



HAL
open science

**Le calcul différentiel, les mathématiciens et les
économistes au XIX° - K. Marx et H. Laurent, lecteurs
de J.L. Boucharlat.**

Alain Alcouffe

► **To cite this version:**

Alain Alcouffe. Le calcul différentiel, les mathématiciens et les économistes au XIX° - K. Marx et H. Laurent, lecteurs de J.L. Boucharlat.. Sciences et techniques en perspectives, 1987, 13, pp.47-69. hal-01312597

HAL Id: hal-01312597

<https://hal.science/hal-01312597>

Submitted on 12 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Le calcul différentiel, les mathématiciens et les
économistes au XIX - K. Marx et H. Laurent, lecteurs
de J.L. Boucharlat.**

Alain Alcouffe

► **To cite this version:**

Alain Alcouffe. Le calcul différentiel, les mathématiciens et les économistes au XIX - K. Marx et H. Laurent, lecteurs de J.L. Boucharlat.. Sciences et techniques en perspectives, 1987, 13, pp.47-69. <hal-01312597>

HAL Id: hal-01312597

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01312597>

Submitted on 7 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Le calcul différentiel, les mathématiciens et les économistes au XIX^e
K. Marx et H. Laurent, lecteurs de J.L. Boucharlat.**

Alain Alcouffe

Université de Toulouse

Résumé

Parmi les sources des Manuscrits mathématiques de Marx figure notamment le livre sur le calcul différentiel de Jean-Louis Boucharlat, qui connut de multiples éditions jusqu'en 1926. Ce livre fera aussi l'objet de remarques de la part de Herman Laurent, un actuaire et relation de Léon Walras. Le traitement L'article montre que la méthode génétique (histoire des concepts) et dialectique (Marx s'est intéressé aux transformations que provoquait le développement même des différentes approches du calcul différentiel) mérite de retenir l'attention et éclaire l'histoire du calcul différentiel jusqu'à ces développements du 20^e siècle.

Mots-clés: Marx, Boucharlat, Laurent, calcul différentiel, méthodologie.

Among the references used by Marx when he wrote his Mathematical Manuscripts, the book of Jean-Louis Boucharlat on Calculus is remarkable by its multiple editions till 1926. It was also criticized by Herman Laurent, an actuary and one of the first disciple of Léon Walras. The paper shows that the genetic method (history of the concepts) and dialectic (Marx scrutinized the transformations of the various approaches used in the calculus) deserves attention and highlights the history of calculus till the XXth century.

Keywords : Marx, Boucharlat, Laurent, calculus, methodology.

Le calcul différentiel, les mathématiciens et les économistes au XIX^e

K. Marx et H. Laurent, lecteurs de J.L. Boucharlat.

En 1881, deux vieux messieurs de Londres, émigrés allemands, dépourvus de formation mathématique particulière, échangeaient des réflexions sur le calcul différentiel. Qu'il s'agisse de Marx et d'Engels et que ces réflexions aient été le résultat d'un énorme travail de lecture et d'élaboration de Marx poursuivi pendant près de trente ans ne suffirait pas à faire échapper ces échanges à la caricature immortalisée par Flaubert dans Bouvard et Pécuchet (et parue en 1881, après la mort de Flaubert) si ces "manuscrits mathématiques" n'étaient rien moins qu'anecdotiques¹. En réalité, les MMM en dehors de l'intérêt qu'ils peuvent présenter pour le marxologue ou le philosophe des sciences apportent une contribution intéressante directe et indirecte à l'histoire des mathématiques au XIX^e siècle. L'intérêt est, en effet, dédoublé: d'une part, la lecture que fait Marx de l'histoire du calcul différentiel mais d'autre part, aussi, la re-lecture qu'il nous incite à faire de ses sources que l'on peut confronter avec les autres auteurs contemporains et replacer dans l'histoire des mathématiques. De ce point de vue, l'une des sources de Marx, les Elémens de calcul différentiel et de calcul intégral de J.L. Boucharlat occupe une place de choix. C'est, tout d'abord, une des références les plus fréquemment utilisées par Marx, en particulier, dans son texte le plus élaboré (le mémoire sur le calcul différentiel rédigé à l'intention de Engels et qu'ils avaient peut-être eu l'intention de publier). On n'a aucune indication sur les raisons de l'intérêt de Marx pour cet ouvrage particulier, un choix assez tardif semble-t-il, puisque Marx avait utilisé antérieurement un ouvrage d'un autre mathématicien français, L.B. Francoeur², mais il faut reconnaître qu'il avait fait un choix ratifié par beaucoup de ceux qui se

souciaient d'étudier ce domaine des mathématiques: voilà un ouvrage édité pour la première fois en 1813 qui sera traduit dans de nombreuses langues (y compris une traduction en hindoustani) et connaîtra de multiples éditions sans bouleversement majeur et sera encore réimprimé plus d'un siècle après sa première parution (au moins jusqu'en 1926!). Nous nous proposons de relire la présentation des concepts du calcul différentiel de Boucharlat en prenant comme guide d'une part la critique de Marx et d'autre part la réédition de l'ouvrage par les soins de Hermann Laurent en 1886.

I°) Présentation générale des Elémens de Calcul différentiel et de Calcul Intégral de J.L. Boucharlat.

Jean Louis Boucharlat était né en 1775 au sein d'une riche famille lyonnaise qui lui fit donner une solide instruction³. Très jeune, il manifesta un puissant intérêt à la fois pour la poésie et pour les mathématiques. Inquiet pendant la Terreur, il se réfugia à Saint-Etienne, puis muni de lettres de recommandation pour Monge et Lagrange, il arriva à Paris, se présenta aux examens de Polytechnique et il fut admis. Après l'école, il obtint une chaire de mathématique à Lyon. Il publia des ouvrages de mathématiques dont une Théorie des Courbes et des Surfaces du Second Ordre "avec l'aide de Lagrange et dédiée à celui-ci" (1810). Entre temps il avait été appelé comme répétiteur-adjoint à l'École Polytechnique qu'il quitta mécontent d'avoir été évincé lors de l'attribution de la chaire dont il assurait les enseignements. Grâce à l'appui de Lagrange, il obtint finalement une chaire de mathématiques au Prytanée de la Flèche dont le cours de mathématique (division d'artillerie) avait été élevé au niveau de celui de Polytechnique. Ce sont précisément les notes préparées pour ce cours qui devaient constituer les Elémens de Calcul Différentiel dont la première édition parut en 1813. Sous la Restauration, il abandonna toute fonction dans l'enseignement des mathématiques pour se consacrer à la

littérature. Il assura alors le cours de littérature de La Harpe à l'Athénée. Il mourut à Paris en 1848.

Dans sa biographie de 1846, la Théorie des Courbes est présentée comme une introduction aux Éléments tandis que les Éléments de Mécanique publiés en 1815 seraient la suite. Les révisions auxquelles procéda Boucharlat dans les éditions ultérieures montrent en tous cas que l'intérêt de Boucharlat pour les mathématiques n'était pas lié à son emploi de professeur de mathématique mais à un véritable penchant intellectuel.

Hermann Laurent né en 1841 était le fils du chimiste Auguste Laurent ⁴. Il sortit de l'Ecole Polytechnique en 1862. Il se fit recevoir en 1865 docteur ès sciences mathématiques avec deux thèses intitulées De la continuité dans les séries et Sur les lignes isothermes et fut nommé, l'année suivante, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique. Après avoir repris du service lors de la guerre de 1870, il quitta de nouveau l'armée, en 1872, mais il devait conserver toute sa vie ses fonctions de répétiteur à l'École Polytechnique. A partir de 1883, il y ajouta celle d'examineur d'admission et à partir de 1889, il fut en outre professeur de mathématiques à l'Institut Agronomique. Il mourut en 1908. Hermann Laurent a eu une production intellectuelle de premier rang: il écrivit de nombreux articles dans le Journal de Liouville, les Comptes rendus de l'Académie des Sciences etc. Il publia également plusieurs ouvrages de mathématiques parmi lesquels nous examinerons particulièrement un Traité d'Analyse en 7 volumes (1885-91) qui permet de mieux situer les révisions qu'il introduisit dans la 9^o édition de Boucharlat. Il s'intéressa également à la statistique et aux mathématiques financières et de là à l'économie politique. C'est ainsi qu'il fut en relation avec Léon Walras et publia en 1902 un Petit traité d'économie politique mathématique, conformément aux préceptes de l'École de Lausanne ⁵. S'il n'est pas crédité de performances exceptionnelles, il s'agit donc

néanmoins d'un auteur très représentatif des mathématiques dans le dernier quart du XIX^e siècle en France. Cette dernière précision n'est d'ailleurs pas restrictive: H. Laurent dans son Traité d'Analyse cite Weierstrass dont il "traduit textuellement" la démonstration que la fonction:

$$f(x) = \cos \pi x + b \cos a \pi x + \dots + b^n \cos a^n \pi x + \dots$$

quoique continue n'a pas de dérivée. H. Laurent ajoute une note à sa traduction de Weierstrass précisant que "ces lignes ont été écrites il y a plusieurs années, à une époque où beaucoup de géomètres refusaient d'admettre les conclusions précédentes qui semblent généralement admises aujourd'hui. C. Méray, ce mathématicien français qui revendique au même titre que G. Cantor, Weierstrass ou Dedekind l'invention de la définition moderne des nombres devait féliciter H. Laurent de la précocité de son "ralliement".⁶

Si l'oeuvre de Marx est suffisamment connue pour qu'il soit inutile de le présenter, il n'en allait pas de même du Marx mathématicien, jusqu'à la publication des Manuscripts Mathématiques. Nous indiquerons simplement ici que l'on a trouvé dans ses manuscrits un millier de pages environ consacrées aux mathématiques et rédigées de façon échelonnée de 1846 ou au moins de 1852 à sa mort en 1883. Dans ces recherches, certains ont voulu voir des travaux préparatoires à l'économie, il semble néanmoins que Marx témoignait d'un véritable intérêt pour les mathématiques en elles-mêmes sans doute dans le prolongement des textes de Hegel sur le calcul différentiel.

II) L'histoire du Calcul Différentiel:

Avant d'examiner les concepts du calcul différentiel chez Boucharlat, il est intéressant de lire soigneusement sa courte préface dans laquelle il présente une périodisation de l'histoire du calcul différentiel, périodisation sur laquelle Marx devait s'appuyer. Il distingue trois périodes. Il situe, tout d'abord, l'origine chez Newton et Leibniz, inventeurs d'une "analyse bien supérieure à la géométrie de Descartes."

Mais il restait des "mystères". Newton le premier pénétra ce mystère en considérant le calcul différentiel comme la méthode des premières et des dernières raisons des quantités ou autrement comme la méthode des limites de leur rapport. La méthode des limites fut perfectionnée par D'Alembert de sorte qu'elle fut "dégagée de toute considération du mouvement, idée étrangères au calcul différentiel". Enfin, "la méthode de Lagrange complète à son tour celle des limites en rattachant les coefficients différentiels à la pure Algèbre". Dans cette esquisse de l'histoire du calcul différentiel, l'impression dominante est celle d'une ligne directrice très moderne, le passage d'une étape à la suivante étant lié à une "instillation de la rigueur" selon le mot de Kline ⁷, mais la fin de la préface brouille cette image, en effet, pour Boucharlat, "ces trois méthodes n'en forment pour ainsi dire qu'une". C'est là un des points sur lesquels Marx devait s'interroger, rejetant l'éclectisme de Boucharlat pour chercher dans la perspective d'une histoire interne (Lakatos) les raisons de la succession des trois méthodes.

Il n'est pas possible de comparer l'histoire du calcul différentiel de Boucharlat - Marx avec celle de Laurent, car celui-ci a purement et simplement fait disparaître la préface de Boucharlat de son édition des Éléments (la 9^e). Laurent s'est par contre incidemment exprimé sur les origines du calcul différentiel dans sa correspondance avec Walras ou dans des articles de l'Enseignement mathématique. On peut en déduire qu'il partageait l'idée d'une instillation croissante de la rigueur: "Lorsque Leibniz eut créé cet admirable instrument que l'on appelle le calcul différentiel, il fut critiqué injustement, et la preuve est que la notation différentielle est aujourd'hui universellement adoptée, mais les critiques qu'on lui adressait avait leur raison d'être."⁸

Mais avant d'établir une périodisation de l'histoire du calcul différentiel et l'articulation des différentes conceptions, il convient d'examiner un à un les concepts du calcul différentiel pour apercevoir le mouvement qui peut relier les différentes approches. Pour cela, il nous est apparu préférable de donner directement à lire la présentation de

Boucharlat du calcul différentiel avant de la confronter aux lectures de Marx et de Laurent, d'une part, et à l'évolution du calcul différentiel, d'autre part.

III) Les concepts de fonction et de limite:

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

II

DE CALCUL INTÉGRAL.

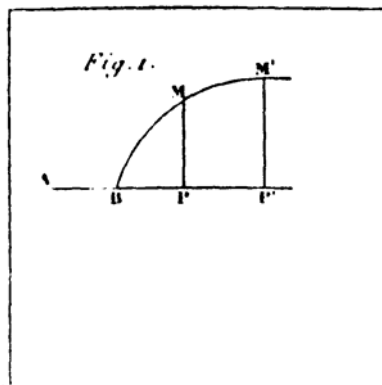
CALCUL DIFFÉRENTIEL.

De la différenciation des quantités algébriques.

1. On dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, lorsque la première est égale à une certaine expression analytique composée de la seconde; par exemple, y est une fonction de x dans les équations suivantes :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = x^3 - 3bx^2, \quad y = \frac{x^2}{a}, \quad y = b + cx^2.$$

2. Considérons une fonction dans son état d'accroissement, en vertu de celui de la variable qu'elle renferme : toute fonction d'une variable x pouvant être représentée par l'ordonnée d'une courbe BMM', fig. 1, soient AP = x et PM = y , les coordonnées d'un point M de cette courbe, et supposons que l'abscisse AP reçoive un accroissement PP' = h ; l'ordonnée PM deviendra P'M' = y' . Pour obtenir la valeur de cette nouvelle ordonnée, on voit donc qu'il faut changer x en $x + h$ dans l'équation de la courbe; et



la valeur que cette équation déterminera alors pour y sera celle de y' .

Par exemple, si l'on avait l'équation $y = mx^2$, on obtiendrait y' en changeant x en $x + h$ et y en y' , et l'on aurait

$$y' = m(x + h)^2,$$

ou, en développant,

$$y' = mx^2 + 2mxh + mh^2.$$

3. Prenons maintenant l'équation

$$y = x^3 \dots (1),$$

et supposons que y devienne y' lorsque x devient $x + h$; nous aurons donc

$$y' = (x + h)^3;$$

et, en exécutant l'opération indiquée,

$$y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

si de cette équation nous retranchons l'équation (1), il restera

$$y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3;$$

et en divisant par h ,

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \dots (2).$$

Voyons ce que ce résultat nous apprend: $y' - y$ représente l'accroissement de la fonction y en vertu de l'accroissement h donné à x , puisque cette différence $y' - y$ est celle du nouvel état de grandeur de y à son état primitif.

D'une autre part, l'accroissement de x étant h , il suit de là que l'expression $\frac{y' - y}{h}$ est le rapport de l'accroissement

de la fonction y à celui de la variable x . En considérant le second membre de l'équation (2), on voit que ce rapport diminue d'autant plus que h diminue, et que lorsque h devient nul, ce rapport se réduit à $3x^2$.

Ce terme $3x^2$ est donc la limite du rapport $\frac{y' - y}{h}$: c'est vers ce terme qu'il tend lorsqu'on fait diminuer h .

J.L. Boucharlat, 51,2,3,
pp.1,2,3, 3^e éd., 1826
(identiques dans la 9^e éd., 1891)

Les formulations de Boucharlat sont très caractéristiques des mathématiques du début du XIX^e siècle. Ainsi, la définition de la fonction reste très voisine de celle donnée par Bernoulli en 1718: "On appelle ici Fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes" reprise par L. Euler en 1730 qui devait la développer en 1748 "expression analytique formée de la variable et de constantes" ⁹ . En particulier, il ne distingue pas entre la fonction (relation entre deux variables dont l'une dépend de l'autre) et la variable dépendante: dans $y = f(x)$ la "fonction", pour Boucharlat, est "y" et non pas "f()".

Marx s'est intéressé à l'évolution du concept de fonction et dans les MM (édition de 1968) figurent la traduction/ transposition en allemand de l'histoire du concept qu'il avait trouvée dans le Traité de Lacroix (1810) ainsi qu'une analyse du concept de fonction après l'usage fait par Lagrange. Lacroix ne mentionnait pas de mathématicien particulier dans son esquisse historique, mais présentait les "développements" successifs du concept depuis les "anciens Analystes (qui) comprenaient en général sous la dénomination de fonction d'une quantité toutes les puissances de cette quantité" (Lacroix, 1810, p.1) jusqu'aux fonctions algébriques et transcendantes. Lacroix s'intéressait en particulier au développement d'une fonction en série qu'il confrontait à la valeur d'une fonction, une distinction qui témoigne de la dissociation entre "y" et "f()" ¹⁰ . Marx a tenté de théoriser cette distinction en opposant fonction de x et fonction en x: la première désignant la dépendance de y vis-à-vis de x, la seconde une pure expression de x. Il a précisément relevé la généralisation supplémentaire dans ce domaine opérée par Lagrange et la confusion ultérieure des acceptions du terme. Il note en effet que:

Pour Lagrange, au contraire, l'expression $f(x)$, aussitôt qu'elle se trouve dans la partie gauche de l'expression algébrique en x, ne désigne que

l'expression générale, d'où indéterminée par opposition à l'expression particulière; et $f(x+h)$ le sens de l'expression générale non développée par opposition à son expression développée du développement en série, comme par ex. en algÈbre, $(x+a)^m$ (est) l'expression générale non développée tandis que l'on trouve dans la partie droite la série $x^m + \text{etc.}$

Cela est tout à fait satisfaisant et approprié dans certains cas bien déterminés, mais la distinction entre fonction de x et fonction en x ne peut pas encore être vidée de son contenu parce qu'elle seule inclut que la fonction de x peut avoir une existence concrètement différenciée de la fonction en x comme par exemple celle de l'ordonnée si x est l'abscisse (...). (Marx, 1968, pp.502-4)

Mais si la distinction proposée visait à clarifier les "confusions" entre les acceptions multiples du mot fonction, il ne semble pas avoir relevé d'application dans le calcul différentiel où il utilise une formule elliptique "fonction x ".

Pour Laurent, on relèvera tout d'abord qu'il reprend sans modification dans la 9^e édition de Boucharlat la formulation donnée initialement par celui-ci. Par contre dans son Traité d'analyse, il a cru nécessaire de commencer par quelques développements sur la définition du terme fonction. Après avoir signalé que le terme a vu ses acceptions changer, il donne "la définition plus précise qui (lui) semble adoptée et qu'il va adopter dans ce qui va suivre: Deux quantités sont fonctions l'une de l'autre quand l'une restant constante, l'autre reste constante aussi." (Laurent, 1881, p.1). Cette définition semble directement inspirée de celle de Cauchy dont Laurent s'est toujours proclamé le disciple; en effet Cauchy présente les fonctions de la façon suivante:

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante; et

les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. (Cauchy, 1829, p.5)

Laurent signale lui-même quelques uns des inconvénients de sa propre définition dont on peut relever qu'elle efface la distinction entre variables dépendante et indépendante et accroît encore la confusion. C'est cette situation que visait Frege en 1891 dans un exposé intitulé "Fonction et concept" quand il déclarait que la définition habituelle de la fonction "n'était pas satisfaisante parce qu'il n'y avait pas de distinction entre la forme et le contenu entre le signe et le signifié, une erreur fréquemment rencontrée dans les textes mathématiques y compris ceux qui émanent d'auteurs sérieux"¹¹.

Cette imprécision se retrouve dans la définition de la limite que nous trouvons au paragraphe 3. Mais ici la délimitation des concepts a des conséquences immédiates sur la mise en oeuvre du calcul différentiel. C'est Newton qui avait introduit l'idée de limite à l'aide de ce que Marx appelait une "hypothèse métaphysique et non mathématique". Newton se défendait contre ceux qui objectaient au "principe des premières & des dernières raisons" en précisant qu'il fallait entendre par "dernière vitesse d'un corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle son mouvement cesse." ¹² Tout le mystère semble résider dans cet instant où le mouvement cesse. Plus précisément, si l'on donne comme le fait Boucharlat à une variable indépendante x un accroissement h et que l'on fasse tendre $x+h$ vers x , "h devient nul" signifie-t-il autre chose que "la "limite" est atteinte pour $h=0$ "? On sait que le projet de Lagrange était précisément de fonder le calcul différentiel en se passant des quantités évanouissantes, des limites et des infiniment petit càd en se plaçant résolument au point $h=0$. Là-dessus il semble bien que la synthèse opérée par

Boucharlat ait été purement verbale: il utilise le terme de limite mais en réalité il se place dans la perspective de Lagrange et "h devient nul" signifie simplement: $h=0$.

Cette "ambiguïté" de la notion de limite chez Boucharlat fut le point de départ de la critique marxienne. Marx relève, en effet, dans le cas de x^3 que:

$$\frac{(x+h)^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2$$

Alors, si l'on raisonne sur le membre droit, plus h décroît, plus (3 hx + h²) décroît, - c'ad aussi que la valeur de tout le membre droit (3x² + 3 hx + h²) se rapproche sans cesse de la valeur 3x², il nous faut, cependant, ajouter: sans jamais pouvoir coïncider avec cette valeur. (...) En ce sens, 3 x² est la valeur-limite de la série 3 x² + 3 hx + h². (...)

Mais dès que nous posons h =0, les termes du membre droit s'évanouissent, 3x² est maintenant la dérivée première de x³, c'ad = f'(x). En tant que f'(x), elle indique que l'on peut encore en dériver f''(x) (...) et ainsi que l'accroissement f'(x) n'est pas égal à la somme des accroissements que l'on peut développer à partir de f(x) = x³. En ce sens, cependant, la série développée des accroissements serait aussitôt que je l'interromps la valeur-limite de son développement, (...).Cela n'a absolument rien à voir avec la valeur limite dans le premier sens. (Marx, 1985, pp.220-1)

C'est cette ambiguïté de l'usage post-lagrangien du concept de limite qui amènera Marx à le rejeter estimant qu'il était trompeur et induisait constamment en erreur. Plus profondément, on peut voir là une conséquence du souci de Marx de traiter de l'infini car, d'une part, il insiste sur la possibilité qu'a h de décroître de façon illimitée et d'autre part, Marx veut effectivement raisonner en posant $h=0$ c'ad maîtriser l'infini actuel. En ce sens, on peut penser qu'il n'aurait pas été satisfait par le raisonnement de

Cauchy, même s'il l'avait connu, ce qui ne semble pas avoir été le cas. Il aurait, sans doute, apprécié la manière dont Cauchy précisait le concept de limite, mais évitait, ainsi, de traiter de quantités infinies

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. (Cauchy, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, Bure, 1829, p.11.)

Parvenus à ce point de l'examen des concepts du calcul différentiel, il peut être utile de vérifier qu'il ne s'agit pas d'une querelle de mots, mais que la mise en oeuvre des différents concepts induit des différences sensibles dans les démonstrations dont certaines peuvent être erronées. Nous avons retenu à cet effet l'étude de $\frac{\sin h}{h}$ par Boucharlat, une étude qui avait attiré l'attention de Marx.

DES DIFFÉRENTIELLES DES SINUS, COSINUS ET AUTRES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES, OU DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

32. L'arc est plus grand que le sinus et plus petit que la tangente.

Pour le démontrer, soit AB (fig. 2) un arc qui a BE pour sinus et DA pour tangente, et prenons l'arc AB' égal à l'arc AB. En considérant la corde BB' comme une ligne droite, on en tire la conséquence qu'elle est plus courte que l'arc BAB'. Donc la droite BE, moitié de la corde BB', est plus courte que l'arc BA, moitié de l'arc BAB'; d'où il résulte que le sinus est moindre que l'arc.

Pour démontrer que la tangente est plus grande que l'arc, nous avons

$$\text{aire du triangle DD'C} > \text{aire du secteur BAB'C}$$

ou, en mettant les expressions géométriques de ces aires,

$$DD' \times \frac{1}{2} AC > \text{arc BAB}' \times \frac{1}{2} AC;$$

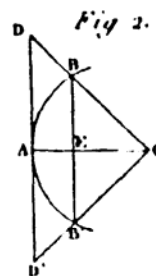
supprimant $\frac{1}{2} AC$ de part et d'autre, il reste

$$DD' > \text{arc BAB}'$$

et, en prenant la moitié, on a

$$DA > \text{arc BA}.$$

33. Il résulte de ce qui précède que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité; car, lorsque l'arc h représenté par AB devient nul, le sinus se confondant avec la tangente, à plus forte raison le sinus se confond avec l'arc qui est compris entre la tangente et le sinus; par conséquent on a, dans le cas de la limite, $\frac{\sin h}{\text{arc } h}$, ou plutôt $\frac{\sin h}{h} = 1$.



Boucharlat-Laurent, §32
(identique au §39, 3^e éd.)

L'ambiguïté qui entoure la notion de limite permet ici d'escamoter le passage de h tendant vers 0 à $h=0$. On peut trouver une confirmation *-a contrario-* du rôle joué par l'ambiguïté de la définition de la limite en considérant les précautions dont s'entoure Cauchy pour procéder à la même démonstration:

Les limites dont s'approchent indéfiniment les 2 expressions variables $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ et $(1 + \alpha)^\alpha$ tandis que α converge vers zéro, se présentent sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$ et pourtant les deux limites ont des valeurs fixes que l'on peut calculer comme suit. On a évidemment pour de très petites valeurs numériques de α :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$$

Par conséquent, le rapport $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ toujours compris entre les quantités

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \cos \alpha$$

dont la première sert de limite à la seconde, aura lui-même l'unité pour limite". (Cauchy, 1829, pp.1, 2.)

Il est frappant de constater que les précautions déployées ici par Cauchy semblent avoir totalement échappées à H. Laurent qui reprend totalement les trois premiers paragraphes du Boucharlat, ainsi que le paragraphe consacré à la limite de $\frac{\sin h}{h}$.

IV) Dérivée et différentielle:

C'est dans le paragraphe 4 que Boucharlat introduit les concepts de dérivée et de différentielle. Nous reproduisons ci-dessous intégralement ce paragraphe dans l'édition de 1826 (colonne de droite) et dans l'édition révisée par H. Laurent (colonne de droite).

On peut relever ici une révision par Laurent qui écarte ce que la synthèse opérée par Boucharlat entre la méthode de Lagrange et celle des limites avait de plus obscur: il est clair ici que, pour Boucharlat, h devient nul effectivement quand il diminue. Au contraire, Laurent sans introduire explicitement les limites au sens de Cauchy donne une formulation qui n'est pas incompatible avec elles.

4. Dans l'hypothèse de $h = 0$ l'accroissement de y devenant aussi nul, $\frac{y' - y}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, et par conséquent l'équation (2) devient

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \dots (3).$$

Cette équation n'a rien d'absurde, parce que l'Algèbre nous apprend que $\frac{0}{0}$ peut représenter toutes sortes de quantités. D'ailleurs on conçoit que puisqu'en divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre, cette fraction ne change pas de valeur, il en résulte que la petitesse des termes d'une fraction n'influe en rien sur sa valeur, et que par conséquent elle peut rester la même lorsque ses termes sont parvenus au dernier degré de petitesse, c'est-à-dire sont devenus nuls.

La fraction $\frac{0}{0}$ qui se trouve dans l'équation (3), est un symbole qui a remplacé le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable: comme ce symbole ne laisse aucune trace de cette variable, représentons-le par $\frac{dy}{dx}$:

alors $\frac{dy}{dx}$ nous rappellera que la fonction était y et que la variable était x . Mais dy et dx ne seront pas moins des quantités nulles, et nous aurons

1..

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \dots (4).$$

$\frac{dy}{dx}$ ou plutôt sa valeur $3x^2$ est le coefficient différentiel de la fonction y .

Remarquons que $\frac{dy}{dx}$ étant le signe qui représente la limite $3x^2$ [comme le montre l'équation (4)], dx doit toujours être placé sous dy . Cependant, pour faciliter les opérations de l'Algèbre, on peut momentanément faire évanouir le dénominateur de l'équation (4), et l'on a $dy = 3x^2 dx$. Cette expression $3x^2 dx$ est ce qu'on appelle la différentielle de la fonction y .

4. On a souvent besoin en Analyse de trouver la limite du rapport de l'accroissement $y_1 - y$ que prend une fonction à l'accroissement correspondant h de sa variable: on lui donne le nom de *dérivée* ou de *coefficient différentiel*.

Ainsi la *dérivée d'une fonction* est la limite du rapport de l'accroissement que prend la fonction à l'accroissement correspondant de sa variable, lorsque ce dernier tend vers zéro.

On représente la dérivée d'une fonction y de x par la notation $\frac{dy}{dx}$, notation expressive qui rappelle que y est la fonction, que x est la variable, et que l'on a pris un rapport d'accroissements relatifs à chacune de ces quantités.

Remarquons que, $\frac{dy}{dx}$ étant le signe qui représente la limite $3x^2$, dx doit toujours être placé sous dy . Cependant, pour faciliter les opérations de

l'Algèbre, on peut momentanément faire évanouir ce dénominateur dx , et l'on a $dy = 3x^2 dx$. Cette expression $3x^2 dx$ ou dy est ce qu'on appelle la *différentielle* de la fonction y ; dx est alors arbitraire et dy n'est autre chose que le produit de dx par la dérivée de la fonction. On peut donc donner de la différentielle d'une fonction la définition suivante:

La *différentielle d'une fonction* est le produit de la dérivée de la fonction par une quantité arbitraire que l'on désigne par dx .

Il va sans dire que, si l'on prend $dx = 1$, dy se réduit à la dérivée même de y .

Boucharlat-Laurent, §4

Marx a cité à différentes reprises ce passage de Boucharlat qui semble avoir attiré son attention sur la nature de la différentielle. En effet, il a été particulièrement choqué par la façon dont est présentée la séparation du numérateur et du dénominateur dans le rapport $\frac{dy}{dx}$. Il écrit: "Ainsi, "pour faciliter les opérations algébriques" introduit-on une formule dont la fausseté est démontrée que l'on baptise différentielle." (Marx, 1985, p.133)

C'est cette insuffisance qui va conduire Marx à préciser sa propre conception du calcul différentiel. Pour cela, il va comparer soigneusement le calcul de la dérivée d'une fonction d'une seule variable indépendante dans deux cas:

a) le cas simple: $y = f(x)$

b) la fonction composée: $y = u * z$ avec: $u = f(x)$

$$z = g(x)$$

Dans le calcul de la dérivée de $y = f(x)$, il vient: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

or dans cette expression, $\frac{dy}{dx}$ n'est qu'un symbole, un signe qui représente $\frac{0}{0}$. et Marx utilise des images: "uniforme d'apparat", "habit du dimanche". En même temps, il relève l'absence dans le membre droit de l'équation de symbole propre au calcul différentiel indiquant des opérations à effectuer.

Au contraire, dans le second cas, Marx présente la différentiation de la façon suivante:

$$y' = u' * z'$$

$$y' - y = u' * z' - u * z = z' (u' - u) + u (z' - z)$$

$$\frac{y' - y}{x' - x} \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z' \frac{u' - u}{x' - x} + u \frac{z' - z}{x' - x} = z' \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Posant alors dans le membre droit, $x' = x$, Marx en tire:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

ou, en chassant le dénominateur:

$$dy \text{ ou } d(uz) = z du + u dz$$

En analysant la légitimité de ces opérations, Marx insiste sur la différence de nature entre $\frac{dy}{dx}$ qui est l'expression symbolique de $f'(x)$ dans les deux cas et les $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$. Ceux-ci apparaissent ainsi comme des "coefficients différentiels symboliques sans coefficients différentiels réels, c'est-à-dire sans "dérivées" équivalentes correspondantes. Le coefficient symbolique devient ainsi un point de départ indépendant dont l'équivalent réel est à trouver d'abord.(...) Alors que, primitivement, le coefficient différentiel est l'expression de la dérivée déjà effectuée, il joue, à présent, le rôle de symbole d'opérations de différentiation à effectuer." Pour Marx, ce "renversement de la méthode" marque véritablement la naissance du calcul différentiel "qui opère dès lors de façon indépendante sur son propre domaine car ses points de départ, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sont des grandeurs mathématiques qui n'appartiennent qu'à lui et qui le caractérisent." (Marx, 1985, pp. 129-30)

Marx examine, ensuite, la séparation entre dx et dy et la définition de la différentielle en distinguant toujours les deux mêmes types de fonction de x . Il affirme, tout d'abord, que dans le premier cas, la séparation est légitime dès lors que la substitution de dx à $(x' - x)$ fait perdre à cette dernière "la forme qui la manifeste en tant que différence évanouie de la variable indépendante et de même pour dy (...). Quelle que soit la place maintenant où se trouve désormais dx , un tel changement de localisation laisse inchangé le rapport entre dy et lui; $dy = f'(x) dx$ nous apparaît comme une autre forme de $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et est toujours susceptible d'être écrite sous cette forme."

Or, poursuit-il, on a vu dans le second cas que les coefficients différentiels se transformaient en "points de départ indépendants" ou en "symboles d'opérations" et de même, "les équations symboliques se transforment en équations d'opérations symboliques. Ainsi, nous sommes fondés à un double titre à traiter la différentielle $dy = f'(x) dx$ comme une équation symbolique d'opération. (..) Si l'opération différentielle sur

$f(x)$ désignée par $df(x)$ est effectuée, le résultat sera $dy = f'(x) dx$ et cela donne finalement $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Et Marx conclut que "ce n'est qu'à partir du moment où la différentielle fonctionne comme point de départ du calcul que le renversement de la méthode de différentiation algébrique est achevé et qu'alors le calcul différentiel apparaît lui-même comme une méthode de calcul, spécifique, tout à fait particulière sur des grandeurs variables". (Marx, 1985, p.134).

Ce texte de Marx de 1881 fait suite à différentes ébauches et reflète la conception du calcul différentiel à laquelle il était parvenu. C'est la conception de la différentielle qui a surtout retenu l'attention des commentateurs mais il n'est pas sans intérêt de relever que, pour Marx le calcul différentiel est véritablement fondé à partir du moment où la différentielle est conçue comme un symbole d'opération. Aussi avant d'insister sur la similitude entre cette conception et celle d'autres mathématiciens, il faut noter que c'est précisément la démarche adoptée par Cauchy dans son livre de 1829. Cauchy définit et étudie d'abord les limites dans des "Preliminaires", puis, il commence sa "1^o Leçon" sur "l'objet du calcul différentiel" par une pré-définition de la différentielle:

x, y, z, ... étant des variables assujetties à vérifier une ou plusieurs équations données, on appelle différentielle de x, de y, de z... et l'on désigne au moyen de la lettre caractéristique d par les notations:

$$dx, dy, dz$$

des quantités dont les rapports sont équivalents aux dernières raisons des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément ces variables. L'objet du calcul différentiel est déterminé les rapports des différentielles dx, dy, dz, ... quand on connaît les relations qui existent entre les variables, x, y, z, ...; (...)

"Pour fixer les idées", Cauchy étudie alors le cas: $y = f(x)$.

Si la fonction $f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x et si l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produira un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Donc, si l'on pose alors $x = i$, les deux termes du rapport aux différences

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative, qui sera la dernière raison des différences infiniment petites Δy et Δx . Cette limite, ou cette dernière raison, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x . (..) La forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de fonction dérivée, (..)

Cela posé, les différentielles dx , dy de la variable indépendante x et de la fonction $y = f(x)$ seront les quantités tellement choisies que leur rapport $\frac{dy}{dx}$

coïncide avec la dernière raison des quantités infiniment petites Δy , Δx c'est à dire avec la limite $y' = f'(x)$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.. Ces différentielles seront donc

liées entre elles par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \text{ou} \quad dy = y' dx$$

que l'on peut aussi présenter sous l'une des formes

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad df(x) = f'(x) dx$$

(Cauchy, 1829, pp.17-8)

La démarche de Cauchy illustre bien le renversement qui s'opère dans le calcul différentiel et que Marx avait pressenti. La question se pose alors de savoir si Marx avait connaissance des travaux de Cauchy ou de travaux du même type. Rien ne permet de supposer qu'il ait lu Cauchy pourtant on peut penser qu'il en était au moins informé. En effet, sur une liste de livres que Marx se proposait de consulter figure les Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L Cauchy par l'abbé Moigno (Paris, Bachelier, 1840). Mais la fidélité de l'abbé Moigno à Cauchy connaît de singulière éclipses: tout d'abord, on ne retrouve pas chez Moigno le soin apporté par Cauchy à définir dans ses "Preliminaires" la limite d'une variable ou les infiniment petits. Moigno définit de façon vague ces derniers et pour la limite, il se contente d'indiquer qu'on "appelle en général limite d'une fonction, la valeur vers laquelle elle converge lorsque la variable dont elle dépend converge elle-même vers une valeur déterminée". (Moigno, 1840, p.3). Ensuite, Moigno s'est explicitement écarté de Cauchy précisément sur la question de la définition de la différentielle. Il écrit dans son "Introduction":

M. Cauchy a cru dans ces dernières années, devoir donner de la différentielle une définition directe, immédiate, indépendante de la considération des fonctions dérivées. Se rapprochant des idées de Maclaurin et de D'Alembert e, il appelle différentielles des quantités dont les rapports sont équivalents aux dernières raisons des accroissements que peuvent prendre simultanément les variables. En partant de cette définition on peut calculer les différentielles sans passer par les dérivées (...) mais je n'ai pas voulu la prendre comme point de départ (...) j'aurais craint, en l'employant trop tôt de jeter quelques obscurités sur les principes du Calcul différentiel qu'il importait tant d'éclaircir". (Moigno, pp.XX- XXI)

Aussi quand Marx écrit: "Je remarque encore que de l'origine, au XVIII^e siècle, jusqu'à la période contemporaine, mises à part quelques rares exceptions, la tâche générale du

calcul différentiel a habituellement été formulée de la façon suivante: trouver l'équivalent réel du coefficient différentiel symbolique" (Marx, 1985, pp.130-1) peut-être compte-t-il dans les exceptions Cauchy d'après ce qu'il a appris par Moigno.

V) Les différentes conceptions de la différentielles:

En 1928, le mathématicien russe V. Glivenko a signalé la ressemblance entre la conception de la différentielle chez Marx et chez Hadamard. M. Fréchet a consacré un article d'hommage à Hadamard-, dans lequel il a étudié différentes conceptions de la différentielle¹³ . Il peut nous servir à mettre en évidence les imprécisions voire les erreurs dans lesquelles est tombé H. Laurent, faute d'une définition correcte. M. Fréchet indique que:

Supposant connue la définition de la différentielle d'une fonction d'une variable, M. Hadamard a proposé de définir la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, par exemple , $f(x,y)$, comme l'expression classique:

$$(1) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

mais pour lui cette expression n'est qu'un symbole d'opérations: "que signifie, dit-il, l'égalité (1) ? Que si x, y , et dès lors $z = f(x,y)$ sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire u , on a quelles que soient ces expressions

$$(2) \quad \frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du}$$

Tel est le sens unique de l'égalité (1). L'égalité (2) ayant lieu quelle que soit la variable indépendante en fonction de laquelle les deux autres variables sont exprimées,, on supprime la mention de u . "" (M. Fréchet, 1937, pp.233-4)

M. Fréchet relève que "la définition de Hadamard met l'accent sur les propriétés opératoires de la différentielles. D'autres définitions mettent plutôt en évidence sa

propriété de constituer une sorte de partie principale de l'accroissement de la fonction". (Fréchet, 1937, p.235) Nous pouvons justement trouver un exemple de telles conceptions dans le Traité d'analyse de Laurent. H. Laurent, en réalité, manie indifféremment les deux conceptions de la différentielle. En effet, dans son Traité, après un chapitre 3 consacré aux dérivées il aborde successivement dans les chapitres 5 et 6 les différentielles des fonctions d'une variable et celles des fonctions de plusieurs variables. Au chapitre 5, après avoir étudié les "divers ordres d'infiniment petits", il introduit les différentielles de la façon suivante: "Il est avantageux de substituer $f(x) \Delta x$ à $\Delta f(x)$ de telle sorte que l'on a exprimé le besoin de donner un nom à cette quantité $f(x) \Delta x$; on l'appelle la différentielle de $f(x)$ ". Il tire alors du cas où $f(x) = x$, $\Delta x = dx$ et il écrit: $dy = f'(x)dx$; (H. Laurent, 1881, pp.122-3). Par contre, au chapitre 6, il semble se rallier à une définition opératoire écrivant dans le paragraphe I "sur le calcul des expressions symboliques": "On a déjà vu que l'on pouvait représenter par une lettre un symbole d'opération. Ainsi l'opération qui a pour but de prendre la dérivée de φ et de la multiplier par h se représente par $d\varphi$." (ibidem, p.133). Mais finalement, l'idée que la différentielle est la partie principale de l'infiniment petit Δf semble bien plus caractéristiques de la conception de Laurent, comme on le voit précisément dans la présentation de la dérivée d'une fonction composée. Il suppose, pour cela que "dans la fonction $f(x, y, z)$, les variables x, y, z cessent d'être indépendantes, et que y et z soient fonctions de x ; d'après le théorème des fonctions composées, la dérivée de f relative à x , que nous appellerons dérivée totale relative à x sera donnée par la formule (...)

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$$

et il conclut une discussion assez fine des différentes notations différentielles par la remarque: "Il est presque inutile d'ajouter qu'il s'agit d'accroissement infiniment petits et que l'on néglige les termes du second ordre" (ibidem, p.141)

On peut voir dans l'utilisation de cette définition à la différentielle d'une fonction de plusieurs variables les erreurs où elle peut conduire. H. Laurent croit en effet possible d'établir le "théorème fondamental" :

L'accroissement que subit une fonction de plusieurs variables quand on donne des accroissements de même ordre à ses variables est aux infiniment nces petits d'ordre supérieur près, égal à sa différentielle, et par suite dans une limite de rapport, l'accroissement d'une fonction peut être remplacé par sa différentielle sans changer le résultat. (H. Laurent, p.148).

Pourtant à la suite de travaux de différents mathématiciens (Otto Stolz et W.H. Young) de la fin du XIX et début du XX^e, comme l'écrit M. Fréchet ¹⁴

il est facile de voir que même pour des fonctions $f(x,y)$ très simples, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$, c'est à dire $\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y}$ ne tend pas nécessairement vers l'unité de

quelque façon que Δx et Δy tendent vers zéro. (M. Fréchet, 1937, p.235)

Engels a eu des formules ironiques à l'égard des mathématiciens en général après avoir pris connaissance de la lecture critique de l'histoire du calcul différentiel que Marx lui présentait. Elles n'étaient sans doute pas justifiées pour tous les mathématiciens. De même une évaluation globale des travaux mathématiques de Marx demanderait une analyse attentive de son histoire des théorèmes de Taylor et Maclaurin et de leur rôle dans le calcul différentiel.

Mais il est aussi intéressant de rapprocher les préoccupations de Marx de la présentation moderne de la différentielle. Rappelons que:

a) la formule de Taylor approche la différence $f(x+h) - f(x)$ par $f'(x)h$. On appelle la différentielle de f en x , l'application notée $df(x)$:

$$\mathbb{R} \text{ -----} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \text{ -----} \rightarrow df(x)(h) = f'(x)h$$

$df(x)$ est linéaire.

b) on définit alors la différentielle de f comme l'application notée df de \mathbb{R} dans l'ensemble $L(\mathbb{R})$ des applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R} &\text{-----}> L(\mathbb{R}) \\ x &\text{-----}> df(x) \end{aligned}$$

Or, ce qui explique les difficultés rencontrées par les mathématiciens du 19^e siècle (et après) et les confusions dans ce domaine est que :

$$L(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Marx a vu ces difficultés et son souci de la dialectique le disposait à distinguer soigneusement le procès (l'opération de différentiation) du résultat (la dérivée), mais, n'ayant pas à sa disposition l'outil moderne de la théorie des ensembles, il a été conduit à proposer différentes formulations et distinctions (par ex. : les symboles d'opération). Il apparaît cependant que la méthode génétique (histoire des concepts) et dialectique (Marx s'est intéressé aux transformations que provoquait le développement même des différentes approches du calcul différentiel) mérite de retenir l'attention.

Alain Alcouffe, automne 1986.

Université des Sciences Sociales de Toulouse.¹

L'auteur tient à remercier M. J.C. Yakoubsohn, assistant de mathématiques à l'Université Paul Sabatier de Toulouse pour l'aide fournie tant dans la préparation de l'édition française des Manuscrits de Marx que dans la lecture de Boucharlat ou de Laurent, ainsi que pour l'éclairage apporté sur la conception moderne de la différentielle. L'auteur reste, naturellement seul responsable des erreurs éventuelles qui peuvent subsister.

NOTES

¹ L'édition (la plus) complète des Manuscris Mathématiques de Marx a été publiée en 1968, dans une présentation bilingue allemand-russe (Nauka, Moscou). Elle s'efforce de présenter de façon systématique les travaux de Marx, (pour la grande partie, des lectures et critiques d'ouvrages). Les passages les plus élaborés ont été publiés en Allemagne de l'Ouest en 1974, (fac-similé de l'édition de 1968). Des traductions italiennes et anglaises sont parues en 1975 et 1983 avant la traduction française de 1985.

² L. B. Francoeur, Cours complet de mathématiques pures, Paris, Bachelier, (3^e édition, 1828).

³ Nous suivons les biographies assez concordantes de E. Garay de Monglavé (1846), de la Grande Encyclopédie, (1893), du Dictionnaire de Biographie Française (1954)

⁴ Les renseignements biographiques sur H. Laurent sont puisés dans la Grande Encyclopédie (H. Laurent était le responsable des articles mathématiques) et dans la notice nécrologique publiée en 1908 dans L'Enseignement Mathématique.

⁵ L'ouvrage de Laurent a été publié en 1902, Paris, C. Schmid. Les relations entre Laurent et Walras ont été essentiellement épistolaires; cf Correspondence of Léon Walras and related Papers, éditée et annotée par W. Jaffé, N.H. 1965

⁶ cf C. Méray, Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Paris, Gauthier-Villars, 1894. Sur l'histoire des nombres à la fin du XIX^e siècle, cf N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Paris, Hermann, 2^e édition 1969. Sur les rapports entre cette histoire et le calcul différentiel, cf C.E. Edwards, The historical Development of the Calculus, Springer, New-York, Berlin, 1979.

⁷ M. Kline intitule son chapitre consacré au XVIII^e "l'instillation de la rigueur", Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York, Oxford University Press, 1972

⁸ H. Laurent, "Considérations sur l'enseignement des mathématiques dans les classes de spéciales en France" dans L'enseignement mathématique, 1899; (Laurent oppose "la notation des accents de Lagrange, née d'une idée fautive, notation barbare rejetée par tous les peuples civilisés, rejetée par Lagrange lui-même qui n'en a jamais fait usage dans ses mémoires, et la notation des différentielles de Leibniz,

universellement employée, comme étant la plus simple la plus expressive et la plus commode" (p.41) et dans la correspondance Walras-Laurent (in Jaffé, lettre 1452), Laurent écrit à Walras: "Mon opinion est que dans vos théories, il y a encore beaucoup de vague, soit dit sans vous offenser car on ne peut pas plus exiger d'une science telle que la vôtre, plus qu'on n'a exigé des fondateurs du calcul différentiel. Vous avez eu le mérite de poser des problèmes et d'en donner des solutions sans doute imparfaites au point de vue de la rigueur comme l'étaient celles de Leibnitz". La citation du texte est tirée du Petit traité d'économie, 1902, p.3.

⁹ J. Bernoulli, Opera Omnia, t.II, Lausanne et Genève, 1742, p.241, cité dans A.P. Juschkewitsch, "Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis", in Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Akademie-Verlag, Berlin, 1959.

¹⁰ S.F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2^{de} édition, Paris, Courcier, 1810

¹¹ G. Frege, "Funktion und Begriff", repris dans Funktion, Begriff, Bedeutung, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1969.

¹² I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687, trad. franç. de la Marquise du Châtelet

¹³ M. Fréchet, "Sur la notion de différentielle", Journal de Mathématiques Pures et appliquées, juillet-septembre 1937

¹⁴ M. Fréchet cite Otto Stolz et W.H. Young. Il vise sans doute de O. Stolz: "B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", Mathematischen Annalen, XVIII, 1881, 255-279. Les Eléments d'histoire des mathématiques de N. Bourbaki mentionnent différents travaux sur le calcul intégral de W.H. Young publiés en 1911.