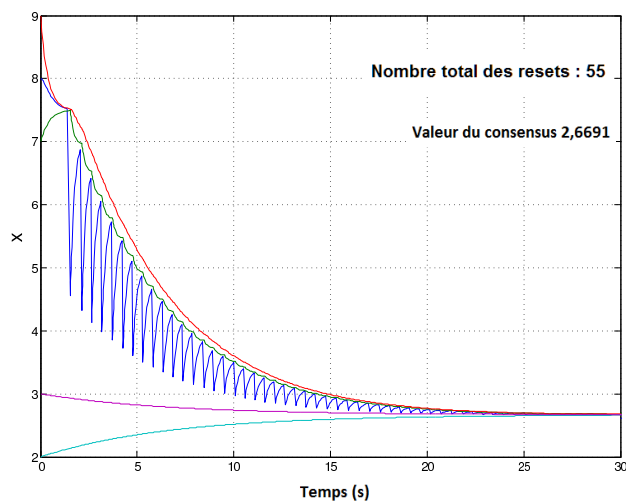


Figure 13. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)}$  et  $t_{\phi_2(k)}$  appartenant à  $T_4(20, 40)$

Par ailleurs, en utilisant la séquence  $T_4(20, 40)$ , nous comptons un nombre total de 55 sauts (54 pour le premier cluster et 1 pour le second) requis pour atteindre un consensus pratique. Ceci montre que les échanges inutiles non seulement consomment de l'énergie mais affectent également la vitesse de convergence du système.

## 6. Conclusion

Dans le présent article, nous avons analysé le consensus dans les systèmes multi-agents partitionnés en plusieurs clusters. Chaque agent interagit en permanence à l'intérieur de son groupe et certains d'entre eux réinitialisent leurs états en prenant en compte les informations provenant de leurs semblables. Ainsi, nous nous retrouvons avec des réseaux hétérogènes d'agents ayant à la fois des dynamiques linéaires et impulsives. Nous supposons que le réseau satisfait une certaine connectivité ayant une influence minimale et nous prouvons que, dans ce cas, le consensus est garanti pour autant que la séquence de remise à zéro est divergente et la période séparant deux instants de remise à zéro est délimitée par un temps de séjour strictement positive. Afin de définir des séquences qui vérifient ces propriétés, nous proposons deux lois événementielles et quelques exemples numériques qui illustrent les résultats de cet article.

## Bibliographie

- Andreoli J.-M. (1995). Coordination as negotiated transactions. *Object Orientation with Parallelism and Persistence*, p. 151-173.
- BenRejeb J., Morărescu I.-C., Daafouz J. (2014). Event triggering strategies for consensus in clustered networks. In *Proc. of the european control conference*.
- Blondel V. D., Hendrickx J. M., , Tsitsiklis J. (2009). On Krause's multi-agent consensus model with state-dependent connectivity. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, n° 11, p. 2586-2597.
- Blondel V. D., Hendrickx J. M., Olshevsky A., Tsitsiklis J. (2005). Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking. In *Proc. ieee conf. on decision and control*, p. 2996-3000.
- Bragagnolo M. C., Morărescu I.-C., Daafouz J., Riedinger P. (2014). Lmi sufficient conditions for the consensus of linear agents with nearly-periodic resets. In *Proc. of the american control conference*.
- Bullo F., Cortés J., Martínez S. (2009). *Distributed control of robotic networks. a mathematical approach to motion coordination algorithms*. Princeton University Press.
- Gfeller D., Rios P. D. L. (2008). Spectral coarse graining and synchronization in oscillator networks. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 174104.
- Hegselmann R., Krause U. (2002). Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 5, n° 3.
- Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S. (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, n° 6, p. 988-1001.
- Moreau L. (2005). Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, n° 2, p. 169-182.
- Morărescu I.-C., Girard A. (2011). Opinion dynamics with decaying confidence: Application to community detection in graphs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 56, n° 8, p. 1862 - 1873.

- Morărescu I.-C., Martin S., Girard A. (2014). Coordination in networks of linear impulsive agents. In *Proceedings of the 53rd conference on decision and control*.
- Morărescu I.-C., Michiels W., Jungers M. (2013). Synchronization of coupled nonlinear oscillators with shifted gamma-distributed delays. In *Proceedings of american control conference*.
- Pavlopoulos G., Secrier M., Moschopoulos C., Soldatos T., Kossida S., Aerts J. *et al.* (2011). Using graph theory to analyze biological networks. *BioData Mining*, vol. 4, n° 10, p. 1-27.
- Ratmann O., Wiuf C., Pinney J. W. (2009). From evidence to inference: Probing the evolution of protein interaction networks. *HFSP Journal*, vol. 3, n° 5, p. 290-306.
- Ren W., Beard R. W. (2005). Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, n° 5, p. 655-661.
- Steuer E., Tyukin I., Nijmeijer H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D*, n° 238, p. 2119-2128.
- Tanner H., Jadbabaie A., Pappas G. (2003). Stable flocking of mobile agents part i: Dynamic topology. In *Proceedings of the 42th IEEE conference on decision and control*, vol. 2, p. 2010-2015.
- Tanner H., Jadbabaie A., Pappas G. (2005). Flocking in teams of nonholonomic agents. In V. Kumar, N. Leonard, A. Morse (Eds.), *Cooperative control*, vol. 309, p. 458-460. Springer.
- Touri B., Nedic A. (2012). On approximations and ergodicity classes in random chains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, n° 11, p. 2718-2730.