



**HAL**  
open science

## Essai et simulation du comportement d'une structure sandwich entaillée jusqu'à rupture

Olivier Montagnier, Jean-Paul Charles, Gabriel Eyer, Christian Hochard, N. Lahellec, Frédéric Mazerolle

► **To cite this version:**

Olivier Montagnier, Jean-Paul Charles, Gabriel Eyer, Christian Hochard, N. Lahellec, et al.. Essai et simulation du comportement d'une structure sandwich entaillée jusqu'à rupture. 19ème Journées Nationales sur les Composites, Jun 2015, Lyon, France. hal-01315475

**HAL Id: hal-01315475**

**<https://hal.science/hal-01315475>**

Submitted on 13 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Essai et simulation du comportement d'une structure sandwich entaillée jusqu'à rupture

## *Test and simulation of behavior of a composite sandwich structure with a notch up to failure*

**O. Montagnier<sup>1,2</sup>, J.-P. Charles<sup>2</sup>, G. Eyer<sup>2</sup>, Ch. Hochard<sup>2</sup>, N. Lahellec<sup>2</sup>, F. Mazerolle<sup>2</sup>**

1 : Centre de Recherche de l'Armée de l'air (CRéA)  
École de l'air,  
BA 701, F-13361 Salon air, France  
e-mail : olivier.montagnier@defense.gouv.fr

2 : Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA)  
31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20, France  
e-mail : montagnier@lma.cnrs-mrs.fr

### Résumé

Un nouvel essai sur une éprouvette sandwich entaillée de grande dimension et soumise à un chargement statique de flexion/torsion est proposé. L'éprouvette entaillée, constitué de plis tissés en verre/époxy et de mousse, ressemble à une pièce représentative d'une structure aéronautique présentant une fissure. L'objectif de l'essai est de générer l'initiation et la propagation stable d'une fissure au bord de l'entaille dans le cas d'un chargement complexe caractéristique d'une structure réelle. Cet essai est suivi par un système de corrélation d'image numérique 3D. Le résultat de l'essai est utilisé pour démontrer la validité d'un modèle basé sur la mécanique de l'endommagement et un critère non local. La très bonne corrélation entre la simulation et l'expérience au niveau des champs et de l'effort à rupture montre l'efficacité de la méthode proposée.

### Abstract

A new test on a large sandwich notched specimen loaded in static bending/torsion is proposed. The notched specimen, in woven fabric GFRP laminates and foam material, looks like an aeronautical structure with a crack. The aim of this test is to generate crack initiation and stable propagation around the notch in the case of a complex loading. The experimental strain field is obtained with 3D digital image correlation. This test is used to validate a model based on continuum damage mechanics and a nonlocal criterion. The very good correlation between simulation and experience, relatively to the strain field and the force at failure, demonstrates the effectiveness of the proposed method.

**Mots Clés :** mécanique de l'endommagement - structure entaillée - critère non local - corrélation d'images numériques - structure sandwich.

**Keywords :** Damage mechanics - notched structure - nonlocal criterion - digital image correlation - sandwich structure.

## 1 Introduction

La prédiction de la rupture d'un matériau composite est toujours un challenge. De nombreux modèles ont été développés pour décrire les multiples mécanismes à l'origine de la rupture, comme la fissuration de la matrice, la décohésion fibre/matrice, la rupture transverse, le délaminage ou la rupture des fibres. Ces modèles sont généralement identifiés sur des essais homogènes (tension, compression, ...) ou relativement simples (flexion 3 ou 4 points, ...) et des géométries simples (poutre, plaque, ...). Ces essais essaient généralement de minimiser les effets dits de structure (concentration de contrainte). Cependant, il est nécessaire de tester l'efficacité de ces modèles sur des situations plus complexes présentant des concentrations de contraintes, comme dans le cas de structures réelles ou de structures y ressemblant. Ici, il est proposé un nouvel essai sur une éprouvette sandwich entaillée de grande taille, qui ressemble à une structure aéronautique chargée en flexion/torsion (Fig. 1a). Le but de cet essai est de générer l'initiation et la propagation de la fissure au bord de l'entaille. L'essai est suivi par corrélation d'image 3D (noté DIC).

Le résultat de l'essai sera utilisé pour valider un modèle de matériau tissé basé sur la mécanique de l'endommagement et développé depuis de nombreuses années [1, 2, 3, 4]. Ce modèle tient compte de

l'évolution de l'endommagement diffus correspondant à la micro-fissuration de la matrice parallèlement à la direction des fibres [5]. L'initiation de la rupture des plis tissés est obtenue par un critère non-local à l'échelle des plis [2, 6, 4]. Le modèle est implémenté dans ABAQUS.

La première partie du papier décrit le modèle mécanique et le critère non-local. Ensuite l'expérience est présentée. Finalement, les résultats numériques sont comparés aux résultats obtenus par DIC et démontre l'efficacité de la méthode proposée.

## 2 Mécanique de l'endommagement des plis tissés

Le modèle proposé est basé sur la mécanique de l'endommagement. Il décrit le comportement à l'échelle du pli du matériau composite (méso-modèle) [5]. Les processus à l'échelle micro sont décrits par des fonctions thermodynamiques à l'échelle méso. L'originalité du modèle présenté ici est de considérer qu'un pli de matériau tissé peut être représenté par un stratifié  $[0^\circ, 90^\circ]$  constitué de plis UD subissant exactement le même niveau de déformation [4]. Dans le cas présent, le tissé utilisé est un verre E satin de cinq : 83% de fibres dans la direction chaîne et 17% dans la trame. Ainsi, le stratifié correspondant est constitué de 83% de plis UD à  $0^\circ$  et de 17% de plis UD à  $90^\circ$  et son épaisseur totale est égale à celle du pli tissé.

### 2.1 Comportement endommageable du pli UD

L'endommagement est supposé n'exister que dans le plan du pli méso. Il est considéré uniforme dans l'épaisseur du pli, ce qui suppose implicitement que le gradient de déformation est faible dans cette direction. Il est exprimé en terme de perte de rigidité

$$E_1 = E_1^0 (1 - d_1) ; E_2 = E_2^0 (1 - d_2) ; G_{12} = G_{12}^0 (1 - d_{12}) \quad \text{with} \quad \{d_1, d_2, d_{12}\} \in [0, 1] \quad (1)$$

où  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_{12}$  sont respectivement les endommagements dans les directions axiale, transverse et de cisaillement. Les états d'endommagement sont initialement nul ainsi  $E_1^0$ ,  $E_2^0$  et  $G_{12}^0$  sont les rigidités initiales directions axiale, transverse et de cisaillement. Si on suppose un état de contraintes planes et les hypothèses de petites perturbations vraies, l'énergie de déformation locale dans chaque pli peut s'écrire en terme de contraintes sous la forme suivante [5]

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle \sigma_1 \rangle_+^2}{E_1^0 (1 - d_1)} + \frac{\langle \sigma_1 \rangle_-^2}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_2 \rangle_+^2}{E_2^0 (1 - d_2)} + \frac{\langle \sigma_2 \rangle_-^2}{E_2^0} - 2 \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0 (1 - d_{12})} \right) \quad (2)$$

où  $\langle \cdot \rangle_+$  et  $\langle \cdot \rangle_-$  représentent la partie positive et la partie négative. On remarque dans cette expression que la compression n'entraîne pas d'endommagement supplémentaire car cette sollicitation a tendance à refermer les fissures. Il est connu que les mécanismes d'endommagement comme la micro-fissuration de la matrice diminuent en même temps la rigidité transverse et celle de cisaillement. Aussi, une hypothèse importante du modèle sera de considérer que les endommagements dans ces deux directions sont égaux

$$d_{12} = d_2 \quad (3)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables internes peuvent être déduites de l'expression de l'énergie de déformation

$$Y_{d_j} = \frac{\partial E}{\partial d_j} = \frac{\langle \sigma_j \rangle_+^2}{2E_j^0 (1 - d_j)^2} \quad j \in \{1, 2\} ; \quad Y_{d_{12}} = \frac{\partial E}{\partial d_{12}} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0 (1 - d_{12})^2} \quad (4)$$

L'évolution des variables internes dépend de ces forces thermodynamiques ou plus spécifiquement de la valeur maximale atteinte durant le trajet de chargement. Dans la direction des fibres, la rupture est fragile et correspond à un modèle à seuil (échelon). Il a cependant été montré dans [3] que le seuil pouvait évoluer pour de très forts niveaux d'endommagement transverse (ou de cisaillement). On considère la loi suivante

$$d_1 = 0 \quad \text{si} \quad Y_{d_1} < Y_{d_1}^{\max}(d_2) \quad \text{sinon} \quad d_1 = 1 \quad (5)$$

Le phénomène est encore plus probant dans le cas de la compression. En effet, la rupture du pli en compression étant piloté par un micro-flambage des fibres, il est aisé de comprendre que l'état d'endommagement de la résine affectera fortement sa rigidité et donc facilitera le micro-flambage. On considère une loi d'évolution linéaire dans ce cas [7]

$$\text{Rupture en compression si } \varepsilon < \varepsilon_{min}^{d_2} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{min}^{d_2} = \varepsilon_{min}^{d_2=0} \cdot (1 - d_2) \quad (6)$$

L'endommagement dans la direction transverse est basé sur une loi statistique [3]

$$d_2 = \left\langle 1 - e^{-(Y_{eq} - Y_0)} \right\rangle_+ \quad \text{avec} \quad \dot{d}_2 \geq 0 \quad (7)$$

où  $Y_{eq} = aY_{d_2}^m + bY_{d_{12}}^n$  est une force thermodynamique équivalente qui tient compte des mécanismes de couplage entre la direction transverse et celle de cisaillement. Le modèle est étendu au cas de la fatigue dans [8].

## 2.2 Déformation inélastique du pli UD

Des déformations inélastiques ont été observées dans le cas de stratifiés [45] dans [3]. Ici, seules les déformations inélastiques en cisaillement sont prises en compte. D'après [5], le couplage entre l'endommagement et la plasticité est écrit à partir de la contrainte effective et de la déformation effective

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{1 - d_{12}} \quad \text{and} \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{12}^p = \dot{\varepsilon}_{12}^p (1 - d_{12}) \quad (8)$$

Un modèle d'écroutissage cinématique linéaire est utilisé pour d'écrire l'évolution de ces variables en supposant que les contraintes  $\sigma_{11}$  and  $\sigma_{22}$  n'ont pas d'influence

$$f = |\tilde{\sigma}_{12} - C_0 \tilde{\varepsilon}_{12}^p| - R_0 \quad (9)$$

où  $R_0$  est le seuil de plasticité et  $C_0$  est le coefficient de la loi linéaire.

## 2.3 Critère non-local

Dans [2], il a été observé sur des plaques en carbone/époxy quasi-isotropes avec concentration de contrainte (trou, entaille, ...) qu'un critère local sous-estime fortement la force de rupture. Whitney et Nuismer [9] ont depuis longtemps mis en évidence cet effet sur les matériaux composites et ont proposé d'utiliser deux méthodes pour prévoir la rupture : le « point stress » et l'« average stress ». Ces méthodes font l'hypothèse que la rupture apparaît lorsque la contrainte (ou sa moyenne) à une distance caractéristique du bord est égale à la contrainte maximale de traction. La longueur caractéristique dépend du matériau utilisé. Ici, un volume caractéristique de rupture (FCV, cf. Fig. 1), ayant l'épaisseur d'un pli, est utilisé [2, 6]. Il semble plus adapté numériquement puisqu'il suffit de calculer la contrainte moyenne dans ce volume et de déplacer ce volume dans tous le stratifié. Le critère est écrit en contrainte (ou sur la force thermodynamique équivalente)

$$d_1 = 0 \quad \text{if} \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int \sigma dV < \sigma_f^{\max} \quad \text{else} \quad d_1 = 1 \quad \text{with} \quad V = t \times S \quad (10)$$

où  $\sigma_f^{\max}$  est la contrainte à rupture dans la direction des fibres (identifiée par un essai de traction),  $t$  est l'épaisseur du pli et  $S$  est la surface caractéristique. L'identification de la surface caractéristique, ici un disque, est réalisé sur un essai avec concentration de contrainte comme une plaque quasi-isotrope trouée. On trouve pour le matériau étudié un diamètre caractéristique de 0.6 mm qui correspond environ à la dimension de la mèche [10]. L'évolution de l'endommagement local, des déformations anélastiques et du critère non-local ont été introduit dans une Umat d'ABAQUS. L'implémentation de la méthode est donnée dans [2, 6].

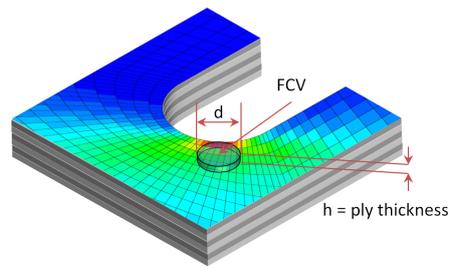


FIGURE 1 – Schéma du volume caractéristique de rupture (FCV) au bord de l'entaille

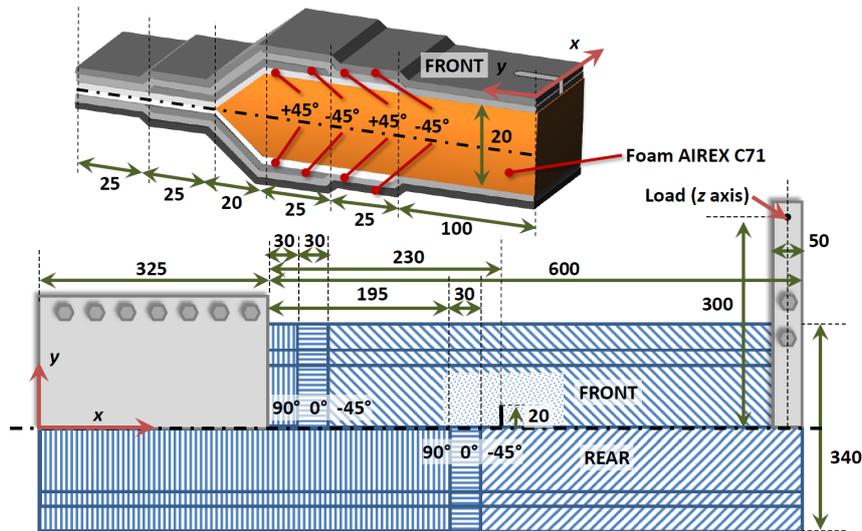


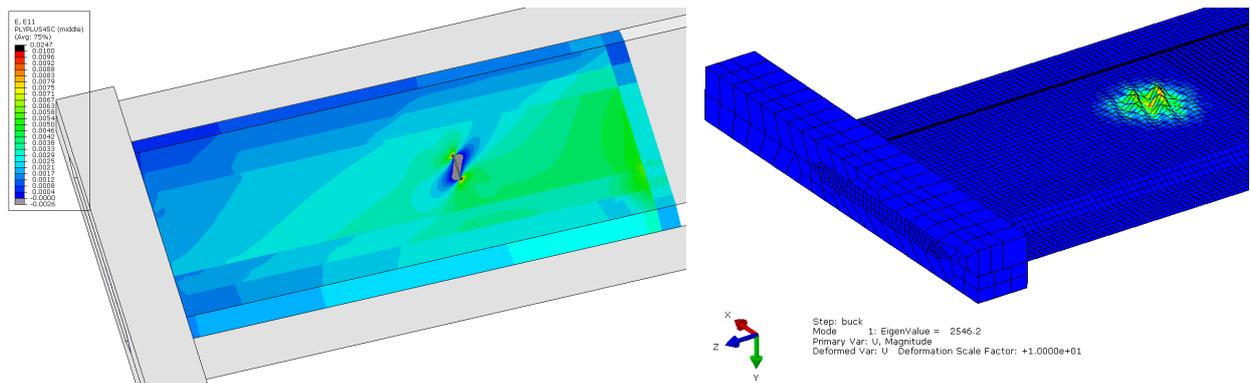
FIGURE 2 – Géométrie de l'essai et de l'éprouvette, et séquence d'empilement

### 3 Éprouvette sandwich et montage expérimental

L'expérience est inspirée par le cas d'une pièce représentative d'une structure aéronautique qui serait fissurée et soumise à un chargement de flexion/torsion. L'éprouvette sandwich (925mm x 325mm x 21mm) est simplifiée par rapport à une structure réelle (Fig. 2). Elle est constituée de plis tissés en fibre de verre/époxy et d'une âme en mousse. La face entaillée est constituée d'un  $[\pm 45^\circ]$ . L'entaille mesure 40 mm  $\times$  1 mm. Pour simuler le chargement, une force de traction est appliquée à un bras de levier à une des extrémités de l'éprouvette. L'autre côté est encasturé. Le principal objectif de la géométrie et de la séquence d'empilement est de minimiser le risque de flambage, le risque de rupture à l'encastrement et le risque de délaminage de manière à se focaliser sur l'initiation de la rupture au bord de l'entaille. Ainsi, les deux faces de l'éprouvette sont collées et renforcées par des plis à  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$  pour limiter le risque de délaminage. La face arrière, principalement soumise à de la compression, est aussi renforcée par un pli de  $0^\circ$  et un pli de  $90^\circ$  pour empêcher le flambage local.

L'éprouvette est réalisée en deux étapes. Durant la première étape, seule la face avant est stratifiée sur la mousse. Le déséquilibre du matériau et celui du stratifié ( $[\pm 45^\circ]$ ) génèrent un certain vrillage de la demi-éprouvette après cuisson. Cet effet est rééquilibré par la réalisation de la face arrière. Des contraintes internes sont donc générées par ce mode de fabrication. Elles seront considérées comme négligeables et ne seront pas prises en compte dans la simulation. Dans le futur, l'utilisation d'un matériau équilibré sera privilégié pour supprimer cet effet.

Avant l'essai, l'éprouvette complète a été modélisée dans ABAQUS en utilisant la théorie classique des stratifiés. Le calcul a permis d'estimer l'initiation de la fissure au bord de l'entaille pour un effort de l'ordre de 100daN (Fig. 3 (a)). On note que la mousse a un effet négligeable dans cette simulation et elle n'a pas été prise en compte. Les résultats de la simulation du flambage (par perturbation linéaire) sont donnés sur la Fig. 3 (b) et dans le Tab 1. Ils montrent une marge de l'ordre de 2.5 par rapport à la force à rupture ce qui semble raisonnable. On note que dans ce cas, l'effet de la mousse est très



(a) face avant : déformation dans la direction des fibres du pli à 45° (modèle élastique) (b) face arrière : premier mode de flambage sur le modèle avec maillage fin

FIGURE 3 – Simulations éléments finis de l'expérience

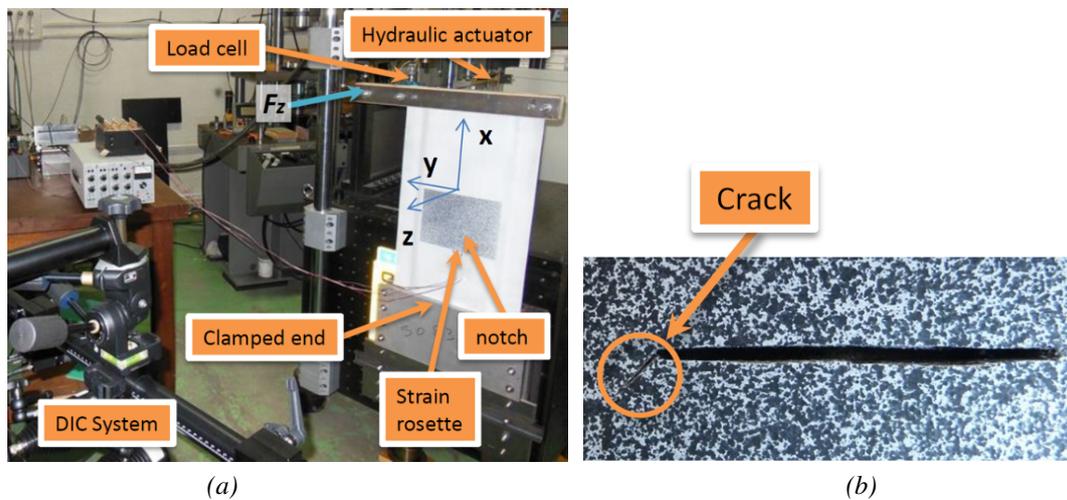


FIGURE 4 – (a) Montage expérimental ; (b) propagation stable de la fissure à 45° au bord de l'entaille à la fin de l'essai

important dans la simulation et ne peut être négligé.

Maillage	Unité	Grossier	Moyen	Fin
Nombre d'éléments	-	4500	11 700	27 600
Charge de flambage	daN	285	267	254

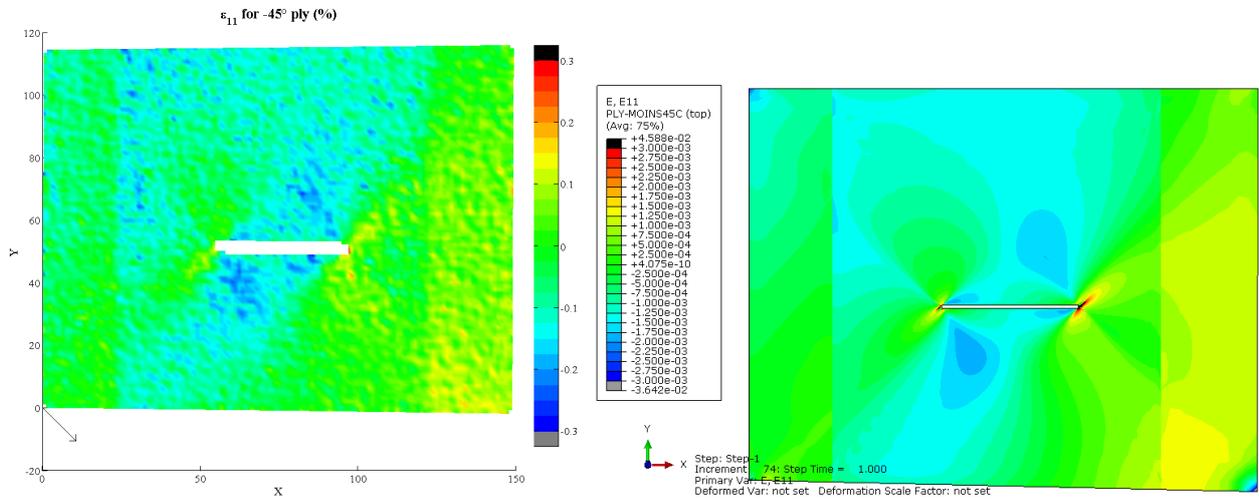
TABLE 1 – Convergence de la charge de flambage vs. le nombre d'éléments finis

Le montage expérimental est présenté sur la Fig. 4 (a). Durant l'essai, les déformations au bord du trou sont mesurées avec de la corrélation d'image (ARAMIS). Les grands déplacements hors plan oblige l'utilisation d'un système de corrélation 3D. Une rosette a été placée au bord du trou pour qualifier la qualité de la mesure par corrélation. La force de traction  $F$  est appliquée par un vérin hydraulique et mesurée par une cellule d'effort. Le vérin est suffisamment éloigné du point d'application de la force par un câble pour garantir une direction de l'effort (axe  $z$ ) quasiment constante pendant l'essai. L'initiation de la fissure au bord de l'entaille est observée pour  $F = 104$  daN. La propagation de la fissure à -45° est stable (cf. Fig. 4 (b)) jusqu'à la fin de l'essai pour  $F = 120$  daN.

#### 4 Comparaison de l'essai avec la simulation

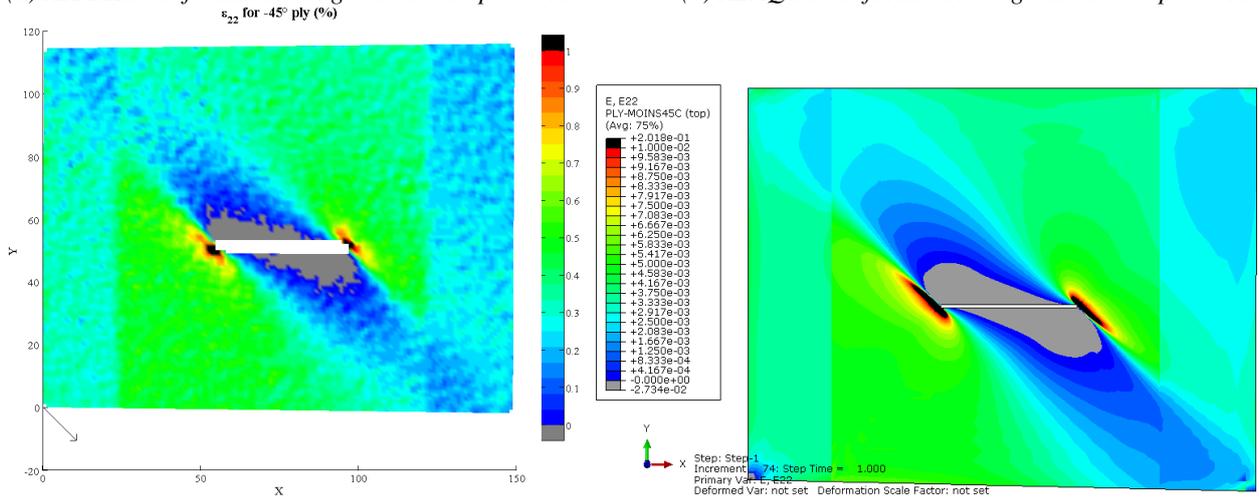
Pour simplifier la comparaison entre l'expérience et la simulation, seulement l'aire mesurée avec la DIC a été simulée dans ABAQUS. Seule la face avant de l'éprouvette est modélisée. le stratifié est supposé en état de contrainte plane. La comparaison entre la simulation et l'expérience est possible

seulement si les conditions limites sont connues. Les champs de la face extérieure, issu de la DIC, sont traités sous MATLAB pour obtenir des approximations polynomiales des déplacements du bord. Ces polynômes sont implémentés dans le modèle élément finis au niveau du plan moyen. Cela suppose que les courbures sont faibles ce qui est le cas ici. Deux simulations sont réalisées : une linéaire (théorie des stratifiés) et une non linéaire (théorie des stratifiés, endommagement et plasticité).



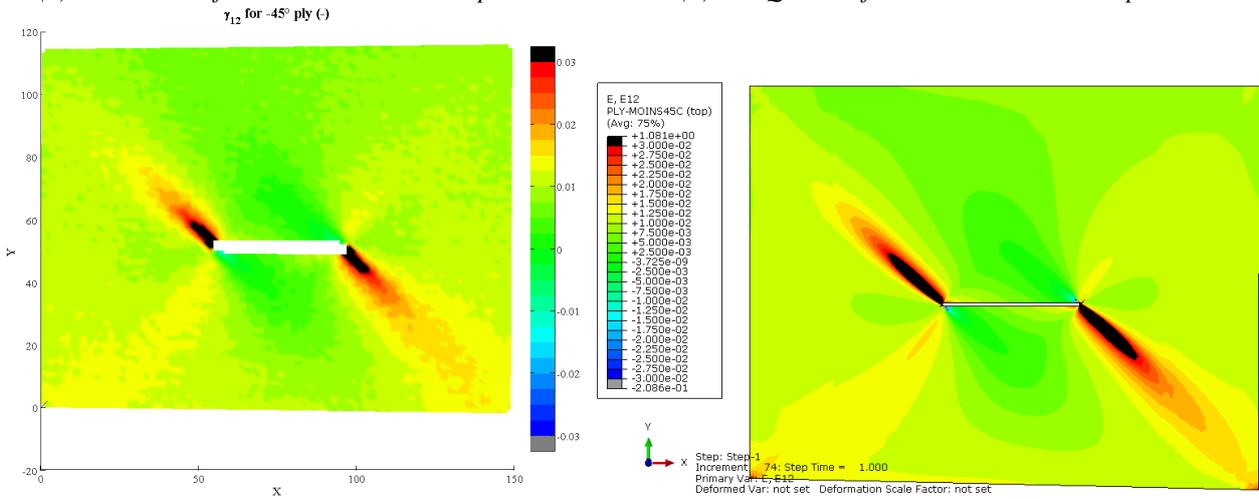
(a) ARAMIS : déformation longitudinale du pli à  $-45^\circ$

(b) ABAQUS : déformation longitudinale du pli à  $-45^\circ$



(c) ARAMIS : déformation transverse du pli à  $-45^\circ$

(d) ABAQUS : déformation transverse du pli à  $-45^\circ$



(e) ARAMIS : déformation de cisaillement du pli à  $-45^\circ$

(f) ABAQUS : déformation de cisaillement du pli à  $-45^\circ$

FIGURE 5 – Comparaison des champs de déformation sur la surface externe de l'éprouvette (déformation en %)

En utilisant un critère local comme le critère de contrainte maximale ( $\sigma_{fud}^{max} = 960$  MPa) pour

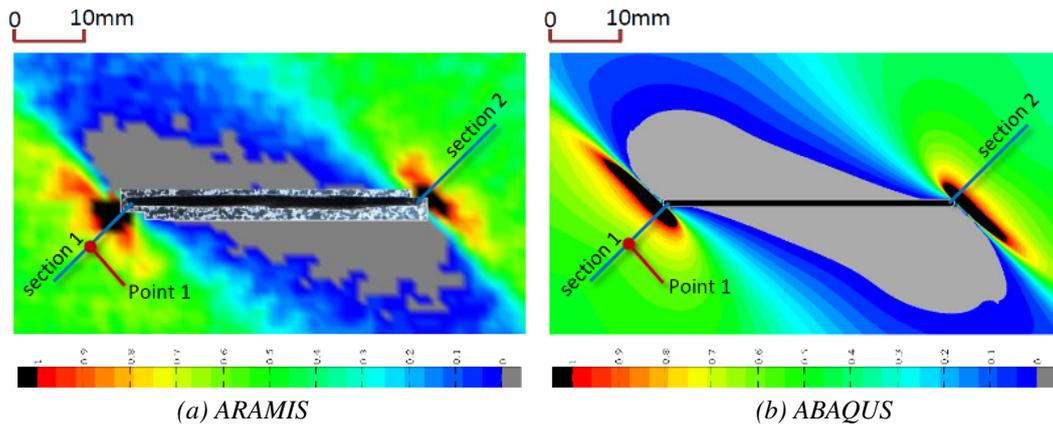


FIGURE 6 – Déformation normale dans la direction  $(x + y)$  autour de l'entaille avant l'apparition de la fissure (en %)

prédire la première rupture de pli, la force à rupture est sous estimée d'un facteur 3.5 ( $F_{\max} = 30$  daN). En revanche, le critère non-local proposé donne une force à rupture de 96 daN quasi similaire à la valeur expérimentale.

La simulation (de la surface extérieure du stratifié) et la DIC sont données sur la Fig. 5. Le champ expérimental correspond à l'état juste avant l'initiation de la fissure et pour la simulation, au moment où le critère non-local prédit la première rupture de pli. Il est important de noter que la DIC donne le champ de déformation de la surface extérieure de l'éprouvette, principalement constitué des fibres de chaîne à  $-45^\circ$ . D'un autre côté, la Fig. 4 (b) montre que la propagation de la fissure (à  $-45^\circ$ ) est pilotée par la rupture des fibres dans la direction chaîne mais à  $+45^\circ$ , ce qui correspond au pli intérieur. Il n'est pas possible d'obtenir directement la déformation de ce pli interne mais comme les courbures sont faibles, on peut considérer que la déformation transverse dans le pli à  $-45^\circ$  correspond à la déformation longitudinale dans le pli à  $+45^\circ$ . Dans la Fig. 5, les champs de déformation longitudinale (échelle entre  $-0.3\%$  et  $0.3\%$ ), transverse (échelle entre  $0\%$  et  $1\%$ ) et de cisaillement (échelle entre  $-3\%$  et  $3\%$ ) obtenus avec la simulation corrélient très bien les champs expérimentaux. En particulier, le passage de 2 à 3 plis dans la séquence d'empilement est bien représentée. Une comparaison plus précise est donnée sur la Fig. 6. En remarquant que l'aire où la DIC n'est pas résolu est plus grand que l'entaille, on remarque que les champs de déformation sont très similaires. Ces champs proche de l'entaille sont tracés le long des sections 1 and 2 sur la Fig. 7 (a) et la même conclusion peut être faite. Loin de la concentration de contrainte au bord de l'entaille (point 1), la courbe force/déformation est comparée à la simulation linéaire et à celle non linéaire (Fig. 7 (b)). Le champ d'endommagement est donné sur la Fig. 8 (a) montrant une large zone où l'endommagement est proche de 1. Enfin, le calcul de la contrainte longitudinale est tracé le long de la section 1 sur la Fig. 8 (b). On observe que la contrainte longitudinale est 3.5 fois plus grande que la contrainte longitudinale en tension pour le modèle linéaire et 6 fois pour le modèle non linéaire. En particulier, on note que la concentration de contrainte est doublée dans le cas du modèle non linéaire. Cela montre l'intérêt d'utiliser un modèle non local même dans le cas de la mécanique de l'endommagement.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, il est proposé un nouvel essai sur une éprouvette sandwich entaillée de grande dimension et soumise à un chargement statique de flexion/torsion. Cette éprouvette est constituée de plis tissés en verre/époxy et de mousse et s'approche du comportement d'une pièce représentative d'une structure aéronautique. L'objectif de l'essai est de générer l'initiation et la propagation stable d'une fissure au bord de l'entaille dans le cas d'un chargement complexe caractéristique d'une structure réelle. Cet essai est suivi par un système de DIC 3D. Le résultat de l'essai est utilisé pour démontrer la validité d'un modèle basé sur la mécanique de l'endommagement et un critère non local développé depuis plusieurs années. La très bonne corrélation entre la simulation et l'expérience au niveau des

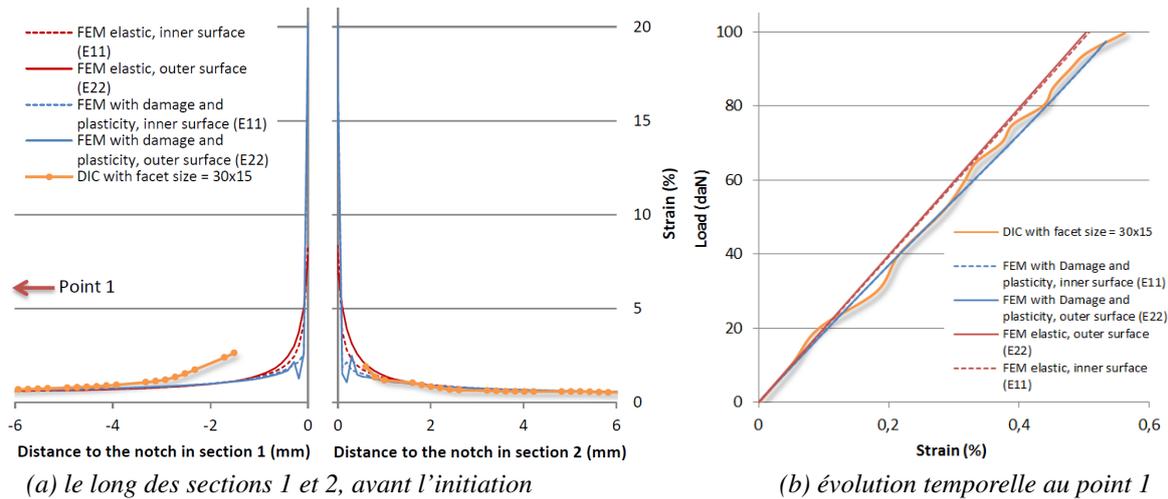
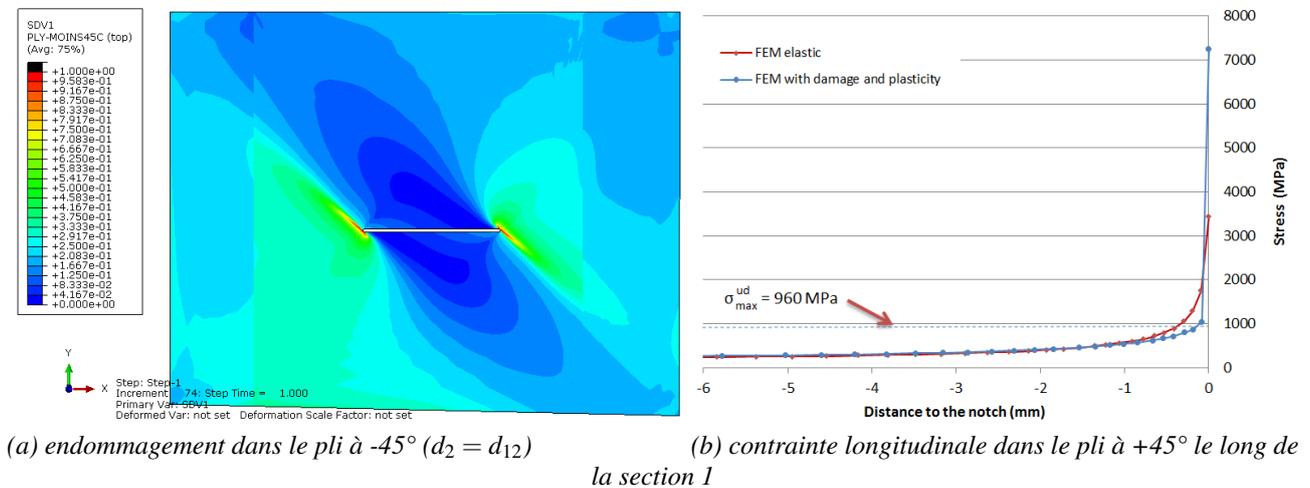

 FIGURE 7 – évolution de la déformation normale dans la direction  $(x + y)$  au bord de l'entaille


FIGURE 8 – Effet de l'endommagement transverse sur la déformation longitudinale et la contrainte longitudinale

champs et de l'effort à rupture montre l'efficacité de la méthode proposée.

## Références

- [1] Ch Hochard, P-A Aubourg, and J-P Charles. Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2) :221–230, 2001.
- [2] Christian Hochard, Noël Lahellec, and Cyril Bordreuil. A ply scale non-local fibre rupture criterion for cfrp woven ply laminated structures. *Composite Structures*, 80(3) :321–326, 2007.
- [3] Y Thollon and Ch Hochard. A general damage model for woven fabric composite laminates up to first failure. *Mechanics of Materials*, 41(7) :820–827, 2009.
- [4] Stéphanie Miot, Ch Hochard, and Noël Lahellec. A non-local criterion for modelling unbalanced woven ply laminates with stress concentrations. *Composite Structures*, 92(7) :1574–1580, 2010.
- [5] P. Ladevèze and E. Le Dantec. Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3) :257–267, 1992.
- [6] C. Hochard, S. Miot, N. Lahellec, F. Mazerolle, M. Herman, and JP Charles. Behaviour up to rupture of woven ply laminate structures under static loading conditions. *Composites Part A*, 40(8) :1017–1023, 2009.

- [7] G. Eyer, O. Montagnier, J-P. Charles, and C. Hochard. Effect of transverse damage on compressive strength in fiber direction for cfrp. In *ECCM Seville*, 2014.
- [8] Ch Hochard and Y Thollon. A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 32(1) :158–165, 2010.
- [9] J Ma Whitney and RJ Nuismer. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials*, 8(3) :253–265, 1974.
- [10] S. Miot. *Rupture de structures composites stratifiées sous chargements statique et de fatigue*. PhD thesis, Université de Provence, 2009.