

Distances relatives sur $]0, +\infty[$

par Stéphane Junca

IUFM et Université de Nice,

RÉSUMÉ. *Les notions de pourcentages et d'erreurs relatives induisent naturellement sur $]0, +\infty[$ les métriques relatives. Nous présentons quelques propriétés de ces métriques et le rôle central de la distance logarithmique.*

MOTS-CLÉS : *erreur relative, pourcentage, invariance par changement d'échelles, métriques, coordonnées log-log, logarithme, élasticité, accroissements finis relatifs, fonctions sous-additives, suites équivalentes, fonctions relativement lipschitziennes, fonctions puissances, concavité.*

1 Introduction

L'intérêt de la notion de précision relative est bien connue et très utilisée en sciences, notamment par les physiciens, les biologistes, les économistes, les numériciens. Elle est aussi très utilisée dans la vie de tous les jours. Entre 9 Euros et 10 Euros il y a une différence, alors qu'entre 1009 et 1010 Euros tout le monde s'accorde pour dire que, dans la pratique, cela ne change rien. La notation scientifique utilisée par nos calculatrices fait aussi référence à la notion de nombre de chiffres significatifs et donc de précision relative. On pourra se référer par exemple à [2, 7, 8] sur ce sujet.

Une remarque fondamentale sur les pourcentages est qu'ils sont invariants par changement d'échelles. Ceci est très important si l'on veut que les résultats numériques ne dépendent pas du choix de l'unité. Par exemple, en économie on veut avoir accès à des indicateurs indépendants du choix de la monnaie.

Donnons un autre exemple concret. Soient y et x deux variables liées. Quel est le rapport entre le pourcentage d'augmentation de x et le pourcentage de réduction de y ? Ces questions ont été introduites par les économistes au XIX^{ème} siècle. Par exemple quel est le lien entre l'augmentation relative du prix d'un produit et la réduction relative de la demande. Pour répondre à cette question les économistes ont introduit la notion fondamentale d'*élasticité* [3].

Ainsi le lecteur est invité à parcourir quelques résultats mathématiques de ce monde ou "tout est relatif". De voir que l'on peut obtenir des métriques pour formaliser rigoureusement la notion d'erreur relatives. Qu'une de ces métriques joue un rôle fondamentale : la métrique logarithmique. Cette dernière signifiant qu'une erreur relative est l'erreur absolue en coordonnées logarithmiques. Qu'il existe un théorème des accroissements finis relatifs. Et que, l'élasticité est aussi importante dans ce cadre que la notion de dérivée.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la partie 2, à partir de la notion d'erreur relative : $\frac{\Delta x}{x}$, on définit rigoureusement la notion de distance relative et d'écart relatif. Puis on énonce quelques propriétés. Dans la partie 3, on démontre l'importance des coordonnées logarithmiques. Dans la partie 4, on étudiera le cas d'une métrique issue du calcul de pourcentages : le taux de réduction.

Les résultats énoncés sont proposés en exercice. Le lecteur pourra obtenir des preuves dans [6].

2 Distances et écarts relatifs

Pour définir la notion de distance relative, il faut extraire quelques propriétés remarquables de la notion usuelle d'erreur relative : $\frac{\Delta x}{x}$ où $\Delta x = y - x$.

Premièrement, lorsque x est proche de 1 on retrouve notre distance euclidienne usuelle, $\frac{|\Delta x|}{x} \simeq |\Delta x|$ quand $x \simeq 1$.

Deuxièmement, $y \mapsto \frac{|\Delta x|}{x}$ est strictement monotone sur $]0, x[$ et aussi sur $]x, +\infty[$. Remarquez aussi que $x \mapsto \frac{|\Delta x|}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, y[$ et strictement croissante sur $]y, +\infty[$.

Troisièmement, la quantité $\frac{\Delta x}{x}$ est *invariante par changement d'échelles* :

pour tout $\lambda > 0$, $\frac{\Delta \lambda x}{\lambda x} = \frac{\Delta x}{x}$ où $\Delta \lambda x = \lambda y - \lambda x = \lambda \Delta x$.

Formalisons ces propriétés sous forme d'une définition :

Définition 1 (Métrique relative)

On dit que l'application $d :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$, est une métrique relative si :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, pour tout $x, y \in]0, +\infty[$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, pour tout $x, y, z \in]0, +\infty[$,
4. $d(1, 1 + h) \sim |h|$ quand h tend vers 0.
5. Pour tout $y \in]0, +\infty[$, $x \mapsto d(x, y)$ est strictement monotone sur les intervalles de $]0, +\infty[-\{y\}$.
6. $d(\lambda x, \lambda y) = d(y, x)$, pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, et tout $\lambda > 0$,

Les propriétés 1., 2., et 3. définissent classiquement une métrique. Si une métrique de $]0, +\infty[$ vérifie en plus la propriété 6. on dira qu'elle est invariante par changement d'échelles. La propriété 4., qui s'écrit aussi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1, 1 + h)}{|h|} = 1$, nous redonne la distance euclidienne près de l'unité. La propriété 5. permet de conserver la relation d'ordre usuelle sur $]0, +\infty[$.

Si d ne vérifie pas l'axiome de symétrie 2. et l'inégalité triangulaire 3. on dira que d n'est qu'un *écart relatif*.

Donnons quelques exemples importants :

- $e_x(x, y) := \frac{|y - x|}{x}$, $e_y(x, y) := \frac{|y - x|}{y}$, ne sont que des écarts relatifs.
- $\tau(x, y) := \min \left(\frac{|y - x|}{x}, \frac{|y - x|}{y} \right)$ est une métrique relative.

De plus, si $x < y$ on a $x = y(1 - \tau)$, i.e. le plus petit des écarts relatifs usuels est le taux de réduction de y à x .

- Le plus grand des écarts relatifs $\mathbf{T}(x, y) := \max \left(\frac{|y - x|}{x}, \frac{|y - x|}{y} \right)$ est un écart relatif mais n'est pas une métrique relative !
- la distance logarithmique $\mathbf{dlog}(x, y) := |\ln(y) - \ln(x)| = \left| \ln \left(\frac{y}{x} \right) \right|$ est une métrique relative.

Il faut remarquer que la notion de limite sur $]0, +\infty[$ pour les distances relatives est la même que d'habitude. Il en va de même pour la notion de continuité. En revanche, l'uniforme continuité est une propriété métrique (voir [1]) et non topologique comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1 (Continuité relative uniforme) Soit f une application de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et d une métrique relative sur $]0, +\infty[$ alors f est uniformément continue sur $]0, +\infty[$ par rapport à la métrique d si et seulement si pour toutes suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ on a :

$$u_n \sim v_n \Rightarrow f(u_n) \sim f(v_n).$$

Ce dernier résultat est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 1 (Suites équivalentes) *Soit d une métrique relative de $]0, +\infty[$ alors pour toutes suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ on a l'équivalence :*

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, v_n) = 0. \quad (1)$$

Ceci montre l'importance de la notion de suites équivalentes pour les distances relatives. Ainsi, la fonction carré est uniformément continue par rapport au métrique relative ! En revanche la fonction exponentielle ne l'est pas.

Donnons un premier résultat caractérisant toutes les métriques relatives.

Proposition 2 (Métriques relatives et fonctions sous-additives)

Si d est une métrique relative sur $]0, +\infty[$ alors il existe une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$d(x, y) = F(\mathbf{dlog}(x, y)), \quad \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (2)$$

De plus F vérifie les propriétés suivantes.

1. $F(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,
2. $F(t) = F(-t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
3. $F(s + t) \leq F(s) + F(t)$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,
4. $F(h) \sim |h|$ quand h tend vers 0.
5. F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Réciproquement si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie les propriétés 1., 2., 3., 4., 5. alors une application de $]0, +\infty[^2$ définie par (2) est une métrique relative sur $]0, +\infty[$.

En effet, l'invariance par changement d'échelle (point 6. de la définition 1) nous fournit la fonction F . Ensuite, il suffit de vérifier point par point les propriétés de la définition 1.

Si d n'est qu'une métrique invariante par changement d'échelles alors F ne vérifiera pas le point 4. Si d n'est qu'un écart relatif alors F ne vérifiera pas les points 2. et 3.

Ce premier résultat donne un premier aperçu de l'importance fondamentale de la distance logarithmique.

Donnons quelques exemples et quelques propriétés de ces fonctions F . On notera F_d une telle fonction associée à d .

– Exemple de fonctions F associées à des métriques relatives :

$$F_{\tau}(t) = 1 - e^{-|t|}, \quad F_{\mathbf{dlog}}(t) = |t|.$$

– Exemple de fonctions F associées à des écarts relatifs :

$$F_{e_x}(t) = |e^t - 1|, \quad F_{e_y}(t) = |1 - e^{-t}| = F_{e_x}(-t), \quad F_{\mathbf{T}}(t) = e^{|t|} - 1.$$

Enonçons plusieurs propriétés de ce type de fonctions sous-additives.

Lemme 2 *Soit F de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ .*

– *Si F vérifie les propriétés 1., 2., 3., 4. de la proposition 2 alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$F(t) \leq |t|.$$

Si, de plus, F est additive sur $\mathbb{R}^+ : F(s + t) = F(s) + F(t)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$, alors $F(t) = |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

– *Si φ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , est **concave**, strictement croissante, et si $F(t) = \varphi(|t|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors F vérifie les propriétés 1., 2., 3., 5. de la proposition 2.*

Si de plus φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 1$ alors F vérifie aussi 4.

De ce lemme, on peut déduire facilement que τ est une métrique relative sur $]0, +\infty[$. On peut obtenir ainsi beaucoup de métriques relatives. Par exemple $PM(x, y) := 2 \frac{|x - y|}{x + y}$ est une métrique relative ($F_{PM}(t) = 2 \tanh(|t|/2)$).

3 La distance logarithmique

La distance logarithmique n'est rien d'autre que l'écart absolu en coordonnées logarithmiques. En effet si l'on pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$, $\mathbf{dlog}(x, y) = |X - Y|$. Son rôle central pour mesurer les écarts relatifs apparaît déjà dans la proposition 2. Nous avons aussi le théorème suivant.

Théorème 1 (Caractérisation de la distance logarithmique)

– Pour toutes métriques relatives d on a

$$d(x, y) \leq \mathbf{dlog}(x, y), \quad \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (3)$$

– La métrique logarithmique est la seule métrique relative qui vérifie l'égalité triangulaire :

$$a < b < c \Rightarrow d(a, c) = d(a, b) + d(b, c), \quad \forall a, b, c \in]0, +\infty[. \quad (4)$$

Ce théorème se déduit aisément de la proposition 2 et du lemme 2.

La première propriété signifie que la distance logarithmique est l'enveloppe des métriques relatives. Cette propriété est d'ailleurs naturellement reliée à la deuxième via l'intégration de $\frac{dx}{x}$. Pour l'interprétation en terme d'aires de \mathbf{dlog} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{T} , PM , on pourra se référer à [6, 7].

Pour nous familiariser avec la distance logarithmique, voici quelques propriétés métriques surprenantes par rapport à la métrique usuelle : $(x, y) \mapsto |x - y|$.

Proposition 3 : Propriétés métriques de \mathbf{dlog}

1. $(]0, +\infty[, \mathbf{dlog})$ est complet.
2. Le groupe des isométries de $(]0, +\infty[, \mathbf{dlog})$ est engendré par :
 $x \mapsto \lambda x, \lambda > 0$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$,
3. Les homothéties de rapport $\alpha > 0$ sont les fonctions f telles que $\mathbf{dlog}(f(a), f(b)) = \alpha \mathbf{dlog}(a, b)$. Elles sont toutes de la formes suivantes : $x \mapsto \lambda x^{\pm\alpha}, \lambda > 0$.

Pour l'étude des accroissements relatifs, on utilisera la notion d'élasticité introduite par les économistes.

Définition 2 : Elasticité \mathbf{e}

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$. Si f est dérivable en x , on peut lui associer son élasticité $\mathbf{e}[f]$ au point x définie par :

$$\mathbf{e}[f](x) := x \frac{f'(x)}{f(x)} = x [\ln(f)]'(x). \quad (5)$$

On notera aussi $|\mathbf{e}[f]| := |\mathbf{e}[f]|$.

Remarquez que l'élasticité est invariante par changements d'échelle sur x et $f(x)$:

$$\mathbf{e}[x \mapsto \lambda f(\mu x)](x) = \mathbf{e}[f](\mu x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu, x > 0.$$

De plus, elle transforme le produit en somme :

$$\mathbf{e}[f \times g] \equiv \mathbf{e}[f] + \mathbf{e}[g]. \quad (6)$$

Donnons quelques exemples classiques d'élasticité :

- $\mathbf{e}[x \mapsto x^\alpha] \equiv \alpha$,
les fonctions puissances sont d'ailleurs les seules fonctions d'élasticité constante.
- $\mathbf{e}[\exp] \equiv id$, où id est la fonction identité.

Le résultat élémentaire suivant est fondamental pour étudier l'accroissement relatif des valeurs d'une fonction régulière. D'ailleurs ce résultat reste vrai pour toutes les métriques relatives.

Lemme 3 : dérivée logarithmique

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$. Si f est dérivable en x alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{dlog}(f(x+h), f(x))}{\mathbf{dlog}(x+h, x)} = |\mathbf{e}|[f](x)$

Enonçons une égalité fondamentale.

Théorème 2 (Égalité des accroissements logarithmiques)

Soient $0 < a < b$, $f \in C^0([a, b],]0, +\infty[)$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\mathbf{dlog}(f(a), f(b)) = |\mathbf{e}|[f](c) \mathbf{dlog}(a, b). \quad (7)$$

Pour l'obtenir, il suffit de se placer en coordonnées logarithmiques et d'appliquer le théorème des accroissements finis usuel. En effet, $y = f(x)$ s'écrit $Y = F(X)$ avec $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ et $F = \ln \circ f \circ \exp$. Et il ne reste plus qu'à dériver F comme la composée de trois fonctions :

$$F'(X) = \mathbf{e}[f](x). \quad (8)$$

Donc, lorsque l'on représente la courbe de f en coordonnées log-log, i.e. on représente le graphe de F , en un point $(X, F(X))$ du graphe, la pente de la tangente n'est rien d'autre que l'élasticité de f au point x .

En appliquant le théorème des accroissements finis usuel à F on obtient l'égalité des accroissements finis logarithmiques : il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = \mathbf{e}[f](c)(\ln(b) - \ln(a)). \quad (9)$$

Ainsi, on peut contrôler les écarts logarithmiques des images en fonction de l'élasticité de f et des écarts logarithmiques des antécédents. On a un outil puissant pour obtenir des fonctions lipschitziennes par rapport à la métrique logarithmique.

On utilisera la notation suivante pour l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport L par rapport à une métrique d :

$$\begin{aligned} f \in \text{L-Lip}(d) & \quad \text{si } d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \text{ pour tout } x, y > 0, \\ \text{Lip}(d) & := \bigcup_{L > 0} \text{L-Lip}(d) \end{aligned}$$

$x \mapsto x^L$ est le prototype de fonction de $\text{L-Lip}(\mathbf{dlog})$. On a d'ailleurs le résultat direct suivant :

Proposition 4 $f \in \text{L-Lip}(\mathbf{dlog})$, si et seulement si pour tout $0 < x < y$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-L} \leq \frac{f(y)}{f(x)} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^L. \quad (10)$$

4 Le taux de réduction

Le taux de réduction mérite un traitement spécial car il est très utilisé dans la vie courante, en technologie, en sciences, ... De plus τ est une métrique relative. On peut montrer qu'il a de nombreuses propriétés similaires à \mathbf{dlog} . Ainsi τ possède les mêmes isométries que \mathbf{dlog} . En revanche les seules homothéties de τ sont de rapport 1 ou 0.

L'étude de $\text{Lip}(\tau)$ mérite attention. Commençons par un exemple en donnant les meilleures constantes de Lipschitz :

$$x \mapsto x^\alpha \in \text{L-Lip}(]0, +\infty[,]0, +\infty[; \tau) \text{ et } L = \begin{cases} |\alpha| & \text{si } |\alpha| \geq 1 \\ 1 & \text{si } 0 < |\alpha| \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Ainsi la fonction racine carrée qui était une homothétie de rapport 1/2 pour \mathbf{dlog} est une fonction lipschitzienne de rapport 1 pour τ .

On peut d'ailleurs généraliser ces propriétés des fonctions puissances avec des puissances positives.

Proposition 5 (Lip(τ), concavité, convexité et croissance)

1. Si $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est concave alors f est croissante, $f \in \text{L-Lip}(\tau)$ et $L \leq 1$.

Plus précisément, sa constante de Lipschitz optimale est : $L := 1 - \frac{f(0+)}{f(+\infty)}$

avec les conventions : $f(0+) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $f(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\frac{1}{+\infty} := 0$.

2. Si $f \in C^1(]0, +\infty[,]0, +\infty[)$ est convexe et croissante alors $f \in \text{Lip}(\tau)$ si et seulement si $\mathbf{e}[f]$ est bornée. Dans ce dernier cas, $\sup_{x>0} |\mathbf{e}[f](x)|$ est sa constante de Lipschitz optimale.

Plus généralement, on peut montrer facilement que :

Lemme 4 $f \in \text{L-Lip} \iff \forall x < y, \frac{\min(f(x), f(y))}{\max(f(x), f(y))} \geq 1 - L \left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

On peut en déduire ainsi la proposition suivante :

Proposition 6 (Comportement du type des fonctions puissances en 0 et $+\infty$)

Soit $f \in C^1(]0, +\infty[,]0, +\infty[)$, si $f \in \text{L-Lip}(]0, +\infty[, \tau)$ alors le graphe de $x \mapsto f(x)/f(1)$ est compris entre celui de $x \mapsto x^L$, et celui de $x \mapsto x^{-L}$:

$$\begin{aligned} f(1)x^{-L} &\leq f(x) \leq f(1)x^L & \text{si } x \geq 1 \\ f(1)x^L &\leq f(x) \leq f(1)x^{-L} & \text{si } x \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, si f appartient à $\text{L-Lip}(]0, +\infty[, \tau)$, alors f vérifie les inégalités fonctionnelles suivantes :

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-L} \leq \frac{f(y)}{f(x)} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^L, \quad \forall 0 < x \leq y, \quad (11)$$

Réciproquement, si f vérifie (11) avec $L \geq 1$ alors $f \in \text{L-Lip}(]0, +\infty[, \tau)$.

On peut maintenant comparer $\text{Lip}(\tau)$ et $\text{Lip}(\mathbf{dlog})$.

Proposition 7 (Comparaison des fonctions lipschitziennes pour les métriques τ et \mathbf{dlog})

La métrique logarithmique et le taux de réduction ont les mêmes fonction lipschitziennes :

$$\text{Lip}(\tau) = \text{Lip}(\mathbf{dlog}),$$

et pour tout $L \geq 1$,

$$\text{L-Lip}(\tau) = \text{L-Lip}(\mathbf{dlog}).$$

Pour $0 < L < 1$ on n'a jamais égalité. Pour le voir simplement, il suffit de le vérifier à l'aide de la fonction puissance $x \mapsto x^L$.

Les résultats précédents restent vrais si l'on remplace $]0, +\infty[$ par $[a, b]$ avec $0 < a < b$. On peut maintenant en déduire l'inégalité des accroissements finis pour la métrique τ .

Théorème 3 (Inégalité des accroissements des taux de réductions)

Soient $0 < a < b$, $f \in C^1([a, b],]0, +\infty[)$, et si son élasticité est bornée sur $[a, b]$ alors :

$$\tau(f(a), f(b)) \leq \max(1, E) \times \tau(a, b) \quad \text{où } E := \sup_{a < t < b} |\mathbf{e}[f](t)|. \quad (12)$$

Comme τ vérifie le lemme 3 on pourrait espérer avoir une égalité des accroissement finis pour τ ou, au moins une inégalité comme \mathbf{dlog} . Il n'en est rien, comme le montre la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, car τ ne vérifie pas l'égalité triangulaire du théorème 1.

Plus généralement, on peut montrer à l'aide de la proposition 2 que pour toute métrique relative on les inclusions suivantes.

Proposition 8 (Fonctions logarithmiquement et relativement lipschitziennes)

Soit d une métrique relative sur $]0, +\infty[$, $L > 0$ et $[L] := \min\{n \geq L, n \in \mathbb{N}\}$ alors

$$\begin{aligned} 1\text{-Lip}(\mathbf{dlog}) &= 1\text{-Lip}(d), \\ L\text{-Lip}(\mathbf{dlog}) &\subset [L]\text{-Lip}(d), \\ \text{Lip}(\mathbf{dlog}) &\subset \text{Lip}(d). \end{aligned}$$

De plus, si $0 < L < 1$, on a aussi

$$L\text{-Lip}(d) \subset 1\text{-Lip}(\mathbf{dlog}).$$

En effet, la fonction F de la proposition 2, vérifie pour tout $t > 0$: $F(Lt) \leq [L]F(t)$.

On ne peut pas espérer toujours avoir $F(Lt) \leq LF(t)$. Par exemple, si F est concave (F_{τ}), pour $0 < L < 1$, cette inégalité est fautive. Une fois de plus, comme \mathbf{dlog} est la seule métrique relative vérifiant l'égalité triangulaire, elle hérite aussi de cette propriété.

Le taux d'augmentation \mathbf{T} n'est pas une métrique relative car il ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. En revanche, il est très important en pratique. On peut quand même considérer $\text{Lip}(\mathbf{T})$. On a alors l'égalité et l'inclusion suivantes.

$$\begin{aligned} 1\text{-Lip}(\mathbf{T}) &= 1\text{-Lip}(\mathbf{dlog}), \\ \text{Lip}(\mathbf{T}) &\subset \text{Lip}(\mathbf{dlog}). \end{aligned}$$

La première égalité est évidente. Elle implique d'ailleurs que $L\text{-Lip}(\mathbf{T}) \subset 1\text{-Lip}(\mathbf{dlog})$ pour $0 < L < 1$. La deuxième inclusion mérite un peu d'attention. Pour $L > 1$, il faut remarquer que pour $t > 0, s > 0$, $F_{\mathbf{T}}(t) \leq LF_{\mathbf{T}}(s) \Leftrightarrow t \leq G_L(s)$, avec $G_L(s) := F^{-1}(LF(s)) = \ln(1 + L(\exp(s) - 1))$. Par un argument de concavité on montre que $G_L(s) \leq Ls$. Ce qui nous permet de conclure grâce à l'inclusion suivante.

$$L\text{-Lip}(\mathbf{T}) \subset L\text{-Lip}(\mathbf{dlog}).$$

Références

- [1] Choquet, *Cours de Topologie*, Masson, (1992).
- [2] Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, pug, (1991).
- [3] Encyclopédies *Universalis*, *Wikipedia* pour les thèmes : erreurs relatives, élasticité (elasticity).
- [4] Forsythe, *Pitfalls in computations, or why a math book is not enough*, Amer. Math. Monthly, 77, p. 931-956, (1970).
- [5] Gourdon, *Analyse, Maths en tête, ellipses*, (1994).
- [6] Junca, *Nombres positifs, métriques et calculatrices*, 16 p., <http://math.unice.fr/~junca>, (2004).
- [7] Junca, *Calculatrices, nombres positifs, précision relative, pourcentages et distance logarithmique*, Le Bulletin vert de l'A.P.M.E.P., Bulletin 458, p. 395-406, (2005).
- [8] Schatzman *Analyse numérique*, (1991).
- [9] Stoer & Burlish, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, (1980).
- [10] Tissier & Mialet, *Analyse à une variable réelle*, Bréal, (2000).