



HAL
open science

Moyennes, iterations et convergence quadratique

Stéphane Junca

► **To cite this version:**

Stéphane Junca. Moyennes, iterations et convergence quadratique. RMS : revue de la filière mathématiques [2004-..], 1998, 3-4, pp.359-363. hal-01312349

HAL Id: hal-01312349

<https://hal.science/hal-01312349>

Submitted on 5 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Moyennes, itérations et convergence quadratique

Stéphane Junca

*Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621,
Université de Nice-Sophia Antipolis,
Parc Valrose, B.P. 71, F-06108 Nice, Cédex 2, France,*

On étend à des moyennes générales ce qui est connu pour la moyenne arithmético-géométrique, avec deux variables puis avec un nombre quelconque de variables.

En général, il est très classique de montrer qu'une suite itérative $X_{n+1} = F(X_n)$ converge très rapidement vers un point fixe L de F si la différentielle de F en L est nulle : $DF(L) = 0$. Ici, on donne une famille de fonctions F pour laquelle la différentielle évaluée en L n'est pas nulle mais dont les suites itératives convergent très rapidement. En fait, l'application F n'est même pas contractante (le rayon spectral de $DF(L)$ étant égal à 1). Et cependant la direction associée à la valeur propre nulle de $DF(L)$ est super attractive.

Les suites arithmético-géométrique, arithmético-harmonique et harmonico-géométrique sont des exemples bien connus de ce phénomène étrange de super-convergence.

1 Dans \mathbb{R}^2

Définition 1 (Moyenne)

Soit $I =]0, +\infty[$ μ est une moyenne si μ est une application de $I \times I$ dans I telle que :

- (i) $\forall (x, y) \in I \times I, \mu(x, y) = \mu(y, x)$
- (ii) $\forall (x, y) \in I \times I, \min(x, y) \leq \mu(x, y) \leq \max(x, y)$

On dit que la moyenne est stricte si

- (iii) $\forall (x, y) \in I \times I, \mu(x, y) = x \iff x = y$.

Exemples de moyennes strictes : \sqrt{xy} , $\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \neq 0$, voir [1], ...

Définition 2 (Convergence quadratique)

Soit $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^d convergeant vers L . On dit que la convergence est quadratique si $X_{n+1} - L = O(\|X_n - L\|^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\|\cdot\|$ est une norme de \mathbb{R}^d .

La convergence quadratique est très rapide. En pratique, elle double le nombre de décimales à chaque itération. Ainsi, elle sature la précision d'une calculatrice en 3 ou 4 itérations. La suite de Héron définie par $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 = 1$, a une convergence quadratique vers $\sqrt{2}$. Plus généralement, la méthode de Newton permet d'approcher la racine d'une équation avec une convergence quadratique.

Théorème 1

Soient μ et ν deux moyennes de classe C^2 telles que : l'une des deux moyennes est stricte et

$$\forall (x, y) \in I \times I, \mu(x, y) \geq \nu(x, y). \quad (1)$$

Soit $F(x, y) = \begin{pmatrix} \mu(x, y) \\ \nu(x, y) \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ la suite définie par

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n) & n \in \mathbb{N} \\ X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in I \times I \end{cases}$$

Alors les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Leur limite $m(a, b)$ est une moyenne. Si μ et ν sont strictes alors m est stricte. La convergence est quadratique.

Les propriétés de $m(., .)$ sont évidentes. En revanche, la convergence quadratique des suites est plutôt surprenante.

Remarque 1 Si μ ν ne sont pas strictes, $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ ne sont plus nécessairement adjacentes. En revanche la convergence reste quadratique.

DÉMONSTRATION : D'après (1) $x_1 \geq y_1$, puis, par récurrence sur n d'après (1) et (ii) on obtient pour $n \geq 1$, $\max(a, b) \geq x_1 \geq x_n \geq x_{n+1} \geq y_{n+1} \geq y_n \geq y_1 \geq \min(a, b)$. Donc $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont des suites monotones et convergent respectivement vers x et y appartenant à $[\min(a, b), \max(a, b)]$. Par continuité de F , on a $x = \mu(x, y)$ et $y = \nu(x, y)$. Comme l'une des deux moyennes est stricte on a forcément $x = y$. Donc ces suites sont adjacentes.

Démontrons, maintenant, que la convergence est quadratique. Comme $\mu(x, x) = x$ on a en dérivant et en utilisant la symétrie $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, x) = 1$ et $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, x) = \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, x)$. Ainsi la matrice de la différentielle de F sur la première bissectrice est

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $e_n = x_n - m(a, b)$, $f_n = y_n - m(a, b)$ et $L = m(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le développement de Taylor de F en L donne $X_{n+1} - L = F(X_n) - F(L) = A(X_n - L) + O(e_n^2 + f_n^2)$. En utilisant le fait que : $e_{n+1} \geq 0 \geq f_{n+1}$ car $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes, on a

$$0 \leq e_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + f_n) + O(e_n^2 + f_n^2) \quad (2)$$

$$0 \geq f_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + f_n) + O(e_n^2 + f_n^2) \quad (3)$$

On en déduit l'encadrement suivant : $\frac{1}{2}(e_n + f_n) = O(e_n^2 + f_n^2)$. En reportant cette dernière estimation dans (2) et (3) on obtient $e_{n+1} = O(e_n^2 + f_n^2)$ et $f_{n+1} = O(e_n^2 + f_n^2)$. \square

Remarque 2

Notons $E_n = X_n - L$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y < 0\}$ et $D = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$. Pour tout $n \geq 1$, E_n appartient à Q . D'autre part, A est la matrice de la projection orthogonale sur D . Ainsi AE_n appartient à D . Mais $D \cap Q = \emptyset$ et pour $Y \in D$ la distance euclidienne de Y à Q est égale à la norme euclidienne de Y divisée par $\sqrt{2}$. Or $E_{n+1} = AE_n + O(\|E_n\|^2)$ appartient à Q . On a donc forcément que la distance de AE_n à Q est en $O(\|E_n\|^2)$. Ce qui nous donne $AE_n = O(\|E_n\|^2)$ et ainsi $E_{n+1} = O(\|E_n\|^2)$.

2 Généralisations dans \mathbb{R}^d

On suppose que $d \geq 3$. On note S_d le groupe des permutations de $\{1, \dots, d\}$.

Définition 3 (moyenne à d variables)

μ est une moyenne à d variables si μ est une application de I^d dans I telle que :

- (i) $\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in I^d, \forall \sigma \in S_d, \mu(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = \mu(x_1, \dots, x_d)$
- (ii) $\forall x \in I^d, \min_{i=1}^d x_i \leq \mu(x) \leq \max_{i=1}^d x_i$

On dit que la moyenne est stricte si

- (iv) $\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in I^d, \mu(x) = x_1 \iff x_1 = \dots = x_d$.

Exemples de moyennes à 3 variables strictes : $(x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{x_1^p + x_2^p + x_3^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \neq 0, \dots$

Théorème 2

Soit μ_1, \dots, μ_d des moyennes à d variables de classe C^2 telles que : μ_1 ou μ_d est stricte et

$$\forall k \in \{2, \dots, d-1\}, \forall x \in I^d, \mu_1(x) \geq \mu_k(x) \geq \mu_d(x). \quad (4)$$

Soit $F(x) = \begin{pmatrix} \mu_1(x) \\ \vdots \\ \mu_d(x) \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{d,n} \end{pmatrix}$ la suite définie par

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n) & n \in \mathbb{N} \\ X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in I^d \end{cases}$$

Alors les suites $(x_{1,n})_{n \geq 1}$ et $(x_{d,n})_{n \geq 1}$ sont adjacentes de limite $m(a)$. $m(\cdot)$ est une moyenne. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de la diagonale : $D^+ = \{x \in I^d / x_1 = \dots = x_d\}$ et la convergence est quadratique.

La moyenne arithmético-géométrico-harmonique est un exemple classique de convergence quadratique.

DÉMONSTRATION : Supposons que μ_1 est stricte. Notons $\alpha = \max_{i=1}^d a_i$ et $\beta = \min_{i=1}^d a_i$. On montre, comme dans la démonstration du théorème 1, que

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{2, \dots, d-1\}, \quad \alpha \geq x_{1,1} \geq x_{1,n} \geq x_{1,n+1} \geq x_{1,n+1} \geq x_{d,n} \geq x_{d,1} \geq \beta, \quad (5)$$

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{2, \dots, d-1\}, \quad x_{1,n} \geq x_{k,n} \geq x_{d,n} \quad (6)$$

Donc $(x_{1,n})_{n \geq 1}$ et $(x_{d,n})_{n \geq 1}$ sont des suites monotones et convergent respectivement vers x_1 et x_d appartenant à I . Pour tout $k \in \{2, \dots, d-1\}$ la suite $(x_{kn})_{n \geq 1}$ est contenue dans $[\beta, \alpha]$ d'après (6). Donc on peut extraire une sous-suite telle que, pour tout $k \in \{2, \dots, d-1\}$, $(x_{k\phi(n)})_{n \geq 1}$ converge vers $x_k \in [\beta, \alpha]$. Remarquons que $(x_{1,\phi(n)+1})_{n \geq 1}$ converge aussi vers x_1 . Donc, par continuité de μ_1 on a $x_1 = \mu_1(x_1, \dots, x_d)$. Comme μ_1 est stricte on a forcément $x_1 = \dots = x_d$. Donc, $(x_{1,n})_{n \geq 1}$ et $(x_{d,n})_{n \geq 1}$ sont des suites adjacentes. Et, par (6), (X_n) converge vers $L \in D^+$.

Il reste à montrer que la convergence est quadratique. Par symétrie et du fait que F est l'identité sur D^+ , la différentielle de F en L est :

$$A = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $e_{in} = x_{in} - l$, où l est une composante de L , et $\varepsilon_n = \left(\sum_{i=1}^d e_{in}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Le développement de Taylor de F en L donne $X_{n+1} - L = F(X_n) - F(L) = A(X_n - L) + O(\varepsilon_n^2)$. On a pour $i = 1, \dots, d$

$$e_{i,n+1} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d e_{j,n} + O(\varepsilon_n^2) \quad (7)$$

De $e_{1,n+1} \geq 0 \geq e_{d,n+1}$ on tire, $\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d e_{j,n} = O(\varepsilon_n^2)$, donc, en revenant à (7), $\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n^2)$. □

Remarque 3

On a une interprétation géométrique similaire au cas où $d = 2$. Notons $E_n = X_n - L$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^d / x_1 > 0 \text{ et } x_d < 0\}$ et D la droite contenant D^+ . Pour tout $n \geq 1$, E_n appartient à Q . Comme A est la matrice de la projection orthogonale sur D , et que la distance euclidienne d'un élément de D à Q est proportionnelle à la norme euclidienne de cet élément, on a nécessairement $AE_n = O(\|E_n\|^2)$. Ce qui nous donne le résultat.

Références

- [1] Gustave Choquet, Cours de Topologie, Masson (2^{ème} éd), (1992), p. 161-167.
- [2] Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Presse Universitaire de Grenoble, (1991), p. 95-115.

Je remercie François Rouvière pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce papier.