



**HAL**  
open science

## Petit manuel de survie en milieu digital

Yan Gérard, Isabelle Sivignon

► **To cite this version:**

Yan Gérard, Isabelle Sivignon. Petit manuel de survie en milieu digital. Étienne BAUDRIER Loïc MAZO Informatique Mathématique - une photographie en 2016, CNRS Editions, 2016, 978-2-271-09335-6. hal-01314922

**HAL Id: hal-01314922**

**<https://hal.science/hal-01314922v1>**

Submitted on 18 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Informatique Mathématique une photographie en 2015

X et Y et Z et ... (Eds.)

8 janvier 2016



# Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Petit manuel de survie en milieu digital</b> | <b>3</b> |
| 1.1      | Introduction . . . . .                          | 4        |
| 1.2      | Topologie Digitale . . . . .                    | 6        |
| 1.2.1    | Génèse . . . . .                                | 6        |
| 1.2.2    | Grilles . . . . .                               | 7        |
| 1.2.3    | Connexité . . . . .                             | 8        |
| 1.2.4    | Autres outils . . . . .                         | 9        |
| 1.3      | Modèles digitaux . . . . .                      | 10       |
| 1.3.1    | Discrétisations . . . . .                       | 11       |
| 1.3.2    | Droites digitales . . . . .                     | 15       |
| 1.4      | Analyse surfacique et volumique . . . . .       | 23       |
| 1.4.1    | Distances discrètes . . . . .                   | 23       |
| 1.4.2    | Transformations . . . . .                       | 26       |
| 1.4.3    | Estimateurs géométriques . . . . .              | 30       |
| 1.5      | Jeux . . . . .                                  | 34       |
| 1.5.1    | Tomographie discrète . . . . .                  | 35       |
| 1.5.2    | Pavages . . . . .                               | 36       |
| 1.6      | Conclusion . . . . .                            | 36       |



# Table des figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Les 4 et 8-voisinages d'un point et les notions associées : . . .   | 8  |
| 1.2 | Un ensemble convexe digital $X$ dont le contour est en noir, et son enveloppe convexe en bleu. A gauche, les points de $\mathbb{Z}^2$ dans l'enveloppe convexe sont exactement les points de $X$ . A droite, l'enveloppe convexe contient des points de $\mathbb{Z}^2$ qui ne sont pas dans $X$ (en rouge). . . . .   | 11 |
| 1.3 | <b>Une ellipse et quelques uns de ses avatars digitaux :</b> En a) l'ellipse à discrétiser. Sa trace sur la grille des entiers est vide. En b), l'approche topologique introduit les points intérieurs voisins des points extérieurs ou inversement. En c), l'approche analytique relâche l'équation de l'ellipse $f(x) = 0$ en une double inégalité $-\delta \leq f(x) \leq \delta$ qui définit une bande autour de la courbe. L'avatar digital est à l'intérieur. Comme l'épaisseur de la bande varie en fonction des points, cela engendre des chemins de l'intérieur vers l'extérieur et des amas de points. De d) à l), l'approche morphologique avec un élément structurant consiste à épaissir la courbe avec une somme de Minkowski. Cela revient à déplacer l'élément structurant le long de la courbe. En d), e), f), cet élément est un disque (euclidien) de rayon la distance de Hausdorff l'ellipse à la grille : c'est la discrétisation de Hausdorff. Dans g), h), i), l'élément structurant est un carré unité centré. En j), k), l), c'est une croix unité ce qui correspond à la discrétisation de Bresenham. Ces deux derniers choix sont les plus petits éléments structurants garantissant des avatars respectivement 4-connexes et 8-connexes. . . . . | 14 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.4  | <b>Droites digitales épaisses, naïves et standards</b> : En a) et a') une droite digitale "épaisse". En b) et b') une droite digitale naïve telle que l'algorithme de Bresenhma peut la tracer. Elle est forcément 8-connexe. En c) et c') une droite standard, forcément 4-connexe. . . . .   | 17 |
| 1.5  | <b>L'épaisseur d'une partie <math>S</math> dans une direction <math>\vec{d}</math></b> : A gauche, un ensemble $S$ et une direction $\vec{d}$ . A droite, son épaisseur dans la direction $\vec{d}$ est la longueur du plus grand segment inclus dans l'enveloppe convexe de $S$ . C'est aussi l'épaisseur de la plus fine bande contenant $S$ . . . . . | 18 |
| 1.6  | <b>Désubstitution des mots <math>a</math> et <math>b</math></b> : chaque désubstitution des mots $a$ et $b$ s'interprète géométriquement comme une transvection sur le bord supérieur droit de la courbe. . . .  | 22 |
| 1.7  | <b>La couverture tangentielle de deux courbes</b> : à gauche, une courbe fermée 8-connexe et à droite, 4-connexe. La couverture tangentielle est l'ensemble des segments de droite maximaux inclus dans la courbe. . . . .   | 24 |
| 1.8  | De gauche à droite, les boules obtenues pour la distance $d_1$ , $d_\infty$ et euclidienne. . . . .  | 25 |
| 1.9  | Algorithme pour calculer la transformée en distance avec une distance de chanfrein utilisant les déplacements élémentaires $(0, \pm 1)$ , $(\pm 1, 0)$ et $(\pm 1, \pm 1)$ : à gauche, les masques définissant les voisins à considérer durant la passe avant et la passe arrière représentées à droite. . . . .   | 27 |
| 1.10 | A gauche, transformée en distance utilisant la distance euclidienne au carré dans $\mathbb{Z}^3$ . A droite, axe médian réduit pour la distance euclidienne. Résultats obtenus avec la bibliothèque DGtal. . . . .   | 28 |
| 1.11 | Squelette homotopique 4-connexe (image de la galerie de la bibliothèque DGtal) : en rouge, les pixels du squelette; les points simples sont représentés dans une palette de couleurs allant du bleu au noir, indiquant l'ordre dans lequel ils ont été supprimés. . . . .  | 31 |
| 1.12 | Ombre pour différents pas $h$ décroissants de gauche à droite d'un disque ouvert de rayon $\frac{1}{2}$ et étude de son contour, indiqué en rouge. . . . .   | 33 |
| 1.13 | Estimation de courbure, moyenne à gauche, gaussienne à droite sur des surfaces digitales [9] (Images de la galerie de la bibliothèque DGtal). . . . .  | 34 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.14 | <b>Jeu 1</b> : A gauche, un problème à 3 directions (un exemple résolu en haut et une instance en bas). A droite, un problème à deux couleurs (exemple et instance). . . . . | 35 |
| 1.15 | <b>Jeu 2</b> : A gauche, le schéma de principe d'un pseudo-hexagone. A droite, compléter le pavage du plan par le polyomino dessiné. . . . .                                 | 37 |





# Liste des tableaux



# Chapitre 1

## Petit manuel de survie en milieu digital

Yan Gerard  
Isabelle Sivignon

*Saviez-vous que les légos ou Minecraft possèdent leur propre géométrie ? Bien sûr, la dénomination est différente mais il s'agit bien d'étudier les formes que l'on peut construire avec des briques élémentaires à faces carrées. En imagerie, les carrés et les cubes sont respectivement appelés pixels et voxels et trouvent une représentation naturelle dans la grille des entiers  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathbb{Z}^3$ . Bizarrement, le but premier de cette théorie n'est pas de construire des vaisseaux spatiaux, des châteaux remplis de ninjas ou des villes titanesques mais des droites, des cercles, des sphères ou tout objet mathématique qui ressemble un tant soit peu aux figures de la géométrie élémentaire.*

*En dehors de ses applications ludiques, la géométrie digitale se définit comme la géométrie de  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z}^3$  ou plus généralement  $\mathbb{Z}^n$ , autant dire des espaces peu favorables à la géométrie. Si vous vous aventurez sur le chemin qui mène dans ces contrées hostiles à la pensée mathématique et informatique, vous risquez de croiser le membre de l'une de ses tribus archaïques. Au cas fort improbable où vous arriveriez à communiquer avec cet être primitif, vous en apprendrez peut-être un peu plus sur les raisons étranges qui leur font développer cette géométrie rudimentaire en milieu si hostile :*

- d'abord sans doute une certaine nostalgie pour les jeux de construction,*
- pour les esthètes, la beauté de la théorie,*
- et pour d'autres, l'ambition de jouer aux Mac Gyver de la géométrie mais derrière ces fantaisies extravagantes qui peuvent les rendre sympa-*

*thiques, voir naïfs ou inoffensifs, se terre un argument de fond qui ne relève pas de la simple lubie mais de l'emprise du numérique sur les sciences et technologies actuelles.*

*De tous temps, les sciences physiques à moyennes et grandes échelles ont guidé le développement d'une partie des mathématiques et en particulier de théories géométriques continues telles que la géométrie différentielle avec en soubassement le corps des nombres réels ou complexes. Ce paradigme ( $\mathbb{R}$ ) a fait ses preuves mais sa nature continue le rend fondamentalement inadapté au traitement des données recueillies par les millions de périphériques qui alimentent les bases de données du monde entier. Les capteurs enregistrent des données sous forme digitale, soit à une résolution fixée des tableaux d'entiers c'est-à-dire des fonctions de  $\mathbb{Z}^d$  à valeur dans  $\mathbb{Z}$ . Peut-on les traiter comme si c'étaient des fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ ? Probablement pas sans précautions mais c'est pourtant la voie la plus courante : l'usager pioche l'outil dont il a besoin dans les mathématiques continues, puis il recherche le moyen de l'appliquer à des structures entières, parfois grâce à un bricolage dont il garde le secret tant il existe d'innombrables façons de faire. Même si le résultat peut s'avérer significatif, passer par les nombres réels, c'est-à-dire une théorie basée sur des suites rationnelles de Cauchy convergentes, pour ensuite l'appliquer dans un cadre entier via des probabilités, une autre théorie ou un subterfuge est un détour considérable. Puisque de très nombreuses données à traiter se présentent sous la forme d'objets composés d'entiers -le b.a.-ba des nombres- pourquoi ne pas développer une théorie géométrique qui soit directement adaptée à ce format de données? C'est le chemin que nous vous proposons d'explorer. Il parcourt un territoire primitif encore largement vierge et donc propice à la recherche. Les agités du bocal dont je vous ai déjà parlé -on pourrait aussi les appeler des pionniers- ont bien sûr commencé à le défricher mais en comparaison de l'ampleur de la tâche, on en peut pas dire qu'ils soient très nombreux. C'est un travail en cours, un chantier à ciel ouvert et un terrain de jeu sur lequel il est vivement recommandé de s'aventurer en dehors des chemins balisés. Mais avant de vous lâcher en pleine jungle, nous vous proposons un itinéraire balisé. Alors, remontez vos chaussettes, aspergez-vous de citronnelle, empoignez vos coupe-coupes et suivez le guide...*

## 1.1 Introduction

Autant prévenir tout de suite, bien que la géométrie digitale soit un sujet ambitieux et prometteur, ce n'est pas encore la ruée vers l'or, du moins en termes d'applications et de retombées en direction des autres

sciences. Si on la compare à la géométrie algorithmique (géométrie sur des nuages de points, sur des maillages...), la modélisation géométrique (avec des courbes, surfaces paramétrées, etc), la vision par ordinateur ou l'informatique graphique, ces disciplines ne manquent pas de magnifiques images ou vidéos pour illustrer leurs prouesses et leur intérêt pour les industries de la conception, du divertissement, de la surveillance etc. En géométrie digitale, on s'extasie pour moins que ça :

- *"regardez, on sait faire une sphère digitale ! Fortiche, non ?*

- *Ouahhhh, bravo, ça en jette, une sphère. C'est sacrément cool tout ça. Et vous êtes au courant qu'on a marché sur la lune en 1969 ?"*

C'est vrai que les objets mathématiques issus de géométrie digitale peuvent parfois paraître désuets et tranchent avec le caractère résolument moderne de ce domaine à la frontière des mathématiques et de l'informatique. Même si ce décalage a de plus en plus tendance à se résorber, il a une raison profonde : en s'affranchissant des nombres réels, la géométrie digitale se positionne en marge des théories géométriques classiques, ce qui a nécessité un travail important de remise à niveau encore inachevé. Combien de siècles a-t-il fallu pour créer la géométrie telle que nous la connaissons aujourd'hui avec ses innombrables théories et applications ? Plus d'un millénaire. Même sans réinventer la roue, il n'est pas absurde de s'accorder un peu de temps pour réfléchir à la meilleure façon de la développer sur les entiers. En termes d'applications, de reconnaissance internationale et de taille de communauté, la géométrie digitale n'a pas encore atteint la maturité des domaines voisins. Ses préoccupations actuelles sont encore au fondement de la théorie, avec ses objets, propriétés, théorèmes et outils numériques, sous forme d'algorithmes certifiés par une complexité dans le pire cas. Ces développements sont guidés par l'idée de tendre vers la géométrie euclidienne classique, géométrie du plan et de l'espace, lorsque la résolution de la grille tend vers l'infini c'est-à-dire quand le pas  $h$  entre les points du réseau  $h\mathbb{Z}^n$  tend vers 0. L'ambition est aussi de faire en sorte que ces nouveaux outils dédiés à des données digitales soient non seulement exacts et garantis mais qu'ils aient à terme des performances optimales dans leur cadre numérique spécifique.

Pour en faire le panorama, il est préférable de commencer par le commencement, c'est-à-dire en ce qui nous concerne le produit cartésien  $\mathbb{Z}^n$  des entiers. La première tâche est de définir les figures les plus élémentaires - les droites, les cercles... - et c'est d'autant plus long que la diversité des objets explose dès que l'on quitte le continu. De la même façon qu'il existe de très nombreuses suites (de Cauchy) de rationnels qui tendent vers  $\sqrt{2}$  et qui en sont autant de déclinaisons, les concepts de la géométrie euclidienne se déclinent en géométrie digitale de différentes manières,

avec la même limite lorsque la résolution augmente à l'infini.

Puisque ce document se veut un manuel de survie en milieu digital (sous-entendu géométrique), nous allons essayer de vous donner un aperçu des différents dangers que vous risquez de rencontrer. En section 1, nous commencerons par une présentation des lieux, histoire de savoir où vous mettez les pieds, en l'occurrence sur une grille de points entiers - il y a plus confortable. Cette première partie sera donc dévolue à la *topologie digitale*. Puis nous ferons la zoologie des bêtes féroces qui peuplent cette jungle -morphologie, nombre de dents, fourberie. Ce sera la partie *Modèles digitaux*. Ensuite, le minimum nécessaire à la survie : comment boire de l'eau croupie ? comment tendre un hamac entre deux cimes d'arbres ? comment écraser une tarentule avec une espadrille ? Certains accessoires d'apparence anodine pourraient vous sauver la mise. Vous les trouverez dans la boîte à outils *Analyses surfaciques et volumiques*. Nous concluons avec des *Jeux*, au cas où vous soyez suspendu dans votre hamac au dessus d'une meute de hyènes affamées et que vous deviez patienter jusqu'à l'arrivée de secours tout ce qu'il y a de plus improbables. Bon voyage en milieu digital.

## 1.2 Topologie Digitale

### 1.2.1 Génèse

Commençons par reconnaître un peu les lieux malfamés où les organisateurs de l'école vous ont délicatement invités : la géométrie digitale est la géométrie de  $\mathbb{Z}^n$ . Il n'y a à priori pas de quoi fouetter un chat : le produit cartésien des entiers est un espace bien connu des mathématiciens. Il a une structure algébrique classique : c'est un *réseau* (*lattice* en anglais), c'est-à-dire un sous-groupe additif discret de  $\mathbb{R}^n$ . Plus généralement, les *réseaux* sont des groupes abéliens libres de type fini (ils ont une base de cardinal fini) sans torsion et le choix de n'importe quelle base permet de les identifier à  $\mathbb{Z}^n$ . Notre espace d'intérêt est donc l'archétype des réseaux et aussi bien en mathématiques qu'en informatique ou même en physique, il est très courant.

Le mathématicien allemand Hermann Minkowski a commencé à en étudier les propriétés sous un angle géométrique pour répondre à des questions de théorie des nombres (théorie arithmétique des formes quadratiques), domaine qu'il a baptisé à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle *géométrie des nombres* et dans lequel on retrouve en particulier la notion de convexité (cf section 1.2.4) [27].

L'autre racine historique de la géométrie digitale s'est constituée à

partir des années 1970-1980 avec l'étude des objets visibles sur les écrans d'ordinateur [31]. Les écrans sont constitués de tableaux de pixels qui affichent des images, elles-mêmes structurées comme des tableaux de nombres (un tableau d'entiers dans  $\{0, 1\}$  pour une image binaire, dans  $\{0, \dots, 255\}$  pour une image en niveaux de gris et trois tableaux de valeurs prises dans  $\{0, \dots, 255\}$  pour une image RGB). La première préoccupation a d'abord été de donner un cadre formel théorique à l'étude des parties de  $\mathbb{Z}^n$ . Ces bases sont celles de la *topologie digitale*. Ce sujet de recherche s'est ensuite naturellement étendu à la géométrie avec des résultats de nature mathématique et algorithmique.

En France, ce domaine a souvent été appelé abusivement géométrie *discrète*, alors que le terme *discret* désigne en mathématiques les topologies triviales dans le sens où toutes les parties sont ouvertes et fermées. Tous les sous-ensembles finis de  $\mathbb{R}^n$  sont par exemple discrets. Le terme anglo-saxon *discrete geometry* désigne ainsi sans ambiguïté la géométrie des parties discrètes au sens topologique du terme (sans point d'accumulation), tandis que le mot *digital* caractérise plus spécifiquement ce qui relève des entiers (ou des entiers à un facteur près) et rien d'autre... C'est la terminologie que nous adopterons.

### 1.2.2 Grilles

Le camp de base de la géométrie digitale, à la fois point de départ et d'arrivée, c'est la *grille* c'est-à-dire une représentation de l'espace discret. Elle peut être vue de deux manières duales : soit on considère un pavage du plan en cellules régulières, soit on considère son maillage dual, où chaque cellule est remplacée par un sommet en son centre de gravité, et une arête est placée entre deux cellules adjacentes (qui partagent un côté). Selon ce que l'on veut faire, une représentation peut s'avérer plus adaptée que l'autre. Le pavage du plan le plus communément utilisé pour modéliser l'espace discret est le pavage par carrés. Ce pavage présente de multiples avantages : il est facile à manipuler, il permet de définir un système d'adressage des cellules et un voisinage, sans oublier le fait que sa structure se retrouve dans nombre de capteurs. Mais il est à noter que, hormis ce dernier point, les deux autres pavages réguliers du plan, à savoir le pavage par triangles et le pavage par hexagones, présentent aussi des qualités similaires (en particulier, un système de coordonnées sur  $\mathbb{Z}^2$  peut aussi être défini).

Notons qu'à partir de ces pavages réguliers, il est possible de définir des pavages récursifs, appelés quad-tree, dans lesquels la primitive de base est divisée de manière récursive à certains endroits de la grille où



un niveau de détail accru est préférable [35]. Pour ces pavages, les algorithmes doivent bien entendu être aussi récurrents.

### 1.2.3 Connexité

Considérons maintenant un point  $(i, j)$  de  $\mathbb{Z}^2$  et son environnement immédiat. On peut définir deux types de voisins : les 4-voisins sont au nombre de 4 et ont pour coordonnées  $(i, j \pm 1)$  et  $(i \pm 1, j)$ , tandis que les 8-voisins, au nombre de 8, comprennent les 4-voisins ainsi que les points de coordonnées  $(i \pm 1, j \pm 1)$  (Fig.1.1). En dimension 3, on peut définir de manière similaire les 6-voisins, 18-voisins et 26-voisins. Nous vous laissons le soin de deviner les coordonnées de ces points. Ces notions de voisinage nous permettent de définir des courbes, et autres composantes connexes : une courbe  $k$ -connexe est une suite de points  $p_i$  dont chaque point  $p_i$  (sauf les extrémités  $p_0$  et  $p_n$  de l'arc) est  $k$ -voisin de son antécédent  $p_{i-1}$  et successeur  $p_{i+1}$ . Une  $k$ -courbe est dite fermée si  $p_0 = p_n$ . Deux points  $p$  et  $q$  appartiennent à la même composante  $k$ -connexe d'un objet s'il existe une  $k$ -courbe reliant ces deux points dans l'objet.

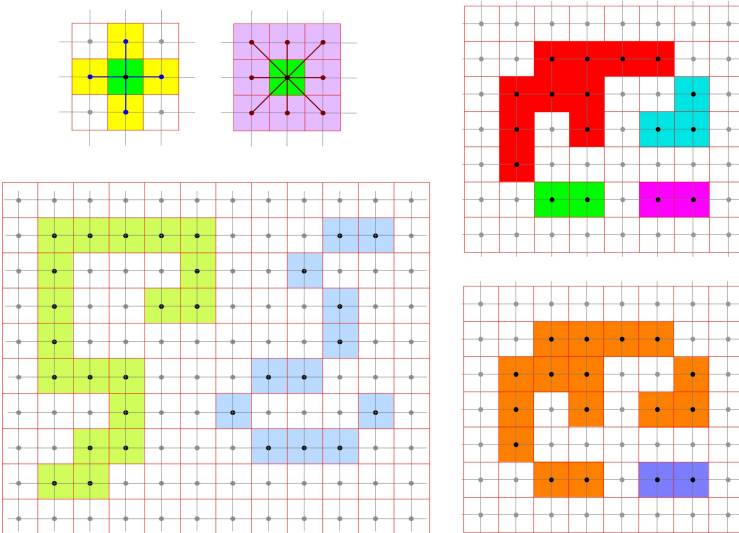


FIGURE 1.1 – Les 4 et 8-voisinages d'un point et les notions associées :

En haut à gauche, un point de la grille  $\mathbb{Z}^2$  et ses 4-voisins, puis ses 8-voisins. En dessous, deux courbes, l'une 4-connexe, l'autre 8-connexe. A droite, une même partie finie de  $\mathbb{Z}^2$  qui a 4 composantes 4-connexes et 2 composantes 8-connexes.

Nous sommes prêts pour notre première excursion en territoire digi-

tal avec au programme la traduction du théorème de Jordan [20]. D'après ce célèbre théorème, le complémentaire d'une courbe  $\gamma$  fermée simple (sans auto-intersection) dans le plan possède exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe  $\gamma$ . Autrement dit, tout chemin reliant les deux composantes connexes traverse  $\gamma$ .

La traduction de ce théorème pour des courbes de  $\mathbb{Z}^2$  nécessite quelques précautions. En effet, une courbe 8-connexe fermée simple ne sépare pas forcément le plan en deux composantes 8-connexes.

**Exercice 1** : Dessiner une courbe fermée simple 8-connexe "perméable" c'est-à-dire dont le complémentaire n'est composé que d'une seule composante 8-connexe.

**Exercice 2** : Dessiner une courbe fermée simple 4-connexe dont le complémentaire n'a plus deux mais un nombre arbitrairement grand de composantes connexes.

La solution pour obtenir un théorème de Jordan digital est d'utiliser des paires de connexités, appelées *paires de Jordan* [32] : une connexité est utilisée pour la courbe, une autre pour son complémentaire. En dimension 2, il y a deux paires de Jordan (4, 8) et (8, 4).

L'extension du théorème de Jordan aux surfaces (théorème de Jordan-Brouwer) est difficile dans le cas discret. De nombreux travaux ont été entrepris pour définir des surfaces dans  $\mathbb{Z}^n$  [28, 24], mais ces études ont été peu à peu abandonnées au profit de la définition de surfaces composées de faces de voxels (espace de Khalimsky et théorie des complexes cellulaires) [19, 16].

## 1.2.4 Autres outils

Outre la connexité, il est nécessaire d'introduire quelques notions élémentaires avant de s'aventurer plus loin.

La première relève de la *morphologie mathématique*, une famille de méthodes dédiées à l'analyse d'image dont la géométrie digitale est très proche. Entre bons voisins, on se donne parfois des coups de main : certains outils définis en morphologie mathématique sont parfois très utiles en géométrie digitale. Le premier d'entre eux est la *somme de Minkowski* de deux ensembles.

**Définition 1.2.1** (Somme de Minkowski). *Soient  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{Z}^n$  et  $B$  un autre sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{Z}^n$  appelé élément structurant. La*

somme de Minkowski de  $X$  et  $B$  (ou dilatation de  $X$  par  $B$ ) est

$$X \oplus B = \{x + b \mid x \in X, b \in B\}.$$

Énonçons aussi deux célèbres théorèmes pour compter les points à coordonnées entières dans des convexes ou des polygones.

**Théorème 1.2.2** (Théorème fondamental de Minkowski). *Soit  $C$  un convexe dans  $\mathbb{R}^d$ , symétrique par rapport à l'origine. Si son volume est strictement supérieur à  $2^d$ ,  $C$  contient au moins deux points à coordonnées entières, autres que l'origine.*

**Théorème 1.2.3** (Théorème de Pick). *Soit  $P$  un polygone dont les sommets sont sur  $\mathbb{Z}^2$ . Soit  $i$  le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  strictement à l'intérieur de  $P$  et soit  $b$  le nombre de points de  $\mathbb{Z}^2$  sur le bord de  $P$ . Alors l'aire  $A$  de  $P$  est donnée par  $A = i + \frac{b}{2} - 1$ .*

Nous n'en dirons pas plus sur ces propriétés, le lecteur avisé et intéressé que vous êtes saura parfaitement mettre la main sur une des nombreuses sources d'informations pour satisfaire sa curiosité. En revanche, en guise d'apéritif avant la prochaine section, essayons de définir sur la grille une propriété qui joue un rôle central en géométrie : la convexité. Si l'on se contente des objets digitaux dont l'union des cellules de  $\mathbb{Z}^n$  est convexe au sens de la géométrie euclidienne, la famille des objets convexes digitaux est trop réduite pour s'avérer utile. La convexité digitale se définit différemment (Fig. 1.2) :

**Définition 1.2.4.** *Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$  et  $Conv(X)$  son enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $X$  est convexe si*

$$X = Conv(X) \cap \mathbb{Z}^n.$$

## 1.3 Modèles digitaux

Quel aventurier en herbe n'a jamais rêvé de sortir son carnet à croquis pour dessiner la faune et la flore d'une contrée inexplorée ? Le premier contact en milieu digital peut s'avérer décevant, tant les espèces de cette contrée primitive sont conçues pour ressembler aux animaux familiers des écoliers du monde entier : des droites, des cercles, des sphères, des courbes et des surfaces... sauf que les avatars digitaux de ces figures géométriques ont des propriétés insolites. En géométrie euclidienne, l'intersection de deux droites non parallèles est toujours un singleton. Quelle banalité ! En géométrie digitale, elles peuvent avoir un cardinal arbitraire  $(0, 18 \text{ ou } +\infty)$ . Et ce n'est que le début des ennuis...

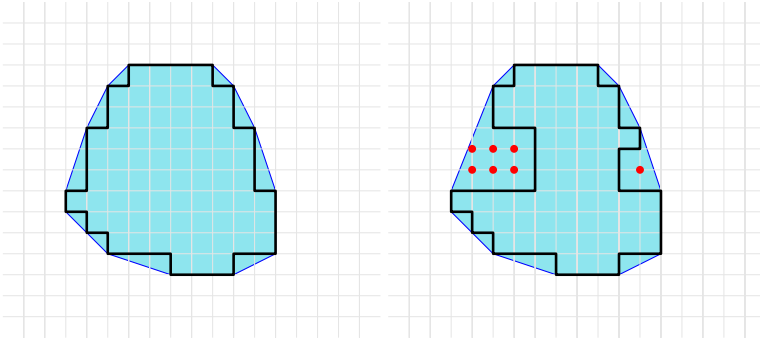


FIGURE 1.2 – Un ensemble convexe digital  $X$  dont le contour est en noir, et son enveloppe convexe en bleu. A gauche, les points de  $\mathbb{Z}^2$  dans l’enveloppe convexe sont exactement les points de  $X$ . A droite, l’enveloppe convexe contient des points de  $\mathbb{Z}^2$  qui ne sont pas dans  $X$  (en rouge).

### 1.3.1 Discrétisations

Comme il n’est pas question de remplir l’intégralité de ce manuel avec les propriétés morphologiques de chacun des zèbres que vous risquez de rencontrer, exerçons plutôt votre oeil aiguisé. Et commençons par répondre à une question : Soit  $S$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ , comment définir ses avatars digitaux  $S^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^n$  ? Les mutations de  $S$  en  $S^{\mathbb{Z}}$  sont illustrées Fig.1.3 sur une ellipse.

#### L’ombre

Première idée, l’*ombre* (appelée traditionnellement discrétisation de Gauss) :

$$S^{\mathbb{Z}} = \text{Ombre}_{\mathbb{Z}^n}(S) = S \cap \mathbb{Z}^n.$$

Bravo, vous avez mis les pieds dans les sables mouvants. Pourquoi ? Parce qu’il y a toutes les chances que votre objet soit vide. Si vous parlez d’une droite, d’un cercle ou d’une courbe du plan, son intersection avec la grille ne contiendra au mieux que quelques points éparpillés sur la grille (Fig.1.3a). Le calcul de ces points peut même s’avérer difficile : étant donnée l’équation d’une courbe algébrique, le fait de déterminer si elle a des solutions entières, c’est à dire la résolution de l’équation diophantienne associée, relève d’une classe de problèmes indécidables. C’est la réponse au dixième problème de Hilbert résolu par Iouri Matiassevitch. Autrement dit, vous avez plus de chances de faire copain-copain avec une hyène affamée qu’avec ces oiseaux stratosphériques, mais ne vous inquiétez pas pour autant. Les équations diophantiennes sont loin des précoc-

cupations locales. Et le principe qui consiste à considérer l'ombre d'un ensemble continu fonctionne honorablement pour des objets épais.

### Les avatars topologiques

Comment améliorer l'idée précédente afin de la faire fonctionner pour certains objets fins? Si l'on considère les objets de codimension 1 que l'on aimerait bien définir, les cercles et les droites du plan, des plans, des sphères et des surfaces fermées dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , etc... leur complémentaire a deux composantes connexes. On peut alors définir l'avatar de  $S$  comme le bord -selon une connexité digitale déterminée- de l'ombre de l'une des composantes connexes du complémentaire (Fig.1.3b). Ainsi un cercle digital se définit comme le bord de l'ombre d'un disque, une droite comme le bord de l'ombre d'un demi-plan, etc.

### La supercouverture

Troisième idée, on peut recouvrir  $\mathbb{R}^n$  par des hypercubes  $\{(x_i)_{1 \leq i \leq n}\} \oplus [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$  centrés aux points  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ . Ces hypercubes sont des voxels en dimension  $n = 3$  ou des pixels si  $n = 2$ . Le principe est de choisir comme avatar de  $S$  l'ensemble des centres des hypercubes d'intersection non vide avec  $S$ . Cela signifie que si  $S$  contient un point du cube  $\{(x_i)_{1 \leq i \leq n}\} \oplus [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$  alors  $S^{\mathbb{Z}}$  contient le point entier  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ . C'est un bon début :  $S^{\mathbb{Z}}$  commence à ressembler à  $S$  et il lui ressemblera d'autant plus que la résolution sera fine. Cet avatar se nomme la *supercouverture* de  $S$  (Fig.1.3d-e-f) :

$$S^{\mathbb{Z}} = \text{Supercover}(S) = \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n \mid \exists (x'_i)_{1 \leq i \leq n} \in S, \forall i, |x_i - x'_i| \leq \frac{1}{2}\}.$$

### La partie entière

Quatrième idée, la fonction utilisée pour transformer un réel en entier est la fonction partie entière  $\lfloor \cdot \rfloor$ . On peut l'étendre à  $\mathbb{R}^n$  par  $\lfloor (x_i)_{1 \leq i \leq n} \rfloor = (\lfloor x_i \rfloor)_{1 \leq i \leq n}$  et ainsi définir  $S^{\mathbb{Z}} = \lfloor S \rfloor$ . Mauvaise nouvelle, vous tournez en rond. Ou presque.

$$S^{\mathbb{Z}} = \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n \mid \exists (x'_i)_{1 \leq i \leq n} \in S, \forall i, x_i = \lfloor x'_i \rfloor\}.$$

C'est très sensiblement la même idée que la supercouverture. La seule différence tient à l'inégalité  $x_i = \lfloor x'_i \rfloor$  soit  $0 \leq x'_i - x_i < 1$  qui s'est substituée à  $-\frac{1}{2} \leq x'_i - x_i \leq \frac{1}{2}$ . Autrement dit, les petits hypercubes qui recouvraient l'espace  $\mathbb{R}^n$  forment cette fois une véritable partition de l'espace  $\mathbb{R}^n$  et ont

les points entiers en leurs sommets plutôt qu'en leur centre (un simple décalage de  $\frac{1}{2}$ ). Cette approche se généralise avec la somme de Minkowski d'un élément structurant qui peut être un cube ou une autre partie de  $\mathbb{R}^n$ .

### Les avatars morphologiques

Soit  $B$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . On peut épaissir l'ensemble  $S$  en considérant sa somme de Minkowski avec  $B$  puis en prenant son ombre sur la grille.

$$S_B^{\mathbb{Z}} = \text{Ombre}_{\mathbb{Z}^n}(S \oplus B) = (S \oplus B) \cap \mathbb{Z}^n.$$

Pourquoi cette approche généralise-t-elle la supercouverture ou la partie entière? Parce que le point  $x \in \text{supercouverture}(S)$  si et seulement si il existe  $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $S$  tel que  $\forall i, |x_i - x'_i| \leq \frac{1}{2}$  autrement dit si  $\exists x' \in S \mid x \in x' \oplus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ . Cette condition conduit exactement à  $\text{supercouverture}(S) = (S \oplus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n) \cap \mathbb{Z}^2$ .

Exercice 3 : Montrer que  $\lfloor S \rfloor = (S \oplus [-1, 0]^n) \cap \mathbb{Z}^n$ .

L'approche morphologique généralise aussi bien la partie entière que la supercouverture. Mais elle pose aussi une question : Quel élément structurant choisir? Le cube centré  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$  est un choix naturel puisqu'il coïncide avec la supercouverture mais pour éviter que l'avatar d'un seul point (par exemple  $(\frac{1}{2})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ ) ne possède 4 points dans  $\mathbb{Z}^n$ , on peut préférer utiliser  $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ .

Exercice 4 : Montrer que si  $S \subset \mathbb{R}^2$  est connexe par arc, alors  $(S \oplus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2) \cap \mathbb{Z}^2$  est 4-connexe. Si on considère maintenant la croix  $C = \bigcup_{1 \leq i \leq 2} \{0\}^{i-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}^{2-i}$ , alors  $(S \oplus C) \cap \mathbb{Z}^2$  est 8-connexe.

Ces deux derniers choix de l'Exercice 4 ont l'avantage de garantir la 4 ou la 8 connexité des avatars des parties connexes par arc de  $\mathbb{R}^2$ , tout en évitant que l'avatar d'un seul point puisse contenir plusieurs points de la grille (Fig.1.3 g) i) j)).

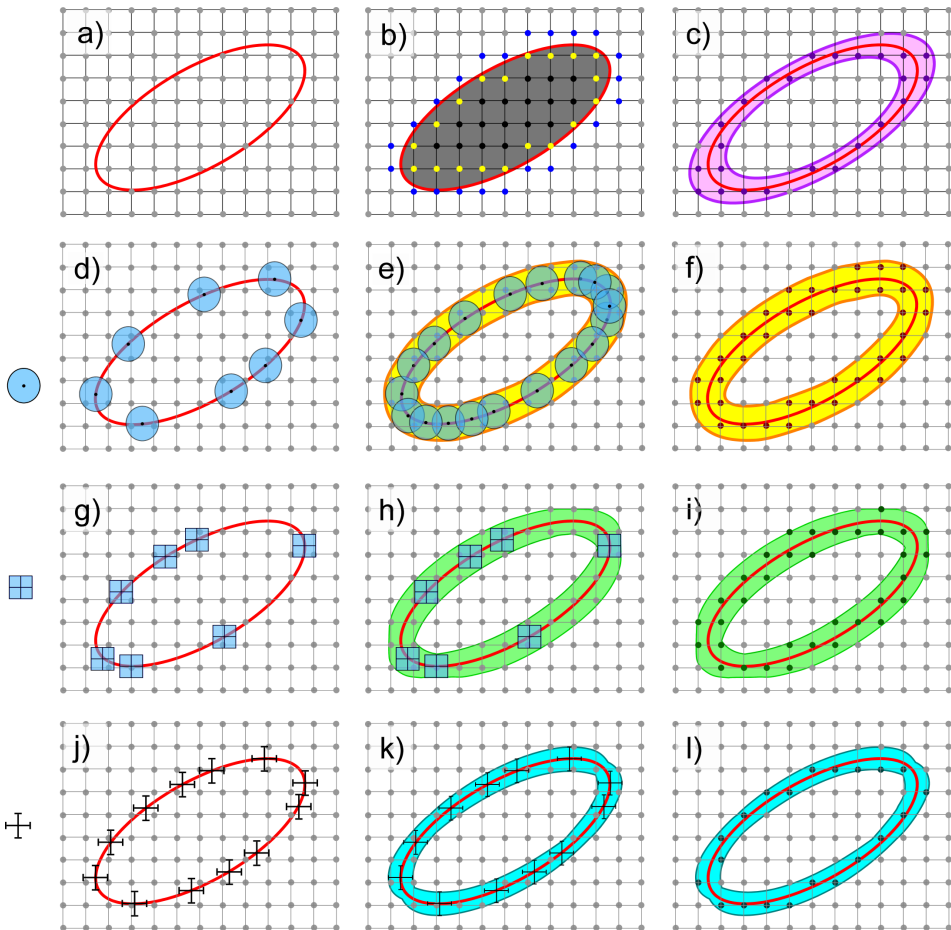


FIGURE 1.3 – **Une ellipse et quelques uns de ses avatars digitaux** : En a) l'ellipse à discrétiser. Sa trace sur la grille des entiers est vide. En b), l'approche topologique introduit les points intérieurs voisins des points extérieurs ou inversement. En c), l'approche analytique relâche l'équation de l'ellipse  $f(x) = 0$  en une double inégalité  $-\delta \leq f(x) \leq \delta$  qui définit une bande autour de la courbe. L'avatar digital est à l'intérieur. Comme l'épaisseur de la bande varie en fonction des points, cela engendre des chemins de l'intérieur vers l'extérieur et des amas de points. De d) à l), l'approche morphologique avec un élément structurant consiste à épaissir la courbe avec une somme de Minkowski. Cela revient à déplacer l'élément structurant le long de la courbe. En d), e), f), cet élément est un disque (euclidien) de rayon la distance de Hausdorff l'ellipse à la grille : c'est la discrétisation de Hausdorff. Dans g), h), i), l'élément structurant est un carré unité centré. En j), k), l), c'est une croix unité ce qui correspond à la discrétisation de Bresenham. Ces deux derniers choix sont les plus petits éléments structurants garantissant des avatars respectivement 4-connexes et 8-connexes.

### Les avatars analytiques

Cinquième idée, certains objets de codimension 1 voire parfois plus possèdent une description analytique sous la forme d'une équation :  $f(x) = 0$ . Le problème de l'ombre sur  $\mathbb{Z}^n$  est que l'objet est souvent trop fin pour être discrétisé convenablement. D'où l'idée de l'élargir en relaxant l'égalité  $f(x) = 0$  en une double inégalité  $-\delta \leq f(x) \leq \delta$  puis de prendre son ombre :

$$S_\delta^{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid |f(x)| \leq \delta\}.$$

Mais comment choisir le bon  $\delta$ ? et ne devrait-il pas dépendre de  $x$  pour compenser le gradient variable de  $f$ ? (Fig.1.3c)

Pour conclure, ces différents avatars peuvent être jugés selon différents critères, topologiques, morphologiques, algorithmiques ou analytiques, mais aucune de ces espèces de zèbres n'a le dessus dans tous les domaines. Ils ont chacun des avantages et des inconvénients...

### 1.3.2 Droites digitales

Aux prémices de l'infographie, il a d'abord été question d'afficher à l'écran des caractères HelloWorld dans une console mais aussi très vite des formes élémentaires pour fournir un environnement graphique. On doit à Jack Bresenham les premiers algorithmes de tracé de segments, de cercles et de coniques [7] à partir de 1962 pour le compte d'IBM.

Avec le recul, les figures digitales produites par ces algorithmes sont respectivement les avatars morphologiques des segments, cercles et coniques obtenus avec la croix  $C = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{0\}^{i-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \{0\}^{n-i}$  introduite précédemment.

### Définitions

Dans le cas spécifique des droites de  $\mathbb{R}^2$ , les droites de Bresenham et les différents avatars définis précédemment ne forment qu'une seule et même famille d'objets : les *droites digitales*. C'est aussi vrai des plans en dimension 3 et plus généralement des hyperplans en dimension  $n$  mais nous n'irons pas aussi loin.

**Définition 1.3.1.** Une droite digitale de  $\mathbb{Z}^2$  est l'ensemble des points entiers caractérisé par une double-inégalité  $h \leq ax + by < h + \delta$  où les coefficients  $a, b, h$  et  $\delta$  sont dans  $\mathbb{R}$  :



$$D_{a,b,h,\delta} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid h \leq ax + by < h + \delta\}.$$

Elle est dite rationnelle si les coefficients  $(a, b)$  peuvent être choisis dans  $\mathbb{Z}$ .

Ce cadre général a été introduit au début des années 1990 par Jean-Pierre Reveillès [30]. Il définit la droite digitale comme l'ombre de la bande bornée par deux droites parallèles  $ax + by = h$  et  $ax + by = h + \delta$  (Fig.1.4). La largeur variable de la bande permet aussi bien de définir des droites épaisses que des droites fines. L'épaisseur peut néanmoins être fixée pour garantir la 4-connexité (la 8-connexité) de la droite digitale et sa minimalité dans le sens où le fait d'enlever le moindre point rend l'ensemble non-connexe. Ces droites sont respectivement dites *standard* et *naïves*.

**Définition 1.3.2.** Une droite digitale est dite naïve si elle peut être caractérisée par une double-inégalité  $h \leq ax + by < h + \max\{|a|, |b|\}$ . Une droite digitale est dite standard si elle peut être caractérisée par une double-inégalité  $h \leq ax + by < h + |a| + |b|$  (Fig.1.4).

Les segments de droites tracés par l'algorithme de Bresenham sont des segments de droites digitales naïves.

### Structure arithmétique des droites rationnelles

Les droites rationnelles sont les droites horizontales, verticales ou de pente  $\frac{b}{a}$  rationnelle. On peut alors choisir une double-inégalité équivalente où  $a$  et  $b$  sont deux entiers premiers entre eux, et où les bornes  $h$  et  $h + \delta$  sont entières, ce que nous supposons désormais.

La droite digitale  $D_{a,b,h,\delta}$  est alors dite *diophantienne* si son épaisseur  $\delta$  est égale à 1 car dans ce cas, la double-inégalité  $h \leq ax + by < h + 1$  peut se réécrire sous la forme d'une équation diophantienne  $ax + by = h$ .

Rappelons maintenant que le théorème de Bezout garantit l'existence de couples  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $au + bv = 1$ . Cette équation diophantienne peut se réécrire  $1 \leq au + bv < 1 + 1$ , ce qui signifie que l'ensemble de ces couples est exactement la droite digitale diophantienne  $D_{a,b,1,1}$ . Sa structure est élémentaire : connaissant l'un de ces points  $(u_0, v_0)$ , que nous appellerons point de base, les autres points s'obtiennent par addition et soustraction du vecteur irréductible  $(-b, a)$  soit

$$D_{a,b,1,1} = \{(u_0, v_0)\} \oplus \mathbb{Z}(-b, a).$$

Autrement dit, la droite diophantienne  $D_{a,b,1,1}$  est périodique sous l'action du groupe additif engendré par  $(-b, a)$ . Plus généralement, on peut

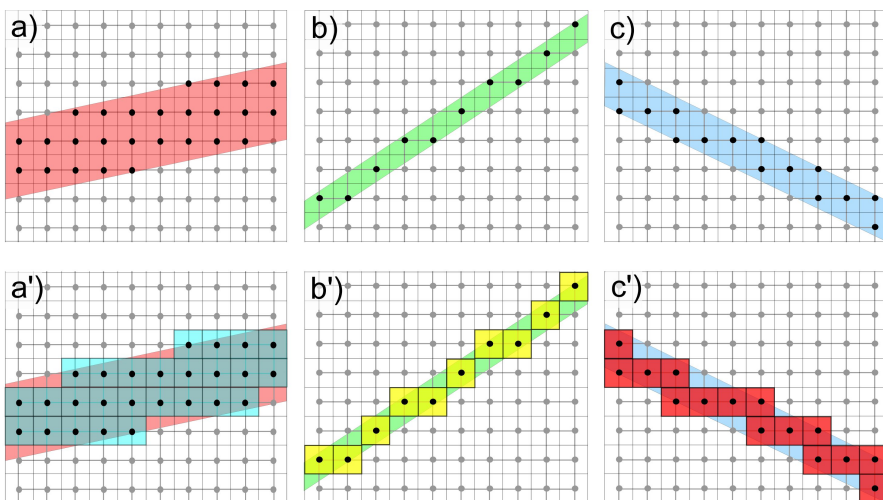


FIGURE 1.4 – *Droites digitales épaisses, naïves et standards* : En a) et a') une droite digitale "épaisse". En b) et b') une droite digitale naïve telle que l'algorithme de Bresenhma peut la tracer. Elle est forcément 8-connecte. En c) et c') une droite standard, forcément 4-connecte.

remarquer que les droites diophantiennes  $D_{a,b,k,1}$  ont toutes des structures identiques

$$D_{a,b,k,1} = k\{(u_0, v_0)\} \oplus \mathbb{Z}(-b, a).$$

Si l'on revient maintenant à la droite digitale  $D_{a,b,h,\delta}$ , elle est la réunion des droites digitales diophantiennes  $D_{a,b,k,1}$  pour  $k$  entier allant de  $h$  à  $h + \delta - 1$  :

$$D_{a,b,h,\delta} = \bigcup_{h \leq k < h+\delta} D_{a,b,k,1}.$$

Ces droites diophantiennes  $D_{a,b,k,1}$  sont appelés *pointillés*. Autrement dit, une droite digitale est la réunion de ses pointillés et comme ils sont tous périodiques sous l'action du groupe additif engendré par la translation de vecteur  $(-b, a)$ , il va de soit que la droite  $D_{a,b,h,\delta}$  hérite de cette propriété. Plus généralement, les plans et hyperplans digitaux ont des structures identiques.

## Propriétés géométriques

Pour une droite rationnelle, l'une des propriétés essentielles des droites digitale naïves et standard est d'avoir des épaisseurs arithmétiques respectivement égales à  $\max\{|a|, |b|\}$  et  $|a| + |b|$ . Cette épaisseur arithmétique bornée conditionne l'épaisseur géométrique dans des directions données. Précisons cette notion :

**Définition 1.3.3.** Soit  $S$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et une direction déterminée par un vecteur  $d$  non nul de norme 1 de  $\mathbb{R}^n$ . L'épaisseur de  $S$  dans la direction  $\vec{d}$ , notée  $epaisseur_{\vec{d}}(S)$  est la borne supérieure des longueurs des segments de droite inclus dans l'enveloppe convexe de  $S$  et dirigés selon  $\vec{d}$  (Fig.1.5) :

$$epaisseur_{\vec{d}}(S) = \sup\{e \in \mathbb{R} \mid x \text{ et } x + e\vec{d} \in conv_{\mathbb{R}^n}(S)\}.$$

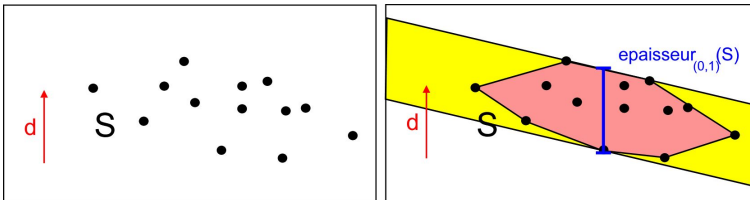


FIGURE 1.5 – L'épaisseur d'une partie  $S$  dans une direction  $\vec{d}$  : A gauche, un ensemble  $S$  et une direction  $\vec{d}$ . A droite, son épaisseur dans la direction  $\vec{d}$  est la longueur du plus grand segment inclus dans l'enveloppe convexe de  $S$ . C'est aussi l'épaisseur de la plus fine bande contenant  $S$ .

Le premier point à remarquer est qu'il s'agit d'une épaisseur dans une direction fixée. On peut introduire une notion générale mais elle est moins utile, car les grilles ont des directions privilégiées. Remarquons aussi que pour toute direction  $\vec{d}$ , l'ensemble  $S$  et son enveloppe convexe ont la même épaisseur. Nous nous interrogerons plus tard sur les différentes façons de

la calculer. La question est d'abord de savoir en quoi ces épaisseurs directionnelles sont intéressantes : la réponse est liée aux droites digitales naïves et standards, et plus généralement, en dimensions supérieures, aux hyperplans digitaux de même nature.

**Théorème 1.3.4.** *Soit  $S$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^2$ . Il existe une droite digitale naïve  $D_{a,b,h,\max\{|a|,|b|\}}$  contenant  $S$  si et seulement si l'épaisseur verticale ou horizontale de  $S$  est strictement inférieure à 1 :*

$$(\text{épaisseur}_{(1,0)}(S) < 1) \text{ ou } (\text{épaisseur}_{(0,1)}(S) < 1).$$

*Il existe une droite digitale standard  $D_{a,b,h,|a|+|b|}$  contenant  $S$  si et seulement si l'une des épaisseurs diagonales de  $S$  est strictement inférieure à  $\sqrt{2}$  :*

$$(\text{épaisseur}_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}(S) < \sqrt{2}) \text{ ou } (\text{épaisseur}_{(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}(S) < \sqrt{2}).$$

Cette caractérisation des sous-ensembles de droites digitales naïves et standards fournit un algorithme de reconnaissance avec des outils classiques de géométrie algorithmique.

Dans un premier temps, on calcule l'enveloppe convexe de  $S$  et dans un second, en suivant le bord inférieur et supérieur dans la direction  $\vec{d}$ , on peut calculer l'endroit où l'épaisseur est maximale dans une direction fixée (on fait ce calcul une fois par direction). Le complexité dans le pire cas est en  $O(m \log(v))$  où  $m$  est le nombre de points et  $v$  le nombre final de sommets- pour l'enveloppe convexe (algorithme optimal de Chan [8]) et  $O(v)$  voire  $O(\log(v))$  pour le calcul de l'épaisseur maximale. Dans de nombreux cas, les points sont ordonnés selon une courbe polygonale simple (sans auto-intersection), et le calcul de l'enveloppe convexe avec l'algorithme de Melkman [26] a alors une complexité dans le pire cas linéaire en le nombre de sommets, ce qui fournit un algorithme linéaire.

On peut néanmoins aussi résoudre le problème en le formulant sous forme d'un programme linéaire. Par dualité, l'épaisseur directionnelle verticale est aussi le minimum

$$\min(\delta) \text{ tel que } (a, h, \delta) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall (x, y) \in S, h \leq ax + y \leq h + \delta.$$

La programmation linéaire en dimension fixée pouvant être résolue en temps linéaire (algorithme de Megiddo [25]), cela donne une autre façon d'aborder le problème et de le résoudre avec une complexité linéaire (quand la dimension est fixée). Ces approches et résultats se généralisent en partie en dimensions supérieures.

Jusque-là nous n'avons cité que des approches générales qui ne tirent aucun parti (ou presque) de la nature digitale des données. Il existe cependant des algorithmes très efficaces -eux aussi en temps linéaire dans le pire cas- liés aux propriétés arithmétiques des droites digitales [?].

## Groupe $Sl_2(\mathbb{Z})$ , transvections et combinatoire des mots

On s'intéresse maintenant aux transformations linéaires qui préservent les points entiers. Leurs matrices  $M = \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix}$  ont des coefficients entiers et leur déterminant est  $\pm 1$ . Ces transformations du plan constituent le groupe linéaire  $GL_2(\mathbb{Z})$ . Elles préservent le parallélisme des droites, ce qui signifie que l'image d'une bande entre deux droites parallèles est encore une bande entre deux droites parallèles. En conséquence de quoi, sous l'action d'une matrice de  $GL_2(\mathbb{Z})$ , les droites digitales restent des droites digitales.

Considérons maintenant la droite diophantienne  $D_{a,b,h,1}$  rationnelle avec  $(a, b)$  premiers entre eux et  $(u, v) \in D_{a,b,1,1}$  un couple de Bezout vérifiant  $au + bv = 1$ . Appliquons l'application linéaire  $f$  de matrice

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix}$  et notons  $(x', y')$  les coordonnées du point image de

$(x, y)$ . On a alors  $(x', y') = (ax + by, -vx + uy)$ . L'image de la droite diophantienne  $D_{a,b,h,1}$  par  $f$  est alors simplement la droite diophantienne verticale  $f(D_{a,b,h,1}) = D_{1,0,h,1}$  car l'équation  $ax + by = h$  s'écrit  $x' = h$ .

Plus généralement, les images des droites de normales  $(a, b)$  sont des droites verticales  $f(D_{a,b,h,\delta}) = D_{1,0,h,\delta}$ . Cela signifie que non seulement, le groupe linéaire  $GL_2(\mathbb{Z})$  transforme les droites digitales en droites digitales mais aussi qu'elles peuvent toutes être engendrées à partir d'une droite horizontale  $D_{1,0,h,\delta}$  et d'une matrice du groupe linéaire (et même une matrice de déterminant 1). Rappelons que le groupe spécial linéaire  $Sl_2(\mathbb{Z})$  est celui des matrices du groupe linéaire de déterminant  $+1$ . Il contient en

particulier les matrices  $V_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$  et  $H_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Ces transformations

sont appelées *transvections*. Géométriquement, ce sont des décalages. Elles ont de très nombreuses relations comme  $V_s V_{s'} = V_{s+s'}$ ,  $H_s H_{s'} = H_{s+s'}$

et on passe de  $H$  à  $V$  avec la matrice de rotation  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  : on a

$R^2 = -I$  ainsi que  $-RH_s = V_{-s}R$  et  $-RV_s = H_{-s}R$ . Les transvections et la rotation  $R$  ont la propriété d'engendrer  $Sl_2(\mathbb{Z})$ , ce qui signifie que l'on peut décomposer n'importe quelle matrice  $M$  de déterminant 1 en un produit de transvections  $V_s$  et  $H_r$  avec  $R$ . Étant données les relations entre ces matrices, on peut déplacer les facteurs  $R$  à l'une des extrémités du produit et simplifier les produits  $H_s H_{s'}$  ou  $V_s V_{s'}$  de façon à avoir une alternance de  $H$  et de  $V$ . Quel en est l'intérêt ?

L'utilité est ici de comprendre comment on peut reconnaître les segments de droite discrète en temps linéaire par dés substitutions.

Considérons par exemple une droite rationnelle naïve  $D_{a,b,h,b}$  avec  $0 < a < b$ . Pour  $y$  constant, on a  $x \in [\frac{h-by}{a}, \frac{h+b-by}{a}[$ . Cet intervalle de largeur  $b$  peut contenir soit  $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ , soit  $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor + 1$  entiers. Autrement dit, les paliers horizontaux de la droite digitale d'ordonnée constante donnent une indication sur le quotient  $q_1 = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$  de la division euclidienne de  $b$  par  $a$  (on a  $b = aq_1 + r_1$ ). Considérons maintenant l'image de la droite  $D_{a,b,h,b}$  par  $H_{q_1}$ . On a  $x' = x + q_1y$  et  $y' = y$ , ainsi que  $x = x' - q_1y'$ . On en déduit  $h \leq a(x' - q_1y') + by' < h + \delta$  soit  $h \leq ax' + (b - aq_1)y' < h + \delta$  ou encore  $h \leq ax' + r_1y' < h + \delta$ . Pour cette droite  $D_{a,r_1,h,\delta}$ , c'est maintenant le coefficient de  $x$  qui est plus grand que celui de  $y$ . La droite est maintenant épaisse, si on prend sa partie naïve inférieure  $D_{a,r_1,h,a}$ , les paliers verticaux ont cette fois une longueur qui donne le quotient de  $a$  par  $r_1$ ... et ainsi de suite. En itérant ce processus, selon la même séquence que dans l'algorithme d'Euclide, on arrive à la fin à une droite horizontale ou verticale, ce qui est plutôt facile à reconnaître.

Voilà pour l'idée. La mise en pratique est différente. Elle relève de la théorie des substitutions. En termes savants, une substitution est un morphisme de monoïde libre défini par des règles de réécriture. Le plus célèbre est celui qui engendre le mot de Fibonacci :  $\sigma(1) = 0$  et  $\sigma(0) = 01$ . On a alors  $\sigma^1(1) = 0$   $\sigma^2(1) = 01$

$$\sigma^3(1) = 010$$

$$\sigma^4(1) = 01001$$

$$\sigma^5(1) = 01001010$$

$$\sigma^6(1) = 0100101001001.$$

Le mot de Fibonacci est le mot limite  $\sigma^\infty(1)$ . Nous appellerons *désubstitution* le processus qui consiste à revenir en arrière lorsque c'est possible sans ambiguïté. Considérons maintenant une courbe 4-connexe de  $\mathbb{Z}^2$ . Elle est constituée de pas horizontaux, codés par 0 et de pas verticaux, codés par 1.

Question : les mots

$$a = *00100001000010001000100001*$$

et

$$b = *00010000100010000100010001*$$

sont-ils ceux de deux droites digitales naïves (Fig.1.6) ? Le fait d'appliquer une transvection  $H_3$  sur le morceau de droite digitale revient à faire une désubstitution  $0^31 \rightarrow 1$ . On a alors

$$H_3(a) = *101011101* .$$

Vous remarquerez que le premier caractère 1 était le seul possible, même si  $a$  ne commençait pas explicitement par 0001. Pour  $b$ , on a

$$H_3(b) = *101011* .$$

Pour  $H_3(a)$ , on peut déjà conclure car les longueurs des sous-mots de la

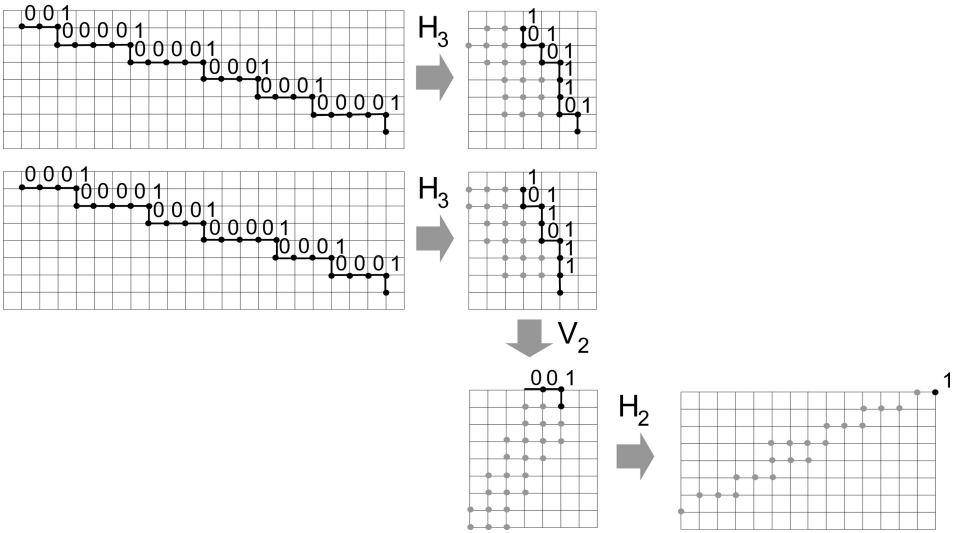


FIGURE 1.6 – *Dés*substitution des mots  $a$  et  $b$  : chaque désubstitution des mots  $a$  et  $b$  s’interprète géométriquement comme une transvection sur le bord supérieur droit de la courbe.

forme  $1^k$  ont des longueurs qui, pour les droites digitales, ne devraient différer que de 0 ou 1. Or ils ont ici des longueurs égales à 1 et à 3. La courbe codée par  $a$  n’est donc pas une droite digitale car en lui appliquant des transvections, on a trouvé une structure qui n’en était pas une. Pour  $b$ , en revanche, le mot  $H_3(b) = *10110111*$  a des suites de 1 de longueurs 2 et plus. On procède alors à la transvection  $V_2$  soit la desubstitution  $1^20 \rightarrow 0$ . On a

$$V_2 \circ H_3(b) = *001* .$$

On peut ensuite appliquer n’importe quelle transvection  $H_q$  avec  $q \geq 2$  soit  $0^q1 \rightarrow 1$  et obtenir  $H_q \circ V_2 \circ H_3(b) = *11*$  qui code un segment de droite digitale. Le segment  $b$  est donc un morceau de droite digitale standard. Ce processus de désubstitution itératif à rapprocher de l’algorithme

d'Euclide donne lieu à un algorithme de reconnaissance des segments des droites discrètes naïves en temps linéaire en le nombre de points (ou de lettres) [?]. Cette approche se généralise en dimension supérieure, mais elle se complexifie aussi beaucoup (comme l'algorithme d'Euclide et ses différentes variantes pour calculer le *PGCD* de plusieurs entiers). Elle a néanmoins l'inconvénient de nécessiter de travailler sur des morceaux de courbes connexes. Plus généralement, nous n'avons donné qu'un très bref aperçu de la théorie combinatoire des substitutions et des langages qu'elles peuvent engendrer [23].

### Couverture tangentielle

Les nombreux outils présentés précédemment fournissent un petit arsenal pour travailler sur les courbes digitales de  $\mathbb{Z}^2$  et se sortir des situations les moins confortables. L'un des outils les plus complets -le couteau suisse de la géométrie digitale en dimensions 2- est la *couverture tangentielle*. De quoi s'agit-il exactement ? de la liste ordonnée des segments de droites naïfs ou standard maximaux d'une courbe digitale 8 ou 4-connexe (Fig.1.7). Le critère de maximalité est ici relatif à l'inclusion : un segment de droite de  $S$  est maximal s'il n'est contenu dans aucun autre segment de droite inclus dans  $S$ . Les algorithmes de reconnaissance des segments de droite digitales permettent de calculer la couverture tangentielle en temps linéaire [15].

La couverture tangentielle permet de déterminer la convexité ou concavité des morceaux de courbes [33]. Cette notion est néanmoins plus délicate à utiliser sur des surfaces digitales car le nombre de plans maximaux explose sur une surface digitale (on peut étendre les plans dans toutes les directions).

## 1.4 Analyse surfacique et volumique

Glissons maintenant dans votre sac à dos le kit de survie de l'explorateur digital ou comment définir des distances, calculer l'axe médian d'un objet ou bien encore, plus barbare, son squelette homotopique. Enfin, nous verrons aussi comment effectuer des mesures : aire, périmètre, courbure.

### 1.4.1 Distances discrètes

Pour repérer sa position dans  $\mathbb{Z}^2$ , il peut être nécessaire de mesurer la distance parcourue entre deux points. En géométrie euclidienne



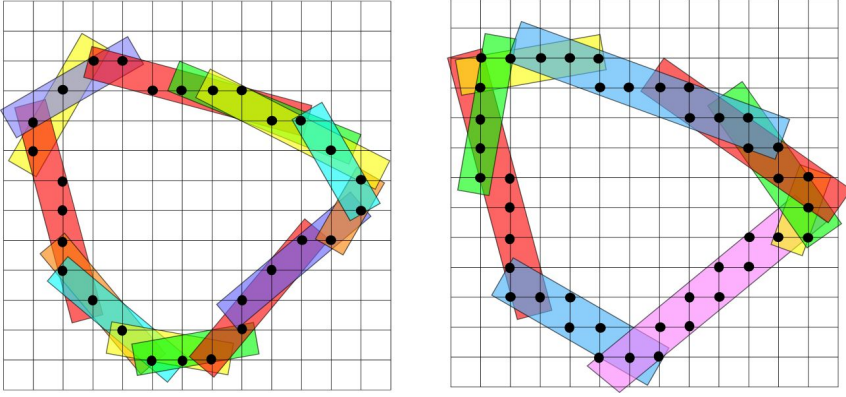


FIGURE 1.7 – *La couverture tangentielle de deux courbes : à gauche, une courbe fermée 8-connectée et à droite, 4-connectée. La couverture tangentielle est l'ensemble des segments de droite maximaux inclus dans la courbe.*

classique, la distance la plus communément utilisée est la distance justement appelée *distance euclidienne*. Étant donnés deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathbb{R}^n$ , elle est définie par  $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$  où  $p = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Mais, comme vous l'aurez compris, l'usage de la racine carrée et des nombres flottants qu'elle engendre inmanquablement (même si  $p$  et  $q$  sont des points de  $\mathbb{Z}^2$ ) est passible de se retrouver suspendu les pieds en l'air au dessus d'un barbecue géant. Alors, comment définir des distances qui, pour des points de  $\mathbb{Z}^2$ , approchent convenablement la distance euclidienne tout en restant à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ ? Commençons par rappeler les axiomes qui définissent une distance.

**Définition 1.4.1** (distance). *Soit  $E$  un ensemble non vide. On appelle distance sur  $E$  l'application définie sur  $E \times E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant, pour tous  $p$  et  $q$  dans  $E$  :*

1.  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$  (définie) ;
2.  $d(p, q) = d(q, p)$  (symétrique) ;
3.  $\forall r \in E, d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$  (inégalité triangulaire) ;

Les premières distances discrètes utilisées en analyse d'images ont été les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  (dans  $\mathbb{Z}^n$ ) définies par  $d_1(p, q) = \sum_i |p_i - q_i|$  et

$d_\infty(p, q) = \max_i |p_i - q_i|$ , où  $p = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Dans le premier cas, on compte le nombre minimal de déplacements horizontaux et verticaux nécessaires pour aller de  $p$  à  $q$ . Dans le deuxième cas, la distance est donnée par le déplacement maximal nécessaire selon une coordonnée. Ces deux distances ont l'avantage d'être très simples à définir et à calculer, et sont encore très largement utilisées dans de nombreuses applications. Mais, quand on regarde les boules qu'elles engendrent, on réalise qu'elles n'approchent la distance euclidienne que de manière très grossière : on peut montrer que même si la résolution de l'image tend vers l'infini avec des pixels de plus en plus petits, les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  ne convergent pas vers la distance euclidienne  $d_2$  (on appelle cela la propriété de convergence asymptotique, qui sera développée dans la section 1.4.3).

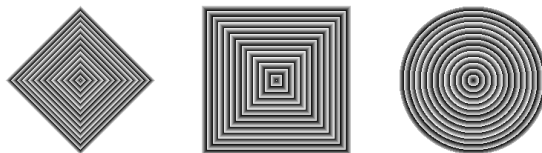


FIGURE 1.8 – De gauche à droite, les boules obtenues pour la distance  $d_1$ ,  $d_\infty$  et euclidienne.

Regardons maintenant les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  sous un autre angle : imaginons que l'on pondère les déplacements "élémentaires". La distance entre deux points est alors le poids d'un chemin de poids minimum empruntant uniquement les déplacements élémentaires, et joignant  $p$  à  $q$ . La distance  $d_1$  peut alors être obtenue en affectant un poids de 1 aux déplacements élémentaires  $(0, \pm 1)$  et  $(\pm 1, 0)$ . De manière similaire, la distance  $d_\infty$  est obtenue en ajoutant les déplacements élémentaires  $(\pm 1, \pm 1)$  avec un poids de 1 aux déplacements précédents.

La généralisation de cette approche à d'autres déplacements élémentaires et d'autres poids conduit à la définition des *distances de chanfrein*. En dimensions 2, les déplacements élémentaires utilisés sont le plus souvent  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  et  $(2, 1)$  auxquels on affecte respectivement des poids  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Afin que ces couples "déplacements/poids" définisse bien une distance, et notamment que l'inégalité triangulaire soit respectée, les poids  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent respecter un certain nombre de contraintes. Par exemple, dans le cas où seuls les déplacements  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$  sont autorisés, on doit avoir  $0 < a \leq b \leq 2a$ . Le problème est ensuite de choisir judicieusement les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que la distance euclidienne soit approchée au mieux [5, 37]. Il a par exemple été montré que les couples  $((0, 1), 3)$ ,  $((1, 1), 4)$  et

$((0, 1), 5), ((1, 1), 7), ((2, 1), 11))$  sont de bonnes solutions.

Pour terminer, n'oublions pas que pour représenter la distance euclidienne par des nombre entiers, d'autres solutions, plus immédiates sont possibles : on peut notamment s'affranchir de la racine carrée et travailler avec la distance euclidienne au carré. Même si l'inégalité triangulaire n'est plus vérifiée, l'usage de cette "distance" permet de définir des algorithmes très efficaces et exacts.

### 1.4.2 Transformations

Étant donnée une forme  $S$  (dans  $\mathbb{R}^n$  ou dans  $\mathbb{Z}^n$  pour l'instant), considérons les trois objets suivants : le lieu des points de  $S$  ayant au moins deux plus proches voisins sur le bord de  $S$ , l'ensemble des centres des boules maximales dans  $S$  (boules incluses dans  $S$  et non incluses dans aucune autre boule incluse dans  $S$ ), et enfin un équivalent topologique de  $S$  de dimension inférieure (dimension 1 pour une forme dans  $\mathbb{R}^2$ , dimension 1 ou 2 pour une forme dans  $\mathbb{R}^3$ , etc). En géométrie euclidienne, la notion d'axe médian recouvre, sous certaines conditions, toutes ces définitions. En revanche, lorsqu'on les transpose en géométrie digitale, on se rend compte que des objets bien différents font leur apparition. L'axe médian digital sera défini comme l'ensemble des centres des boules maximales, alors que le squelette homotopique fournira un équivalent topologique de dimension inférieure, et centré dans la forme si on le souhaite.

#### Transformée en distance

La transformée en distance d'une forme  $S$  est définie comme suit.

**Définition 1.4.2.** Soit  $S$  une forme de  $\mathbb{Z}^n$ . La transformée en distance de  $S$  au point  $p \in S$  est définie par  $DT(p) = \min_{q \in \bar{S}} d(p, q)$  où  $\bar{S}$  dénote le complémentaire de  $S$  et  $d$  est une distance sur  $\mathbb{Z}^n$ .

Si la forme  $S$  est une forêt plus ou moins accueillante, la transformée en distance nous informe, en chaque point, de la distance qui nous sépare de l'orée du bois. Savoir la calculer rapidement et autant que possible exactement peut donc s'avérer vital dans certaines situations. L'algorithme naïf pour calculer cette transformation étant de complexité en temps quadratique, il s'agit donc de faire mieux. Et ici, l'algorithmique change selon la distance  $d$  utilisée.

Si la distance de chanfrein est utilisée, l'algorithme tient en deux images, une équation, et des conditions initiales : il fonctionne en deux passes, une passe avant et une passe arrière, pour lesquelles un masque

définissant les voisins à regarder (ils dépendent des déplacements élémentaires de la distance de chanfrein considérée) est appliqué en chaque point  $(i, j)$  de l'image (Fig.1.9). En chaque point, on lit la distance minimale trouvée pour chaque voisin, et on ajoute le poids du déplacement entre ce voisin et le point courant, ce qui donne :

$$DT(i, j) = \min_{(k,l) \in \text{Masque}} (DT(i + k, j + l) + \text{poids}(k, l))$$

Tout fonctionne bien si les conditions initiales sont bien posées :  $DT(i, j) = +\infty$  si  $(i, j) \in S$ ,  $DT(i, j) = 0$  sinon.

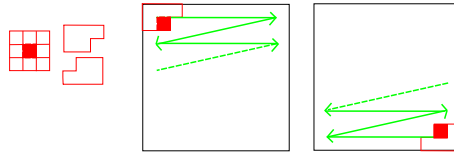


FIGURE 1.9 – Algorithme pour calculer la transformée en distance avec une distance de chanfrein utilisant les déplacements élémentaires  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$  et  $(\pm 1, \pm 1)$  : à gauche, les masques définissant les voisins à considérer durant la passe avant et la passe arrière représentées à droite.

Cet algorithme a le mérite d'avoir une complexité sympathique ( $\mathcal{O}(n^2)$ ) pour une image de taille  $n \times n$ , et un masque de taille fixée, et d'être très facile à implémenter. Toutefois, nous avons vu que la distance de chanfrein n'est qu'une approximation de la distance euclidienne, ce qui reste peu satisfaisant.

Pour calculer efficacement la transformée en distance en utilisant la distance euclidienne, il faut passer par l'utilisation de son carré, et utiliser une petite astuce, qui fait appel au bon vieux théorème de Pythagore (canif de tout géomètre), et que l'on appelle séparabilité. Pour comprendre cela, ré-écrivons ce que l'on cherche (pour une DT sur  $\mathbb{Z}^2$ ) :  $DT(i, j) = \min\{(i - x)^2 + (j - y)^2 | (x, y) \in \bar{S}\}$  (1). En regardant bien, on se rend compte que l'on peut décomposer cette minimisation sur  $\mathbb{Z}^2$  en deux minimisations sur  $\mathbb{Z}$ . On commence par minimiser en ne considérant que les lignes  $g(i, j) = \min_x \{|i - x|, (x, j) \in \bar{S}\}$  puis on ré-injecte ce résultat dans les colonnes en remplaçant  $(i - x)$  par  $g(i, j)$  dans l'équation (1). Si la première étape se fait facilement en temps linéaire, l'obtention d'un algorithme optimal pour la deuxième étape demande un peu plus de travail et le calcul d'une enveloppe inférieure d'une famille de paraboles. Au final, la complexité est en  $\mathcal{O}(n^2)$ , et encore mieux, l'algorithme s'étend

trivialement en dimension supérieure avec une complexité en  $\mathcal{O}(n^d)$  en dimension  $d$  [10](voir Fig.1.10 pour un exemple dans  $\mathbb{Z}^3$ ).

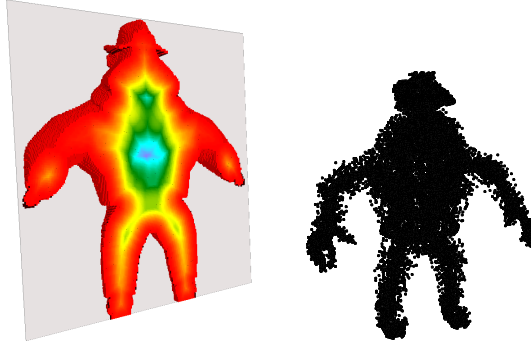


FIGURE 1.10 – A gauche, transformée en distance utilisant la distance euclidienne au carré dans  $\mathbb{Z}^3$ . A droite, axe médian réduit pour la distance euclidienne. Résultats obtenus avec la bibliothèque DGtal.

### Axe médian

Avant de définir l'axe médian [4] d'une forme digitale, précisons que nous entendons par boule discrète ouverte de centre  $c$  et de rayon  $r$  l'ombre de la boule ouverte euclidienne de même centre et même rayon. On dit qu'une boule discrète  $B$  est maximale dans une forme  $S$  si elle n'est strictement incluse dans aucune autre boule discrète contenue dans  $S$ . Alors l'axe médian  $AM(S)$  d'une forme digitale  $S$  est simplement défini comme l'ensemble des centres des boules discrètes maximales dans  $S$ . L'axe médian a trouvé au fil des années de très nombreuses applications en analyse d'images pour la reconnaissance et la description de formes notamment. On peut aussi noter une propriété remarquable qui découle directement de la définition : si chaque point de l'axe médian est assorti du rayon de la boule discrète maximale dont il est le centre, alors cet ensemble de points pondérés encode la forme  $S$  sans erreur. La question est alors : comment calculer cet objet ? Comme vous vous en doutez, la réponse dépend de la distance  $d$  considérée, d'où les deux paragraphes suivants. Mais le principe général est le même dans les deux cas : on recherche des maxima locaux dans la transformée en distance.

Dans le cas de la distance de chanfrein, la vérification qu'un point est le centre d'une boule maximale va effectivement pouvoir se faire en regardant localement autour du point. La localité va dépendre des déplacements élémentaires utilisés dans la définition de la distance, mais au final,

on peut stocker dans une table de hachage l'information nécessaire pour vérifier si un point est dans l'axe médian ou non. Pour faire simple, la table de hachage va nous dire : si à partir d'un point  $c$  on se déplace dans la direction  $\vec{v}$ , alors pour couvrir une boule de rayon  $r$  centrée en  $c$  il faut une boule de rayon  $r'$ . Ce rayon est noté  $Lut(\vec{v}, r)$ . Cela nous permet d'obtenir la caractérisation suivante [6] :  $p \in AM(S) \Leftrightarrow DT(p + \vec{v}) < Lut(\vec{v}, DT(P))$  pour tout  $\vec{v}$ .

Si la distance euclidienne est utilisée, alors l'algorithme le plus efficace calcule en réalité un sous-ensemble de l'axe médian, qui reste cependant une représentation sans erreur de la forme initiale [10]. Cet axe médian réduit ne contient pas certaines boules de l'axe médian qui sont couvertes par l'union d'autres boules. Nous ne rentrerons pas dans les détails de l'algorithme, mais le principe est similaire au calcul de la transformée en distance : il va s'agir de calculer des enveloppes supérieures de paraboles, dimension par dimension, pour ne conserver que les centres des paraboles (les centres des boules) qui contribuent à cette enveloppe (les plus hautes donc). Un exemple d'axe médian réduit est présenté Figure 1.10

### Squelette homotopique

L'axe médian fournit, certes, une cartographie simplifiée d'une forme  $S$ , mais, nous l'avons vu par exemple dans la Figure 1.10, l'objet obtenu ne préserve en rien la topologie de la forme initiale. Nous n'avons d'ailleurs rien fait pour la conserver. Pas facile de retrouver son chemin avec une telle carte.

L'idée derrière la définition du squelette homotopique d'une forme digitale  $S$  est simple : on "pèle" la forme  $S$  petit à petit, en enlevant seulement les pixels qui ne modifient pas la topologie, ni de  $S$ , ni de  $\bar{S}$ . Des points sont supprimés, un par un, en prenant soin de ne sélectionner que ceux dont la suppression ne déconnecte pas deux composantes connexes de  $S$ , ni ne connecte deux composantes connexes de  $\bar{S}$ , entre autres. De tels points sont dits *simples*. La difficulté réside donc dans la vérification cette propriété, puisque, a priori, décider si un point est simple ou non met en jeu la globalité de la forme et de son complémentaire. On pourrait craindre une complexité quadratique, voir supérieure mais, ces propriétés s'avèrent plus favorables. Rappelons que la définition de toute forme digitale nécessite de préciser les connexités utilisées. Pour le calcul du squelette homotopique, cela est d'autant plus important que l'on souhaite préserver les propriétés topologiques de la forme. Nous avons vu qu'il faut travailler avec des paires de connexités de Jordan : si la connexité  $\alpha$  est utilisée pour

la forme, la connexité  $\bar{\alpha}$  le sera pour son complémentaire. Notons aussi  $Vois_{\alpha}(p)$  l'ensemble des  $\alpha$ -voisins d'un point  $p$ .

Pour déterminer si un point  $p$  est simple ou non, il suffit finalement de compter le nombre de composantes connexes (selon la connexité  $\alpha$ ) de  $Vois_{\alpha}(p)$  dans la forme  $S$  (noté  $C_{\alpha}(p, S)$ ), ainsi que le nombre de composantes connexes (selon la connexité  $\bar{\alpha}$ ) de  $Vois_{\bar{\alpha}}(p)$  dans la forme  $\bar{S}$  (noté  $C_{\bar{\alpha}}(p, \bar{S})$ ). Un point  $p$  est simple, si et seulement si ces deux valeurs sont égales à 1 [3]. Intuitivement, si l'on a par exemple  $C_{\alpha}(p, S) = 0$  pour un point  $p$  de  $S$ , alors  $p$  n'a pas de voisin dans  $S$ . Il est une composante connexe de  $S$  à part entière : le supprimer supprime une composante connexe de  $S$ . De même si  $C_{\bar{\alpha}}(p, \bar{S}) = 0$ , alors  $p$  n'a aucun point de  $\bar{S}$  dans son voisinage, il est cerné par des points de  $S$  : le supprimer créerait un "trou", une composante connexe de  $\bar{S}$ .

Cette caractérisation locale des points simples fournit des algorithmes de squelettisation très efficaces. Plusieurs détails doivent cependant être soulignés :

- si  $S$  est composée d'une seule composante connexe, sans trous, alors le squelette homotopique obtenu après suppression de tous les points simples sera réduit à un point ;
- le squelette homotopique obtenu dépend de l'ordre dans lequel les points simples sont supprimés.

Concernant la première remarque, une alternative est de contraindre un peu plus la suppression d'un point. Dans  $\mathbb{Z}^2$ , une solution est par exemple de ne supprimer que les points simples qui ont au moins 2  $\alpha$ -voisins. Ainsi, les "branches" des formes sont préservées. En dimension supérieure, les contraintes à poser dépendent du type de squelette que l'on souhaite : par exemple, dans  $\mathbb{Z}^3$ , le squelette doit-il être de dimension 1 ? S'autorise-t-on des parties localement de dimension 2 ?

Le deuxième point soulève la question du choix de l'ordre dans lequel supprimer les points. Une possibilité est par exemple d'utiliser la transformée en distance pour pondérer les points : plus la transformée en distance de  $p$  est petite, plus tôt il sera supprimé. Un exemple de squelette homotopique est représenté dans la Figure 1.11.

### 1.4.3 Estimateurs géométriques

Dernière étape de notre voyage en géométrie digitale : comment estimer des quantités géométriques à partir d'une forme digitale  $S$  ? Par quantité géométrique, nous entendons aussi bien des quantités globales, comme l'aire de  $S$ , le périmètre de son bord  $\partial S$ , que des quantités locales (pour chaque point  $x \in \partial S$ ) telles la tangente (ou de manière équivalente

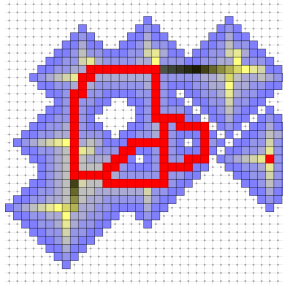


FIGURE 1.11 – *Squelette homotopique 4-connexe (image de la galerie de la bibliothèque DGtal) : en rouge, les pixels du squelette ; les points simples sont représentés dans une palette de couleurs allant du bleu au noir, indiquant l'ordre dans lequel ils ont été supprimés.*

la normale), ou bien la courbure. Nous avons jusque là fait beaucoup d'efforts pour que la géométrie digitale ressemble à sa grande soeur euclidienne autant que faire se peut, et il serait dommage de s'arrêter en si bon chemin. Pour définir des estimateurs géométriques digitaux pertinents, il convient donc de fixer quelques règles. Pour chaque estimateur, nous nous intéresserons à sa convergence asymptotique, critère de qualité qui relie l'estimateur digital à son modèle continu.

### **Convergence asymptotique, ou que se passe-t-il quand les pixels deviennent infiniment petits ?**

Pour commencer, fixons-nous une famille de formes  $\mathcal{F}$  sur laquelle nous essayerons de prouver des propriétés de convergence. Ensuite, rappelons-nous comment discrétiser une forme  $F \in \mathcal{F}$  : nous avons vu dans la section 1.3.1 de nombreuses définitions, mais dans cette section, nous revenons à la plus simple, l'ombre, en généralisant sa définition pour prendre en compte la taille de la grille utilisée :  $F^{h\mathbb{Z}} = \text{Ombre}_{h\mathbb{Z}^n}(F) = F \cap h\mathbb{Z}^n$ . Le paramètre  $h$  est la taille de la grille : plus  $h$  est petit, plus les pixels sont petits. Nous avons vu qu'une limite de cette discrétisation lorsqu'on omet le paramètre  $h$  est que  $F^{\mathbb{Z}}$  peut tout à fait être vide pour des formes  $S$  qui ne le sont pas. Maintenant, lorsqu'on fait tendre  $h$  vers 0, quelque soit  $S$  d'intérieur non vide, il existe une résolution  $h_0$  à partir de laquelle, pour tout  $h < h_0$ ,  $F^{h\mathbb{Z}}$  est non vide.

Nous avons maintenant tous les éléments pour définir la convergence asymptotique d'un estimateur géométrique global [21].

**Définition 1.4.3** (convergence asymptotique globale). *Soit une famille de formes  $\mathcal{F}$ . L'estimateur géométrique  $\hat{\epsilon}$  est asymptotiquement convergent pour*



$\mathcal{F}$  vers la mesure géométrique  $\epsilon$  si  $\forall F \in \mathcal{F}, \lim_{h \rightarrow 0} |\hat{\epsilon}(F^{h\mathbb{Z}}) - \epsilon(F)| \leq \tau_F(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_F(h) = 0$ . La vitesse de la convergence est donnée par la fonction  $\tau_F(h)$ .

En termes plus clairs, on dira que l'estimateur digital  $\hat{\epsilon}$  converge asymptotiquement vers l'estimateur continu  $\epsilon$  si quand la résolution de la grille augmente, la valeur retournée par  $\hat{\epsilon}$  converge vers la "vraie" valeur, c.a.d. celle retournée par  $\epsilon$ . Une définition similaire peut être posée pour les estimateurs locaux :

**Définition 1.4.4** (convergence asymptotique locale). *Soit une famille de formes  $\mathcal{F}$ . L'estimateur géométrique  $\hat{\epsilon}$  est asymptotiquement convergent pour  $\mathcal{F}$  vers la mesure géométrique  $\epsilon$  ssi  $\forall F \in \mathcal{F}, \forall x \in \partial F, \forall y \in \partial F^{h\mathbb{Z}}$  avec  $\|y - x\|_1 \leq h, |\hat{\epsilon}(F^{h\mathbb{Z}}, y) - \epsilon(F, x)| \leq \tau_{F,x}(h)$ , avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{F,x}(h) = 0$ .*

En guise d'échauffement, regardons comment définir un estimateur d'aire (ou de volume), et pour cela, comptons simplement les points. Nous avons alors l'estimateur suivant :  $\hat{\epsilon}(F^{h\mathbb{Z}}) = h^n |F^{h\mathbb{Z}}|$ . Il est connu depuis bien longtemps (Gauss, Dirichlet) que cet estimateur est convergent pour la famille des formes convexes (d'intérieur non vide) avec  $\tau_F(h) = \mathcal{O}(h)$  et converge plus vite pour des formes  $\mathcal{C}^3$  convexes avec  $\tau_F(h) \approx \mathcal{O}(h^{\frac{15}{11}})$ . Malheureusement, ce premier exemple est trompeur, car il est le plus souvent difficile de définir des estimateurs convergents.

## Périmètre, tangentes

En reprenant la même idée que pour estimer l'aire, commençons par voir si l'on peut estimer le périmètre d'une forme  $F^{h\mathbb{Z}}$  dans  $\mathbb{Z}^2$  en comptant simplement le nombre de déplacements élémentaires de son contour. Et là, on tombe sur un os, en forme d'escaliers, illustré dans la Fig.1.12 : la longueur de chaque déplacement élémentaire diminue avec  $h$ , pendant que nombre de ces déplacements augmente, et on peut montrer que pour cet exemple le périmètre calculé converge vers 4 au lieu de  $\pi$ . De manière générale, il a été montré dans [36] que toute tentative de définition d'un estimateur de périmètre basé sur un découpage du contour en des motifs prédéfinis, aussi compliqués et divers soient-ils, est vouée à l'échec.

La solution est de décomposer le contour en éléments dont la taille s'adapte au contour lui-même. L'outil adapté est la couverture tangentielle (voir section 1.3.2). En effet, sur le contour de la discrétisation des formes strictement convexes à courbure bornée, la taille d'un segment de droite discrète n'est pas constante [22] : elle grandit en  $\Omega(h^a)$ , avec  $h$  la taille de la grille, et  $a < 0$ . A partir de l'ensemble des segments maximaux

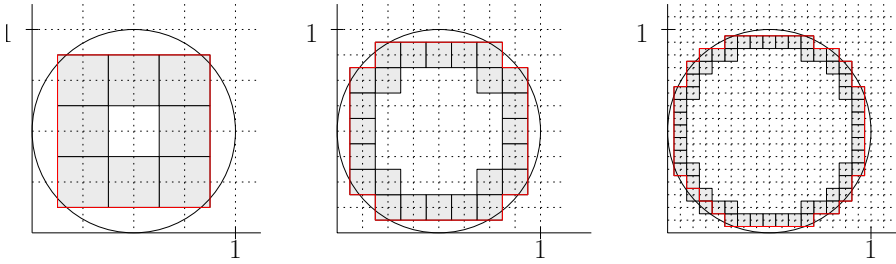


FIGURE 1.12 – Ombre pour différents pas  $h$  décroissants de gauche à droite d'un disque ouvert de rayon  $\frac{1}{2}$  et étude de son contour, indiqué en rouge.

passant par un point  $p$  donné (cet ensemble est donné par la couverture tangentielle, qui se calcule en temps linéaire en la taille du contour), il est possible de définir un estimateur discret convergent de tangente  $\hat{t}$ . Et de là, on en déduit une version discrétisée du calcul du périmètre donné par  $\int_0^1 t(s) ds$ . Pour toute arête  $e$  de  $\partial F^{h\mathbb{Z}}$ , si on note  $t_{elem}(e)$  la direction qui porte l'arête, et  $\hat{t}(e)$  la tangente calculée par l'estimateur discret, on a :

$$\widehat{Per}(F^{h\mathbb{Z}}) = \sum_{e \in \partial F^{h\mathbb{Z}}} \hat{t}(e) \cdot t_{elem}(e).$$

L'interprétation est simple : on compte le nombre d'arêtes le long de  $\partial F^{h\mathbb{Z}}$  en les pondérant par la longueur de la projection de l'arête sur la tangente estimée. Finalement, la pondération s'adapte à la géométrie du contour.

### Courbure

Un estimateur de tangente en un point d'une courbe tel que celui présenté précédemment est en quelque sorte un estimateur de la dérivée première de la courbe. Nous étudions maintenant la notion de courbure, qui correspond à la dérivée seconde. La courbure en un point  $p$  d'une courbe de  $\mathbb{R}^2$  est l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe en ce point.

De nombreuses approches ont été proposées pour définir un estimateur de courbure. Celles à base de couverture tangentielle se sont avérées non convergentes. Il existe des variantes, notamment en utilisant des arcs de cercles discrets maximaux à la place des segments de droite. Il existe en effet des algorithmes efficaces et incrémentaux de reconnaissance d'arcs de cercles, permettant un calcul rapide de cette couverture. La définition de l'estimateur de courbure est alors élémentaire : la courbure en un point  $p$

est donnée par l'inverse du rayon de l'arc de cercle maximal pour lequel  $p$  est le plus au centre. La convergence de cet estimateur reste un problème ouvert. Il existe par ailleurs d'autres opérateurs de dérivation de degré supérieur ou égal à 1 et donc de courbure, dont la convergence asymptotique a été établie. Certains sont basés sur des convolutions binomiales [14], d'autres sur des avatars analytiques des polynômes [29].

Pour terminer en beauté avec quelques belles images (car malgré la caricature de l'introduction, on peut aussi avoir de belles images en géométrie digitale), terminons par quelques mots sur l'estimation de courbure sur des surfaces digitales dans  $\mathbb{Z}^3$ . Les courbures principales en un point  $p$  d'une surface sont les valeurs minimales et maximales des courbures normales (courbure des courbes sur la surface) en ce point. La courbure moyenne en  $p$  est alors la moyenne arithmétique des courbures principales, alors que la courbure gaussienne en est le produit. Des estimateurs de courbure moyenne et gaussienne convergents ont été proposés récemment [9], et les résultats sont illustrés dans la Fig.1.13.

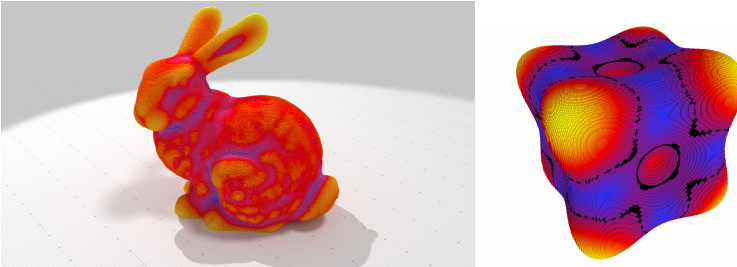


FIGURE 1.13 – Estimation de courbure, moyenne à gauche, gaussienne à droite sur des surfaces digitales [9] (Images de la galerie de la bibliothèque DGtal).

## 1.5 Jeux

Vous êtes encore vivant ? Bel exploit. Après l'effort, le réconfort. Vous méritez un petit rafraîchissement, une piñacolada à siroter sous un cocotier en écoutant le va-et-vient des vagues dans l'eau turquoise peuplée de requins affamés. Damned ! A part en armure de chevalier, c'est foutu pour la baignade, mais vous pouvez toujours rester sur votre transat à tourner les pages de ce manuel ouvert à la page *jeux*.

### 1.5.1 Tomographie discrète

A priori, le mot *tomographie* n'a rien de particulièrement sympathique ou convivial. C'est en effet la technique utilisée dans les scanners à rayons X pour reconstruire des coupes de l'organe d'un patient sans forcément lui ouvrir le ventre. Cet immense progrès a été récompensé par le prix Nobel de médecine accordé à Godfrey Newbold Hounsfield et Allan MacLeod Cormack en 1979. Étrangement, le développement de ce projet doit beaucoup aux Beatles car les recherches étaient financées par la société EMI, plus connue pour ses disques que pour sa contribution scientifique. En imagerie médicale, le problème de la tomographie consiste à calculer des images en niveau de gris, mais en contrôle non destructif, il peut aussi être de reconstruire des images binaires. C'est là que les choses se compliquent car dans ce cadre, de nombreux problèmes deviennent *NP*-difficiles.

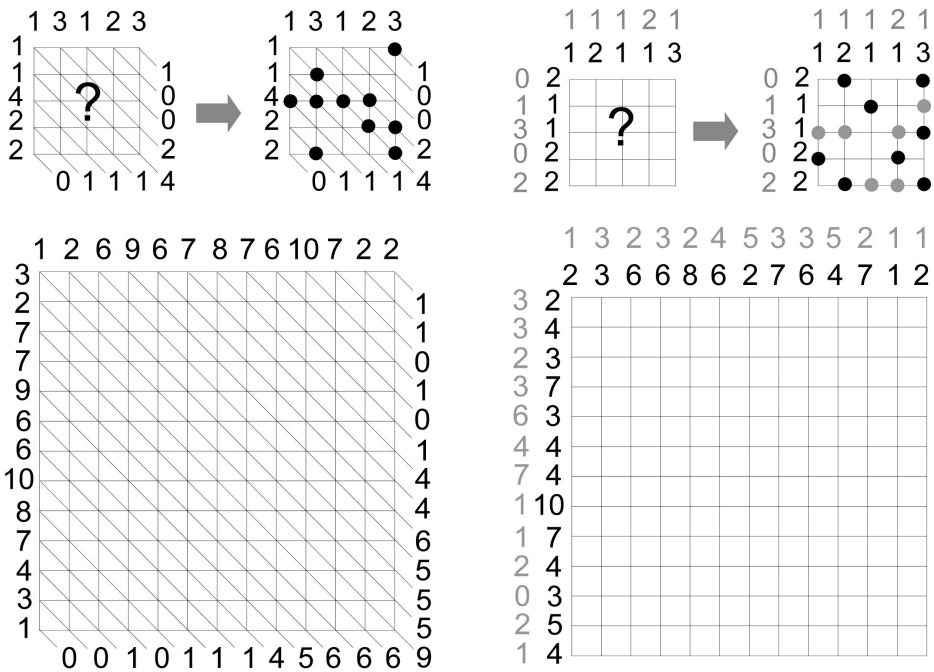


FIGURE 1.14 – **Jeu 1** : A gauche, un problème à 3 directions (un exemple résolu en haut et une instance en bas). A droite, un problème à deux couleurs (exemple et instance).

Dans un premier jeu ( Fig.1.14), la règle est simple : positionnez des points sur la grille de façon à en avoir le nombre requis mais pas plus sur chaque droite. Il existe des algorithmes polynomiaux pour résoudre

ce problème lorsque l'on n'a que deux directions [17, 34] (on peut même le reformuler sous forme MaxFlow-MinCut dans un graphe bipartite).

Dans l'instance 1 (Figure 1.14, colonne de gauche), il y a 3 directions, ce qui place le problème dans une classe  $NP$ -difficile [18]. Dans l'instance 2 (Figure 1.14, colonne de droite), il est maintenant question de positionner deux types de points. On est encore dans la catégorie des classes de problèmes  $NP$ -difficiles [13]. La détermination de la complexité des nombreuses extensions et variantes de ces problèmes a été un sujet de recherche des années 1990 à 2010. Bien qu'elles soient souvent difficiles, la recherche d'algorithmes de résolution efficaces est le nouveau sujet de préoccupation. Elle a par exemple permis la reconstruction de la structure atomique d'une nanoparticule cristalline [1].

### 1.5.2 Pavages

Illustrons le théorème de Beauquier-Nivat selon lequel un polyomino (une partie finie 4-connexe de  $\mathbb{Z}^2$ ) pave le plan  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si il est un pseudo-hexagone [2] (précisons qu'un pseudo-carré est considéré ici comme un pseudo-hexagone dégénéré). Qu'est-ce qu'un pseudo-hexagone ? Une figure dont les 6 côtés successifs  $ABCDEF$  coïncident deux à deux sous la forme  $D = \bar{A}$ ,  $E = \bar{B}$  et  $F = \bar{C}$  (pour un chemin  $M$  reliant un point  $u$  à un point  $v$ , on note  $\bar{M}$  le même chemin, à translation près, mais parcouru en sens inverse, c'est-à-dire allant cette fois de  $v$  à  $u$ ). Pourrez-vous compléter le pavage du jeu 2 - Fig.1.15 ?

## 1.6 Conclusion

Cet aperçu de la géométrie digitale laisse beaucoup de vide. Quid des objets mathématiques de codimension autre que 1, des transformations linéaires, de la trigonométrie... Bien que ce petit manuel ait été conçu pour vous montrer le plus de concepts possible, certains thèmes ont été victimes de l'itinéraire choisi, d'autres de notre méconnaissance de ces territoires. Nous vous invitons bien sûr à approfondir cette introduction par un peu de lecture (par exemple le livre en français [11]) ou bien des exercices de programmation. Dans ce cas, on ne saurait trop vous recommander de vous initier à la librairie open source C++ DGtal qui regroupe un grand nombre d'outils présentés dans ce manuel. On peut au moins vous garantir une chose : quand on commence à jouer avec la géométrie et les entiers, la question la plus anodine peut vite s'avérer beaucoup plus difficile qu'elle n'y paraît et en dehors des applications diverses et variées du

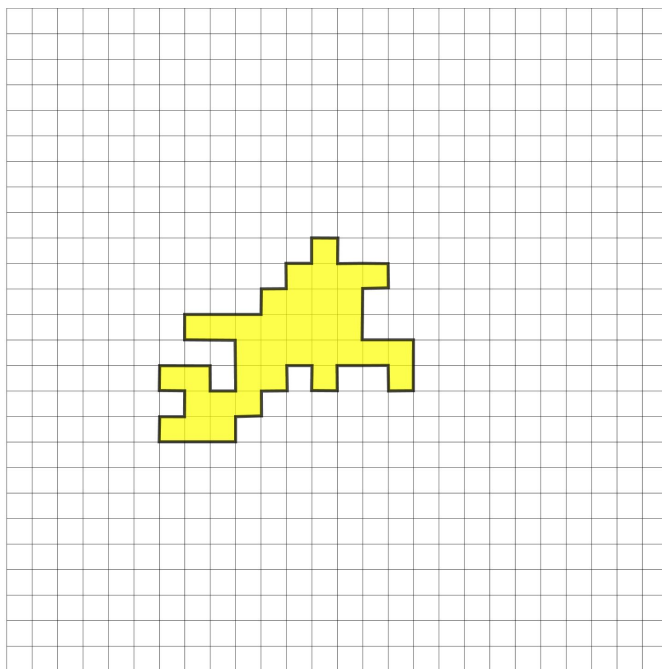
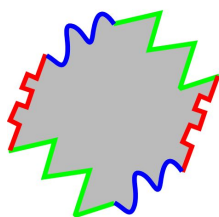


FIGURE 1.15 – *Jeu 2* : A gauche, le schéma de principe d'un pseudo-hexagone. A droite, compléter le pavage du plan par le polyomino dessiné.

domaine, c'est bien cela qui nous attire. C'est ce qui rend sa nature encore sauvage et tout ce qu'il y a de plus fascinante.



# Bibliographie

- [1] S. V. Aert, K. J. Batenburg, M. D. Rossell, R. Erni, and G. V. Tendeloo. Three-dimensional atomic imaging of crystalline nanoparticles. *Nature*, 470 :374–377, 2011.
- [2] D. Beauquier and M. Nivat. Tiling the plane with one tile. In *Proceedings of the Sixth Annual Symposium on Computational Geometry, Berkeley, CA, USA, June 6-8, 1990*, pages 128–138, 1990.
- [3] G. Bertrand. Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids. *Pattern Recognition Letters*, 15(10) :1003 – 1011, 1994.
- [4] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Proc. Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, 1967.
- [5] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27(3) :321 – 345, 1984.
- [6] G. Borgefors, I. Ragnemalm, and G. Sanniti di Baja. The euclidean distance transform : finding the local maxima and reconstruction the shape. In *7th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, volume 2, pages 974–981, Denmark, 1991.
- [7] J. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4 :25–30, 1965.
- [8] T. M. Chan. Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, 16(4) :361–368, 1996.
- [9] D. Coeurjolly, J. Lachaud, and J. Levallois. Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry. *Computer Vision and Image Understanding*, 129 :27–41, 2014.
- [10] D. Coeurjolly and A. Montanvert. Optimal separable algorithms to compute the reverse euclidean distance transformation and discrete



- medial axis in arbitrary dimension. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 29(3) :437–448, 2007.
- [11] J.-M. C. David Coeurjolly, Annick Montanvert. *Géométrie discrète et images numériques*. Hermès, 2007.
- [12] I. Debled-Renesson and J.-P. Reveillès. A linear algorithm for segmentation of digital curves. *IJPRAI*, 9(4) :635–662, 1995.
- [13] C. Dürr, F. Guíñez, and M. Matamala. Reconstructing 3-colored grids from horizontal and vertical projections is np-hard : A solution to the 2-atom problem in discrete tomography. *SIAM J. Discrete Math.*, 26(1) :330–352, 2012.
- [14] H. Esbelin, R. Malgouyres, and C. Cartade. Convergence of binomial-based derivative estimation for  $c^2$  noisy discretized curves. *Theor. Comput. Sci.*, 412(36) :4805–4813, 2011.
- [15] F. Feschet and L. Tougne. Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : Application to the curvature. In *Discrete Geometry for Computer Imagery, 8th International Conference, DCGI'99, Marne-la-Vallée, France, March 17-19, 1999, Proceedings*, pages 31–40, 1999.
- [16] H. Gabor. *Geometry of digital spaces*. Birkhäuser, 1998.
- [17] D. Gale. A theorem on flows in networks. *Pacific J. Math.*, 7 :1073–1082, 1957.
- [18] R. J. Gardner and P. Gritzmann. Discrete tomography : Determination of finite sets by x-rays. *Universität Trier, Mathematik/Informatik, Forschungsbericht*, 95-13, 1995.
- [19] G. T. Herman. Discrete multidimensional jordan surfaces. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 54(6) :507–515, 1992.
- [20] C. Jordan. *Cours d'Analyse*. Ecole polytechnique, 1887.
- [21] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry*. Morgan Kaufman Publishers, 2004.
- [22] J. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image Vision Comput.*, 25(10) :1572–1587, 2007.
- [23] Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2002.
- [24] R. Malgouyres. A definition of surfaces of  $z^3$  a new 3d discrete jordan theorem. *Theoretical Computer Science*, 186(1) :1–41, 1997.
- [25] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in  $r^3$  and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12(4) :759–776, 1983.

- [26] A. A. Melkman. On-line construction of the convex hull of a simple polyline. *Inf. Process. Lett.*, 25(1) :11–12, 1987.
- [27] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Teubner, 1896.
- [28] D. G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional digital images. *Information and Control*, 51(3) :227 – 247, 1981.
- [29] L. Provot and Y. Gérard. Estimation of the derivatives of a digital function with a convergent bounded error. In *Discrete Geometry for Computer Imagery - 16th IAPR International Conference, DGCI 2011, Nancy, France, April 6-8, 2011. Proceedings*, pages 284–295, 2011.
- [30] J.-P. Reveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 1991.
- [31] A. Rosenfeld. Picture processing by computer. *Journal ACM Computing Surveys*, 1(3) :147–176, 1969.
- [32] A. Rosenfeld. Arcs and curves in digital pictures. *J. ACM*, 20(1) :81–87, 1973.
- [33] T. Roussillon and I. Sivignon. Faithful polygonal representation of the convex and concave parts of a digital curve. *Pattern Recognition*, 44(10-11) :2693 – 2700, 2011.
- [34] H. Ryser. Matrices of zeros and ones. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 :442–464, 1960.
- [35] H. Samet. *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures*. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, 2006.
- [36] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In *Discrete Geometry for Computer Imagery, 11th International Conference*, pages 114–123, 2003.
- [37] E. Thiel. *Géométrie des distances de chanfrein*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Déc 2001.