



**HAL**  
open science

## Limites d'images de suites et limite de fonction

Stéphane Junca

► **To cite this version:**

Stéphane Junca. Limites d'images de suites et limite de fonction. RMS : revue de la filière mathématiques [2004-..], 2006, 116 (2), pp.17-26. hal-01312350

**HAL Id: hal-01312350**

**<https://hal.science/hal-01312350>**

Submitted on 5 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Limites d'images de suites et limite de fonction

par Stéphane Junca  
<http://math.unice.fr/~junca> , [junca@math.unice.fr](mailto:junca@math.unice.fr)

IUFM et Université de Nice,  
Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621

## Résumé

Soient  $\mathcal{F}$  une famille de suites réelles qui divergent vers  $+\infty$ , et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  converge en  $+\infty$ , alors, pour toute suite  $(x_n)_n \in \mathcal{F}$ ,  $(f(x_n))_n$  converge. La réciproque est généralement fautive sauf si  $f$  et  $\mathcal{F}$  vérifient certaines conditions. Cet article propose des réciproques dans l'esprit du lemme de Croft ainsi que des contre-exemples.

Mots-clés : continuité, segments emboîtés, recouvrement, méthodes de Baire.

## 1 Introduction

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Il est bien connu que  $f$  admet une limite  $l$  en  $+\infty$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $+\infty$ ,  $(f(x_n))_n$  converge vers  $l$ .

Moralement, pour connaître le comportement de  $f$  en  $+\infty$ , il faut tester  $f$  sur toutes les suites qui tendent vers plus l'infini. En revanche, si  $f$  est monotone, il suffit de tester  $f$  sur une seule suite. Où est le juste milieu, pour une fonction continue ? Nous allons montrer dans cette note que, pour une fonction continue  $f$ , il suffira de tester  $f$  sur une famille de suites paramétrées continument vérifiant une certaine propriété de recouvrement de voisinage de  $+\infty$ .

Citons deux exemples classiques où l'on teste une fonction continue sur des familles de suites paramétrées :  $\{(n \times x)_{n \geq 1}, x > 1\}$  ou  $\{(n + y)_{n \geq 1}, y > 0\}$ .

1. Si pour tout  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n \times x) = 0$  alors  $f$  converge en  $+\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
2. Si pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n + y) = 0$  alors  $f$  ne converge pas nécessairement en  $+\infty$ .

Ainsi, la famille de suites  $\{(n \times x)_{n \geq 1}, x > 1\}$  suffit pour déterminer le comportement à l'infini d'une fonction continue. L'autre famille, en revanche, ne permet pas de conclure.

Dans cette note, on va toujours supposer que  $f$  est continue. Dans la partie 2, on va commencer par tester  $f$  sur des familles de suites de la forme  $\{(\lambda_n \times x)_{n \geq 1}, x > 1\}$ , où  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante divergeant vers  $+\infty$ . On appellera ce cas le cas multiplicatif. On va supposer que  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  a un comportement asymptotiquement géométrique :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lambda$ .  $\lambda$  est nécessairement supérieur ou égal à 1 car  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $+\infty$ . On va montrer que cette famille de suite paramétrée par  $x \in ]1, +\infty[$  est suffisante pour en déduire le comportement de  $f$  à l'infini dans un seul cas :  $\lambda = 1$ .

Dans la partie 3, on va s'intéresser aussi aux cas additifs, c'est à dire aux familles de suites de la forme  $\{(\mu_n + y)_{n \geq 1}, y > 0\}$ . On passera bien sûr du cas multiplicatif au cas additif à l'aide du logarithme. Or il se trouve que si  $f$  est lipschitsienne, ou plus généralement, uniformément continue sur  $]0, +\infty[$ , la famille  $\{(n + y)_{n \geq 1}, y > 0\}$ , suffit pour déterminer le comportement à l'infini d'une fonction continue. Ainsi, en rajoutant cette hypothèse globale sur la nature de la fonction  $f$ , continuité uniforme ou fonction lipschitsienne, on montrera que l'on pourra être moins exigeant sur la lenteur de la suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  pour diverger vers l'infini. On donnera quelques résultats valables pour le cas additif mais pas nécessairement pour le cas multiplicatif.

Dans la partie 4, on poursuivra l'étude du cas additif sans supposer que la  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mu_n + y)$  est indépendante de  $y$ .

On fera ensuite, dans la partie 5, quelques remarques et applications de ses résultats avant d'aborder le cas des fonctions de plusieurs variables.

Dans la partie 6, on donnera quelques généralisations des résultats de la partie 2 à 4 en dimensions supérieures en montrant l'importance de la notion de familles de suites "recouvrantes". Cette notion signifie d'une certaine manière que si l'on ne teste pas toutes les suites pour étudier le comportement à l'infini d'une fonction continue, il suffit de la tester sur une famille de suites, paramétrées continument, qui "passe partout près de l'infini".

On terminera cette note par un énoncé général valable dans les espaces métriques dans la partie 7.

Les parties 2, 3, 4, 5 n'utiliseront que des outils élémentaires dont le fameux principe des segments emboîtés. Le théorème de Baire sera utilisé de manière intensive dans les deux dernières parties, les parties 6 et 7.

$$\mathbf{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n \times x) = 0 \text{ pour tout } x$$

Dans cette section, on va tester  $f$  sur des suites de la forme :  $x_n = \lambda_n x$ , où  $x > 1$ ,  $(\lambda_n)_n$  est une suite strictement croissante divergeant vers l'infini. On va démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1**

Soit  $f \in C^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ ,  $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .

On suppose que, pour tout  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n x) = 0$ .

Si, de plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Donnons quelque exemples de telles suites :  $n, n^\alpha$ , où  $\alpha > 0$ ,  $\exp(\sqrt{n})$ .

On démontre classiquement ce résultat à l'aide du théorème de Baire, voir par exemple [4] ou [5] avec  $\lambda_n \equiv n$ . Dans cette note, on va suivre la démonstration proposée dans [3]. Ainsi on utilisera, à la place du théorème de Baire, le fait que l'intersection de segments emboîtés non vides est non vide. Ce qui est bien naturel, puisque la propriété des segments emboîtés est justement la clef de la démonstration du théorème de Baire sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration du théorème 1 :** Pour démontrer ce résultat on va utiliser le fait que si  $I = [a, b]$ ,  $1 < a < b$ , alors il existe  $N \geq 1$  tel que, pour  $n \geq N$  :

$$\bigcup_{k \geq n} \lambda_k I = [\lambda_n a, +\infty[, \tag{1}$$

où  $\lambda_k I = [\lambda_k a, \lambda_k b]$ . En effet, il suffit de démontrer que, à partir d'un certain rang,  $\lambda_{n+1} a \leq \lambda_n b$ , or  $a < b$  donc,  $1 < \frac{b}{a}$ , et à partir d'un certain rang,  $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} < \frac{b}{a}$ .

Maintenant, on peut démontrer le théorème 1 par l'absurde. Si  $f(x)$  ne converge pas vers 0, alors il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout  $A > 1$ , il existe  $z > A$  tel que  $|f(z)| \geq \varepsilon$ . On va construire, par récurrence sur  $n$ , une suite  $J_n$  d'intervalles fermés non réduit à un point emboîtés non vides, et une application strictement croissante  $\varphi$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  telle que :  $\forall x \in J_n, |f(\lambda_{\varphi(n)} x)| \geq \varepsilon/2$ . Pour  $n = 1$ , prenons,  $\varphi(1) = 1$ ,  $A = \lambda_1$ ,  $x_1 := z/\lambda_1 > 1$ , ainsi  $|f(\lambda_1 x_1)| = |f(z)| \geq \varepsilon$ . Par continuité de  $x \mapsto |f(\lambda_1 x)|$ , il existe  $h_1 > 0$  tel que pour  $x \in J_1 := [x_1, x_1 + h_1]$ ,  $|f(\lambda_1 x)| \geq \varepsilon/2$ . Supposons que  $J_n$  est déjà construit,  $J_n = [a_n, b_n]$ ,  $1 < a_n < b_n$ . Prenons  $j$  tel que  $j > \varphi(n)$  et,  $\bigcup_{k \geq j} \lambda_k J_n = [\lambda_j a_n, +\infty[$ . Un tel  $j$  existe d'après (1). Ainsi, il existe  $z > \lambda_j a_n$ , tel que  $|f(z)| \geq \varepsilon$ .

Donc, il existe  $k \geq j$  tel que  $z \in \lambda_k J_n$ , i.e.  $z/\lambda_k \in J_n$ . Posons,  $\varphi(n+1) = k$ . Par continuité de l'application  $x \mapsto |f(\lambda_{\varphi(n+1)} x)|$ , au point  $z/\lambda_k \in J_n$ , on peut trouver un intervalle fermé non réduit à un point  $J_{n+1}$ , contenant  $z/\lambda_k$ , contenu dans  $J_n$ , tel que  $|f(\lambda_{\varphi(n+1)} x)| \geq \varepsilon/2$  pour tout  $x \in J_{n+1}$ .

Comme  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$ , on peut prendre  $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ . Ainsi, pour tout  $n$ ,  $|f(\lambda_{\varphi(n)} \xi)| \geq \varepsilon/2$ , ce qui contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n \xi) = 0$ .  $\square$

### Proposition 1

Soit  $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty$  alors, il existe  $f \in C^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ , tel que  $f(x)$  ne converge pas vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ , mais telle que, pour tout  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n x) = 0$ .

**Démonstration de la proposition 1 :** Il suffit de prendre la fonction lipschitzienne suivante, qui, pour tout  $x$ , vérifie que  $f(\lambda_n x) = 0$  à partir d'un certain rang.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \chi(x - \lambda_k) \quad \text{où} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 1| & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (2)$$

Notons, que  $f(x) \neq 0$  si et seulement si  $x \in \bigcup_{k \geq 1} ]\lambda_k, \lambda_k + 1[$ . D'autre part, pour chaque  $x$  fixé, cette série converge, car, du fait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ , cette série ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Ceci étant, on peut commencer la preuve. Soit  $x > 1$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ , il existe  $N_0$  tel que, pour  $n \geq N_0$ ,  $\lambda_n + 1 < \lambda_n x$ . Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty$ , il existe  $N_1$  tel que, pour  $n \geq N_1$ ,  $\lambda_n x < \lambda_{n+1}$ . Ainsi, pour  $n \geq N := \max(N_0, N_1)$ ,  $\lambda_n + 1 < \lambda_n x < \lambda_{n+1}$ , et donc, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\chi(\lambda_n x - \lambda_k) = 0$ , i.e.  $f(\lambda_n x) = 0$ .  $\square$

Remarquons que si  $\lambda_n = \lambda^n$ , le même contre exemple convient. En fait, on peut même proposer la généralisation suivante :

### Proposition 2

Soit  $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lambda > 1$  alors, il existe  $f \in C^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ , tel que  $f(x)$  ne converge pas vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ , mais telle que, pour tout  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n x) = 0$ .

**Démonstration de la proposition 2 :** On va s'inspirer de l'exemple (2) précédent. Le point clef est de trouver la bonne largeur du support de  $f$  sur l'intervalle  $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ . On pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi\left(\frac{x - \lambda_n}{\varepsilon_n}\right) \quad (3)$$

$$\text{où } \varepsilon_n := \min\left(1, \lambda_{n+1} - \lambda_n, \min_{\substack{0 < j < n \\ \lambda_{n-j}\lambda^j - \lambda_n > 0}} (\lambda_{n-j}\lambda^j - \lambda_n)\right).$$

D'abord, notons que  $\varepsilon_n \in ]0, 1]$ , et que,  $f$  est construite pour que : sur chaque intervalle  $]\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ ,  $f$  est nulle sur  $[\lambda_n + \varepsilon_n, \lambda_{n+1}]$ , et,  $f\left(\lambda_n + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) = 1$ .

Vérifions que, pour tout  $x > 1$ ,  $f(\lambda_n x) = 0$  à partir d'un certain rang.

Soit  $x > 1$ , il existe un unique  $k \geq 0$  tel que  $\lambda^k \leq x < \lambda^{k+1}$ . Deux cas se présentent :

1. Si  $\lambda^k < x < \lambda^{k+1}$ , alors, il existe  $N_0$ , tel que, pour

$n > N_0$ ,  $\lambda_{n+k} < \lambda_n x < \lambda_{n+k+1}$ . En effet,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n} = \lambda^k$ , donc, pour  $n$  assez grand,

$n > N_0$ ,  $\frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n} < x < \frac{\lambda_{n+k+1}}{\lambda_n}$ . D'autre part  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, et  $1/\lambda_n \rightarrow 0$ , donc il existe

$N > N_0$ , tel que, pour  $n > N$ ,  $\frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n} + \frac{\varepsilon_{n+k}}{\lambda_n} < x$ . Donc, pour  $n > N$ , on a :  $f(\lambda_n x) = 0$ .

2. Si  $x = \lambda^k$ , alors la suite  $\lambda_n x = \lambda_n \lambda^k$ . C'est le cas le plus difficile, car on ne sait pas, à priori, de quel côté de  $\lambda_{n+k}$  se trouvera  $\lambda_n \lambda^k$ . En effet, si  $\lambda_n x$  est juste à droite de  $\lambda_{n+k}$  pour une infinité de valeurs de  $n$ , il faut bien s'assurer qu'il ne sera plus dans le support de  $f$ . C'est donc bien cette étape de la démonstration qui justifie l'expression compliquée définissant la suite  $(\varepsilon_n)_n$ . Ainsi, par définition de  $\varepsilon_n$ , on a, pour  $n \geq k$  :

ou bien  $\lambda_n x \leq \lambda_{n+k}$ , ou bien  $\lambda_{n+k} + \varepsilon_{n+k} \leq \lambda_n x$ .

D'autre part, comme  $\lambda_n x = \lambda_n \lambda^k \sim \lambda_{n+k}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a aussi à partir d'un certain rang,  $\lambda_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k-1} \leq \lambda_n x \leq \lambda_{n+k+1}$ . Donc  $(f(\lambda_n x))_{n \in \mathbb{N}}$  est nulle à partir d'un certain rang.

□

Remarque sur le caractère lipschitsien de l'exemple (3) : Remarquons que la suite  $(\varepsilon_n)_n$  ne converge pas nécessairement vers zéro. Par exemple, si  $\lambda_n \equiv \lambda^n$ ,  $\varepsilon_n \equiv 1$  à partir d'un certain rang. De plus,  $f$  est lipschitsienne sur  $]1, +\infty[$  si et seulement si  $\inf_{n \geq 1} \varepsilon_n > 0$ .

### 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y) = 0$ pour tout $y$

On peut passer au cas additif, en posant,  $y = \ln(x)$ ,  $\mu_n = \ln(\lambda_n)$ ,  $g = f \circ \exp$ . On obtient, ainsi les résultats suivants :

#### Corollaire 1

Soit  $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$ .

1. Soit  $g \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ . On suppose que, pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y) = 0$ .

Si, de plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$  alors  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 0$ .

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = +\infty$ , ou si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = \mu > 0$ , alors, il existe  $g \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ , tel que  $g(y)$  ne converge pas vers 0 quand  $y \rightarrow +\infty$ , mais telle que, pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y) = 0$ .

$\sqrt{n}, n^\alpha, 0 < \alpha < 1, \ln(n)$  vérifient les hypothèses de la partie 1. du corollaire 1.  
 $n, n^\alpha, 1 \leq \alpha, \exp(n)$  vérifient les hypothèses de la partie 2. du corollaire 1.

Dans le cas de fonction lipschitsienne ou uniformément continue, on a des résultats plus forts. Ces résultats ne sont pas vrais dans le cas multiplicatif comme le montre le contre-exemple (2). En effet, le changement de variable pour passer de  $f$  à  $g$  ne conserve pas le caractère lipschitsien ou d'uniforme continuité de la fonction  $g$ . Par exemple,  $f(x) \equiv x$  est lipschitsienne, mais  $g = f \circ \exp$ , i.e. :  $g(y) \equiv e^y$ , n'est même plus uniformément continue sur  $]0, +\infty[$ .

### Proposition 3

Soit  $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$ .

1. Soit  $g$  une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

On suppose que, pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y) = 0$ .

Si, de plus,  $(\mu_{n+1} - \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, alors  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 0$ .

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = +\infty$ , alors, il existe  $g$ , uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ , telle que  $g(y)$  ne converge pas vers 0 quand  $y \rightarrow +\infty$ , mais telle que, pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y) = 0$ .

**Démonstration de la proposition 3 :** On démontre les deux résultats énoncés de manière indépendante.

1. Pour  $h > 0$ , on note  $\omega(g, h) := \sup_{|y-z| < h} |g(y) - g(z)|$ , le module de continuité de  $g$ .  $g$  est uniformément continue sur  $]0, +\infty[$  signifie que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(g, h) = 0$ .

Soit  $A := 1 + \sup_{n > 0} (\mu_{n+1} - \mu_n)$ . On se fixe  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N > 1$  fixé tel que  $\omega(g, h) < \varepsilon$  où  $h := A/(N + 1)$ . Subdivisons l'intervalle  $]0, A[$ ,  $y_k = kh, k = 1, \dots, N$ , alors :

$$]0, A[ = \bigcup_{k=1}^N ]y_k - h, y_k + h[, \quad \bigcup_{j \geq n} ]\mu_j, \mu_j + A[ = ]\mu_n, +\infty[.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{k=1}^N |g(\mu_n + y_k)| = 0$ ,

donc, il existe  $N_0$  tel que pour  $n > N_0$ ,  $\max_{k=1}^N |g(\mu_n + y_k)| < \varepsilon$ . Soit  $Y_0 = \mu_{N_0}$ , alors pour tout  $y > Y_0$ , il existe  $n > N_0$ ,  $k \in \{1, \dots, N\}$  tels que  $|y - (\mu_n + y_k)| < h$ .

Ainsi, pour tout  $y > Y_0$ ,  $|g(y)| \leq |g(y) - g(\mu_n + y_k)| + |g(\mu_n + y_k)| \leq \omega(g, h) + \varepsilon < 2\varepsilon$ .  $\square$

2. Il suffit d'adapter le contre-exemple (2) au cas additif.

Soit  $j$  tel que pour tout  $n > j$ ,  $\mu_n - \mu_{n-1} > 1$ . Prenons, par exemple, la fonction lipschitsienne suivante :  $g(y) := \sum_{k=j}^{+\infty} \chi(y - (\mu_n - 1))$ . Sur  $[\mu_n, \mu_{n+1}]$ ,  $g$  s'annule sur  $[\mu_n, \mu_{n+1} - 1]$ .

Soit  $y > 0$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = +\infty$ , on a, à partir d'un certain rang,  $\mu_n < \mu_n + y < \mu_{n+1} - 2$ , et donc  $g(\mu_n + y) = 0$ .  $\square$

## 4 $(g(\mu_n + y))_n$ converge pour tout $y$

Dans cette partie, on ne suppose pas que la limite est indépendante de  $y$ . On note  $l(y) := \lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y)$ . Pour montrer que  $g$  admet une limite en  $+\infty$ , il faut d'abord vérifier que  $l(\cdot)$  est une fonction constante. Or, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) \neq 0$ , il y a cette fois-ci peu

d'espoir en général, même si  $f$  est uniformément continue. Par exemple, si  $\mu_n \equiv n$ ,  $g$  est une fonction continue non constante et périodique de période 1, on a  $g(y+n) = g(y) \equiv l(y)$ . On va donc se placer dans le cas où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$ .

### **Théorème 2**

Soit  $g \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ ,  $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$ .

On suppose aussi que, pour tout  $y > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + y)$  existe et vaut  $l(y)$ .

Alors,  $y \mapsto l(y)$  est une fonction constante :  $l(y) \equiv L$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = L$ .

La démonstration générale demande une bonne compréhension de la démonstration du théorème 1. On commence par démontrer le théorème 2 dans le cas plus simple d'une fonction uniformément continue.

### **Démonstration du théorème 2 dans le cas où $g$ est uniformément continue :**

Soit  $0 < a < b$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$ , on peut affirmer que pour tout  $h > 0$  et pour tout  $N$ , il existe  $p, q \geq N$  tel que  $|\mu_p + a - (\mu_q + b)| < h$ , et donc que  $|g(\mu_p + a) - g(\mu_q + b)| \leq \omega(g, h) := \sup_{|y-z|<h} |g(y) - g(z)|$ .

En effet, il existe  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $\mu_{n+1} - \mu_n < h$ . Posons  $q := N+1$ , on a  $\mu_q + a < \mu_q + b$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$ , on peut définir  $p$  par  $p := \min\{k \geq q, / \mu_k + a > \mu_q + b\}$ .

Donc, en prenant  $N$  de plus en plus grand et  $h$  de plus en plus petit, on en déduit que  $l(a) = l(b)$ . C'est à dire que  $l(\cdot)$  est une fonction constante. On peut donc conclure à l'aide du corollaire 1 ou de la proposition 3.  $\square$

### **Démonstration du théorème 2 dans le cas où $g$ est continue :**

Grâce au corollaire 1, il suffit de montrer que  $y \mapsto l(y)$  est une fonction constante. Prenons donc  $a$  et  $b$  deux nombres quelconques et montrons que  $l(a) = l(b)$ . On va ainsi montrer qu'il existe  $\xi > 1$  et  $\varphi$ , une injection croissante de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_{\varphi(2n+1)} + \xi) = l(a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_{\varphi(2n)} + \xi) = l(b)$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\mu_n + \xi) = l(\xi)$ , on en déduit que  $l(a) = l(\xi) = l(b)$ . Pour cela, on cherche à construire une suite d'intervalles fermés non réduit à un point emboîtés non vides tels que :

- pour tout  $y \in J_{2m+1}$ ,  $|g(\mu_{\varphi(2m+1)} + y) - l(a)| \leq 1/(2m+1)$ ,
- et pour tout  $y \in J_{2m}$ ,  $|g(\mu_{\varphi(2m)} + y) - l(b)| \leq 1/(2m)$ .

Pour  $n = 1$ , soit  $j$  tel que  $|g(\mu_j + a) - l(a)| \leq 1/1$ , il suffit de prendre  $\varphi(1) = j$  et  $J_1$  un intervalle fermé non réduit à un point contenant  $a$  assez petit.

Pour  $n = 2$ , soit  $k > \varphi(1)$  tel que  $\bigcup_{l \geq k} (\mu_l + J_1) = [\mu_k + \inf J_1, +\infty[$ . Comme  $\lim_{i \rightarrow +\infty} g(\mu_i + b) = l(b)$ ,

il existe  $i$  tel que  $|g(\mu_i + b) - l(b)| \leq 1/2$ , et  $\mu_i + b \geq \mu_k + \inf J_1$ . Donc, il existe  $j \geq k$  et  $y \in J_1$ , tel que  $\mu_i + b = \mu_j + y$ . On pose alors  $\varphi(2) := j$  et  $J_2$  un intervalle fermé, non réduit à un point, assez petit contenant  $y$ , et contenu dans  $J_1$ .

On peut poursuivre ainsi cette construction par récurrence et prendre, comme dans la démonstration du théorème 1,  $\xi \in \bigcap_{n > 0} J_n \neq \emptyset$ .  $\square$

## **5 Commentaires sur les résultats précédents en dimension 1**

Dans cette partie de transition, avant d'attaquer les dimensions supérieures, nous donnons quelques commentaires et applications du théorème 1. En particulier, nous allons insister sur une

certainne propriété de recouvrement qui sera le point de départ des généralisations des théorèmes 1 et 2.

Espace d'arrivé : Commençons par remarquer que l'ensemble d'arrivé de  $f$  peut être remplacé par  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^d$  ou un espace métrique quelconque. En revanche, la structure de l'ensemble de départ,  $\mathbb{R}$  en l'occurrence, a joué un rôle crucial.

Réduction des familles de suites : On peut réduire un peu les familles de suites utilisées dans les théorèmes 1 et 2, et les propositions 1, 2, en réduisant l'intervalle où vit le paramètre à un sous intervalle non vide et non réduit à un point.

Par exemple, si  $J$  est un intervalle ouvert non vide de  $]1, +\infty[$ ,  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante divergeant vers  $+\infty$  :

si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n = 1$ , et si pour tout  $x \in J$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda_n x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Comportement à l'origine : On peut aussi étudier le comportement d'une fonction  $h$  en 0. En posant  $f(x) \equiv h\left(\frac{1}{x}\right)$  pour  $x \neq 0$ . On se ramène ainsi à l'étude de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . On obtient alors, grâce au théorème 1, le résultat suivant :

**Corollaire 2**

Soit  $h \in C^0(\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R})$ .

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement décroissante qui converge vers 0, telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ .

On suppose que pour tout  $x \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(a_n x) = 0$ .

Si  $a = 1$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ , sinon  $a < 1$  et  $h$  ne converge pas nécessairement en 0.

Propriété de recouvrement : Trois ingrédients sont essentiels à la démonstration des théorèmes 1 et 2 : la continuité de la fonction, le principe des segments emboîtés et la propriété de recouvrement (1). Cette dernière s'écrit ainsi :

$$\forall 1 < a < b, \exists N \geq 1, / n \geq N \implies \bigcup_{k \geq n} [\lambda_k a, \lambda_k b] = [\lambda_n a, +\infty[, \quad (4)$$

On peut remarquer que dans (4), on peut remplacer les intervalles fermés d'intérieur non vide  $[a, b]$  par des intervalles ouverts. Plus précisément, la suite  $(\lambda_n)_n$  vérifie (4) si et seulement si pour tout intervalle ouvert non vide  $I$  de  $]1, +\infty[$ , et pour tout entier non nul  $n$ ,  $\bigcup_{k \geq n} \lambda_k I$  est un voisinage de  $+\infty$ .

Comme  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante divergeant vers  $+\infty$ , et que  $\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)_{n \geq 1}$  converge, la propriété (4) est aussi équivalente à la propriété :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1. \quad (5)$$

On pourrait essayer le test de Cauchy pour obtenir la propriété (4) :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$ . Malheureusement, cela ne suffit plus. Par exemple, soit  $\lambda_n = 3^k n$  pour  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , autrement dit  $\lambda_n = 3^{E(\ln(n)/\ln(2))} n$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . On a bien une suite strictement croissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$ , mais  $\left\{3^{k-1} 2^{k+1}, k \geq 1\right\} \cap \bigcup_{n \geq 1} [\lambda_n \times 1, \lambda_n \times 2] = \emptyset$  car, pour  $n = 2^k - 1$ ,  $\lambda_n \times 2 = 3^{k-1} (2^k - 1) \times 2 < 3^{k-1} 2^{k+1} < 3^k 2^k = \lambda_{n+1} \times 1$ . Ainsi,  $\bigcup_{n \geq 1} \lambda_n [1, 2]$  ne



contient aucun voisinage de  $+\infty$ .

Applications aux probabilités et aux développements asymptotiques : Donnons une application aux probabilités du théorème 1 : une caractérisation des fonctions caractéristiques de variable aléatoire à densité symétrique du domaine normale d'attraction des lois stables en dimension 1, voir [3]. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de densité paire commune  $f$ . D'après [2],  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$  si et seulement si :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \widehat{f} \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) = -x^2$ . On peut démontrer, à l'aide du théorème 1, que cette dernière propriété est équivalente au fait que  $\widehat{f}(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$  en 0.

En fait, on peut traduire ce résultat, sans faire référence aux probabilités, sous la forme du lemme suivant :

**Lemme 1** *Soit  $\varphi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\varphi(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$  en 0,
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \varphi \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) + x^2 = 0$ .

**Démonstration du lemme 1** : Le sens direct est évident. Seule la réciproque n'est pas triviale. Démontrons la réciproque. Remarquons d'abord que 2. implique que  $\varphi(0) = 1$ . Posons  $\psi(x) := (\varphi(x) - 1 + x^2)/x^2$ ,  $x \neq 0$ , et  $\psi(0) := 0$ . Ainsi  $\varphi(x) = 1 - x^2 + \psi(x)x^2$ . Il suffit donc de montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$ . En remplaçant  $\varphi$  en fonction de  $\psi$  dans 2., et après simplification, on obtient pour tout  $x \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(x/\sqrt{n}) = 0$ . On peut donc conclure à l'aide du corollaire 2.  $\square$

De même, on laisse le soin au lecteur de démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2** *Si  $\varphi \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ ,  $a, b, p \in \mathbb{R}$ , alors,  $\varphi(x) = a + bx^p + o(x^p)$  en 0, si et seulement si pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p (\varphi(x/n) - a) = bx^p$ .*

## 6 Généralisation dans $\mathbb{R}^d$

Dans cette partie, on va donner quelques généralisations en dimensions supérieures. Le point important est que  $\mathbb{R}^d$  est un espace complet. Un autre point essentiel et une certaine propriété de recouvrement de la suite considérée. Fixons d'abord quelques notations. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^d$ , on note  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d, \|x - y\| < r\}$ ,  $B(\infty, r) := \{y \in \mathbb{R}^d, \|y\| > r\}$ . On remarquera que les résultats que l'on va énoncer ne dépendent pas de la norme choisie sur  $\mathbb{R}^d$ .

### Définition 1

*Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On dit que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait la propriété de recouvrement ou que la suite est recouvrante si pour toute boule ouverte non vide  $B$  de  $\mathbb{R}^d$  on a :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists R > 0, B(\infty, R) \subset \bigcup_{n \geq N} (\mu_n + B), \quad (6)$$

où  $\mu_n + B := \{\mu_n + y, y \in B\}$ .

Comme nous l'avons déjà dit vaguement dans l'introduction, cela signifie que la famille de suites  $(\mu_n + y)_{n \geq 1, y \in \mathbb{R}^d}$  "passe partout près de l'infini". Plus mathématiquement, on peut dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall N \in \mathbb{N}, \exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\| > R \implies \exists n > N, \|x - (\mu_n + y)\| < \varepsilon. \quad (7)$$

En effet, on peut vérifier que la condition (7) est bien équivalente à la condition (6). Car la condition (7) signifie seulement que pour tout  $\varepsilon, y, N$ , il existe  $R > 0$  tel que :

$$B(\infty, R) \subset \bigcup_{n > N} (\mu_n + B(y, \varepsilon)).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de cette partie.

### Théorème 3

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  qui vérifie la propriété de recouvrement alors on a les deux résultats suivant :

1. si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\mu_n + x) = L$ , Alors  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .
2. si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $(f(\mu_n + x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente, Alors  $f(x)$  admet une limite quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 1 (Cas où  $f$  est uniformément continue)** Remarquons que si  $f$  est de plus uniformément continue sur  $\mathbb{R}^d$ , on peut assouplir la notion de suites recouvrantes. En effet, une simple généralisation de la première partie de la démonstration de la proposition 3 montre qu'il suffit qu'il existe un seul compact (ou précompact)  $C$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $R > 0$  tel que  $B(\infty, R) \subset \bigcup_{n \geq N} (\mu_n + C)$ .

On va démontrer le théorème 3 à l'aide du théorème de Baire, comme dans [4] ou [5]. On aurait pu le démontrer en adaptant les preuves des théorèmes 1 et 2, en utilisant une intersection de compacts emboîtés non vides ou, plus généralement, le fait que l'intersection de boules fermées emboîtées non vides dont le diamètre tend vers 0 est un singleton dans un espace complet.

### Démonstration du théorème 3 :

1. Prenons  $L = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , montrons qu'il existe  $R > 0$  tel que :  $\|x\| > R \implies |f(x)| \leq \varepsilon$ .  
Considérons les fermés suivants :  $F_n := \{x \in \mathbb{R}^d, |f(\mu_n + x)| \leq \varepsilon\}$ ,  $G_n := \bigcap_{k \geq n} F_k$ . Comme,

pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\mu_n + x) = 0$ ,  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Or, le théorème de Baire affirme qu'il

existe  $N$  tel que  $G_N$  soit d'intérieur non vide. Donc  $G_N$  contient une boule ouverte non vide  $B$ . C'est à dire que, pour tout  $z \in B$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $|f(\mu_n + z)| \leq \varepsilon$ , autrement dit :  $\forall x \in \bigcup_{n \geq N} (\mu_n + B), |f(x)| \leq \varepsilon$ , ce qui nous permet d'obtenir l'existence de  $R$  grâce à

la propriété de recouvrement de la suite  $(\mu_n)_n$ .

2. Soient  $a, b \in \mathbb{R}^d$ ,  $l(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mu_n + x)$ , montrons que  $l(a) = l(b)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , considérons les ouverts :  $\Omega_p := \{x \in \mathbb{R}^d, |f(\mu_p + x) - l(a)| < \varepsilon\}$ ,

$U_n := \bigcup_{p > n} \Omega_p = \{x \in \mathbb{R}^d, \exists p > n, |f(\mu_p + x) - l(a)| < \varepsilon\}$ . On va montrer que  $U_n$  est un

ouvert dense de  $\mathbb{R}^d$ .

En effet, d'après la propriété de recouvrement de la suite  $(\mu_n)_n$ , si  $B$  est une boule ouverte non vide quelconque, il existe  $R > 0$  tel que  $B(\infty, R) \subset \bigcup_{p > n} (\mu_p + B)$ . Or, on peut trouver

$j > n$  telle que  $\|\mu_j + a\| > R$ . En effet, sinon, pour tout  $j > n$ ,  $\|\mu_j + a\| \leq R$ , et alors  $\bigcup_{j > n} (\mu_j + B(a, 1)) \subset B(0, R + 1)$  ce qui contredit la propriété de recouvrement de la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Finalement, on a bien un  $j > n$  tel que  $\|\mu_j + a\| > R$ . Et, il existe  $p > n$  tel que  $\mu_j + a \in \mu_p + B$ , i.e. il existe  $x \in B$  tel que  $\mu_p + x = \mu_j + a$ . C'est à dire que  $x \in U_n$ . Donc,  $B$  intersecte  $U_n$ . Ceci étant vraie pour n'importe quelle boule ouverte non vide, on en déduit que  $U_n$  est dense dans  $\mathbb{R}^d$ .

De même,  $V_n := \{y \in \mathbb{R}^d, \exists q > n, |f(\mu_q + y) - l(b)| < \varepsilon\}$  est un ouvert dense.

Donc,  $G := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V_n)$  est non vide car dense dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $\xi \in G$ , on a donc

$\|l(\xi) - l(a)\| \leq \varepsilon$  et  $\|l(\xi) - l(b)\| \leq \varepsilon$ . Ainsi,  $\|l(a) - l(b)\| \leq 2\varepsilon$ , et ceci pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $l(a)$  et  $l(b)$  sont égaux.

□

Pour le lecteur qui a eu le courage d'arriver jusqu'ici, je lui laisse quelques exercices et quelques question ouvertes pour terminer la partie 6.

Trouver des conditions suffisantes et effectives pour obtenir des familles de suites recouvrantes est de plus en plus difficile au fur et à mesure que la dimension augmente. En effet, on sait bien que l'existence de toutes les limites radiales ne suffit pas pour conclure à l'existence de la limite. Donc, d'une certaine manière, une suite recouvrante doit tourner. On peut par exemple proposer une sorte de spirale s'éloignant de l'origine vers l'infini, mais très lentement pour lui permettre de balayer de plus en plus finement les cercles centrés à l'origine, et d'autant plus finement que le rayon du cercle est grand. Plus précisément, donnons quelques exemples de telles conditions suffisantes laissées en exercices :

Conditions suffisantes pour obtenir une suite recouvrante en dimension 2 :

Par exemple, si on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  et  $\mu_n = \varrho_n \exp(i\theta_n)$ , la suite  $(\mu_n)$  est recouvrante si, par exemple :

1.  $(\varrho_n)_n, (\theta_n)_n$  sont des suites croissantes,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = +\infty$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_{n+1} - \theta_n) = 0$ ,
3. Soit  $\tau_n := \min\{k > 0, \theta_{n+k} > \theta_n + 2\pi\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_{n+\tau_n} - \varrho_n) = 0$ .

Si la suite  $(\tau_n)_n$  était majorée, la condition 3. serait équivalente à la condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varrho_{n+1} - \varrho_n) = 0$ . Mais  $(\tau_n)_n$  n'est jamais majorée! En effet, comme,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_{n+1} - \theta_n) = 0$ , on a nécessairement  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ . Ainsi la condition 3. est très forte et dit d'une certaine manière que la suite  $(\varrho_n)_n$  tend beaucoup moins vite vers l'infini que la suite  $(\theta_n)_n$ .

Ainsi,  $n \mapsto \sqrt{\sqrt{n}} \exp(i2\pi\sqrt{n})$  est recouvrante ( $\tau_n \sim 2\sqrt{n}$ ), en revanche,  $n \mapsto \sqrt{n} \exp(i2\pi\sqrt{n})$  ne satisfait pas 3.

Dans le cas multiplicatif, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda_n z) = 0$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on peut proposer les conditions suffisantes suivantes pour obtenir l'analogie de la propriété de recouvrement du cas additif. On demande que  $\lambda_n = \rho_n \exp(i\eta_n)$  vérifie les conditions suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1, \quad \text{Soit } \tau_n := \min\{k > 0, |\eta_{n+k} - \eta_n| > 2\pi\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{n+\tau_n}|}{|\lambda_n|} = 1.$$

Ainsi,  $\lambda_n \equiv \sqrt{n} \exp(i2\pi\sqrt{n})$  ou  $\lambda_n \equiv \ln(\ln(n))n^i$  convient, mais  $\lambda_n \equiv \exp((1+i)\sqrt{n})$  ou  $\lambda_n \equiv n^{1+i}$  ne satisfait pas 3.

On peut penser aussi à des suites de matrices, à utiliser des suites ergodiques ou des marches aléatoires. On peut se demander aussi à quel point la propriété de recouvrement est-elle nécessaire à la démonstration de théorème 3.

## 7 Généralisation dans les espaces métriques

Pour conclure cette note, on énonce le théorème général suivant qui synthétise les trois clefs de cette note : la continuité, la complétude, les suites recouvrantes. Mutatis-mutandis, on peut faire une démonstration analogue à celle du théorème 3. Mais, pour conclure, on va proposer une nouvelle démonstration basée sur le critère de Cauchy de prolongement d'une fonction.

On rappelle qu'un voisinage époiné de  $x$  dans  $E$  est un sous-ensemble  $V$  de  $E$ , qui ne contient pas  $x$ , mais tel que  $V \cup \{x\}$  contienne un ouvert de  $E$  contenant  $x$ .

### Théorème 4

On se donne :

- $E, F$  deux espaces métriques,  $x \in E$ ,  $f \in C^0(E - \{x\}, F)$ ,
- $\Lambda$  un espace métrique complet, et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n \in C^0(\Lambda, E - \{x\})$ .

Si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Pour tout ouvert non vide  $J$  de  $\Lambda$  et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  
 $\bigcup_{n > N} \mu_n(J)$  est un voisinage époiné de  $x$  dans  $E$ .
- Pour tout  $t \in \Lambda$ ,  $(f(\mu_n(t)))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente dans  $F$ .

Alors  $f$  se prolonge par continuité en  $x$ .

**Démonstration du théorème 4 :** On note  $d$  la métrique de  $F$ . On va montrer que  $f$  vérifie le critère de Cauchy. Plus précisément, soit  $\varepsilon > 0$  fixé, on va montrer qu'il existe un voisinage époiné  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $(y, z) \in V^2$ ,  $d(f(y), f(z)) \leq 4\varepsilon$ . Si  $F$  était complet on pourrait conclure directement que  $f$  se prolonge par continuité en  $x$ . Ici, nous n'avons pas besoin de la complétude de  $F$ , car par hypothèse on sait déjà qu'il existe une suite convergeant vers  $x$ , sans jamais y être égal, telle que son image par  $f$  converge dans  $F$ .

Démontrons donc que  $f$  satisfait le critère de Cauchy. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$  on note  $F_{p,q} := \{t \in \Lambda, d(f(\mu_p(t)), f(\mu_q(t))) \leq \varepsilon\}$ .  $F_{p,q}$  est un fermé de  $\Lambda$  par continuité de  $f, \mu_p, \mu_q$ . Soit  $G_n := \bigcap_{p,q \geq n} F_{p,q}$ .  $G_n$  est un fermé de  $\Lambda$  comme intersection de fermé. Comme, pour  $t \in \Lambda$ ,

$(f(\mu_n(t)))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy, car convergente,  $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ .  $\Lambda$  étant complet, il existe un entier  $N$  tel que  $G_N$  contienne un ouvert non vide de  $\Lambda$  noté  $J_0$ . Ainsi, nous savons que :

$$\forall t \in J_0, \forall n \geq N, \quad d(f(\mu_n(t)), f(\mu_N(t))) \leq \varepsilon. \quad (8)$$

Fixons  $t_0 \in J_0$ . Par continuité de  $t \mapsto f(\mu_N(t))$  en  $t = t_0$ , il existe un ouvert  $J$  contenu dans  $J_0$  et contenant  $t_0$  tel que pour tout  $t$  dans  $J$ ,  $d(f(\mu_N(t)), f(\mu_N(t_0))) \leq \varepsilon$ . Ainsi, nous obtenons une deuxième inégalité :

$$\forall (s, t) \in J^2, \quad d(f(\mu_N(t)), f(\mu_N(s))) \leq 2\varepsilon, \quad (9)$$

car  $d(f(\mu_N(t)), f(\mu_N(s))) \leq d(f(\mu_N(t)), f(\mu_N(t_0))) + d(f(\mu_N(t_0)), f(\mu_N(s)))$ .

Comme, l'inégalité (8) est vérifiée pour tout  $t$  dans  $J$ , en combinant avec l'inégalité (9) on en déduit que :

$$\forall (s, t) \in J^2, \forall n \geq N, \quad d(f(\mu_n(t)), f(\mu_n(s))) \leq 4\varepsilon. \quad (10)$$

En effet, on a encore grâce à l'inégalité triangulaire :

$$d(f(\mu_n(t)), f(\mu_n(s))) \leq d(f(\mu_n(t)), f(\mu_N(t))) + d(f(\mu_N(t)), f(\mu_N(s))) + d(f(\mu_N(s)), f(\mu_n(s))).$$

Posons  $V := \bigcup_{n \geq N} \mu_n(J)$ . D'après la propriété de recouvrement de la famille de suite  $(\mu_n(t))_{n \in \mathbb{N}, t \in J}$ ,

$V$  est un voisinage époiné de  $x$  dans  $E$ . De plus, grâce à l'inégalité (10), on sait que pour tout

$(y, z) \in W := \bigcup_{n \geq N} \{(\mu_n(t), \mu_n(s)), (t, s) \in J^2\}$ ,  $d(f(y), f(z)) \leq 4\varepsilon$ . Mais  $W = V^2$ , donc le critère de Cauchy est satisfait en  $x$ .  $\square$

**Remerciements :** Pour ce travail je tiens à remercier Thierry Goudon et François Rouvière de l'Université de Nice ainsi que Giuseppe Toscani de l'Università di Pavia.

## Références

- [1] *Demailly*, Analyse numérique et équations différentielles, pug, (1991), voir p.143.
- [2] *Feller*, Vol II, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, (1971), voir p. 574-581.
- [3] *Goudon, Junca, Toscani*, Fourier-Based Distances and Berry-Esseen Like Inequalities for Smooth Densities, Monatshefte fur Mathematik, 135, 115-136, (2002), voir p. 128-129.
- [4] *Gourdon*, Analyse, les maths en tête, Ellipses, (1994), voir p. 394.
- [5] *Mialet, Tissier*, Analyse à une variable réelle, Bréal, (2000), voir p. 129.