



**HAL**  
open science

## Reflections of one-dimensional oscillations

Stéphane Junca

► **To cite this version:**

Stéphane Junca. Reflections of one-dimensional oscillations. Communications in Partial Differential Equations, 1998, 23 (3-4), pp.727-759. 10.1080/03605309808821362 . hal-01312324

**HAL Id: hal-01312324**

**<https://hal.science/hal-01312324v1>**

Submitted on 5 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# REFLEXIONS D'OSCILLATIONS MONODIMENSIONNELLES

**Stéphane Junca**

*Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621,  
Université de Nice-Sophia Antipolis,  
Parc Valrose, B.P. 71, F-06108 Nice, Cédex 2, France,*

## Abstract

We prove the propagation of oscillations with an asymptotic development for an oscillating initial boundary value problem of semilinear hyperbolic systems in the spirit of J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch. In particular we simplify the Joly-Métivier-Rauch's proof for the Cauchy problem. Then, we show the new phenomenon of localised oscillations.

## 1 Introduction

Soit  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution du système (de taille  $N$ ) hyperbolique semi-linéaire avec donnée initiale et condition au bord régulières oscillantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(t, x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{u}), \quad t, x > 0 \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{H} \left( x, \frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon} \right), \quad x > 0 \\ \mathbf{B} \left( t, \mathbf{u}(t, 0), \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon} \right) = 0, \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Cet article étudie le comportement asymptotique de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tends vers 0, c'est à dire pour les hautes fréquences. On ne fait pas d'hypothèse de compatibilité au coin. Ainsi, la solution de (1) sera seulement régulière par morceaux.

Dans [10] est établi, pour le problème de Cauchy oscillant, le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \mathbf{u}^\varepsilon(t, x) - \mathbf{U} \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}(t, x)}{\varepsilon} \right) \right) = 0 \quad (2)$$

où  $\mathbf{U} \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}(t, x)}{\varepsilon} \right) = \sum_{j=1}^N U_j \left( t, x, \frac{\varphi_j(t, x)}{\varepsilon} \right) \mathbf{r}_j(t, x),$

$\mathbf{A}(t, x) \mathbf{r}_j(t, x) = \lambda_j(t, x) \mathbf{r}_j(t, x)$ , et les phases  $\varphi_j$  étant solution de l'équation eikonale :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j = 0 \\ \varphi_j(0, x) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

Comme dans le cas linéaire (voir [13]), les oscillations sont polarisées suivant les vecteurs propres de la matrice et se propagent à la vitesse des valeurs propres associées. Le profil  $\mathbf{U}(t, x, \vec{\theta})$  est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles comme dans [15] avec des termes intégrodifférentiels traduisant l'effet non linéaire d'interaction d'oscillations par **résonance**.

Retenons que pour le problème de Cauchy il y a exactement N phases. La démonstration de 2 dans [10] repose sur une méthode de point fixe. A la page , nous donnons une démonstration nouvelle et plus simple de la preuve de [10] en injectant le développement asymptotique dans l'équation du point fixe utilisée pour obtenir la solution exacte, et en estimant directement le résidu.

Pour le problème mixte oscillant nous commencerons par chercher l'information la plus simple sur la nature des oscillations : les *phases* . Contrairement au cas précédent, leur nombre est variable, pouvant aller de N à  $O(N^3)$  suivant le spectre des données initiales, les phases initiales et la nonlinéarité du système (1). De plus, le calcul des phases n'est plus du tout immédiat. Le coin engendre des singularités dans l'espace des (t,x). Un découpage classique du quadrant utilisé pour la première fois dans ce cadre nous permet d'éliminer les phases inutiles et d'obtenir une description précise des oscillations. Ensuite, nous trouvons un profil solution de problèmes de Goursat.

L'exemple suivant est un des plus simples, il est inspiré d'un système de [16]. Il met en évidence le découpage naturel du quadrant, les phases intervenant par secteur : les phases localisées, le profil défini par secteur : les profils localisés, et le phénomène non linéaire de résonance localisée et le phénomène d'oscillations

localisées sur  $\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / 0 < t < 1 \text{ et } 0 < x < 2 - t\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \lambda_1 \partial_x) u_1 = u_2^3 u_3, \quad u_1(0, x) = \exp\left(\iota \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_1(t, 0) = \exp\left(\iota \frac{t^2}{\varepsilon}\right), \\ (\partial_t + \lambda_2 \partial_x) u_2 = 0, \quad u_2(0, x) = \exp\left(\iota \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_2(t, 0) = u_3(t, 0) + \exp\left(\iota \frac{t^2}{\varepsilon}\right), \\ (\partial_t + \lambda_3 \partial_x) u_3 = 0, \quad u_3(0, x) = \exp\left(\iota \frac{x}{\varepsilon}\right), \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $\iota := \sqrt{-1}$  et  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ . La résolution explicite de ce système se fait sur les zones :

$$\begin{aligned} \Omega^0 &:= \left\{ (t, x) \in \Omega / 0 < t < \frac{1}{4} \text{ et } \lambda_1 t < x < 2 \right\}, \\ \Omega^1 &:= \left\{ (t, x) \in \Omega / 0 < t < \frac{1}{4} \text{ et } \lambda_2 t < x < \lambda_1 t \right\}, \\ \Omega^2 &:= \left\{ (t, x) \in \Omega / 0 < t < \frac{1}{4} \text{ et } 0 < x < \lambda_2 t \right\}. \end{aligned}$$

Les phases intervenant dans ce problème sont a priori :  $\phi_j(t, x) = x - \lambda_j t$  et  $\psi_j(t, x) = (x - \lambda_j t)^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Nous avons simplement  $u_3(t, x) = \exp\left(\iota \frac{\phi_3(t, x)}{\varepsilon}\right)$  sur  $\Omega$ .

Pour  $u_2$  nous avons  $u_2(t, x) = \exp\left(\iota \frac{\phi_2(t, x)}{\varepsilon}\right)$  sur  $\Omega^0 \cup \Omega^1$ , et  $u_2(t, x) = \exp\left(\iota \frac{-\phi_2(t, x)}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\iota \frac{\psi_2(t, x)}{\varepsilon}\right)$  sur  $\Omega^2$ .

Pour  $u_1$  nous avons  $u_1(t, x) = \exp\left(\iota \frac{\phi_1(t, x)}{\varepsilon}\right)$  dans  $\Omega^0$ . Dans  $\Omega^2$ , nous faisons un calcul explicite :

$$u_1(t, x) = u_1\left(t - \frac{1}{2}x, 0\right) + \int_{t - \frac{1}{2}x}^t (u_2^3 u_3)(s, x - \lambda_1(t - s)) ds$$

$$\begin{aligned}
u_1(t, x) &= \exp\left(\iota \frac{(t - \frac{1}{2}x)^2}{\varepsilon}\right) \\
&+ \int_{t-\frac{1}{2}x}^t \left[ \exp\left(\iota \frac{-3\phi_2 + \phi_3}{\varepsilon}\right) \right. \\
&+ \exp\left(\iota \frac{3\psi_2 + \phi_3}{\varepsilon}\right) + 3 \exp\left(\iota \frac{-2\phi_2 + \psi_2 + \phi_3}{\varepsilon}\right) \\
&\left. + 3 \exp\left(\iota \frac{-\phi_2 + 2\psi_2 + \phi_3}{\varepsilon}\right) \right] (s, x - \lambda_1(t - s)) ds \\
u_1(t, x) &= \exp\left(\iota \frac{\psi_1(t, x)}{4\varepsilon}\right) + \frac{x}{2} \exp\left(\iota \frac{-2\phi_1(t, x)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme s'obtient par l'identité :

$$-2\phi_1 \equiv -3\phi_2 + \phi_3$$

et  $\phi_1(s, x - \lambda_1(t - s)) = \phi_1(t, x)$ , on dit qu'il y a résonance. Le troisième terme s'obtient par le lemme de la phase non stationnaire puisque  $\frac{d}{ds}(3\psi_2 + \phi_3)$ ,  $\frac{d}{ds}(-2\phi_2 + \psi_2 + \phi_3)$  et  $\frac{d}{ds}(-\phi_2 + 2\psi_2 + \phi_3)$  ne s'annulent pas sur le segment  $\{(s, x - \lambda_1(t - s)), s \in [t - \frac{1}{2}x, t]\}$ .

Dans  $\Omega^1$ , il suffit de continuer le même calcul sauf que  $u_2$  n'a plus la même expression :

$$\begin{aligned}
u_1(t, x) &= [u_1(2t - x, 2t - x)] + \left[ \int_{2t-x}^t (u_2^3 u_3)(s, x - \lambda_1(t - s)) ds \right] \\
&= \left[ \exp\left(\iota \frac{\psi_1(2t - x, 2t - x)}{4\varepsilon}\right) + \frac{x}{2} \exp\left(\iota \frac{-2\phi_1(2t - x, 2t - x)}{\varepsilon}\right) \right] \\
&+ O(\varepsilon) + \left[ \int_{2t-x}^t \left( \exp\left(\iota \frac{3\phi_2 + \phi_3}{\varepsilon}\right) \right) (s, x - \lambda_1(t - s)) ds \right] \\
u_1(t, x) &= \left[ \exp\left(\iota \frac{\psi_1(t, x)}{4\varepsilon}\right) + \frac{x}{2} \exp\left(\iota \frac{-2\phi_1(t, x)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \right] + [O(\varepsilon)].
\end{aligned}$$

Dans  $\Omega^1$  il y a encore résonance.

Ainsi, par rapport à l'équation (2), les phases  $\varphi_j$  sont vectorielles. Ces phases et les profils  $U_j$  changent par zone. Récapitulons ces derniers résultats dans un tableau :

	dans $\Omega^0$	dans $\Omega^1$	dans $\Omega^2$
$\varphi_1 =$	$\phi_1$	$(\phi_1, \psi_1)$	$(\phi_1, \psi_1)$
$\varphi_2 =$	$\phi_2$	$\phi_2$	$(\phi_2, \psi_2)$
$\varphi_3 =$	$\phi_3$	$\phi_3$	$\phi_3$
$U_1(t, x, \theta) =$	$\exp(\iota\theta)$	$\frac{x}{2} \exp(-2\iota\theta_1) + \exp(\iota\theta_2)$	$\frac{x}{2} \exp(-2\iota\theta_1) + \exp(\iota\theta_2)$
$U_2(t, x, \theta) =$	$\exp(\iota\theta)$	$\exp(\iota\theta)$	$\exp(-\iota\theta_1) + \exp(\iota\theta_2)$
$U_3(t, x, \theta) =$	$\exp(\iota\theta)$	$\exp(\iota\theta)$	$\exp(\iota\theta)$

Notons que le nombre de composantes de  $\varphi_j$  peut changer par zone. De même la variable  $\theta$  appartient à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  :  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , suivant les zones.

En général, on ne peut espérer calculer la solution exacte  $u^\varepsilon$ , en revanche les phases seront bien plus faciles à appréhender. Elles prendront en compte les réflexions et les résonances, et seront localisées dans  $1 + P$  domaines où  $P$  est le nombre de valeurs propres distinctes et strictement positives de  $A$ .

Pour simplifier l'exposé des résultats de cette article, nous nous plaçons dans le cadre strictement hyperbolique non caractéristique.

**Remarque 1** *On pourrait étudier le système (1) dans le cadre hyperbolique avec multiplicités constantes et avec bord caractéristique à multiplicité constante. Ce qui n'est pas fondamentalement différent du cas traité ici.*

*En effet, le bord caractéristique ne pose pas ici de problème théorique. D'ailleurs, on étudiera  $P$  problèmes de Goursat avec bord caractéristique.*

*Une multiplicité constante, strictement supérieur à 1, permettra, en plus, de propager des oscillations au sein de toutes les composantes de  $u$  associées à la même valeur propre. Ceci est déjà clair pour un système linéaire.*

Dans ce travail, nous commençons par donner un résultat d'existence de la solution exacte  $u^\varepsilon$  sur un domaine indépendant de  $\varepsilon$  dans la section 2. En effet, pour un système semilinéaire, nous donnerons un résultat classique d'existence qui ne dépend que des bornes  $L^\infty$  des données initiales.

Dans la section 3, nous justifions un développement asymptotique du type de [10] pour un problème mixte.

Dans la section 4, nous donnons un autre développement asymptotique grâce à un nouveau point de vue : la notion de phases localisées. Le point important sera la construction de ces phases et des profils associés.

Dans la section 5, nous montrons que notre choix de phases localisées est optimal dans le sens où on ne peut pas réduire le nombre de phases pour obtenir la validité du développement asymptotique.

Les résultats techniques de contractance, utiles pour démontrer l'existence de  $u^\varepsilon$  sur un domaine indépendant de  $\varepsilon$ , et pour justifier l'existence des profils sont démontrés dans la section 6. En particulier, nous prouvons aussi une contractance dans  $L_t^\infty L_x^1$  pour valider le développement asymptotique.

Nous finissons, dans la section 7, par comparer le développement asymptotique de la section 3 et celui de la section 4 : sous des hypothèses faibles, ils sont égaux. L'intérêt des profils localisés de la section 4 est d'éliminer toutes les variables de phases superflues et d'être uniquement déterminés modulo un choix de base dans l'espace des phases.

## 2 La solution exacte

La première étape consiste à montrer l'existence de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  sur un domaine indépendant de  $\varepsilon$ . Nous le démontrerons à l'aide d'une méthode de point fixe.

Soit  $P$  le nombre de valeurs propres strictement positives de  $A$ . On suppose que les données de l'équation (1) vérifient :

- $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \theta)$  est continue en  $\mathbf{x}$  à valeurs dans l'espace des fonctions presque périodiques en  $\theta$  (cf [5]), à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  :  $\mathbf{H} \in C^0(\mathbb{R}, C_{pp}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N))$ ,
- $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, M_N(\mathbb{R}))$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  
 $\mathbf{B}(t, u, \theta) \in C^1(\mathbb{R}^{1+N}, C_{pp}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^P))$ ,

Nous nous plaçons dans le cadre strictement hyperbolique non caractéristique. Donc,  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  possède  $N$  valeurs propres réelles distinctes, non nulles :

$$\lambda_1(t, x) > \lambda_2(t, x) > \dots > \lambda_P(t, x) > 0 > \lambda_{P+1}(t, x) > \dots > \lambda_N(t, x),$$

et une base de vecteurs propres à droite et à gauche :

$$\mathbf{A}(t, x)\mathbf{r}_j(t, x) = \lambda_j(t, x)\mathbf{r}_j(t, x), \quad \mathbf{l}_j(t, x)\mathbf{A}(t, x) = \lambda_j(t, x)\mathbf{l}_j(t, x)$$

avec la normalisation  $\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{r}_j \equiv 1$  pour  $j = 1, \dots, N$ .

Nous prendrons  $\mathbf{r}_j, \mathbf{l}_j(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$ . Ainsi  $\mathbf{u}(t, x) = \sum_{j=1}^N u_j(t, x)\mathbf{r}_j(t, x)$ .

Les champs de vecteurs caractéristiques sont :  $X_i(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i(t, x)\frac{\partial}{\partial x}$  pour  $i = 1 \dots N$ . Notons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_- \quad \text{où} \quad \mathbf{u}_+(t, x) := \sum_{j=1}^P u_j(t, x)\mathbf{r}_j(t, x) \\ & \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_-(t, x) := \sum_{j=P+1}^N u_j(t, x)\mathbf{r}_j(t, x). \end{aligned} \tag{4}$$

Le problème est supposé bien posé sur le bord, donc on peut exprimer  $\mathbf{u}_+(t, 0)$  en fonction de  $\mathbf{u}_-(t, 0)$  à l'aide d'une application

$\mathbf{G}(t, \mathbf{u}_-, \theta) \in C^1(\mathbb{R}^N, C_{pp}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N))$  telle que :

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}_- \in \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}_{P+1}(t, 0) + \dots + \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}_N(t, 0),$$

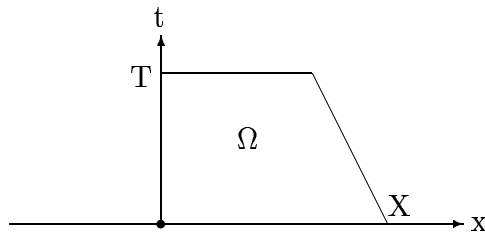
$$\mathbf{G}(t, \mathbf{u}_-, \theta) \in \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}_1(t, 0) + \dots + \mathbb{R} \cdot \mathbf{r}_P(t, 0).$$

Notre étude étant a priori locale, on se contentera de travailler sur

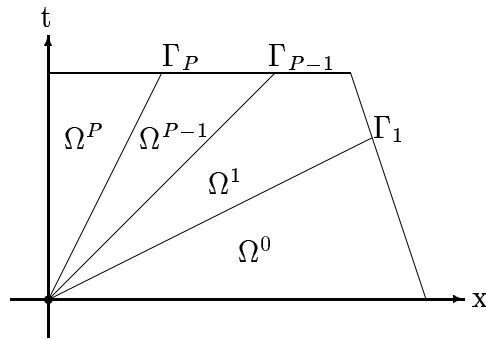
$$\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq T \text{ et } 0 \leq x \leq X - \Lambda t\}$$

où  $\Lambda = \sup \{\lambda_i(t, x) / P < i \leq N \text{ et } (t, x) \in [0, T] \times [0, X]\}$ ,  $X$  est fixé strictement positif. En revanche,  $T$  pourra diminuer, tout en restant strictement positif.

On notera aussi  $\Omega = \Omega(T)$ .



On appelle  $i$ -caractéristique une courbe intégrale maximale dans  $\Omega$  du champ  $X_i$ . Pour  $q = 1$  à  $P$ , on appelle  $\Gamma_q$  la courbe intégrale de  $X_q$  issue de l'origine. Ces caractéristiques entrantes propagent des singularités issues du coin (cf [4]). On note aussi  $\Gamma_0$  l'axe des  $x$  et  $\Gamma_{P+1}$  celui des  $t$ . Ainsi  $\Omega$  se partitionne en  $P+1$  régions :  $\Omega^q$  comprise entre  $\Gamma_q$  et  $\Gamma_{q+1}$  pour  $q = 0$  à  $P$ . Sur ces domaines, on sait (voir [4]) que la solution est continue jusqu'au bord si les données sont continues. Lorsque les valeurs propres de  $A$  sont constantes, on obtient la figure suivante :



Pour les calculs à venir, exprimons chaque  $i$ -caractéristique issue d'un point  $(t, x)$  de  $\Omega$  comme le graphe de la solution globale dans  $\Omega$  de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_i}{ds}(s; t, x) = \lambda_i(s, \gamma_i(s; t, x)) \\ \gamma_i(t; t, x) = x \end{cases}$$



Le système (1) avec les hypothèse ci dessus est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i(t, x)u_i(t, x) = f_i(t, x, \mathbf{u}(t, x)) \quad i = 1 \dots N \quad \text{sur } \Omega, \\ u_i(0, x) = H_i\left(x, \frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon}\right) \quad i = 1 \dots N \quad \text{sur } \{t = 0\}, \\ u_j(t, 0) = G_j\left(t, \mathbf{u}_-(t, 0), \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}\right) \quad j = 1 \dots P \quad \text{sur } \{x = 0\}, \end{array} \right. \quad (5)$$

où

$$f_i(t, x, \mathbf{u}) := \mathbf{l}_i(t, x) \cdot \left( \mathbf{f}(t, x, \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^N u_j(t, x)(\partial_t \mathbf{r}_j(t, x) + \mathbf{A}(t, x)\partial_x \mathbf{r}_j(t, x)) \right),$$

$$H_i(x, \theta) := \mathbf{l}_i(t, x) \cdot \mathbf{H}(x, \theta) \text{ et } G_j(t, \mathbf{u}_-, \theta) := \mathbf{l}_i(t, x) \cdot \mathbf{G}(x, \mathbf{u}_-, \theta).$$

L'espace naturel des solutions à donnée de Cauchy continue est l'espace des fonctions continues jusqu'au bord avec discontinuités polarisées sur les caractéristiques issues du coin :

$$C_{\Gamma}^0(\Omega, \mathbb{R}^N) = \left\{ u / \mathbf{u}_- \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^S), u_q \in C_u^0(\Omega - \Gamma_q, \mathbb{R}) \quad 1 \leq q \leq P \right\}$$

où  $C_u^0$  désigne les fonctions continues jusqu'au bord.

Pour obtenir la contractance de la réflexion, on mettra un poids  $c$ ,  $0 < c \leq 1$ ,  $c$  indépendant de  $\varepsilon$ , sur l'onde entrante de la manière suivante : pour  $\mathbf{u}$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$  on définit

$$\mathbf{u}_c := c\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-. \quad (6)$$

Et soit l'opérateur

$$\begin{array}{ccc} \Pi_c^\varepsilon : C_{\Gamma}^0(\Omega, \mathbb{R}^N) & \longrightarrow & C_{\Gamma}^0(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{v} \end{array} \quad (7)$$

où  $\mathbf{v}$  est défini dans l'ordre suivant, pour  $(t, x) \in \Omega, 1 \leq i \leq N$  :

1. si la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $x$  :

$$v_i(t, x) = H_{ci}\left(\gamma_i(0; t, x), \frac{\varphi_0(\gamma_i(0; t, x))}{\varepsilon}\right) + \int_0^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{u}(s, \gamma_i(s; t, x))) ds$$

2. sinon la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $t$  en  $\tau$  et  $i \leq P$  :

$$v_i(t, x) = g_{ci}^\varepsilon(\tau, v_-(\tau, 0)) + \int_{\tau}^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{u}(s, \gamma_i(s; t, x))) ds$$

avec  $g_{c_i}^\varepsilon(t, \mathbf{u}_-) := cG_i\left(t, \mathbf{u}_-, \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}\right)$  et

$$f_{c_i}(t, x, \mathbf{u}_c) := \begin{cases} cf_i(t, x, \mathbf{u}) & i = 1, \dots, P \\ f_i(t, x, \mathbf{u}) & i = P + 1, \dots, N \end{cases}.$$

Le problème (1) se ramène à résoudre l'équation  $\mathbf{u}_c^\varepsilon = \Pi_c^\varepsilon(\mathbf{u}_c^\varepsilon)$ . On va utiliser le résultat suivant que l'on démontrera plus tard :

### Proposition 1

Il existe  $T_0 > 0$  et  $1 \geq c > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\Pi_c^\varepsilon$  soit uniformément contractant en norme  $L^\infty$  et en norme  $L_t^\infty L_x^1$  sur  $\{\mathbf{u} \in C_T^0(\Omega(T_0), \mathbb{R}^N) / \|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega(T_0)} \leq 2\|\mathbf{H}\|_{\infty, [0, X] \times \mathbb{R}}\}$

**Remarque 2** Cette contractance est indépendante de  $\varepsilon$ . En fait, elle ne dépend que de la norme  $L^\infty$  des données. Nous le démontrerons plus tard par le théorème 4.

La première contractance sur  $\Omega$  nous donnera l'existence de la solution  $u^\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . La deuxième contractance nous sera utile, plus tard, pour valider l'optique géométrique de (5). De cette proposition résulte le

### Corollaire 1 (Existence pour le problème oscillant)

Il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  le problème mixte semilinéaire oscillant (5) admette une solution unique  $\mathbf{u}^\varepsilon \in C_T^0(\Omega(T_0), \mathbb{R}^N)$ .

## 3 Une première asymptotique

On développera dans la section suivante le point clef de l'article: les oscillations localisées. Ici, nous généralisons des résultats de [10] au problème mixte (1), et, nous mettons en place les notions indispensables à l'étude du comportement asymptotique de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 : les phases, les profils, les opérateurs de moyennes, le lemme de la phase non stationnaire.

### 3.1 Les Phases.

#### Définition 1 (Espace de phases [10])

Soit  $U$  un ouvert de  $\Omega$ .  $E$  est un espace de phases sur  $U$  si  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N$  où chaque  $E_i$  est un sous espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de

$$\Phi_i = \{\psi \in C^\infty(\overline{U}, \mathbb{R}), \text{ tel que } X_i \psi \equiv 0\}.$$

Posons  $E_+ = E_1 \times \dots \times E_P$  et  $E_- = E_{P+1} \times \dots \times E_N$ .

Par exemple  $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_N$  est le plus grand espace de phases.

**Définition 2 (résonances, [10] )**

Soient  $E$  un espace de phases,  $F = E_1 + E_2 + \dots + E_N$ . On dit que  $E$  est stable par résonances si :

$$\forall \psi \in F, \forall i, X_i \psi \equiv 0 \Rightarrow \psi \in E_i.$$

**Définition 3 (Réflexions)**

Soit  $E$  un espace de phases sur  $\Omega^P$ . On dit que  $E$  est stable par réflexions si :  $\forall i \leq P, \forall j > P, \forall \psi \in E_j, \exists \varphi \in E_i$  tel que  $\psi = \varphi$  sur  $x = 0$ .

**Proposition 2 (Nombre fini de phases)**

Il existe  $E$  espace de phases sur  $\Omega$  stable par résonances et réflexions, de **dimension finie** tel que :

- $\exists \vec{\varphi} \in E$  tel que  $\forall i \varphi_i = \varphi_0$  sur  $t=0$ .
- $\exists \vec{\psi} \in E_+$  tel que  $\forall i \psi_i = \psi_0$  sur  $x=0$ .

DÉMONSTRATION : Soit  $R$  l'espace de toutes les résonances sur  $\Omega$  :

$R = \{\vec{\varphi} \in \Phi \text{ tel que } \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N = 0\}$ . Rappelons que c'est un espace vectoriel de **dimension finie** d'après un théorème dû à [10].

Pour  $1 \leq i \leq N$ , soit  $R_i$  la projection de  $R$  sur  $\Phi_i$ .

Pour  $1 \leq i \leq N$ , soit  $\varphi_i$  une solution de  $X_i \varphi_i = 0$  avec  $\varphi_i(0, x) = \varphi_0(x)$ .

Pour  $1 \leq i \leq P$ , soit  $\psi_i$  une solution de  $X_i \psi_i = 0$  et  $\psi_i(t, 0) = \psi_0(t)$ .

Définissons l'espace de phases  $G$  par :

$$G = \prod_{1 \leq i \leq N} R_i + \prod_{1 \leq i \leq P} (\mathbb{R}\varphi_i + \mathbb{R}\psi_i) \times \prod_{P+1 \leq i \leq N} \mathbb{R}\varphi_i$$

$G$  vérifie toute les propriétés demandées sauf la stabilité par réflexions.

Réfléchissons : soit pour  $P+1 \leq j \leq N$ ,  $\{b_{jk}, 1 \leq k \leq \dim G_j\}$  une base de  $G_j$ . Réfléchissons ces bases suivant les directions entrantes du bord  $x=0$ . Pour cela, pour  $1 \leq i \leq P$ , soit  $\alpha_{jk}^i$  une solution de :

$$X_i \alpha_{jk}^i = 0 \text{ et } \alpha_{jk}^i(t, 0) = b_{jk}(t, 0).$$

Il suffit de poser :

$$E = G + \prod_{1 \leq i \leq P} \left( \sum_{j=P+1}^N \sum_{k=1}^{\dim G_j} \mathbb{R}\alpha_{jk}^i \right) \times \prod_{P+1 \leq i \leq N} \{0\}$$

Bien sûr,  $E$  n'est pas déterminé de manière unique . □

Soit  $E$  fourni par la proposition 2, on a besoin pour la suite de se fixer une base de  $E$  correspondant bien aux données aux limites. Soit  $\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq \dim E_i\}$  une base de  $E_i$  avec  $\varphi_{i1}(0, x) = \varphi_0(x)$ .

Notons :

- $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{i \dim E_i}) \quad 1 \leq i \leq N$
- $\vec{\varphi}_+ = (\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_P), \vec{\varphi}_- = (\vec{\varphi}_{P+1}, \dots, \vec{\varphi}_N)$   
et  $\vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_N) = (\vec{\varphi}_+, \vec{\varphi}_-)$ .
- pour  $1 \leq i \leq P$  on a une matrice  $L_i$  telle que  $L_i \vec{\varphi}_i(t, 0) = \psi_0(t), t \in [0, T]$ .
- de la stabilité par réflexions pour  $1 \leq i \leq P$  on a une matrice  $\Delta_i$  telle que  
 $\Delta_i \vec{\varphi}_i(t, 0) = \vec{\varphi}_-(t, 0), t \in [0, T]$ .
- On note  $\vec{\theta}_i$  un élément du dual de  $E_i, E'_i$  identifié à  $\mathbb{R}^{\dim E_i}$  :  
 $\vec{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{i \dim E_i}) \quad 1 \leq i \leq N$
- $\vec{\theta}_+ = (\vec{\theta}_1, \dots, \vec{\theta}_P), \vec{\theta}_- = (\vec{\theta}_{P+1}, \dots, \vec{\theta}_N)$
- $\Theta = E'$  le dual de  $E$  identifié à  $Vect(\vec{\varphi}(\Omega))$  comme sous espace propre de  $\mathbb{R}^{\dim E}$ .
- pour  $\vec{\theta} \in \Theta$  on note les composantes de  $\vec{\theta}$  comme celles de  $\vec{\varphi}$  :  
 $\vec{\theta} = (\vec{\theta}_1, \dots, \vec{\theta}_N) = (\vec{\theta}_+, \vec{\theta}_-),$   
ou encore  $\vec{\theta} = (\theta_{11}, \dots, \theta_{1 \dim E_1}, \dots, \theta_{N1}, \dots, \theta_{N \dim E_N})$
- $\Psi_i = \Theta \cap \{\vec{\theta}, \vec{\theta}_i = 0\}$

### 3.2 Les Profils

#### Définition 4 (Espace des profils)

$U \in C_{\Gamma_{pp}}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N)$  si :

- pour  $1 \leq i \leq P$  :  $U_i \in C_u^0(\Omega - \Gamma_i, C_{pp}^0(\mathbb{R}^{\dim E_i}, \mathbb{R}))$
- pour  $P < i \leq N$  :  $U_i \in C_u^0(\Omega, C_{pp}^0(\mathbb{R}^{\dim E_i}, \mathbb{R}))$
- $U(t, x, \vec{\theta}) = (U_1(t, x, \vec{\theta}_1), \dots, U_N(t, x, \vec{\theta}_N))$

$C_{\Gamma_{pp}}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N)$  muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Notons  $U_-(t, x, \vec{\theta}_-) := (U_{P+1}(t, x, \vec{\theta}_{P+1}), \dots, U_N(t, x, \vec{\theta}_N))$ .

On rappelle brièvement les “sélectionneurs de fréquences” :

#### Définition 5 (Les opérateurs de moyenne)

Soient  $1 \leq i \leq N$ ,  $d\mu$  une mesure de Lebesgue sur  $\Psi_i$ ,  $Q$  un mesurable de

$\Psi_i$  de mesure 1 pour  $d\mu$ , l'opérateur de moyenne suivant la direction  $\Psi_i$  est la projection :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i : C_{pp}^0(\Theta, \mathbb{R}) &\longrightarrow C_{pp}^0(\mathbb{R}^{\dim E_i}, \mathbb{R}) \\ v(\vec{\theta}) &\longmapsto (\mathbb{E}_i v)(\vec{\theta}_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{\dim \Psi_i}} \int_{T.Q} v(\vec{\theta} + \xi) d\mu(\xi) \end{aligned}$$

Les équations des profils : trouver  $\mathbf{U} \in C_{\Gamma pp}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N)$  tel que pour  $1 \leq i \leq N$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i U_i = \mathbb{E}_i f_i(\cdot, \cdot, \mathbf{U}) & \forall (t, x, \vec{\theta}) \in \Omega^q \times \mathbb{R}^{\dim E_i} \\ U_i(0, x, \vec{\theta}_i) = H_i(x, \theta_{i1}) & \forall (x, \vec{\theta}) \in [0, X] \times \mathbb{R}^{\dim E_i} \\ U_i(t, 0, \vec{\theta}_i) = G_i(t, \mathbf{U}_-(t, 0, \Delta_i \vec{\theta}_i), L_i \vec{\theta}_i) & \forall (t, \vec{\theta}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{\dim E_i} \end{array} \right. \quad (8)$$

$i \leq P$

Un tel système n'admet qu'une solution. On écrit les équations sous forme d'intégrales suivant les caractéristiques. Ainsi le profil est solution d'un problème de point fixe  $\bar{\Pi}_c(\mathbf{U}_c) = \mathbf{U}_c$  avec

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Pi}_c : C_{\Gamma pp}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N) & \longrightarrow & C_{\Gamma pp}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N) \\ \mathbf{U} & \longmapsto & \mathbf{V} \end{array} \quad (9)$$

où  $\mathbf{V}$  est défini dans l'ordre suivant, pour  $(t, x) \in \Omega, 1 \leq i \leq N$  :

1. si la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} V_i(t, x, \vec{\theta}_i) &= H_{ci}(0, \gamma_i(0; t, x), \theta_{i1}) \\ &+ \int_0^t \{ \mathbb{E}_i [f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{U}(s, \gamma_i(s; t, x), \cdot))](\vec{\theta}_i) \} ds \end{aligned}$$

2. sinon la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $t$  en  $\tau$  et  $1 \leq i \leq P$  :

$$\begin{aligned} V_i(t, x, \vec{\theta}_i) &= G_{ci}(\tau, \mathbf{U}_-(\tau, 0, \Delta_i \vec{\theta}_i), L_i \vec{\theta}_i) \\ &+ \int_\tau^t \{ \mathbb{E}_i [f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{U}(s, \gamma_i(s; t, x), \cdot))](\vec{\theta}_i) \} ds \end{aligned}$$

Nous montrerons dans la section 6 la

### Proposition 3

Il existe un unique  $U \in C_{\Gamma pp}^0(\Omega(T_0) \times \Theta, \mathbb{R}^N)$  solution de (8).

### 3.3 Asymptotique.

Elle repose sur nos points fixes et essentiellement sur le lemme fondamental de la phase non stationnaire de [10]. Commençons par rappeler quelques définitions. Vu que l'on intègre suivant les caractéristiques dans nos points fixes et, pour appliquer un lemme de la phase non stationnaire on demande que "la phase ne stationne pas suivant ces courbes".

#### Définition 6 (transversalité [10])

Soit  $O$  un ouvert, non vide, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in C^\infty(\overline{O}, \mathbb{R})$  et,  $X$  un champ de vecteurs régulier sur  $O$ .

- $\varphi$  est transverse à  $X$  sur  $O$  si,  $X.\varphi \neq 0$  presque partout sur chaque courbe intégrale de  $X$ .
- $\varphi$  est faiblement transverse à  $X$  sur  $O$  si  $X.\varphi \neq 0$  presque partout sur  $O$ .

Cette notion se définit aussi sur un espace de phases. Pour simplifier, on demandera en plus que les phases constantes soient réduites à la phase identiquement nulle.

#### Définition 7 ([10])

Soit  $F$  un espace de phases sur  $\Omega$  associé à  $n$  champs  $X_1, \dots, X_n$ .

$F = F_1 \times \dots \times F_n$  et  $S = F_1 + \dots + F_n$ .

- $F$  est dit transverse ( respectivement faiblement transverse ) si  $\forall \varphi \in S \forall i$  ou bien  $X_i.\varphi = 0$  partout, ou bien  $\varphi$  est transverse ( respectivement faiblement transverse ) à  $X_i$ .
- $F$  est dit non stationnaire sur  $\Omega$  si  $\forall \varphi \in S$  ou bien  $\varphi$  est nulle ou bien  $d\varphi \neq 0$  presque partout sur  $\Omega$ .

#### Lemme 1 (fondamental de la phase non stationnaire, [10])

Soient  $F$  un espace de phases sur  $O$ ,  $G \in C^0(\overline{O}, \Theta, \mathbb{R})$ ,  $F$  transverse ( respectivement faiblement transverse ) et non stationnaire,  $\vec{\varphi} \in F$  et l'on suppose  $X_i = \partial_i$ . Pour tout  $(t, x) \in \overline{O}$ , et pour tout  $\tau$  tel que la  $i$ -caractéristique paramétrée par  $s$  issue de  $(t, x)$  reste dans  $\overline{O}$  pour tout  $s$  compris entre  $t$  et  $\tau$ .

Posons  $v_\varepsilon(t, x) = \int_\tau^t G\left(\sigma, x, \frac{\vec{\varphi}(\sigma, x)}{\varepsilon}\right) d\sigma$ ,  $V_\varepsilon(t, x, \vec{\theta}_i) = \int_\tau^t \mathbb{E}_i[G(\sigma, x, \cdot)](\vec{\theta}_i) d\sigma$

alors  $v_\varepsilon(t, x) = V_\varepsilon\left(t, x, \frac{\vec{\varphi}_i(t, x)}{\varepsilon}\right) + o(1)$  où le  $o(1)$  est dans  $L^\infty$

( respectivement  $L_t^\infty L_x^1$ ).

**Théorème 1 (L'asymptotique)**

Soient  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution de (5) et  $\mathbf{U}$  la solution (8). Si  $E$  est transverse ( respectivement faiblement transverse ) et non stationnaire on a :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{U} \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}(t, x)}{\varepsilon} \right) + o(1) = \sum_{j=1}^N U_j \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}_j(t, x)}{\varepsilon} \right) \mathbf{r}_j(t, x) + o(1) \quad (10)$$

où le  $o(1)$  est dans  $L^\infty(\Omega(T_0))$  ( respectivement  $L_t^\infty L_x^1(\Omega(T_0))$  ).

**Remarque 3 (transversalité)**

Comme  $E$  n'est pas déterminé de manière unique, la transversalité de  $E$  dépend du choix de  $E$ . D'autre part, nous ne donnons pas d'hypothèses sur  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  comme dans [10]. Ces deux points seront discutés dans les remarques 5 et 6 page .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME : Posons  $\mathbf{v}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{U} \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}(t, x)}{\varepsilon} \right)$ . Le but est de montrer que  $\mathbf{u}_c^\varepsilon(t, x) = \mathbf{v}_c^\varepsilon(t, x) + o(1)$ . Ceci est déjà vrai pour  $t = 0$ . Comme  $\Pi_c^\varepsilon$  est contractant pour la norme de l'erreur et que  $\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{u}_c^\varepsilon) = \mathbf{u}_c^\varepsilon$ , il suffira de montrer que  $\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon) = \mathbf{v}_c^\varepsilon + o(1)$ . En effet soit  $\rho$  la constante de contractance de  $\Pi_c^\varepsilon$  pour la norme de l'erreur (proposition 1) :

$$\|\mathbf{u}_c^\varepsilon - \mathbf{v}_c^\varepsilon\| \leq \|\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{u}_c^\varepsilon) - \Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon)\| + \|\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon) - \mathbf{v}_c^\varepsilon\| \leq \rho \|\mathbf{u}_c^\varepsilon - \mathbf{v}_c^\varepsilon\| + \|\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon) - \mathbf{v}_c^\varepsilon\|$$

On en tire :

$$\|\mathbf{u}_c^\varepsilon - \mathbf{v}_c^\varepsilon\| \leq \frac{1}{1 - \rho} \|\Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon) - \mathbf{v}_c^\varepsilon\|$$

Cette méthode simplifie la démonstration dûe à [10] pour le problème de Cauchy.

Posons  $w_c^\varepsilon = \Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}_c^\varepsilon)$ . Pour  $(t, x) \in \Omega, 1 \leq i \leq N$ , on a dans l'ordre suivant :

1. si la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} w_{ci}^\varepsilon(t, x) &= v_{ci}^\varepsilon(0, \gamma_i(0; t, x)) + \int_0^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), v^\varepsilon(s, \gamma_i(s; t, x))) ds \\ w_{ci}^\varepsilon(t, x) &= U_{ci} \left( 0, \gamma_i(0; t, x), \frac{\vec{\varphi}_i(0, \gamma_i(0; t, x))}{\varepsilon} \right) \\ &+ \int_0^t f_{ci} \left( s, \gamma_i(s; t, x), U_{ci} \left( s, \gamma_i(s; t, x), \frac{\vec{\varphi}_i(s, \gamma_i(s; t, x))}{\varepsilon} \right) \right) ds \end{aligned}$$

Appliquons le lemme de la phase non stationnaire.

$$\begin{aligned}
w_{c_i}^\varepsilon(t, x) &= U_{c_i} \left( 0, \gamma_i(0; t, x), \frac{\vec{\varphi}_i(0, \gamma_i(0; t, x))}{\varepsilon} \right) + o(1) \\
&+ \left\{ \int_0^t \{ \mathbb{E}_i [f_{c_i}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{U}(s, \gamma_i(s; t, x), \cdot))] (\vec{\theta}_i) \} ds \right\} \left( \vec{\theta}_i = \frac{\vec{\varphi}_i(t, x)}{\varepsilon} \right) \\
w_{c_i}^\varepsilon(t, x) &= U_{c_i} \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}_i(t, x)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\
w_{c_i}^\varepsilon(t, x) &= v_{c_i}^\varepsilon(t, x) + o(1)
\end{aligned}$$

2. Sinon la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $t$  en  $\tau$  et  $1 \leq i \leq P$  :

$$\begin{aligned}
w_{c_i}^\varepsilon(\tau, 0) &= G_{c_i} \left( \tau, w_{c_-}^\varepsilon(\tau, 0), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) \\
&= G_{c_i} \left( \tau, U_{c_-} \left( \tau, 0, \frac{\vec{\varphi}_-(\tau, 0)}{\varepsilon} \right) + o(1), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) \\
&= G_{c_i} \left( \tau, U_{c_-} \left( \tau, 0, \Delta_i \frac{\vec{\varphi}_i(\tau, 0)}{\varepsilon} \right), L_i \frac{\vec{\varphi}_i(\tau, 0)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\
&= U_{c_i} \left( \tau, 0, \frac{\vec{\varphi}_i(\tau, 0)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\
w_{c_i}^\varepsilon(\tau, 0) &= v_{c_i}^\varepsilon(\tau, 0) + o(1)
\end{aligned}$$

On termine en traitant comme en 1 les termes intégrés suivant les caractéristiques.

□

## 4 Oscillations localisées

Nous allons préciser le résultat de l'équation (10) en montrant que seules certaines composantes de la phase vectorielle  $\vec{\varphi}_i$  interviennent par zones dans le comportement oscillant de  $\mathbf{u}^\varepsilon$ . Par la même nous éliminerons par zones les variables superflues de  $U_i(t, x, \theta_{i1}, \dots, \theta_{i \dim E_i})$ .

### 4.1 Les phases localisées

Les phases localisées apparaissent naturellement dans l'exemple (3). On donne ici une définition générale.



**Définition 8 (espace de phases localisées)**

$E^*$  est un espace de phases localisées sur  $\Omega$  associé aux champs  $X_1, \dots, X_N$ , s'il est la collection d'espaces de phases  $E^q$  sur  $\Omega^q$  pour  $0 \leq q \leq P$  tels que :

1. données initiales :

$$\begin{aligned} \exists \vec{\varphi} \in E^0 / \varphi_i(0, x) = \varphi_0(x) \quad 1 \leq i \leq N \\ \exists \vec{\psi} \in E^P / \psi_i(t, 0) = \psi_0(t) \quad 1 \leq i \leq P \end{aligned}$$

2.  $E^P$  est stable par réflexions.

3. transmissions :

$$\forall q = 1 \dots P, \forall i = 1 + q \dots N, \forall \varphi \in E_i^{q-1}, \exists \psi \in E_i^q / \psi = \varphi \text{ sur } \Gamma_q$$

$$\forall q = 1 \dots P, \forall i = 1 \dots q - 1, \forall \varphi \in E_i^q, \exists \psi \in E_i^{q-1} / \psi = \varphi \text{ sur } \Gamma_q$$

4. Chaque  $E^q$  est stable par résonances.

De plus on dit que  $E^*$  est de dimension finie si chaque composante  $E^q$  l'est,  $E^* \subset F^*$  si  $E^q \subset F^q$  pour  $0 \leq q \leq P$ ,  $(E^* \cap F^*)^q = E^q \cap F^q$ ,  $(E^* + F^*)^q = E^q + F^q, \dots$

Par exemple définissons l'espace de phases localisées  $\Phi^*$  correspondant au plus grand espace de phase  $\Phi$  par restriction sur chaque composante de  $\Omega$  :  $\Phi^q = \Phi$  sur  $\Omega^q$  pour  $0 \leq q \leq P$ .  $\Phi^*$  est le plus grand espace de phases localisées.

Remarquons que si  $F^*$  est un espace de phases localisées, il ne peut être réduit à  $\{0\}$  (sauf si  $\varphi_0 \equiv 0 \equiv \psi_0$ ) car la condition sur les données initiales et les transmissions forcent  $F^*$  à posséder les  $N+P$  phases issues de  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  propagées par les  $N$  champs.

**Proposition 4 (nombre fini de phases localisées)**

Les espaces de phases localisées admettent un unique élément minimal pour l'inclusion :  $E^*$ . De plus ce minimum est de dimension finie.

DÉMONSTRATION : Pour l'unicité on prend, classiquement, l'intersection de tous les espaces de phases localisées qui est encore un espace de phases localisées  $E^*$ . L'existence est automatique par construction de  $E^*$ . La propriété de dimension finie requiert une définition et quelques lemmes :

**Définition 9 (collection d'espaces de phases)**

$E^*$  est une collection d'espaces de phases sur  $\Omega$  associé aux champs  $X_1, \dots, X_N$ , s'il est la collection d'espaces de phases  $E^q$  sur  $\Omega^q$  pour  $0 \leq q \leq P$ .

Nous notons  $\Xi$  l'ensemble des collections d'espaces de phases.

Nous définissons l'application  $\mathcal{T}$  qui traduit la transmission et la réflexion des phases en une itération de  $\Pi_c^e$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \Xi &\longrightarrow \Xi \\ E^* &\longmapsto F^* \end{aligned}$$

où  $F^* = E^* + G^*$  et  $G_i^q$  est défini pour  $q = 0, \dots, P$  et pour  $i = 1, \dots, N$  par :

$$\begin{cases} q = 0 &\Rightarrow G_i^0 = \{0\} \\ i > q > 0 &\Rightarrow G_i^q = \{\varphi \in \Phi_i^q / \exists \psi \in E_i^{q-1}, \varphi \equiv \psi \text{ sur } \Gamma_q\} \\ i \leq q = P &\Rightarrow G_i^P = \{\varphi \in \Phi_i^P / \exists \psi \in E_{P+1}^P + \dots + E_N^P / \varphi(t, 0) = \psi(t, 0)\} \\ i \leq q < P &\Rightarrow G_i^q = \{\varphi \in \Phi_i^q / \exists \psi \in E_i^{q+1}, \varphi \equiv \psi \text{ sur } \Gamma_{q+1}\} \end{cases}$$

Notons  $\text{Id}$  l'identité de  $\Xi$ .

### Lemme 2 (Propriétés de $\mathcal{T}$ )

1.  $\mathcal{T}$  est croissante et  $\mathcal{T} \geq \text{Id}$ .
2.  $\mathcal{T}$  préserve la dimension finie.
3.  $\mathcal{T}(E^*) = E^* \Leftrightarrow E^*$  est stable par transmissions et réflexions.
4.  $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{2P} = \mathcal{T}^{2P}$
5.  $\mathcal{T}^{2P}(E^*) = \min\{F^* \in \Xi, / E^* \subset F^*$   
et  $F^*$  stable par transmissions et réflexions}

DÉMONSTRATION : Les propriétés 1 et 2 sont évidentes.

Pour  $q, r \in \{0, 1, \dots, P\}$ ,  $G^q$  contient les phases transmises ou réfléchies de  $E^r$  pour  $|q - r| = 1$ , ce qui permet de démontrer 3. Le plus long parcours de propagation d'une phase est de traverser  $\Gamma^1, \dots, \Gamma^P$ , par transmissions, puis  $\Gamma^{P+1}$  par réflexion, puis,  $\Gamma^P, \dots, \Gamma^2$ . Donc il faut, au plus  $2P$  itérations de  $\mathcal{T}$  pour construire, à partir d'un élément  $E^*$  de  $\Xi$ , le plus petit  $F^*$  de  $\Xi$  stable par transmissions et réflexions. Ce qui se traduit par l'énoncé de 4, grâce à 3. Soit  $F^*$  le plus petit espace de phases localisées contenant  $E^*$ . La propriété 5 se déduit de l'inclusion  $G^* \subset F^*$ .  $\square$

Pour la stabilité par résonances, considérons pour  $0 \leq q \leq P$ , l'espace  $R^q$  de toutes les résonances sur  $\Omega^q$  :

$$R^q = \{\vec{\varphi} \in \Phi^q \text{ tel que } \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N = 0\}.$$

$R^q$  est un espace vectoriel de **dimension finie** d'après un théorème dû à [10]. On note, pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $R_i^q$  la projection de  $R^q$  sur  $\Phi_i^q$ .

Nous définissons l'application  $\mathcal{R}$  qui traduit la résonance des phases en une itération de  $\Pi_c^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Xi &\longrightarrow \Xi \\ E^* &\longmapsto F^* \end{aligned}$$

où  $F^*$  est donné pour  $0 \leq q \leq P$ ,  $1 \leq i \leq N$  par  $F_i^q = E_i^q + \left[ \left( \sum_{j=1}^N E_j^q \right) \cap R_i^q \right]$

**Lemme 3 (Propriétés de  $\mathcal{R}$ )**

1.  $\mathcal{R}$  est croissante et  $\mathcal{R} \geq Id$ .
2.  $\mathcal{R}$  préserve la dimension finie.
3.  $\mathcal{R}(E^*) = \min \{ F^* \in \Xi, E^* \subset F^* \text{ et } F^* \text{ est stable par résonance} \}$
4.  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$  est le “projecteur” sur l'ensemble des collections d'espaces de phases stables par résonances.

Nous prenons en compte les données initiales avec la collection d'espaces de phases  $I^*$  suivante :

pour  $1 \leq i \leq N$ , soit  $\phi_i^0$  la solution sur  $\Omega^0$  de  $\begin{cases} X_i \phi_i^0 &= 0 \\ \phi_i^0(0, x) &= \phi_0(x) \end{cases}$ ,

pour  $1 \leq i \leq P$ , soit  $\psi_i^P$  la solution sur  $\Omega^P$  de  $\begin{cases} X_i \psi_i^P &= 0 \\ \psi_i^P(t, 0) &= \psi_0(t) \end{cases}$ .

Alors  $I^*$  est donné par :  $\begin{cases} I^0 = \prod_{i=1}^N \mathbb{R} \phi_i^0 \\ I^q = \{0\}^N \\ I^P = \prod_{i=1}^P \mathbb{R} \psi_i^P \times \{0\}^{N-P} \end{cases}$  pour  $0 < q < P$

**Lemme 4 ( caractérisation des espaces de phases localisées)**

Soit  $E^* \in \Xi$  alors :

$E^*$  est un espace de phases localisées  $\iff I^* \subset E^*$  et  $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}(E^*) = E^*$

DÉMONSTRATION : “ $E^*$  possède les données initiales” signifie  $I^* \subset E^*$ . Il est stable par transmissions et réflexions si  $\mathcal{T}(E^*) = E^*$ . Il est stable par résonances si  $\mathcal{R}(E^*) = E^*$ . Or  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{R}$  sont croissantes, supérieures à Id donc

$$\mathcal{T}(E^*) = E^* \text{ et } \mathcal{R}(E^*) = E^* \iff \mathcal{R} \circ \mathcal{T}(E^*) = E^*.$$

Pour la réciproque, la croissance de  $\mathcal{T}$  et de  $\mathcal{R}$  nous donne

$$E^* \subset \mathcal{T}(E^*) \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{T}(E^*) = E^*. \quad \square$$

**Lemme 5 (Construction du plus petit espace de phases localisées)**

Soit  $E^*$  le plus petit espace de phases localisées. La suite,  $E_\nu^* := (\mathcal{R} \circ \mathcal{T})^\nu(I^*)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , est stationnaire à partir d'un  $\nu_0$  assez grand et vaut  $E^*$ .

DÉMONSTRATION : Posons, pour  $0 \leq q \leq P$ ,  $1 \leq i \leq N$  :

$\delta_i^q[F^*] = \dim(F_i^q \cap R_i^q) \leq \dim R_i^q$ . La suite  $\alpha_\nu = \sum_{q=0}^P \sum_{i=1}^N \delta_i^q [(\mathcal{R} \circ \mathcal{T})^\nu(I^*)]$  est

croissante, à valeurs entières et majorée par  $\sum_{q=0}^P \sum_{i=1}^N \dim R_i^q < \infty$ , donc est sta-

tionnaire à partir d'un certain rang  $\nu_1$ . Ainsi, pour  $\nu \geq \nu_1$ , il n'y a plus de phase rajoutée par résonance, donc  $E_{\nu+1}^* = \mathcal{T}(E_\nu^*)$ . D'après la propriété 4 du lemme 2 il suffit de prendre  $\nu_0 := \nu_1 + 2P$ . Finalement le lemme 4 nous dit que  $E_{\nu_0}^*$  est un espace de phases localisées. Comme  $I^* \subset E^*$ , la propriété 3 du lemme 3 et la propriété 5 du lemme 2 nous donne  $E_{\nu_0}^* = E^*$ .  $\square$

D'après le lemme 5, la dimension finie de  $I^*$ , et les propriétés 2 des lemmes 2 et 3,  $E^*$  est de dimension finie. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.  $\square$

Choix des phases :  $E^*$  étant l'espace de phases localisées donné par la proposition précédente. On va s'attacher à choisir, composante par composante, des bases qui prennent en compte les données initiales, les transmissions et les réflexions. Ceci nous permettra d'obtenir des équations simples des profils localisés.

Pour  $0 \leq q \leq P$  et  $1 \leq i \leq N$  on peut se donner une base  $\{\varphi_{ij}^q, 1 \leq j \leq \dim E_i^q\}$  de  $E_i^q$  telle que :

- Pour  $E^0$  on retrouve l'espace de phases de [10] :  
 $\dim E^0 = N, \dim E_i^0 = 1$  et  $\varphi_{i1}^0(0, x) = \varphi_0(x)$ .
- Pour  $E^P, \psi_0$  se propage suivant les directions entrantes au bord :  
 $1 \leq i \leq P \Rightarrow \varphi_{i1}^P(t, 0) = \psi_0(t)$ .
- On raccorde les bases par les transmissions. Ceci est toujours possible. Il suffit de suivre "le sens de propagation de l'information" dans l'opérateur  $\Pi$  et d'utiliser le théorème de la base incomplète.

$$q \neq 0, i \neq q, 1 \leq j \leq \min(\dim E_i^q, \dim E_i^{q-1}) \Rightarrow \varphi_{ij}^q = \varphi_{ij}^{q-1} \text{ sur } \Gamma_q$$

Le choix des bases étant fait, on reprend des notations analogues au phases de E ( voir 3.1). Pour  $0 \leq q \leq P$  notons :

- $\vec{\varphi}_i^q = (\varphi_{i1}^q, \dots, \varphi_{i \dim E_i^q}^q) \quad 1 \leq i \leq N$
- $\vec{\varphi}_+^q = (\vec{\varphi}_1^q, \dots, \vec{\varphi}_P^q), \vec{\varphi}_-^q = (\vec{\varphi}_{P+1}^q, \dots, \vec{\varphi}_N^q),$   
 et  $\vec{\varphi}^q = (\vec{\varphi}_1^q, \dots, \vec{\varphi}_N^q) = (\vec{\varphi}_+^q, \vec{\varphi}_-^q)$
- $1 \leq i \leq P : \Delta_i^P \vec{\varphi}_i^P(t, 0) = \vec{\varphi}_-^P(t, 0)$  avec la matrice  $\Delta_i^P$  donnée par la stabilité par réflexions.

- $\Theta^q = Vect(\vec{\varphi}^q(\Omega^q)) \subset \mathbb{R}^{\dim E^q}$ ,  $\Theta_i^q = \mathbb{R}^{\dim E_i^q}$  et  $\mathcal{U}^q$  le dual de  $\Theta^q$ .
- pour  $\vec{\theta}^q \in \Theta^q$  on note les composantes de  $\vec{\theta}^q$  comme celles de  $\vec{\varphi}^q$  :  
 $\vec{\theta}^q = (\vec{\theta}_1^q, \dots, \vec{\theta}_N^q) = (\theta_{11}^q, \dots, \theta_{1 \dim E_1^q}^q, \dots, \theta_{N1}^q, \dots, \theta_{N \dim E_N^q}^q)$   
 $\vec{\theta}^q = (\vec{\theta}_+^q, \vec{\theta}_-^q)$
- $\Psi_i^q = \Theta^q \cap \{\vec{\theta}^q, \theta_i^q = 0\}$

## 4.2 Les profils localisés

Comme chaque  $\Omega^q, 0 \leq q \leq P$ , a son espace de phases, sur chaque  $\Omega^q$  la solution du problème mixte oscillant aura son profil.

### Définition 10 (espace des profils localisés)

On dit que  $\mathbf{U}^* \in C_{\Gamma_{pp}}^*$  si  $\mathbf{U}^*$  est la collection de  $P+1$  fonctions  $\mathbf{U}^q, 0 \leq q \leq P$  telles que  $\mathbf{U}^q \in C_{\Gamma_{pp}}^0(\Omega^q \times \Theta^q, \mathbb{R}^N)$ .

L'espace  $C_{\Gamma_{pp}}^*$  muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Notons, pour  $0 \leq q \leq P$  et  $1 \leq i \leq N$  :

- $\mathbb{E}_i^q$  l'opérateur de moyenne suivant  $\Psi_i^q$ .
- $d_i^q = \dim E_i^q$ ,  $d_i = \max_{0 \leq q \leq P} d_i^q$ ,  $d^q = \sum_{i=1}^N d_i^q$
- pour  $\vec{\eta}_i \in \mathbb{R}^{d_i}$  on appelle  $\vec{\eta}_i^q$  le vecteur constitué des  $d_i^q$  premières composantes de  $\vec{\eta}_i$ .

Les équations des profils localisés :

pour  $0 \leq q \leq P$  et  $1 \leq i \leq N$

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_i U_i^q = \mathbb{E}_i^q f_i(\cdot, \cdot, \mathbf{U}^q) & \forall (t, x, \vec{\theta}) \in \Omega^q \times \mathbb{R}^{d^q} \\ U_i^q(t, x, \vec{\eta}_i^q) = U_i^{q-1}(t, x, \vec{\eta}_i^{q-1}) & \forall (t, x, \vec{\eta}) \in \Gamma_q \times \mathbb{R}^{d_i} \\ & i \neq q \neq 0 \\ U^0(0, x, \theta) = \mathbf{H}(x, \theta) & \forall (x, \theta) \in [0, X] \times \mathbb{R} \\ U_i^P(t, 0, \vec{\theta}_i^P) = G_i(t, \mathbf{U}_-^P(t, 0, \Delta_i^P \vec{\theta}_i^P), \theta_{i1}^P) & \forall (t, \vec{\theta}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{d_i^P} \\ & i \leq P \end{array} \right. \quad (11)$$

$\mathbf{U}^*$  est solution d'un problème de Cauchy, d'un problème de réflexion et de  $P$  problèmes de Goursat liés entre eux par les transmissions (deuxième type d'équation). Ces équations de transmission nous disent que les composantes

des profils se raccordent continûment suivant chaque caractéristique issue du coin, à condition que la caractéristique ne coïncide pas avec la direction de propagation de la composante. Ainsi on retrouve bien une régularité  $C_{\Gamma_{pp}}^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$  pour  $\mathbf{U}^*$  comme pour la solution exacte du problème mixte semilinéaire classique. Cependant il y a une subtilité sur  $\vec{\eta}$ . En effet de part et d'autre de la caractéristique issue du coin les espaces de phases peuvent ne pas se raccorder aussi bien. De fait pour un champ donné les phases associées sont en général plus nombreuses d'un côté que de l'autre. C'est pour cela qu'on introduit  $\vec{\eta}_i^q$ .

#### Remarque 4 (Relations de compatibilité)

Pour que la solution exacte  $\mathbf{u}^\epsilon$  soit régulière, A. Corli a rajouté des conditions de compatibilité dans [6]. Pour avoir, en plus, le profil régulier, il a du ajouter des conditions de compatibilité supplémentaires sur les données.

Le système (11) nous permet de comprendre La nécessité de ces hypothèses supplémentaires sur les données ( voir aussi [12]).

On va définir un opérateur  $\Pi_c^*$  qui traduit les équations des profils localisés sous forme intégrale. Notons :

$$\mathcal{C}^* := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \in \prod_{q=0}^P C^0(\overline{\Omega^q}, C_{pp}^0(\Theta^q, \mathbb{R}^N)) \\ \text{tel que } \forall q, \forall i, U_i^q(t, x, \vec{\theta}^q) \text{ ne dépend que de } (t, x, \vec{\theta}_i^q) \end{array} \right\} \text{ et}$$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_c^* : \mathcal{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{C}^* \\ \mathbf{U}^* & \longmapsto & \mathbf{V}^* \end{array} \quad (12)$$

où  $\mathbf{V}^*$  est défini de la manière suivante :

1. données initiales :  $V_i^0(0, \chi, \vec{\theta}_i^0) = H_{ci}(\chi, \theta_{i1}^0)$  pour  $(0, \chi, \vec{\theta}_i^0) \in \Gamma^0 \times \Theta^0$  et  $i = 1, \dots, N$ ,
2. transmissions : Pour  $q = 1, \dots, P$ , et  $(\tau, \chi, \vec{\eta}) \in \Gamma^q \times \mathbb{R}^d$  :  
Si  $1 \leq i < q$  alors  $V_i^q(\tau, \chi, \vec{\eta}_i^q) = U_i^{q+1}(\tau, \chi, \vec{\eta}_i^{q+1})$ ,  
Si  $q \leq i \leq P$  alors  $V_i^q(\tau, \chi, \vec{\eta}_i^q) = U_i^{q-1}(\tau, \chi, \vec{\eta}_i^{q-1})$ .
3. réflexions : Pour  $i = 1, \dots, P$ , et  $(\tau, \chi, \vec{\theta}^P) \in \Gamma^P \times \Theta^P$  :  
 $V_i^P(\tau, \chi, \vec{\theta}_i^P) = G_{ci}(\tau, \mathbf{U}_-^P(\tau, 0, \Delta_i^P \vec{\theta}_i^P), \theta_{i1}^P)$ ,
4. propagations : pour  $q = 0, \dots, P$ ,  $(t, x, \vec{\theta}^q) \in \Omega \times \Theta^q$ , et  $i = 1, \dots, N$  :  
Si  $i \leq q$  prenons  $(\tau, \chi) \in \Gamma_q$  tel que  $\chi = \gamma_i(\tau; t, x)$ ,  
Si  $i > q$  prenons  $(\tau, \chi) \in \Gamma_{q+1}$  tel que  $\chi = \gamma_i(\tau; t, x)$ , alors :

$$\begin{aligned} V_i^q(t, x, \vec{\theta}_i^q) &= V_i^q(\tau, \chi, \vec{\theta}_i^q) \\ &+ \int_{\tau}^t \{ \mathbb{E}_i^q[f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{U}^q(s, \gamma_i(s; t, x), \cdot))] (\vec{\theta}_i^q) \} ds \end{aligned}$$

Nous montrerons dans la section 6 la

**Proposition 5**

Sur  $\Omega(T_0)$ , il existe un unique  $U \in C_{\Gamma PP}^*$  solution de (11).

**4.3 Asymptotique localisée**

L'intérêt des phases localisées est de représenter la propagation d'oscillations dans le problèmes mixte. En fait ce sont les seules phases qui peuvent réellement intervenir dans le comportement de la solution exacte du problème mixte oscillant pour les hautes fréquences. Pour montrer ce résultat il est d'abord nécessaire de prouver une asymptotique à l'aide des profils localisés.

Notons de manière compacte  $\mathbf{U}^* \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t,x)}{\varepsilon} \right)$  la fonction de  $C_{\Gamma}^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$  définie par :

$$\left( \mathbf{U}^* \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t,x)}{\varepsilon} \right) \right)_i = U_i^q \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}_i^q(t,x)}{\varepsilon} \right)$$

pour  $(t, x) \in \Omega^q$ ,  $0 \leq q \leq P$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

On étend les définitions de transversalité et de non stationnarité (rappelées au paragraphe 3.3) à l'espace de phases localisées composante par composante. Ainsi nous avons le :

**Théorème 2 (Asymptotique localisée)**

Soient  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution de (5) et  $\mathbf{U}^*$  la solution de (11). Si  $E^*$  est transverse (respectivement faiblement transverse) et non stationnaire on a pour  $(t, x) \in \Omega(T_0)$  :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{U}^* \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t,x)}{\varepsilon} \right) + o(1) \tag{13}$$

où le  $o(1)$  est dans  $L^\infty(\Omega(T_0))$  (respectivement  $L_t^\infty L_x^1(\Omega(T_0))$ ).

**Remarque 5** Le problème de la transversalité de l'espace de phases est un problème bien posé. Ceci n'est pas vrai pour le théorème 1, où l'on peut toujours choisir un espace de phases non tranverse même si  $E^*$  est transverse.

**Remarque 6** Contrairement à [10], nous ne donnons pas d'hypothèses sur les phases initiales  $\varphi_0, \psi_0$ , mais sur l'espace de phases lui-même. En effet, pour un problème mixte, le fait que  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  soit presque partout non stationnaire ne suffit plus pour assurer la transversalité de  $E^*$ . Des exemples explicites de ce phénomène sont donnés dans [12]. En revanche, on pourrait bien sûr prendre  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  vectorielles.

DÉMONSTRATION : Posons  $\mathbf{v}^\varepsilon(t, x) = \mathbf{U}_c^*(t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t, x)}{\varepsilon})$  et montrons que  $\mathbf{w}^\varepsilon = \Pi_c^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \mathbf{v}^\varepsilon + o(1)$ . Comme  $\mathbf{u}_c^\varepsilon(0, x) = \mathbf{v}^\varepsilon(0, x) + o(1)$ , ceci montrera l'asymptotique du théorème grâce à la contractance de  $\Pi_c^\varepsilon$  dans la norme désirée. Pour cela montrons par récurrence sur  $q = 0, 1, \dots, P$  et  $q < i \leq N$  puis sur  $q = P, P-1, \dots, 1$  et  $1 \leq i \leq q$  que  $w_i^\varepsilon = v_i^\varepsilon + o(1)$  sur  $\Omega^q$ .

1. Pour  $q = 0, 1, \dots, P$ ,  $q < i \leq N$ ,  $(t, x) \in \Omega^q$  et, en notant  $(\tau, \chi)$  le point de  $\Gamma_q$  se trouvant sur la  $i$  caractéristique issue de  $(t, x)$ , on a :

$$\begin{aligned} w_i^\varepsilon(t, x) &= w_i^\varepsilon(\tau, \gamma_i(\tau; t, x)) + \int_\tau^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{v}^\varepsilon(s, \gamma_i(s; t, x))) ds \\ w_i^\varepsilon(t, x) &= \mathbf{v}_i^\varepsilon(\tau, \chi) + o(1) + \int_\tau^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{v}^\varepsilon(s, \gamma_i(s; t, x))) ds \\ w_i^\varepsilon(t, x) &= U_{ci}^q \left( \tau, \chi, \frac{\vec{\varphi}_i^q(\tau, \chi)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ &\quad + \int_\tau^t f_{ci} \left( s, \gamma_i(s; t, x), U_{ci}^q \left( s, \gamma_i(s; t, x), \frac{\vec{\varphi}_i^q(s, \gamma_i(s; t, x))}{\varepsilon} \right) \right) ds \end{aligned}$$

Appliquons le lemme de la phase non stationnaire.

$$\begin{aligned} w_i^\varepsilon(t, x) &= U_{ci}^q \left( \tau, \chi, \frac{\vec{\varphi}_i^q(\tau, \chi)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ &+ \left\{ \int_\tau^t \{ \mathbb{E}_i [f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{U}_c^q(s, \gamma_i(s; t, x), \cdot))] (\vec{\theta}_i^q) \} ds \right\} \left( \vec{\theta}_i^q = \frac{\vec{\varphi}_i^q(t, x)}{\varepsilon} \right) \\ w_i^\varepsilon(t, x) &= U_{ci}^q \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}_i^q(t, x)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ w_i^\varepsilon(t, x) &= v_i^\varepsilon(t, x) + o(1) \end{aligned}$$

2. Pour  $q = P$ ,  $1 \leq i \leq P$  traitons la donnée au bord  $\{ x = 0 \}$

$$\begin{aligned} w_i^\varepsilon(\tau, 0) &= G_{ci} \left( \tau, w_i^\varepsilon(\tau, 0), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) = G_{ci} \left( \tau, \mathbf{v}_i^\varepsilon(\tau, 0) + o(1), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) \\ &= G_{ci} \left( \tau, \mathbf{v}_i^\varepsilon(\tau, 0), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ &= G_{ci} \left( \tau, \mathbf{U}_{c-}^P \left( \tau, 0, \frac{\vec{\varphi}_i^P(\tau, 0)}{\varepsilon} \right), \frac{\psi_0(\tau)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ &= G_{ci} \left( \tau, \mathbf{U}_{c-}^P \left( \tau, 0, \Delta_i^P \frac{\vec{\varphi}_i^P(\tau, 0)}{\varepsilon} \right), \frac{\varphi_{i1}^P(\tau, 0)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ &= U_{ci}^P \left( \tau, 0, \frac{\vec{\varphi}_i^P(\tau, 0)}{\varepsilon} \right) + o(1) \\ w_i^\varepsilon(\tau, 0) &= v_i^\varepsilon(\tau, 0) + o(1) \end{aligned}$$

3. La fin de la récurrence se traite comme en 1 et termine ce deuxième cas. □



## 5 Analyse de propagations

Nous nous proposons de montrer que toutes les phases de  $E^*$  peuvent “réellement osciller”. Comme dans [11] une phase oscille vraiment si le développement en série de Fourier du profil associé à la variable de phase a des coefficients non nuls. Nous donnons une définition rigoureuse de ceci. Pour  $\mathbf{V}^* \in \mathcal{C}^*$  et  $\alpha^* \in \Psi^*$ , appelons :

- $c_{\alpha^*}^*[\mathbf{V}^*]$  la collection des coefficients de Fourier de  $\mathbf{V}^*$  : pour  $q = 0, \dots, P$  et  $i = 1, \dots, N$

$$c_{i,\alpha^q}^q[V_i^q](t, x) := \mathbb{E}_i^q [V_i^q(t, x, \cdot) \exp(-\iota \langle \alpha^q, \cdot \rangle)].$$

- $\mathcal{S}^*(\mathbf{V}^*)$  le spectre de  $\mathbf{V}^*$  :  $\mathcal{S}^q(\mathbf{V}^q) := \prod_{i=1}^N \mathcal{S}_i^q(V_i^q)$   
avec  $\mathcal{S}_i^q(V_i^q) := \{\alpha^q \in \Psi^q / c_{i,\alpha^q}^q[V_i^q] \neq 0_{\Omega^q}\}$ .
- $\mathcal{V}^*(\mathbf{V}^*)$  l'élément de  $\Xi$  défini par :  $\mathcal{V}_i^q(\mathbf{V}^q) := \{\langle \alpha_i^q, \varphi^q \rangle, \alpha_i^q \in \mathcal{S}_i^q(V_i^q)\}$

### Théorème 3

Il existe un problème mixte oscillant tel que  $\mathcal{V}(\mathbf{U}^*) = E^*$ .

On a toujours  $\mathcal{V}(\mathbf{U}^*) \subset E^*$ . Ce théorème affirme que l'espace de phases  $E^*$  est optimal : il contient exactement les phases engendrant les oscillations de  $\mathbf{U}^*$ .

DÉMONSTRATION : Comme système de taille  $N$ , nous prenons, par exemple, une non linéarité polynomiale, une simple réflexion linéaire et une donnée initiale de spectre fini :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \prod_{j=1}^N u_j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_+(t, 0) = \frac{1}{3N} \left( \sum_{j=P+1}^N u_j(t, 0) + \sum_{\alpha \in F} \exp\left(\iota \alpha \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}\right) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}(x, \theta) = \sum_{\alpha \in F} \exp(-\iota \alpha \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

où  $F$  est un ensemble fini donné plus loin par le lemme 7. Le facteur  $\frac{1}{3N}$  nous donne la contractance des opérateurs  $\Pi_1^\varepsilon$  et  $\Pi_1^*$ .

Posons  $\mathbf{U}^{*,0} \equiv 0$  et  $\mathbf{U}^{*,\nu+1} = \Pi_1^*(\mathbf{U}^{*,\nu})$  pour  $\nu \in \mathbb{N}$ . Nous notons  $c_{i,\alpha}^{*,\nu}$  les coefficients de Fourier de  $\mathbf{U}^{*,\nu}$ .

**Lemme 6**

$\forall i = 1, \dots, N, \forall q = 0, \dots, P, \forall \alpha \in \Psi^q, \forall (t, x) \in \Omega^q, \forall \nu \in \mathbb{N} :$   
 $0 \leq c_{i,\alpha}^{q,\nu}(t, x) \leq c_{i,\alpha}^{q,\nu+1}(t, x) \leq 2M$

DÉMONSTRATION : La majoration des coefficients de Fourier par  $2M$  résulte de la borne uniforme en  $\nu$  de  $\mathbf{U}^{*,\nu}$ . Le reste se démontre par récurrence sur  $\nu$ . Les équations vérifiées par les coefficients de Fourier sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i,\alpha}^{q,\nu} = \left\{ (\beta_j)_{j=1}^N \text{ où } \beta_j \in \mathcal{S}_i^q(U_i^{q,\nu}) / \sum_{j=1}^N \langle \beta_j, \vec{\varphi}^q \rangle \equiv \langle \alpha, \vec{\varphi}^q \rangle \right\}, \\ X_i c_{i,\alpha}^{q,\nu+1}(t, x) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_N) \in F_{i,\alpha}^{q,\nu}} \prod_{j=1}^N c_{j,\beta_j}^{q,\nu}(t, x), \end{array} \right.$$

plus des conditions aux limites analogues à celles de  $\mathbf{U}^{q,\nu+1}$  sur chaque  $\partial\Omega^q$ . Ainsi la positivité des coefficients s'obtient simplement par récurrence en écrivant ces équations sous forme intégrale. Pour finir notons  $H^\nu$  l'hypothèse :  $\{\forall i, \forall q, \forall \alpha, \forall (t, x), c_{i,\alpha}^{q,\nu}(t, x) \leq c_{i,\alpha}^{q,\nu+1}(t, x)\}$ .  $H^0$  est trivialement vraie. Pour  $\nu > 0$ ,  $c_{i,\alpha}^{q,\nu+1}$  se calcule explicitement en fonction des  $c_{j,\beta}^{q,\nu}$ . De même  $c_{i,\alpha}^{q,\nu}$  s'exprime en fonction des  $c_{j,\beta}^{q,\nu-1}$ . En utilisant la positivité des coefficients, en appliquant  $H^{\nu-1}$  aux  $c_{j,\beta}^{q,\nu}$  et  $c_{j,\beta}^{q,\nu-1}$ , et en notant que  $H^{\nu-1}$  nous donne  $F_{i,\alpha}^{q,\nu-1} \subset F_{i,\alpha}^{q,\nu}$ , on en déduit que  $H^\nu$  est vraie.  $\square$

**Lemme 7**

Avec les notations du lemme 5, il existe  $F$  tel que pour tout  $\nu : \mathcal{V}^*(\mathbf{U}^{*,\nu}) = E_\nu^*$

DÉMONSTRATION : Par le lemme 6 la suite  $(\mathcal{V}^*(\mathbf{U}^{*,\nu}))_\nu$  est croissante. Par construction de  $E_\nu^*$ , on a toujours  $\mathcal{V}^*(\mathbf{U}^{*,\nu}) \subset E_\nu^*$ . D'après le lemme 5, La suite d'espace localisée  $E_\nu^*$  est de dimensions finie et constante pour  $\nu > \nu_0$ . Montrons que pour un bon choix de  $F$  fini  $\mathcal{V}^*(\mathbf{U}^{*,\nu_0}) = E_{\nu_0}^*$ . Comme  $E_{\nu_0}^*$  est de dimension finie, il existe un spectre localisée fini  $F_{\nu_0}^*$  qui réalise  $E_{\nu_0}^*$  si  $F_{\nu_0}^*$  est le spectre de  $\mathbf{U}^{*,\nu_0}$ . Comme les résonances ne mettent en jeux qu'un nombre finie de phases et que les transmissions et réflexions ne font que de propager les fréquences ("T est réversible"), on peut trouver  $F_{\nu_0-1}^*$  tel qu'au bout d'une itération de  $\Pi^*$  on ait au moins obtenu le spectre  $F_{\nu_0}^*$ . Par récurrence, il existe un spectre fini  $F_1^*$  tel qu'au bout de  $\nu_0 - 1$  itérations de  $\Pi^*$  on ait au moins obtenu le spectre  $F_{\nu_0}^*$ . Il ne reste plus qu'à voir quelles sont les phases obtenues par résonance dans  $\Omega^0$  et  $\Omega^P$  et prendre pour  $F$  un spectre fini qui engendre au moins  $F_1^*$  au bout d'une itération de  $\Pi^*$ .  $\square$

Le théorème 3 résulte du lemme 7.  $\square$

## 6 Démonstration des résultats de contractance

On démontre ici des résultats de contractance en norme  $L_{t,x}^\infty$  et  $L_t^\infty L_x^1$ , uniforme en  $\varepsilon$ . Pour commencer, on étudie le problème mixte à données continues suivant :

$$\begin{cases} X_i(t, x)u_i(t, x) = f_i(t, x, \mathbf{u}(t, x)), & i = 1..N \text{ sur } \Omega \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^o(x), & \text{sur } \{t = 0\} \\ \mathbf{u}_+(t, 0) = \mathbf{g}(t, \mathbf{u}_-(t, 0)), & \text{sur } \{x = 0\} \end{cases} \quad (14)$$

L'existence et l'unicité d'un tel problème s'obtient avec l'opérateur :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_c : C_\Gamma^0(\Omega, \mathbb{R}^N) & \longrightarrow & C_\Gamma^0(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{v} \end{array} \quad (15)$$

où  $\mathbf{v}$  est défini dans l'ordre suivant, pour  $(t, x) \in \Omega, 1 \leq i \leq N$  :

1. si la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $x$  :

$$v_i(t, x) = \mathbf{u}_{ci}^o(\gamma_i(0; t, x)) + \int_0^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{u}(s, \gamma_i(s; t, x))) ds,$$

2. sinon la  $i$ -caractéristique issue de  $(t, x)$  rencontre l'axe des  $t$  en  $\tau$  et  $i \leq P$  :

$$v_i(t, x) = g_{ci}(\tau, \mathbf{v}_-(\tau, 0)) + \int_\tau^t f_{ci}(s, \gamma_i(s; t, x), \mathbf{u}(s, \gamma_i(s; t, x))) ds,$$

où  $\mathbf{g}_c(t, \mathbf{u}_{c-}) = \mathbf{c}\mathbf{g}(t, \mathbf{u}_-)$ , et  $\mathbf{f}_c(\cdot, \cdot, \mathbf{u}_c) = (\mathbf{c}\mathbf{f}_+(\cdot, \cdot, \mathbf{u}) + \mathbf{f}_-(\cdot, \cdot, \mathbf{u}))$ .

Le problème mixte semilinéaire (14) se ramène à résoudre  $\Pi_c(\mathbf{u}_c) = \mathbf{u}_c$  (cf [4]).

**Remarque 7 (donnée au bord de  $\Pi(\mathbf{u})$ )** Par rapport au [4], on a légèrement modifié la donnée au bord pour obtenir la contractance de  $\Pi_c$  en norme  $L^\infty$  et  $L_t^\infty L_x^1$ .

On note pour la suite :  $|\mathbf{u}| = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|$ ,  $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \|u_i\|_\infty$ ,  $\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f} \right\|_\infty$  la norme matricielle subordonnée à la norme  $L^\infty$ ,

$P(C_1, M) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N / |\mathbf{u}_+| \leq (1 + 3C_1)2M, |\mathbf{u}_-| \leq 2M\}$  et :

$$M := \max \left( \|\mathbf{u}^o\|_\infty, 3\|\mathbf{g}(\cdot, 0)\|_{\infty, [0, T]} \right) + 1 \quad (16)$$

$$C_1 := \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_-} \mathbf{g} \right\|_{\infty, [0, T] \times \{|\mathbf{u}_-, |\mathbf{u}_-| \leq 2M\}} \quad (17)$$

$$C_2 := \max \left( \|\mathbf{f}\|_{\infty, \Omega \times P(C_1, M)}, (1 + 3C_1) \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f} \right\|_{\infty, \Omega \times P(C_1, M)} \right) + 1 \quad (18)$$

On effectue le changement de variable :

$$\mathbf{u}_c := c\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_- \text{ avec } c := (1 + 3C_1)^{-1} \quad (19)$$

Posons :

$$B_M(T, \mathbf{u}_c^o) := \left\{ \mathbf{u}_c \in C_\Gamma^0(\Omega(T), \mathbb{R}^N) / \mathbf{u}_c(0, \cdot) = \mathbf{u}_c^o \text{ et } \|\mathbf{u}_c\|_{\infty, \Omega(T)} \leq 2M \right\}$$

**Théorème 4 (Existence pour (14) )**

Il existe  $T_0 > 0$  tel que  $\Pi_c$  soit contractant sur  $B_M(T, \mathbf{u}_c^o)$  pour la norme  $L^\infty$  et la norme  $L_t^\infty L_x^1$ . On peut prendre  $T_0$  ne dépendant que de  $M$ ,  $C_1$  et  $C_2$ . La constante de contraction  $\rho$  ne dépend des données initiales que par l'intermédiaire de la constante  $M$  de l'équation (16). Ainsi, il existe une unique solution de (14) dans  $C_\Gamma^0(\Omega(T_0), \mathbb{R}^N)$ .

DÉMONSTRATION :

a) Contractance de la réflexion

Le changement de variable sur  $\mathbf{u}$  rend  $\mathbf{g}_c(t, \mathbf{u}_{c-})$  contractante en  $\mathbf{u}_{c-}$  et deux autres inégalités :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_-} \mathbf{g}_c \right\|_{\infty, [0, T] \times \{\mathbf{u}_-, |\mathbf{u}_-| \leq 2M\}} = cC_1 \leq \frac{1}{3}, \|\mathbf{u}_c^o\|_\infty \leq \|\mathbf{u}^o\|_\infty,$$

$$\max \left( \|\mathbf{f}_c\|_{\infty, \Omega \times \{\mathbf{u}_c \in \mathbb{R}^N / |\mathbf{u}_c| \leq 2M\}}, \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_-} \mathbf{f}_c \right\|_{\infty, \Omega \times \{\mathbf{u}_c / |\mathbf{u}_c| \in \mathbb{R}^N \leq 2M\}} \right) + 1 \leq C_2.$$

b) Contractance  $L^\infty$  de  $\Pi$ .

**Lemme 8**

Il existe  $T_1, 0 < T_1 \leq T$  tel que  $\Pi_c$  soit  $L^\infty$  contractant de  $B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)$  dans lui même.

DÉMONSTRATION : Prenons  $T_1 = \min\left(T, \frac{1}{2C_2}\right)$ . En effet pour  $\mathbf{u} \in B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)$ , posons

$\mathbf{v} := \Pi_c(\mathbf{u})$ . En majorant grossièrement suivant les caractéristiques issues de l'axe des  $x$ , On obtient pour  $\mathbf{v}$  :

$$|\mathbf{v}(t, x)| \leq \|\mathbf{u}_c^o\|_\infty + T_1 C_2 \leq M + \frac{1}{2} \leq 2M$$

Sur le bord, en utilisant l'estimation précédente sur  $\mathbf{v}_-$  et la contraction de la réflexion on a :

$$|\mathbf{v}_+(\tau, 0)| = |\mathbf{g}(\tau, \mathbf{v}_-(\tau, 0))| \leq \frac{M}{3} + cC_1 \|\mathbf{v}_-\|_\infty \leq M$$

Finalement, en majorant suivant les caractéristiques issues du bord :

$$|\mathbf{v}_+(t, x)| \leq \|\mathbf{v}_+(\cdot, 0)\|_\infty + T_1 C_2 \leq 2M$$

donc  $\|\Pi_c(\mathbf{u})\|_\infty \leq 2M$  ou encore  $\Pi_c(B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)) \subset B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)$ .

Calculons une constante de Lipschitz de  $\Pi_c$  : soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  dans  $B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)$ ,  $\mathbf{v} := \Pi_c(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{z} := \Pi_c(\mathbf{w})$ . On recommence les calculs précédents, dans le même ordre, à la différence près qu'on utilise cette fois-ci les constantes de Lipschitz de  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$ . On obtient :

$$|\mathbf{z} - \mathbf{v}|(t, x) \leq T_1 C_2 \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|_\infty$$

$$|\mathbf{z}_+ - \mathbf{v}_+|(\tau, 0) \leq cC_1 |\mathbf{z}_- - \mathbf{v}_-|(\tau, 0) \leq cC_1 \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|_\infty$$

$$|\mathbf{z}_+ - \mathbf{v}_+|(t, x) \leq (cC_1 + \frac{1}{2}) \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|_\infty$$

Or  $cC_1 \leq \frac{1}{3}$  donc  $\rho_1 := (cC_1 + \frac{1}{2}) < 1$  et  $\Pi_c$  est  $L^\infty$  contractant sur  $B_M(T_1, \mathbf{u}_c^o)$ .  $\square$

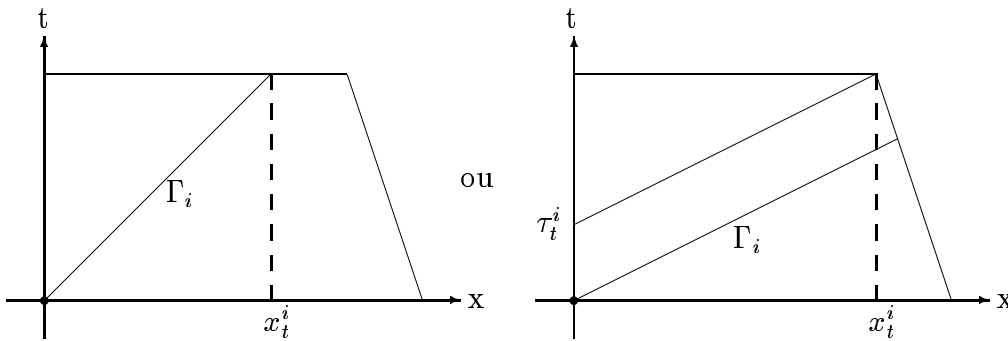
c) Contractance  $L_t^\infty L_x^1$  de  $\Pi_c$ .

Soit la norme  $L_t^\infty L_x^1$  :  $\|\mathbf{u}\| := \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^{X-\Lambda t} |\mathbf{u}(t, x)| dx$ . Il nous reste à prouver la

**Proposition 6 (Contractance  $L_t^\infty L_x^1$ )**

*Il existe  $T_2, 0 < T_2 \leq T$  tel que  $\Pi_c$  soit  $L_t^\infty L_x^1$  contractant sur  $B_M(T_2, \mathbf{u}_c^o)$ .*

DÉMONSTRATION : On prend  $T_2 \leq T_1$  pour avoir les inégalités précédentes et l'on redresse les caractéristiques. Pour  $1 \leq i \leq P$ , notons  $x_t^i$  l'abscisse du point  $(t, x_t^i) \in \Gamma_i$  si  $\Gamma_i$  rencontre dans  $\Omega$  la droite horizontale d'ordonnée  $t$ , sinon posons  $x_t^i = X - \Lambda t$ .



Soit  $\tau_t^i(x)$  l'ordonnée du point de l'axe des  $t$  se trouvant sur la  $i$  caractéristique issue de  $(t, x)$ ,  $0 \leq x \leq x_t^i$ .

$$\begin{aligned}\tau_t^i : [0, x_t^i] &\longrightarrow \tau_t^i([0, x_t^i]) \subset [0, t] \\ x &\longmapsto \tau_t^i(x) \text{ tel que } \gamma_i(\tau_t^i(x); t, x) = 0\end{aligned}$$

$\tau_t^i$  est un difféomorphisme. Posons  $K = \max_{1 \leq i \leq P} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left\| \frac{d}{dx} \tau_t^i \right\|_{\infty, [0, x_t^i]}^{-1}$ .

Pour chaque  $i = P+1 \dots N$  et pour chaque  $t \in [0, T_1]$  posons :

$$\begin{aligned}\chi_t^i : [0, t] \times [0, X - \Lambda t] &\longrightarrow \chi_t^i([0, t] \times [0, X - \Lambda t]) \subset \Omega(t) \\ (s, x) &\longmapsto (s, \gamma_i(s; t, x))\end{aligned}$$

Puis, pour chaque  $i = 1 \dots P$  et pour chaque  $t \in [0, T_1]$ , sur le "triangle"  $\Delta_i = \{(x, s) / 0 \leq x \leq x_t^i, \tau_t^i(x) \leq s \leq t\}$  considérons le difféomorphisme

$$\begin{aligned}\chi_t^i : \Delta_i \cup [0, t] \times [x_t^i, X - \Lambda t] &\longrightarrow \chi_t^i(\Delta_i \cup [0, t] \times [x_t^i, X - \Lambda t]) \subset \Omega(t) \\ (s, x) &\longmapsto (s, \gamma_i(s; t, x))\end{aligned}$$

En posant  $J = \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{0 \leq t \leq T_1} \| \text{Jacobi} \chi_t^i \|_{\infty}^{-1}$ , il suffit de prendre

$T_2 = \min \left( T_1, \frac{1}{2C_2 J (2 + KcC_1)} \right)$ . En effet, pour  $t \leq T_2$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in B_M(T_2, \mathbf{u}_c^o)$ ,  $\mathbf{v} = \Pi_c(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{z} = \Pi_c(\mathbf{w})$ , on a par les calculs fait en b) :

1. pour  $P < i \leq N$  :

$$\begin{aligned}\int_0^{X-\Lambda t} |z_i(t, x) - v_i(t, x)| dx &\leq \int_{[0, t] \times [0, X-\Lambda t]} C_2 |\mathbf{u} - \mathbf{w}|(\chi_t^i(s, x)) ds dx \\ &\leq C_2 \int_{\chi_t^i([0, t] \times [0, X-\Lambda t])} J |\mathbf{u} - \mathbf{w}|(s, \gamma) ds d\gamma \leq C_2 J \int_{\Omega(t)} |\mathbf{u} - \mathbf{w}|(s, \gamma) ds d\gamma \\ &\leq C_2 J t \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{X-\Lambda s} |\mathbf{u} - \mathbf{w}|(s, \gamma) d\gamma \leq C_2 J T_2 \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \| \end{aligned}$$

2. Pour  $1 \leq i \leq P$ ,  $t$  étant fixé, l'intégrale suivante se découpe en deux morceaux :

$$\int_0^{X-\Lambda t} |z_i - v_i|(t, x) dx = \int_0^{x_t^i} |z_i - v_i|(t, x) dx + \int_{x_t^i}^{X-\Lambda t} |z_i - v_i|(t, x) dx$$

Le deuxième morceau se majore comme précédemment alors que le premier provient de la réflexion :

$$\begin{aligned}\int_0^{x_t^i} |z_i - v_i|(t, x) dx &\leq \int_0^{x_t^i} \int_{\tau_t^i(x)}^t C_2 |\mathbf{u} - \mathbf{w}|(\chi_t^i(s, x)) ds dx \\ &\quad + \int_0^{x_t^i} |z_i - v_i|(\tau_t^i(x), 0) dx\end{aligned}$$

La première intégrale se majore comme pour  $i > P$ . Seule la dernière intégrale mérite attention. Par changement de variables et majoration du jacobien on a :

$$\int_{\tau_t}^t |z_i - v_i|(\tau_t^i(x), 0) dx \leq K \int_{\tau_t}^t |z_i - v_i|(\sigma, 0) d\sigma \leq K \int_0^t |z_i - v_i|(\sigma, 0) d\sigma$$

Et maintenant on se rappelle de la condition au bord qui nous donne l'inégalité :

$$|z_i - v_i|(\sigma, 0) \leq cC_1 |z_- - v_-|(\sigma, 0)$$

Or pour  $P < j \leq N$ , en intégrant comme en 1 :

$$\int_0^t |z_j - v_j|(\sigma, 0) d\sigma \leq C_2 J T_2 |||\mathbf{u} - \mathbf{w}|||$$

En regroupant les résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{X-\Lambda t} |z_i - v_i|(t, x) dx &\leq C_2 J T_2 |||\mathbf{u} - \mathbf{w}||| + C_2 J T_2 |||\mathbf{u} - \mathbf{w}||| \\ &\quad + K c C_1 C_2 J T_2 |||\mathbf{u} - \mathbf{w}||| \end{aligned}$$

Soit  $\rho_2 := C_2 J T_2 (2 + K c C_1)$ ; on a  $\rho_2 < 1$  par définition de  $T_2$ .

Finalement  $|||\Pi_c(\mathbf{u}) - \Pi_c(\mathbf{w})||| \leq \rho_2 |||\mathbf{u} - \mathbf{w}|||$ , ce qui achève la démonstration de la proposition 6.  $\square$

Soient  $T_1$  et  $\rho_1$  définis dans le lemme 8 et  $T_2$  et  $\rho_2$  définis dans la proposition 6, prenons  $T_0 = \min(T_1, T_2)$  et  $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$ .  $\rho$  ne dépend des données initiales que par l'intermédiaire de la constante  $M$  donc le théorème 4 est démontré.  $\square$

## 6.1 Application au problème oscillant

Il suffit d'appliquer les résultats précédents à :

$$\begin{aligned} (i) \quad X_i(t, x) u_i(t, x) &= f_i(t, x, \mathbf{u}(t, x)) && i = 1 \dots N \text{ sur } \Omega \\ (ii_\varepsilon) \quad \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}_\varepsilon^o(x) && \text{sur } t = 0 \\ (iii_\varepsilon) \quad \mathbf{u}_+(t, 0) &= \mathbf{g}_\varepsilon(t, \mathbf{u}_-(t, 0)) && \text{sur } x = 0. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_\varepsilon^o(x) = \mathbf{H}\left(x, \frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon}\right)$  et  $\mathbf{g}_\varepsilon(t, \mathbf{u}_-) = \mathbf{G}\left(t, \mathbf{u}_-, \frac{\psi_0(t)}{\varepsilon}\right)$ .

On demande que le temps d'existence soit indépendant de  $\varepsilon$ . Soit  $M_\varepsilon$  la constante définie par l'équation (16) pour le système (i),(ii $_\varepsilon$ ),(iii $_\varepsilon$ ). Prenons une constante  $M$  qui majore  $M_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$ . Par exemple, prenons  $M := \max\left(\|\mathbf{H}\|_{\infty, [0, X] \times \mathbb{R}}, 3\|g(\cdot, 0)\|_{\infty, [0, T]}\right) + 1$  et évaluons  $C_1$  par l'équation (17), puis  $c$  et  $C_2$  à partir de  $M$  et  $C_1$  par l'équation (18). On effectue le changement de variable (19) et par le théorème 4 nous obtenons la proposition 1.

L'existence et l'unicité du profil  $\mathbf{U}$  nous sont données par l'opérateur  $\overline{\Pi}_c$ . La proposition 3 s'obtient à l'aide des deux lemmes suivants

**Lemme 9**

$$\overline{\Pi}_c \left( C_{\Gamma_{pp}}^0 \left( \Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N \right) \right) \subset C_{\Gamma_{pp}}^0 \left( \Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N \right).$$

DÉMONSTRATION : Bien que le terme intégré soit discontinu sur chaque caractéristique issue du coin, l'intégration en  $s$  coupe transversalement ces courbes donc régularise.  $\square$

**Lemme 10**

$$\overline{\Pi}_c \text{ est } L^\infty \text{ contractant sur : } \left\{ \mathbf{U} \in C_{\Gamma_{pp}}^0 \left( \Omega(T_0) \times \Theta, \mathbb{R}^N \right), \|\mathbf{U}\|_\infty \leq 2M \right\}.$$

DÉMONSTRATION : Comme  $\mathbb{E}_i$  est un projecteur de norme 1 les mêmes estimations faites sur  $\Pi_c^\varepsilon$ , en plus simple vue la donnée au bord, restent valables pour  $\overline{\Pi}_c$ .  $\square$

L'existence et l'unicité du profil  $\mathbf{U}^*$  nous sont données par l'opérateur  $\Pi_c^*$  car

**Lemme 11 (Contractance de  $\Pi_c^*$ )**

$$\Pi_c^* \text{ est contractant en norme } L^\infty \left( \Omega(T_0), \mathbb{R}^N \right) \text{ sur } B_M^* = \left\{ \mathbf{V}^* \in \mathcal{C}^*, \|\mathbf{V}^*\|_\infty \leq 2M \right\}.$$

DÉMONSTRATION : Soit  $\rho$  la constante de Lipschitz de  $\overline{\Pi}_c$ , alors il est immédiat que  $\rho$  est une constante de Lipschitz de  $\Pi_c^*$ .  $\square$

$\mathbf{U}_c^*$  est défini comme l'unique élément de  $B_M^*$  tel que  $\Pi^*(\mathbf{U}_c^*) = \mathbf{U}_c^*$ . Cette dernière équation nous permet de récupérer la régularité  $\mathbf{U}^* \in C_{\Gamma_{pp}}^* \subset \mathcal{C}^*$ , et de donner la proposition 5.

## 7 Comparaison des deux méthodes

La première méthode, nous donnant l'espace de phases  $E$  et le profil  $U$ , généralise au problème mixte les résultats établis dans [10] pour le problème de Cauchy. Cependant des exemples montrent le phénomène d'oscillations propres à des sous domaines du quadrant. Pour mettre en relief ce phénomène on a développé la notion de phase localisée et de profils associés : l'espace de phases localisées  $E^*$  et le profil localisé  $\mathbf{U}^*$ .

### 7.1 Les espaces de phases $E$ et $E^*$

La définition de  $E^*$  est bien plus compliquée que celle de  $E$ . Cependant on a pris par construction les phases qui pouvaient réellement intervenir dans le comportement oscillant de  $\mathbf{u}^\varepsilon$ .

$E^*$  est plus petit que  $E$  dès que  $E$  est (faiblement) transverse (ce qui est le minimum requis pour avoir une asymptotique). C'est à dire que  $E$  contient des phases qui ne correspondent à aucune oscillation de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  dans le complémentaire



de  $\Omega^0$ . Pour voir ceci il faut d'abord donner un sens à cette inclusion en associant à  $E$  par restriction aux sous domaines l'élément de  $\Xi : \overline{E}^*$ .

On a :  $E$  (faiblement) transverse  $\implies \overline{E}^*$  un espace de phases localisées  $\implies E^* \subset \overline{E}^*$ . L'égalité n'ayant lieu que dans de rares cas, par exemple si l'opérateur différentiel est à coefficients constants et les phases initiales  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  sont affines. Mais il suffit de prendre une phase  $\psi_0$  quadratique pour obtenir des inclusions strictes par composantes. De fait, pour construire  $E$ , on a fait des prolongements arbitraires de phases à tout  $\Omega$ . Puis on fait réfléchir et résonner ces prolongements ce qui nous donne encore plus de phases. Autrement dit prolongeons les phases de  $E^*$  à tout  $\Omega$ , rajoutons les nouvelles phases dûes aux résonances de ces prolongements, finalement réfléchissons les nouvelles phases et ainsi de suite ... On obtiendra un espace de phase semblable à  $E$ .

## 7.2 Les profils $U$ et $U^*$

Des deux asymptotiques obtenues on en déduit l'égalité :

$$\mathbf{U}^* \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t, x)}{\varepsilon} \right) = U \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}(t, x)}{\varepsilon} \right) + o(1)$$

Les deux profils sont ils égaux ?

Si  $E^* \subset \overline{E}^*$  il existe pour  $q=0 \dots P$  une matrice *rectangulaire*  $\Upsilon^q$  tel que  $\vec{\varphi}^q(t, x) = \Upsilon^q \vec{\varphi}(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \Omega^q$ . Ce que l'on notera de manière condensée :

$$\vec{\varphi}^*(t, x) = \Upsilon^* \vec{\varphi}(t, x) \text{ pour } (t, x) \in \Omega$$

Si on est dans le cas transverse un théorème de [10] montre que le profil est unique ce qui nous donne l'égalité :

$$\mathbf{U}(t, x, \vec{\theta}) = \mathbf{U}^*(t, x, \Upsilon^* \vec{\theta})$$

Ceci montre bien que le profil  $\mathbf{U}$  a des variables superflues. Montrons que l'on peut se passer de l'hypothèse de transversalité.

### Proposition 7

$$E^* \subset \overline{E}^* \implies \mathbf{U}(t, x, \vec{\theta}) = \mathbf{U}^*(t, x, \Upsilon^* \vec{\theta})$$

Cette égalité montre que  $\mathbf{U}^*$  n'améliore pas l'asymptotique mais précise la propagations des oscillations.

DÉMONSTRATION : Pour la preuve posons  $V(t, x, \vec{\theta}) = \mathbf{U}^*(t, x, \Upsilon^* \vec{\theta})$ . On a  $\mathbf{V} \in C_{\Gamma_{pp}}^0(\Omega \times \Theta, \mathbb{R}^N)$  grâce aux équations de transmission vérifiées par  $\mathbf{U}^*$  et  $\|\mathbf{V}\| \leq 2M$ . Pour montrer l'égalité, il suffit de prouver que :  $\overline{\Pi}_c(\mathbf{V}_c) = \mathbf{V}_c$ . Pour cela on a besoin du

**Lemme 12**

Pour  $q$  fixé,  $q \in \{0, 1, \dots, P\}$ , et  $W \in C_{pp}^0(\Theta^q, \mathbb{R})$  posons  $Z(\vec{\theta}) = \mathbf{W}(\Upsilon^q \vec{\theta})$   
alors  $Z \in C_{pp}^0(\Theta, \mathbb{R})$  et  $\mathbb{E}_i Z(\vec{\theta}_i) = \mathbb{E}_i^q W((\Upsilon^q \vec{\theta})_i)$  pour  $1 \leq i \leq N$ .

DÉMONSTRATION : En identifiant matrice et application linéaire associée on a la surjection linéaire :

$$\begin{aligned} \Upsilon^q : \Theta &\longrightarrow \Theta^q \\ \vec{\theta} &\longmapsto \vec{\theta}^q = \Upsilon^q \vec{\theta} \end{aligned}$$

Par continuité des opérateurs de moyenne il suffit de montrer le lemme pour un seul mode.

$$W(\vec{\theta}^q) = \exp(\iota \langle \lambda, \vec{\theta}^q \rangle) \text{ donc } Z(\vec{\theta}) = \exp(\iota \langle {}^t \Upsilon^q \lambda, \vec{\theta} \rangle)$$

Rappelons :

$$\mathbb{E}_i \exp(\iota \langle \lambda, \vec{\theta} \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \Psi_i^\perp \\ \exp(\iota \langle \lambda, \Upsilon^q \vec{\theta} \rangle) & \text{si } \lambda \in \Psi_i^\perp \end{cases}$$

Cette égalité résulte de la définition de l'opérateur de moyenne. Ce dernier ne garde que les fréquences  $\lambda$  telles que  $\langle \lambda, \vec{\varphi} \rangle \in E_i$ . Or

$$\begin{aligned} {}^t \Upsilon^q \lambda \in \Psi_i^\perp &\iff \langle {}^t \Upsilon^q \lambda, \vec{\varphi} \rangle \in E_i \iff X_i \langle {}^t \Upsilon^q \lambda, \vec{\varphi} \rangle = 0 \\ &\iff X_i \langle \lambda, \Upsilon^q \vec{\varphi} \rangle = 0 \iff X_i \langle \lambda, \vec{\varphi}^q \rangle = 0 \\ &\iff \lambda \in (\Psi_i^q)^\perp \end{aligned}$$

Ce calcul montre que  ${}^t \Upsilon^q (\Psi_i^q)^\perp \subset \Psi_i^\perp$ . En général l'inclusion est stricte. Mais cela suffit pour avoir :

$$\forall \vec{\theta} \in \Theta, 1 \leq i \leq N, \mathbb{E}_i Z(\vec{\theta}) = \mathbb{E}_i^q W(\vec{\theta}^q = \Upsilon^q \vec{\theta})$$

□

En appliquant le lemme sur chaque  $\Omega^q$  on trouve que  $\mathbf{V}$  vérifie les mêmes équations que  $\mathbf{U}$ . Par unicité de la solution on a  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$  et la proposition est démontrée. □

**Corollaire 2**

*L'asymptotique est indépendante du choix des bases.*

DÉMONSTRATION : Considérons une autre base pour  $E^*$ , notée de manière condensée  $\vec{\psi}^*$ . On aura d'autres équations de transmission et réflexion, d'autres opérateurs de moyenne et un autre profil  $\mathbf{V}^*$ . Mais pour chaque  $q$ ,  $0 \leq q \leq P$ ,

il existe une matrice *carrée inversible*  $D^q$  telle que  $\vec{\psi}^q(t, x) = D^q \vec{\varphi}^q(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \Omega^q$ . Et on aura les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\psi}^*(t, x) &= D^* \vec{\varphi}^*(t, x) && \text{pour tout } (t, x) \in \Omega \\ \mathbf{V}^*(t, x, D^* \vec{\theta}^*) &= \mathbf{U}^*(t, x, \vec{\theta}^*) && \text{pour tout } (t, x, \vec{\theta}^*) \in \Omega \times \Theta^* \\ \mathbf{V}^* \left( t, x, \frac{\vec{\psi}^*(t, x)}{\varepsilon} \right) &= \mathbf{U}^* \left( t, x, \frac{\vec{\varphi}^*(t, x)}{\varepsilon} \right) && \text{pour tout } (t, x) \in \Omega \end{aligned}$$

Ceci se démontre comme la proposition 7. □

## References

- [1] A. Bressan, Lecture Notes on System of Conservations Laws, S.I.S.S.A., Trieste, (1993).
- [2] J. Chikki, Réflexions d'ondes striées ou oscillantes pour des systèmes hyperboliques à deux vitesses, Thèse d'université, Rennes (1990).
- [3] Y. Choquet-Bruhat, Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *J. Math. Pures & Appl.* **48**, (1969), 117-158.
- [4] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, VOL II, Interscience, New York, (1962).
- [5] C. Corduneanu, Almost periodic functions, Interscience, New York, (1968).
- [6] A. Corli, Weakly nonlinear geometric optics for hyperbolic systems of conservation laws with shock waves, *Asymptotic Analysis* **10**, (1995), 117-172.
- [7] J. Chazarain et A. Piriou, Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, (1981).
- [8] R. Diperna and A. Majda, The validity of non-linear geometric optics for weak solutions of conservations laws, *Comm. Math. Phys.* **98**, (1985), 313-347.
- [9] J. Hunter and J. Keller, Weakly nonlinear high frequency waves, *Com. Pure. Appl. Math.* **36**, (1983), 547-569.
- [10] J.L. Joly, G. Metivier and J. Rauch, Justification of resonant one-dimensional nonlinear geometric optics, *Journal of Functional Analysis* **114** (1), (1993), 106-231.

- [11] J.L. Joly and J. Rauch, Nonlinear resonance can create dense oscillations, *Microlocal Analysis and Nonlinear Waves*, M.Beals, R.Melrose and J.Rauch, Springer-Verlag (1991), 113-123.
- [12] S. Junca, Optique géométrique non linéaire, chocs forts, relaxation, Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, (1995), 7-78.
- [13] P.D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke Math. J.* **24**, (1957), 627-646.
- [14] A. Majda and M. Artola, Nonlinear geometric optics for hyperbolic mixed problems, in “Analyse Mathématiques et Applications”, contributions en l’honneur de J.L. Lions, Gauthier Villars, (1988), 319-356.
- [15] A. Majda and R. Rosales, Resonant one dimensional nonlinear geometric optics. *Stud. Appl. Math.* **71**, (1984), 149-179.
- [16] J. Rauch and M. Reed, Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension. *Duke Math. J.* **49**,*n° 2*, (1982), 397-475.
- [17] M. Sable-Tougeron, Justification de l’optique géométrique faiblement non linéaire pour le problème mixte, cas des concentrations, *Asymptotic Analysis*, **12**, (1996), 169-186.
- [18] S. Schochet, Resonant nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws, *J. D. E.* 113, *n° 2*,(1994), 473-504.
- [19] M. Williams, Resonant reflection of multidimensional semilinear oscillations, *Comm. in Partial Diff. Equ.* **18** (11), (1993), 1901-1959.