



**HAL**  
open science

# Comparaison de 3 méthodes à base de transformées de Fourier pour le calcul des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes

Hervé Moulinec, Fabrice Silva

► **To cite this version:**

Hervé Moulinec, Fabrice Silva. Comparaison de 3 méthodes à base de transformées de Fourier pour le calcul des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes. CSMA 2013 11e Colloque National en Calcul des Structures, May 2013, Giens, France. hal-01313074

**HAL Id: hal-01313074**

**<https://hal.science/hal-01313074>**

Submitted on 9 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaison de 3 méthodes à base de transformées de Fourier pour le calcul des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes

Hervé Moulinec, Fabrice Silva

<sup>1</sup> CNRS,LMA,moulinec@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup> CNRS,LMA,silva@lma.cnrs-mrs.fr

**Résumé** — Les simulations numériques du comportement mécanique des matériaux hétérogènes doivent tenir compte de la complexité de leurs microstructures. Au cours des deux dernières décennies, les méthodes dites “à base de transformées de Fourier” ont retenu l’attention par leur efficacité et la simplicité de leur mise en oeuvre. On se propose dans cette étude de comparer 3 méthodes numériques de cette famille, proposant une convergence accélérée en comparaison de celle du schéma itératif proposé par Moulinec & Suquet ([1], [2]). On s’intéressera tout particulièrement aux conditions de convergence et au choix des paramètres permettant une convergence optimale de ces schémas.

**Mots clés** — transformée de Fourier, matériaux hétérogènes

## 1 Introduction : problème local

Cette étude porte sur un problème élastique linéaire (bien que les méthodes en question puissent être étendues, sous certaines conditions, au cas des comportements non-linéaires). Le problème à résoudre sur un volume donné  $V$ , est celui d’un matériau de constante élastique connue  $c(x)$  dépendant de la position  $x$ , soumis à une déformation macroscopique  $E$  et à des conditions aux bords périodiques.

## 2 Présentation des différents schémas

La méthode numérique initialement proposée par Moulinec & Suquet ([1]) repose sur la résolution itérative de l’équation de Lippmann-Schwinger et peut être résumée par la relation suivante qui relie deux itérés successifs  $\varepsilon^i$  et  $\varepsilon^{i+1}$  du champ de déformation :

$$\varepsilon^{i+1}(x) = -\Gamma^0 * ((c(x) - c^0) : \varepsilon^i(x)) + E \quad (1)$$

où  $c^0$  est le tenseur de rigidité d’un milieu élastique linéaire de référence, où  $\Gamma^0$  est un opérateur de Green associé à  $c^0$  et où le symbole  $*$  représente l’opération de convolution.

Les conditions sur le paramètre  $c^0$  garantissant la convergence du schéma ont été exposées dans ([5]) ainsi que le choix de  $c_0$  permettant une convergence optimale. Pour ce schéma, le nombre d’itérations nécessaire pour atteindre une précision donnée est de l’ordre du contraste entre les propriétés mécaniques des constituants du matériau hétérogène. Aussi, en particulier pour résoudre des problèmes où le contraste entre les phases est grand, différents schémas accélérés ont été proposés dans la littérature.

Eyre & Milton ([3]) ont proposé en 1999 un schéma qui peut s’exprimer par la relation itérative suivante :

$$\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i - 2(\delta c)^{-1} : c^0 : (\Gamma^0 * (c^0 : \varepsilon^i) - \varepsilon^i + E + \Gamma^0 * (c : \varepsilon^i))$$

qui converge de façon optimale pour le choix de  $c^0$  suivant :

$$k^0 = -\sqrt{k_{min} \times k_{max}}, \quad \mu^0 = -\sqrt{\mu_{min} \times \mu_{max}} \quad (2)$$

Un schéma à base de Lagrangien augmenté utilisant l’algorithme d’Uzawa a été introduit par Michel, Moulinec & Suquet ([4], [5]) pour résoudre des problèmes à fort contrastes notamment lorsque le comportement des phases est non-linéaire. Cet algorithme fait appel, lui aussi, à l’opérateur  $\Gamma^0$  et aux transformées de Fourier.

Plus récemment, Monchiet & Bonnet ont proposé ([6]) un algorithme “en polarisation” qui peut se présenter par la relation itérative suivante :

$$\tau^{i+1} = \tau^i - \alpha c^0 : \Gamma^0 * c : \varepsilon^i - \beta \Delta^0 * \varepsilon^i \quad (3)$$

où la polarisation  $\tau$  est définie par :  $\tau = (c - c^0) : \varepsilon$  et où  $\Delta^0$  est l’opérateur de Green en contrainte.

### 3 Comparaison des différents schémas

Monchiet & Bonnet ont montré que le schéma de Eyre & Milton était un cas particulier du schéma en polarisation (3) pour lequel les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  valent respectivement 2 et  $-2$ . On peut montrer que le schéma à base de Lagrangien de [4] en est lui aussi un cas particulier avec :  $\alpha = 1$  et  $\beta = -1$ .

Par ailleurs, une étude des conditions de convergence du schéma (3) permet de trouver une borne supérieure  $\mathcal{R}_w$  du rayon spectral  $\mathcal{R}$  de l’opérateur du schéma itératif dont on peut trouver une expression simple. Dans le cas où  $\alpha = -\beta$  on peut trouver les conditions sur  $c_0$  permettant de minimiser  $\mathcal{R}_w$ . Comme pour le schéma accéléré de Eyre-Milton, il s’agit du choix :

$$k^0 = -\sqrt{k_{min} \times k_{max}}, \quad \mu^0 = -\sqrt{\mu_{min} \times \mu_{max}} \quad (4)$$

De plus, on peut montrer que le choix optimal pour  $\alpha$  et  $\beta$  est  $\alpha = -\beta = 2$ , c’est à dire celui du schéma d’Eyre-Milton.

Ces résultats sont illustrés par l’exemple numérique présenté en figure (1). Pour une microstructure biphasée donnée, avec un contraste entre les propriétés mécaniques des phases de 10000, on calcule la réponse à une déformation macroscopique imposée, pour différentes valeurs de  $k_0, \mu_0$ . On vérifie que l’optimum pour tous les schémas accélérés est atteint pour  $-k_0 = \sqrt{10000} = 100$  et que le schéma le plus rapide est celui d’Eyre & Milton.

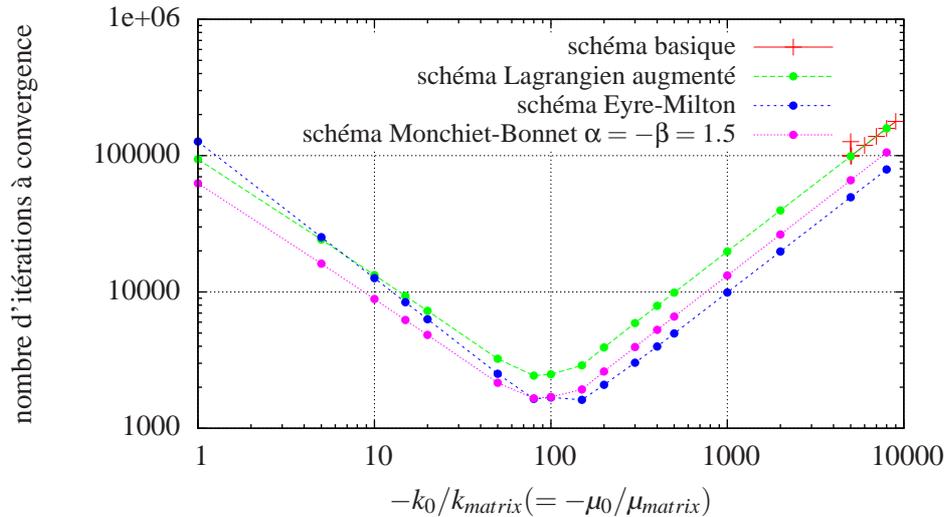


Fig. 1 – Nombre d’itérations à convergence pour différents choix du matériau de référence  $c_0$ , pour un contraste de 10000 entre les propriétés mécaniques de l’inclusion et de la matrice de la microstructure considérée.

### Références

- [1] Moulinec H., Suquet P. "A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites". *C. R. Acad. Sc. Paris II*, **318**, 1417–1423, 1994.
- [2] Moulinec H., P. Suquet "A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **157**, 69–94, 1998.
- [3] Eyre D.J., G.W. Milton "A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement". *J. Physique III*, **6**, 41–47, 1999.
- [4] Michel J.C, Moulinec H, Suquet P. *A computational method based on augmented Lagrangians and Fast Fourier Transforms for composites with high contrast* *Comput. Modelling Engng. Sc.*, **1** (2), 79–88, 2000.

- [5] Michel J.C, Moulinec H, Suquet P. *A computational method for linear and nonlinear composites with arbitrary phase contrast* *Int. J. Numer. Meth. Engng* **52**, 139-160, 2001.
- [6] Monchiet V. and Bonnet G. “A polarization-based FFT iterative scheme for computing the effective properties of elastic composites with arbitrary contrast”. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 89 : 1419-1436. doi : 10.1002/nme.3295, 2012.