



**HAL**  
open science

# La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif p-adique

Guy Henniart, Bertrand Lemaire

► **To cite this version:**

Guy Henniart, Bertrand Lemaire. La transformée de Fourier pour les espaces tordus sur un groupe réductif p-adique. 2015. hal-01312238

**HAL Id: hal-01312238**

**<https://hal.science/hal-01312238>**

Preprint submitted on 5 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

## LA TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF $p$ -ADIQUE

Guy Henniart & Bertrand Lemaire

---

**Résumé.** — Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien  $F$ . On pose  $G = G(F)$ . Soit aussi  $\theta$  un  $F$ -automorphisme de  $G$ , et  $\omega$  un caractère lisse de  $G$ . On s'intéresse aux représentations complexes lisses  $\pi$  de  $G$  telles que  $\pi^\theta = \pi \circ \theta$  est isomorphe à  $\omega\pi = \omega \otimes \pi$ . Si  $\pi$  est admissible, en particulier irréductible, le choix d'un isomorphisme  $A$  de  $\omega\pi$  sur  $\pi^\theta$  (et d'une mesure de Haar sur  $G$ ) définit une distribution  $\Theta_\pi^A = \text{tr}(\pi \circ A)$  sur  $G$ . La transformée de Fourier tordue associée à une fonction  $f$  sur  $G$  localement constante et à support compact, la fonction  $(\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f)$  sur un groupe de Grothendieck adéquat. On décrit ici son image (théorème de Paley–Wiener) et son noyau (théorème de densité spectrale).

**Abstract.** — Let  $G$  be a connected reductive group defined over a non-Archimedean local field  $F$ . Put  $G = G(F)$ . Let  $\theta$  be an  $F$ -automorphism of  $G$ , and let  $\omega$  be a smooth character of  $G$ . This paper is concerned with the smooth complex representations  $\pi$  of  $G$  such that  $\pi^\theta = \pi \circ \theta$  is isomorphic to  $\omega\pi = \omega \otimes \pi$ . If  $\pi$  is admissible, in particular irreducible, the choice of an isomorphism  $A$  from  $\omega\pi$  to  $\pi^\theta$  (and of a Haar measure on  $G$ ) defines a distribution  $\Theta_\pi^A = \text{tr}(\pi \circ A)$  on  $G$ . The twisted Fourier transform associates to a compactly supported locally constant function  $f$  on  $G$ , the function  $(\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f)$  on a suitable Grothendieck group. Here we describe its image (Paley–Wiener theorem) and its kernel (spectral density theorem).

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 22E50.

*Mots clefs.* — corps local non archimédien, groupe réductif, espace tordu, caractère (tordu), transformée de Fourier, théorème de Paley–Wiener, théorème de densité spectrale.

### Table des matières

1. Introduction .....	4
1.1. La transformée de Fourier dans le cas non tordu (rappels) ....	4
1.2. La transformée de Fourier tordue .....	4
1.3. Formulation en termes de l'espace tordu de Labesse .....	5
1.4. État des lieux .....	6
1.5. Lien avec les travaux de Waldspurger .....	6
1.6. Réduction à la partie “discrète” de la théorie .....	6
1.7. Le théorème de Paley–Wiener .....	7
1.8. Le cocentre tordu $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .....	8
1.9. L'application d'Euler–Poincaré .....	8
1.10. Le théorème de densité spectrale .....	9
1.11. Des filtrations .....	10
1.12. Plan de l'article .....	11
1.13. Des choix .....	12
2. Représentations des espaces tordus .....	12
2.1. Conventions .....	12
2.2. Les données .....	12
2.3. $\omega$ –représentations de $G^{\natural}$ .....	14
2.4. Les représentations $\pi(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ .....	15
2.5. Le foncteur $\iota_k$ pour $k \geq 1$ .....	15
2.6. L'invariant $s(\Pi)$ .....	16
2.7. L'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ .....	17
2.8. $(\mathcal{H}^{\natural}, \omega)$ –modules et $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ –modules .....	19
2.9. Les caractères $\Theta_{\Pi}$ .....	22
2.10. Induction parabolique et restriction de Jacquet .....	22
2.11. Contragrédiente .....	25
2.12. Caractères non ramifiés .....	27
2.13. Quotient de Langlands .....	29
2.14. Décomposition de Langlands .....	30
2.15. Support cuspidal et caractères infinitésimaux .....	32
2.16. Support inertiel .....	33
2.17. Le “centre” (rappels, cas non tordu) .....	35
2.18. L'anneau $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$ .....	36
2.19. Action de $\mathbb{Z}$ sur le “centre” .....	37
2.20. “Bons” sous–groupes ouverts compacts de $G$ .....	38
2.21. “Bons” sous–espaces tordus ouverts compacts de $G^{\natural}$ .....	40
2.22. $(H^{\natural}, \omega, B)$ –modules admissibles .....	41
3. Énoncé du résultat .....	42
3.1. Le théorème principal .....	42
3.2. Variante “tempérée” du théorème .....	44
3.3. Variante “finie” du théorème .....	45
4. Réduction à la partie “discrète” de la théorie .....	46
4.1. Le “lemme géométrique” .....	46
4.2. Les espaces $\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q^P, \mathfrak{a}_P^*$ , etc. ....	48
4.3. Les espaces $\mathfrak{a}_{P^{\natural}}, \mathfrak{a}_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}}, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}^*$ , etc. ....	50
4.4. Les morphismes ${}^{\omega}T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}$ .....	52

4.5. Actions duales de $\mathfrak{Z}(G)$ et de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ .....	57
4.6. Induction parabolique et restriction de Jacquet : morphismes duaux .....	58
4.7. Terme constant suivant $P^{\natural}$ et caractères des induites paraboliques (formule de descente de Van Dijk) .....	60
4.8. Le théorème principal sur la partie “discrète” .....	61
4.9. Réduction du théorème principal (3.1) au théorème de 4.8 ....	62
5. Le théorème de Paley–Wiener sur la partie discrète .....	63
5.1. Support cuspidal des représentations discrètes .....	63
5.2. Un résultat de finitude .....	63
5.3. Décomposition des fonctions régulières .....	64
5.4. Une conséquence du lemme de décomposition .....	66
5.5. La partie $\Theta' = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ de $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$ est constructible .....	68
5.6. Décomposition des espaces $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ et $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .....	69
5.7. Surjectivité dans le théorème de 4.8 .....	71
6. Le théorème de densité spectrale sur la partie discrète .....	72
6.1. Trace tordue pour les modules projectifs de type fini .....	72
6.2. Trace tordue (suite) .....	75
6.3. L’isomorphisme $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \simeq \bar{A}^{\natural}$ .....	77
6.4. Variante (sur la condition de projectivité) .....	81
6.5. Les isomorphismes $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \simeq \mathcal{C}'(\mathbf{A}^{\natural})$ et $\mathcal{C}_{\star}(A^{\natural}) \simeq \mathcal{C}_{\star}(\mathbf{A}^{\natural})/\Omega_{\star}$ ..	86
6.6. Application aux algèbres de Hecke finies .....	89
6.7. L’isomorphisme $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \simeq \mathcal{H}(G^{\natural}, \omega)$ .....	90
6.8. La projection $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ .....	93
6.9. L’application d’Euler–Poincaré .....	95
6.10. Principe de la démonstration .....	97
6.11. Filtrations combinatoires .....	99
6.12. Filtration topologique .....	101
6.13. L’isomorphisme $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0) \simeq \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ .....	104
6.14. Gradué de la filtration topologique .....	106
6.15. Sur les générateurs projectifs à la Bernstein .....	108
6.16. Représentations à coefficients dans une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ ....	111
6.17. Spécialisation au point générique .....	112
6.18. Démonstration du lemme de 6.17 .....	117
6.19. Démonstration du lemme de 6.17 (suite) .....	123
6.20. Une conséquence de la proposition de 6.17 .....	127
6.21. Un résultat de densité .....	129
6.22. Le cran $d(G^{\natural})$ de la filtration topologique .....	132
6.23. Complément : raffinement du lemme de 6.14 .....	135
6.24. L’application d’Euler–Poincaré sur la partie discrète .....	137
6.25. Injectivité dans le théorème de 4.8 .....	141
6.26. Une conséquence .....	144
6.27. Un résultat de dualité .....	144
Index .....	148
Références .....	152

## 1. Introduction

**1.1. La transformée de Fourier dans le cas non tordu (rappels).** — Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit  $\mathbf{G}$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . Le groupe  $G = \mathbf{G}(F)$  des points  $F$ -rationnels de  $\mathbf{G}$ , muni de la topologie donnée par  $F$ , est localement profini — en particulier localement compact — et unimodulaire. On appelle *représentation de  $G$* , ou  *$G$ -module*, une représentation lisse de  $G$  à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Le choix d'une mesure de Haar  $dg$  sur  $G$  permet de définir, pour toute représentation admissible  $\pi$  de  $G$ , une distribution  $\Theta_\pi$  sur  $G$ , c'est-à-dire une forme linéaire sur l'espace  $\mathcal{H}(G)$  des fonctions localement constantes et à support compact sur  $G$ : pour  $f \in \mathcal{H}(G)$ , l'opérateur  $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$  sur l'espace de  $\pi$  est de rang fini, et l'on pose

$$\Theta_\pi(f) = \text{tr}(\pi(f)).$$

Cette distribution  $\Theta_\pi$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $\pi$  (et aussi du choix de  $dg$ ). Notons  $\mathcal{G}(G)$  le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de  $G$ . Tout élément  $\pi$  de  $\mathcal{G}(G)$  définit par linéarité une distribution  $\Theta_\pi$  sur  $G$ .

Le théorème de Paley–Wiener (scalaire) prouvé dans [BDK] caractérise les applications  $\mathbb{Z}$ -linéaires de  $\mathcal{G}(G)$  vers  $\mathbb{C}$  qui sont de la forme  $\pi \mapsto \Theta_\pi(f)$  pour une fonction  $f \in \mathcal{H}(G)$ . L'espace  $\mathcal{H}(G)$  est muni d'un produit de convolution “ $*$ ”, donné par

$$f * h(x) = \int_G f(g)h(g^{-1}x)dg.$$

Le noyau de l'application  $f \mapsto (\pi \mapsto \Theta_\pi(f))$  contient le sous-espace  $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$  de  $\mathcal{H}(G)$  engendré par les commutateurs  $f * h - h * f$ . Le théorème de densité spectrale affirme que ce noyau est égal à  $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$ . Il a été démontré par Kazhdan dans [K1, appendix], via un argument local–global utilisant la formule des traces, donc valable seulement si  $F$  est de caractéristique nulle. Kazhdan a ensuite étendu son résultat au cas où  $F$  est de caractéristique non nulle [K2], par la méthode des corps proches en supposant  $G$  déployé. Notons que cette méthode est certainement valable sous des hypothèses moins restrictives, par exemple en supposant la caractéristique résiduelle grande par rapport au rang de  $G$  — voir les travaux récents de J.-L. Waldspurger sur le lemme fondamental —, mais cela reste à rédiger.

**1.2. La transformée de Fourier tordue.** — On s'intéresse ici à la version “tordue” des résultats précédents. La torsion en question est donnée par un  $F$ -automorphisme de  $G$ , disons  $\theta$ . On fixe aussi un caractère  $\omega$  de  $G$ , c'est-à-dire un homomorphisme continu dans  $\mathbb{C}^\times$ . Pour  $f \in \mathcal{H}(G)$  et  $x \in G$ , on note  ${}^x f$  la fonction  $g \mapsto \omega(x)f(x^{-1}g\theta(x))$  sur  $G$ . La théorie de l'endoscopie tordue étudie les distributions  $D$  sur  $G$  qui, pour tout  $f \in \mathcal{H}(G)$  et tout  $x \in G$ , vérifient  $D({}^x f) = D(f)$ .

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  telle que  $\pi^\theta = \pi \circ \theta$  est isomorphe à  $\omega\pi = \omega \otimes \pi$ . Le choix d'un isomorphisme  $A$  de  $\omega\pi$  sur  $\pi^\theta$  définit comme plus haut une distribution  $\Theta_\pi^A = \text{tr}(\pi \circ A)$  sur  $G$ . Cette distribution  $\Theta_\pi^A$  dépend bien sûr du choix de  $A$  (et aussi de celui de  $dg$ ), et elle vérifie

$$\Theta_\pi^A({}^x f) = \Theta_\pi^A(f).$$

Pour décrire l'image et le noyau de l'application  $f \mapsto (\pi \mapsto \Theta_\pi^A(f))$  comme dans le cas non tordu, il faut commencer par la définir! On peut le faire de diverses manières, l'une d'elle étant la suivante. Soit  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G, \theta, \omega)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par les paires  $(\pi, A)$  où  $\pi$  est une représentation de  $G$  de longueur finie telle que  $\pi^\theta \simeq \omega\pi$  et  $A$  est un isomorphisme de  $\omega\pi$  sur  $\pi^\theta$ , modulo les relations:

- pour toute suite exacte  $0 \rightarrow (\pi_1, A_1) \rightarrow (\pi_2, A_2) \rightarrow (\pi_3, A_3) \rightarrow 0$ , i.e. une suite exacte de  $G$ -modules qui commute aux  $A_i$ , on a  $(\pi_3, A_3) = (\pi_2, A_2) - (\pi_1, A_1)$ ;
  - pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , on a  $(\pi, \lambda A) = \lambda(\pi, A)$ ;
  - pour tout entier  $k > 1$  et toute paire  $(\rho, B)$  formée d'une représentation de longueur finie  $\rho$  de  $G$  telle que  $\rho(k) \simeq \rho$  et d'un isomorphisme  $B$  de  $\rho$  sur  $\rho(k)$ , on a  $\iota_k(\rho, B) = 0$ .
- Ci-dessus,  $\iota_k(\rho, B)$  est la paire  $(\pi, A)$  définie par

$$\pi = \rho \oplus \rho(1) \oplus \cdots \oplus \rho(k-1), \quad A(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) = (v_1, \dots, v_{k-1}, B(v_0)),$$

où l'on a posé  $\rho(i) = \omega_i^{-1} \rho^{\theta^i}$ ,  $\omega_i$  désignant le caractère  $g \mapsto \omega(g\theta(g) \cdots \theta^{i-1}(g))$  de  $G$ . Par construction,  $\pi(1) = \omega^{-1} \pi^\theta$  est isomorphe à  $\pi$  et  $A$  est un isomorphisme de  $\pi$  sur  $\pi(1)$ .

L'application  $f \mapsto ((\pi, A) \mapsto \Theta_\pi^A(f))$  définit un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(G, \theta, \omega)^* = \text{Hom}_\mathbb{C}(\mathcal{G}_\mathbb{C}(G, \theta, \omega), \mathbb{C}).$$

C'est ce morphisme que l'on étudie dans cet article.

**1.3. Formulation en termes de l'espace tordu de Labesse.** — Plutôt que de fixer le  $F$ -automorphisme  $\theta$  de  $G$ , il convient de travailler avec un  $G$ -espace algébrique tordu  $G^\natural$  tel que l'ensemble  $G^\natural = G^\natural(F)$  de ses points  $F$ -rationnels est non vide. Le choix d'un point-base  $\delta_1 \in G^\natural$  définit un  $F$ -automorphisme  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$  de  $G$  qui permet d'identifier  $G^\natural$  au  $G$ -espace topologique tordu  $G\theta$  (cf. 2.2). On appelle  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , ou  $(G^\natural, \omega)$ -module, la donnée d'une paire  $(\pi, A)$  formée d'une représentation  $\pi$  de  $G$  telle que  $\pi(1) \simeq \pi$  et d'un isomorphisme  $A$  de  $\pi$  sur  $\pi(1)$  (on renvoie à 2.3 pour une définition plus intrinsèque). On note  $\Pi$  la paire  $(\pi, A)$ , et l'on pose  $\Pi^\circ = \pi$ . Les  $\omega$ -représentations de  $G^\natural$  s'organisent naturellement en une catégorie abélienne, et  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}_\mathbb{C}(G, \theta, \omega)$  est un quotient du groupe de Grothendieck des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G^\natural$  telles que la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  sous-jacente est de longueur finie.

Toute  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  telle que  $\Pi^\circ$  est admissible définit comme plus haut une distribution  $\Theta_\Pi$  sur  $G^\natural$ , c'est-à-dire une forme linéaire sur l'espace  $\mathcal{H}(G^\natural)$  des fonctions localement constantes et à support compact sur  $G^\natural$ : pour  $\phi \in \mathcal{H}(G^\natural)$ , on pose

$$\Theta_\Pi(\phi) = \text{tr}(\Pi(\phi)),$$

où  $\Pi(\phi)$  est l'opérateur  $\int_{G^\natural} \phi(\delta) \Pi(\delta) d\delta$  sur l'espace de  $\Pi$  (il est de rang fini). Ici  $d\delta$  est la mesure  $G$ -invariante sur  $G^\natural$  image de  $dg$  par l'homéomorphisme  $g \mapsto g \cdot \delta_1$ . On a donc

$$\Theta_\Pi(\phi) = \Theta_{\Pi^\circ}^{\Pi(\delta_1)}(\phi^\circ),$$

où  $\phi^\circ$  est la fonction  $g \mapsto \phi(g \cdot \delta_1)$  sur  $G$ . Traduite en ces termes, la transformée de Fourier pour  $(G^\natural, \omega)$  est le morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{H}(G^\natural) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^* = \text{Hom}_\mathbb{C}(\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega), \mathbb{C})$$

déduit par linéarité de l'application  $\phi \mapsto (\Pi \mapsto \Theta_\Pi(\phi))$ . Notre résultat principal (énoncé en 3.1) est une description de ce morphisme: le théorème de "Paley-Wiener tordu" décrit son image, et le théorème de "densité spectrale tordue" son noyau. En fait la densité spectrale en question est plutôt une conséquence de la description du noyau: l'espace  $\mathcal{H}(G^\natural)$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathcal{H}(G)$ -bimodule, et le sous-espace  $[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$  de  $\mathcal{H}(G^\natural)$  engendré par les fonctions  $\phi * f - \omega f * \phi$  est clairement contenu dans le noyau. On montre que cette inclusion est une égalité: si une fonction  $\phi$  annule toutes les traces  $\Theta_\Pi$ , où  $\Pi$  parcourt les  $\omega$ -représentations de  $G^\natural$  telles que  $\Pi^\circ$  est irréductible, alors elle est dans  $[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$ . Cela implique en particulier qu'elle annule toutes les distributions  $\mathfrak{D}$  sur  $G^\natural$  telles que  $\mathfrak{D}({}^x \phi') = \mathfrak{D}(\phi')$  pour tout  $\phi' \in \mathcal{H}(G^\natural)$  et tout  $x \in G$ , où l'on a posé  ${}^x \phi'(\delta) = \omega(x) \phi'(x^{-1} \cdot \delta \cdot x)$ .

**1.4. État des lieux.** — Le théorème de Paley–Wiener tordu a été démontré par Rogawski dans [R], pour  $\theta$  d’ordre fini et  $\omega = 1$ . La preuve est essentiellement celle de [BDK], adaptée au cas tordu. Sous les mêmes hypothèses ( $\theta^l = \text{id}$  et  $\omega = 1$ ), Flicker a décrit dans [F] une preuve locale du théorème de densité spectrale, utilisant la méthode de “dévissage” de Bernstein. À notre connaissance, cette méthode n’a jamais été rédigée par Bernstein. Elle est particulièrement bien expliquée par Dat (dans le cas non tordu) dans son article sur le  $K_0$  [D]. Ce dernier permet d’ailleurs de reconstruire les arguments manquants dans [F].

La démonstration donnée ici est entièrement locale, et entièrement spectrale puisqu’aucun recours aux intégrales orbitales n’est nécessaire. Comme dans [F], on traite de façon semblable la surjectivité (Paley–Wiener) et l’injectivité (densité), en adaptant au cas tordu les arguments de [BDK] et la méthode de dévissage de Bernstein.

Par induction parabolique et récurrence sur la dimension de  $G$ , on ramène l’étude de la transformée de Fourier à la partie “discrète” de  $(G^\natural, \omega)$ . Notant  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  le sous-espace de  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{H}(G^\natural)/[\mathcal{H}(G^\natural), \mathcal{H}(G)]_\omega$  engendré par les fonctions “ $\omega$ -cuspidales”, et  $\mathcal{G}_\mathbb{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)^*$  l’espace des formes linéaires “discrètes” sur  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  — ces notions sont les avatars tordus des notions habituelles, cf. 1.6 —, la transformée de Fourier pour  $(G^\natural, \omega)$  se restreint en un morphisme

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)^*.$$

Une bonne partie du présent article est consacrée à l’étude de ce morphisme. La description (image et noyau) de la transformée de Fourier sur l’espace  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  tout entier s’en déduit ensuite aisément. Notons que si le centre de  $G^\natural$  est compact — cas particulier auquel il est en principe toujours possible de se ramener en fixant le caractère central — ce morphisme est un isomorphisme. Notons aussi que dans le cas non tordu, cet isomorphisme a déjà été établi en caractéristique nulle par Kazhdan [K1, theorem B].

Signalons aussi l’article de Ciubotaru et He [CH] dans lequel les auteurs décrivent une base du cocentre (tordu par un automorphisme d’ordre fini) d’une algèbre de Hecke affine graduée avec paramètres arbitraires. Cela leur permet de prouver, pour ces algèbres de Hecke, que le noyau de l’application trace tordue est le sous-espace des commutateurs (théorème de densité) et que son image est l’espace des “bonnes” formes (théorème de Paley–Wiener).

**1.5. Lien avec les travaux de Waldspurger.** — Le théorème de Paley–Wiener démontré ici a déjà été utilisé par J.–L. Waldspurger pour établir la formule des traces locale tordue en caractéristique nulle [W]. Notons que dans ce même papier, l’auteur démontre — toujours en caractéristique nulle, et sous l’hypothèse où la restriction de  $\theta$  au centre  $Z(\mathbf{G})$  de  $\mathbf{G}$  est d’ordre fini — un théorème de densité, appelé “théorème 0” de Kazhdan [W, 5.5], qui (en caractéristique nulle) est équivalent au théorème de densité spectrale établi ici. Précisément, Waldspurger (dans [W]) commence par établir une première formule des traces locale tordue *non-invariante*, formule de laquelle il déduit le “théorème 0” de Kazhdan. Ensuite il utilise le théorème de Paley–Wiener — en particulier l’existence de pseudo-coefficients — pour rendre cette première formule invariante.

**1.6. Réduction à la partie “discrète” de la théorie.** — Décrivons brièvement les points-clés de la démonstration. On fixe une famille  $\mathcal{P}(G^\natural)$  de sous-espaces paraboliques standard  $P^\natural$  de  $G^\natural$  munis d’une décomposition de Levi standard  $P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P$ ; ici  $P$  désigne le sous-groupe parabolique de  $G$  sous-jacent à  $P^\natural$ , et  $U_P$  son radical unipotent. Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , les versions tordues des foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés définissent des morphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires

$$\omega_{i_{P^\natural}^{G^\natural}} : \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega), \quad \omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural}} : \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_P^\natural, \omega).$$

Notons  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  ${}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega))$  pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  distinct de  $G^{\natural}$ , et posons

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) / \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega).$$

Une forme linéaire sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  est dite “discrète” si elle s’annule sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ . Une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^{\circ}$  est irréductible est dite “discrète” si son image dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  n’est pas nulle. On note  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  formé des  $\omega$ -représentations discrètes de  $G^{\natural}$ . Notons que la décomposition

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) = \langle \Pi : \Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rangle + \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$$

n’est en général pas une somme directe.

Pour  $\phi \in \mathcal{H}(G^{\natural})$  et  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on a défini dans [L2, 5.9] le terme constant tordu  ${}^{\omega}\phi_{P^{\natural}, K} \in \mathcal{H}(M_{P^{\natural}}^{\natural})$  relatif à un sous-groupe compact maximal spécial  $K$  de  $G$  choisi de manière convenable (en bonne position par rapport aux sous-groupes paraboliques standard de  $G$ , cf. 4.7). On dit que  $\phi$  est “ $\omega$ -cuspidale” si pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  distinct de  $G^{\natural}$ , l’image de  ${}^{\omega}\phi_{P^{\natural}, K}$  dans  $\overline{\mathcal{H}}(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega)$  est nulle. D’après l’analogie tordu de la formule de Van Dijk pour les traces des représentations induites [L2, 5.9, théo.], si  $\phi$  est  $\omega$ -cuspidale alors  $\Theta_{\Pi}(\phi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ . D’ailleurs si l’on admet le théorème de densité spectrale tordue pour tous les sous-espaces de Levi propres de  $G^{\natural}$ , la réciproque est vraie aussi. La transformée de Fourier induit donc bien un morphisme

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*.$$

**1.7. Le théorème de Paley–Wiener.** — Commençons par décrire l’image. L’application  $(k, \pi) \mapsto \pi(k)$  — cf. 1.2 pour la définition de  $\pi(k)$  — induit une action de  $\mathbb{Z}$  sur la plupart des objets reliés à la théorie des représentations de  $G$ :

- l’ensemble  $\text{Irr}(G)$  des classes d’isomorphisme de représentations irréductibles de  $G$ ;
- l’ensemble  $\Theta(G) = \coprod_{\mathfrak{s}} \Theta(\mathfrak{s})$  des classes de  $G$ -conjugaison de paires cuspidales de  $G$ , où  $\mathfrak{s}$  parcourt l’ensemble des classes d’équivalence inertielle de paires cuspidales de  $G$  et  $\Theta(\mathfrak{s})$  désigne la variété complexe associée à  $\mathfrak{s}$  (cf. 2.16);
- le centre  $\mathfrak{Z}(G)$  de la catégorie des  $G$ -modules;
- etc.

L’application caractère infinitésimal

$$\theta_G : \text{Irr}(G) \rightarrow \Theta(G)$$

est ainsi  $\mathbb{Z}$ -équivariante. Pour chaque classe d’équivalence inertielle  $\mathfrak{s}$ , on note  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  le sous-ensemble de  $\Theta(\mathfrak{s})$  formé des  $\theta_G(\Pi^{\circ})$  pour une  $\omega$ -représentation discrète  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ . Remarquons que pour que  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  soit non vide, il faut que la variété  $\Theta(\mathfrak{s})$  soit  $\mathbb{Z}$ -stable. Comme dans [BDK], on montre (en 5.3–5.5) la

**PROPOSITION.** — *L’ensemble  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est une partie constructible de  $\Theta(\mathfrak{s})$ .*

Notons  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$  le groupe — algébrique, diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  — des caractères non ramifiés de  $G$  qui sont  $\theta$ -stables (il ne dépend pas du choix de  $\delta_1 \in G^{\natural}$ ), et posons  $d(G^{\natural}) = \dim \mathfrak{P}(G^{\natural})$ . Comme dans loc. cit., on en déduit (en 5.2) le

**COROLLAIRE.** — *L’ensemble  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est union finie de  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$ -orbites.*

Soit aussi  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$  l’ensemble des  $(\omega = 1)$ -représentations du  $G/G^1$ -espace tordu  $G^{\natural}/G^1$ , où  $G^1 \subset G$  désigne le groupe engendré par les sous-groupes compacts de  $G$ . L’ensemble  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ , identifié à un ensemble de fonctions  $G^{\natural} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ , est muni d’une structure de groupe,

qui en fait une extension (algébrique, scindée) de  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$  par  $\mathbb{C}^{\times}$ . On en déduit la description de l'image du morphisme  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*$ . C'est l'espace, disons  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , des formes linéaires  $\varphi$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  vérifiant:

- il existe un ensemble *fini*  $\mathfrak{S}$  de classes d'équivalence inertielle  $\mathfrak{s}$  tel que pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , on a  $\varphi(\Pi) = 0$  si  $\theta_G(\Pi^{\circ}) \in \Theta(G) \setminus \coprod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \Theta(\mathfrak{s})$ ;
- pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , l'application  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Psi \mapsto \varphi(\Psi\Pi)$  est une fonction *régulière* sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ .

**1.8. Le cocentre tordu  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .** — La description du noyau est plus indirecte. On commence par identifier (en 6.1–6.8) l'espace  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  à un espace de  $K$ -théorie, auquel on applique la méthode de “dévissage” de Bernstein. Soit  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  le groupe abélien libre engendré par les paires  $(\Pi, u)$  où  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^{\circ}$  est un  $G$ -module projectif de type fini, et  $u$  est un  $G$ -endomorphisme de  $\Pi^{\circ}$ , modulo les “relations nécessaires” (cf. 6.7): comme dans le cas non tordu, une telle paire  $(\Pi, u)$  définit un élément  $\overline{\phi}_{(\Pi, u)}$  de  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ . Cet élément est en gros la trace sur  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  de l'endomorphisme  $\mathcal{H}(G)$ -semilinéaire  $u \circ \Pi(\delta_1)^{-1}$  de  $V_{\Pi}$ . L'application  $(\Pi, u) \mapsto \overline{\phi}_{(\Pi, u)}$  est surjective, et les “relations nécessaires” sont celles qui la rendent bijective. On se débarrasse ensuite de la condition de projectivité grâce à la propriété suivante (due à Bernstein): le groupe  $G$  est de dimension cohomologique finie. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'étendre cette propriété de finitude au cas tordu. En effet, on verra en 6.4 qu'il revient au même de considérer les paires  $(\pi, \alpha)$  où  $\pi$  est un  $G$ -module de type fini et  $\alpha$  est un élément de  $\text{End}_G(\pi(1), \pi)$ . Plutôt que de considérer toutes ces paires  $(\pi, \alpha)$ , on préfère se restreindre à celles de la forme  $(\Pi^{\circ}, u \circ \Pi(\delta_1)^{-1})$ , ce qui nous conduit naturellement à définir un groupe  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  qui contient  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  comme facteur direct (6.8): la construction fournit une projection  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  scindée par l'inclusion  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . On travaille donc avec  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , plus facile à manipuler que  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , pour en déduire au bout du compte par projection les résultats escomptés sur  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ . Notons qu'on a l'égalité  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  si la propriété suivante — que nous n'avons pas cherché à établir dans ce papier — est vérifiée:

*pour toute  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telle que le  $G$ -module  $\Pi^{\circ}$  est de type fini, il existe une suite exacte longue  $0 \rightarrow \Pi_d \rightarrow \Pi_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \Pi_0 \rightarrow \Pi \rightarrow 0$  de  $\omega$ -représentations de  $G^{\natural}$  telle que pour  $i = 0, \dots, d$ , le  $G$ -module  $\Pi_i^{\circ}$  est projectif de type fini.*

Le centre  $\mathfrak{Z}(G)$  de la catégorie des  $G$ -modules opère naturellement sur  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ : pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $[\Pi, u] \in \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , on pose  $z \cdot [\Pi, u] = [\Pi, z_{\Pi^{\circ}} \circ u]$ . En particulier pour  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , on a  $[\lambda \cdot \Pi, u] = [\Pi, \lambda^{-1}u]$ .

Via la projection  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \simeq \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ , la transformée de Fourier sur  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  s'écrit

$$[\Pi, u] \mapsto (\Pi' \mapsto \text{trace}(u_{\Pi'}^{\Pi'}; \text{Hom}_G(\Pi^{\circ}, \Pi'^{\circ})),$$

où l'on a posé

$$u_{\Pi'}^{\Pi'}(\alpha) = \Pi'(\delta_1) \circ \alpha \circ u \circ \Pi(\delta_1)^{-1}, \quad \alpha \in \text{Hom}_G(\Pi^{\circ}, \Pi'^{\circ}).$$

Ces définitions sont indépendantes du choix du point-base  $\delta_1 \in G^{\natural}$ .

**1.9. L'application d'Euler–Poincaré.** — Soit  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$  la composante neutre de  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$  — un tore sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $d(G^{\natural})$  — et soit  $\overline{B} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}^0(G^{\natural})]$  son algèbre affine. On définit de la même manière le tore  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ , et l'on pose  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})]$ . Notons que  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$  est encore une extension de  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$  par  $\mathbb{C}^{\times}$ . Soit  $B^*$  le sous-espace vectoriel de  $B$  formé des  $b$  tels que  $b(\lambda\Psi) = \lambda b(\Psi)$  pour tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ . C'est un  $\overline{B}$ -module libre de rang 1. Le choix d'un point-base  $\delta_0$  définit une section  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ ,  $\psi \mapsto \psi^{\delta_0}$ ; on note  $B \rightarrow \overline{B}$ ,  $b \mapsto b_{\delta_0}$

le morphisme d'algèbres correspondant. Soit  $\varphi : G^{\natural} \rightarrow B$  le "caractère universel" donné par l'évaluation — une  $(\omega = 1)$ -représentation de  $G^{\natural}$  — et  $\varphi_{\delta_0} = (b \mapsto b_{\delta_0}) \circ \varphi : G^{\natural} \rightarrow \overline{B}$ . L'application d'Euler–Poincaré utilisée ici est une version tordue de celle définie en [D, 1.3]:

$$\begin{aligned} \text{EP} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^{\star} &\rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega), \\ \Pi \otimes b &\mapsto [\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}], \end{aligned}$$

où:

- $\tilde{\Pi}$  est la contragrédiente de  $\Pi$  — une  $\omega$ -représentation (virtuelle) de  $G^{\natural}$ ;
- $\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}$  est la  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  d'espace  $V_{\tilde{\Pi}} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}$  donnée par

$$\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}(\delta)(\check{v} \otimes \bar{b}) = \tilde{\Pi}(\delta)(\check{v}) \otimes \varphi_{\delta_0}(\delta)\bar{b};$$

- $b_{\delta_0}$  opère sur  $V_{\tilde{\Pi}} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}$  par multiplication à droite, ce qui en fait un endomorphisme du  $G$ -module de type fini  $\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}^{\circ}$ ;
- $[\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}]$  est l'image de  $(\tilde{\Pi}_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0})$  dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .

L'application EP ainsi définie ne dépend pas du choix du point-base  $\delta_0 \in G^{\natural}$ , et le sous-espace  $\mathcal{K}_{\text{EP}}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^{\star}$  engendré par les  $\Psi\Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi}$  pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ ,  $b \in B^{\star}$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ , où  $b_{\Psi}$  est donné par  $b_{\Psi}(\Psi') = b(\Psi\Psi')$ , est contenu dans  $\ker \text{EP}$ .

**1.10. Le théorème de densité spectrale.** — Pour un  $G$ -module de type fini  $\pi$ , on note  $\text{Supp}(\pi) \subset \Theta(G)$  le support du faisceau quasi-cohérent associé au  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $V_{\pi}$ , où  $\mathfrak{Z}(G)$  désigne le centre de la catégorie des  $G$ -modules. C'est en fait le support d'un faisceau cohérent, donc une sous-variété fermée de  $\Theta(G)$ , n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. La méthode de "dévisage" de Bernstein consiste à filtrer l'espace  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  par la dimension des variétés  $\text{Supp}(\Pi^{\circ})$ , où  $(\Pi, \omega)$  est une paire comme plus haut. Précisément, pour une sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable  $Y$  de  $\Theta(G)$ , on note  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$  la variante de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  obtenue en ne considérant que les paires  $(\Pi, \omega)$  telles que l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $V_{\Pi}$  se factorise à travers le morphisme quotient  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[Y]$  — condition impliquant en particulier l'inclusion  $\text{Supp}(\Pi^{\circ}) \subset Y$ . On note  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  son image par l'application naturelle  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .

Soit  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  intersection des noyaux des  $\omega r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}$  pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$  — voir 1.11. Par récurrence sur la dimension de  $G$ , on suppose le théorème de densité spectrale vrai pour tous les  $M_P^{\natural}$  tels que  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ . En ce cas la projection  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  induit une application surjective  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .

**LEMME.** — *On a la décomposition*

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_Y \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

On est donc ramené à décrire le noyau de la transformée de Fourier restreinte à  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  pour une  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbite  $Y$  dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ . Choisissons un point  $y \in Y$ , et soit  $\check{y} \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$  le caractère infinitésimal dual, donné par  $\check{y} = \theta_G(\check{\pi})$  si  $y = \theta_G(\pi)$ . Notons  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y})$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$  engendré par les  $\omega^{-1}$ -représentations  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telles que  $\Pi^{\circ}$  est irréductible et  $\theta_G(\Pi^{\circ}) = \check{y}$ , et soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y})$  sa projection sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ .

**PROPOSITION.** — *L'application d'Euler–Poincaré induit un morphisme surjectif*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^{\star} \rightarrow \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega).$$

Posons

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) = \bigoplus_{y \in Y} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y})$$

et soit  $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*$  formé des restrictions à  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  des éléments de  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ . En composant la transformée de Fourier et l'application d'Euler-Poincaré, on obtient un morphisme surjectif

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

où  $\Psi, \Pi, b$  parcourent les éléments de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural}), \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}), B^*$ . Si  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) = \{1\}$ , i.e. si  $Y = \{y\}$ , les espaces à gauche et à droite de la flèche ont même dimension (finie) sur  $\mathbb{C}$ , par conséquent ce morphisme surjectif est aussi injectif. En général, un argument de spécialisation entraîne que ce morphisme surjectif est un isomorphisme. Par suite, la transformée de Fourier

$$\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

est elle aussi un isomorphisme. En sommant sur toutes les  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , on obtient que la transformée de Fourier

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

est un isomorphisme. Par suite la transformée de Fourier

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

est elle aussi un isomorphisme. Au passage, on obtient aussi que la projection

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

est un isomorphisme, et que l'application d'Euler-Poincaré vérifie

$$\text{Im EP} = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), \quad \ker \text{EP} = \mathcal{K}_{\text{EP}} + \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega).$$

**1.11. Des filtrations.** — Comme on l'a expliqué, pour démontrer l'injectivité de la transformée de Fourier pour  $(G^{\natural}, \omega)$ , on se ramène, via la projection  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , à l'étude de sa restriction au sous-espace  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Cette réduction passe par la comparaison de filtrations — combinatoires et topologiques — dont  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  est le cran minimal. Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , notons  $\mathfrak{P}(M_P)$  le tore complexe formé des caractères non ramifiés de  $M_P$ , et posons  $d(M_P) = \dim \mathfrak{P}(M_P)$ ; ainsi  $\mathfrak{P}^0(M_P^{\natural})$  est un sous-tore de  $\mathfrak{P}(M_P)$ , et l'on a  $d(M_P^{\natural}) \leq d(M_P)$ . Pour chaque entier  $i \geq 0$ , on note:

- $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, i}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  $\omega_i^{G_P^{\natural}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega))$  pour  $P^{\natural}$  parcourant les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) > i$ ;
- $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^i(G^{\natural}, \omega)$  l'intersection des noyaux  $\ker(\omega_i^{r_{G_P^{\natural}}})$  pour  $P^{\natural}$  parcourant les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) > i$ .

On note aussi  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_i$  et  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^i$  les sous-espaces de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  obtenus en remplaçant la condition  $d(M_P) > i$  par  $d(M_P^{\natural}) > i$  dans les définitions ci-dessus. Les filtrations  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \bullet}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{\bullet}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  sont décroissantes, tandis que les deux autres sont croissantes. On a bien sûr  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(G)}(G^{\natural}, \omega)$ . Les foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet définissent de la même manière des filtrations décroissantes  $\mathcal{C}_{\bullet}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)_{\bullet}$ , et des filtrations croissantes  $\mathcal{C}^{\bullet}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^{\bullet}$ , de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Chaque cran de ces filtrations est en fait un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . On a une autre filtration croissante  $\mathbf{F}^{\bullet} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , dite *topologique*, définie comme suit:  $\mathbf{F}^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est le sous-groupe de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  — en fait un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module — engendré par les paires  $[\Pi, u]$  telles que la dimension de  $\text{supp}(\Pi^{\circ})$  est  $\leq i$ .

Pour chaque entier  $d \geq d(G)$ , on montre, grâce à la version tordue du lemme géométrique, qu'il existe des nombres rationnels  $\lambda_d(P^\natural)$  pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ ,  $d(M_P) > d$ , tels que l'opérateur

$$\mathbf{A}_d = \text{id} + \sum_{P^\natural, d(M_P) > d} \lambda_d(P^\natural) \omega_{i_{P^\natural}^{G^\natural}} \circ \omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural}}$$

sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  vérifie les propriétés:

$$\mathbf{A}_d \circ \mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d, \quad \ker \mathbf{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G^\natural, \omega).$$

Pour chaque entier  $d' \geq d(G^\natural)$ , le même raisonnement entraîne l'existence d'un opérateur  $\mathbf{B}_{d'}$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  vérifiant  $\mathbf{B}_{d'} \circ \mathbf{B}_{d'} = \mathbf{B}_{d'}$  et  $\ker \mathbf{B}_{d'} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)_{d'}$ . Ces opérateurs définissent aussi des endomorphismes du  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ , qui préservent la filtration topologique.

Une description relativement explicite du gradué de la filtration topologique  $\mathbf{F}^\bullet \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ , basée sur des techniques classiques en  $K$ -théorie, permet d'établir l'égalité des filtrations combinatoire et topologique suivante:

$$\mathcal{C}(G^\natural, \omega)^\bullet = \mathbf{F}^\bullet \mathcal{C}(G^\natural, \omega).$$

Puisque  $d(M_P^\natural) > d(G^\natural)$  pour tout  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tel que  $P^\natural \neq G^\natural$  (remarque 4 de 4.3), on a en particulier

$$\mathbf{F}^{d(G^\natural)} \mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}(G^\natural, \omega)^{d(G^\natural)} = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega).$$

### 1.12. Plan de l'article. —

L'article s'organise comme suit. Dans la section 2, on reprend la théorie des représentations de  $G$  dans le cas tordu. Il s'agit essentiellement de suivre l'action de  $\mathbb{Z}$  — donnée par  $(k, \pi) \mapsto \pi(k)$  — sur les principaux objets de la théorie. Le cadre choisi est celui des  $\omega$ -représentations de  $G^\natural$ , qui sont reliées aux représentations tordues de  $G$  via le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ . Parmi les résultats obtenus dans ce cadre tordu, signalons: le lemme géométrique, le théorème du quotient de Langlands, la description du centre de Bernstein.

Le résultat principal de l'article est énoncé dans la section 3. On montre aussi comment la description de l'image de la transformée de Fourier implique la "variante tempérée" du théorème de Paley–Wiener, c'est-à-dire la version en termes des  $\omega_{\mathfrak{u}}$ -représentations tempérées des sous-espaces de Levi de  $G^\natural$ ; où  $\omega_{\mathfrak{u}}$  est le caractère unitaire  $\omega|\omega|^{-1}$  de  $G$ .

Dans la section 4, on ramène l'étude de la transformée de Fourier à celle de sa restriction à la partie "discrète" des représentations.

Dans la section 5, on démontre le théorème de Paley–Wiener dans le cas discret. Pour cela on adapte au cas tordu les techniques de [BDK]. Comme dans loc. cit., le point-clé consiste à montrer que pour toute classe d'équivalence inertielle  $\mathfrak{s}$  dans  $G$ , l'ensemble  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est une partie constructible de  $\Theta(\mathfrak{s})$ .

Dans la section 6 — qui occupe près de la moitié de l'article —, on décrit la méthode de dévissage de Bernstein dans le cas tordu, c'est-à-dire pour le  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ , après l'avoir identifié à un facteur direct du  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Comme dans [D], on introduit les filtrations combinatoires  $\mathcal{C}_\bullet(G^\natural, \omega)$  et  $\mathcal{C}^\bullet(G^\natural, \omega)$  et leurs variantes  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)_\bullet$  et  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)^\bullet$ , et une filtration topologique  $\mathbf{F}^\bullet \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ , de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . On décrit le gradué de cette dernière, puis on prouve l'égalité  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)^\bullet = \mathbf{F}^\bullet \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . On étudie l'application d'Euler–Poincaré, en particulier on décrit son image et son noyau, ce qui nous permet finalement de prouver l'injectivité de la transformée de Fourier dans le cas discret.

**1.13. Des choix.** — Signalons brièvement certaines hypothèses et conventions admises au cours de l'article.

En 2.2, on fixe un point-base  $\delta_1 \in G^\natural$ , et l'on pose  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$ .

En 2.8, on fixe une mesure de Haar  $dg$  sur  $G$  et l'on note  $d\delta$  la mesure de Haar sur  $G^\natural$  image de  $dg$  par l'isomorphisme  $G \rightarrow G^\natural$ ,  $g \mapsto g \cdot \delta$  pour un (resp. pour tout)  $\delta \in G^\natural$ .

En 2.10, on fixe un sous-espace parabolique minimal  $P_\circ^\natural$  de  $G^\natural$ , et une décomposition de Levi  $P_\circ^\natural = M_\circ^\natural \cdot U_\circ$ . Le groupe  $P_\circ$  sous-jacent à  $P_\circ^\natural$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ , et  $P_\circ = M_\circ U_\circ$  (décomposition de Levi) où  $M_\circ$  est le groupe sous-jacent à  $M_\circ^\natural$ .

À partir de 2.10, on suppose que  $\delta_1$  appartient à  $M_\circ^\natural$ . La paire parabolique minimale  $(P_\circ, M_\circ)$  de  $G$  est donc  $\theta$ -stable.

À partir de 2.20, on suppose que  $\theta$  stabilise un sous-groupe d'Iwahori de  $G$  en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ .

En 4.7, on fixe un sous-groupe compact maximal spécial  $K_\circ$  de  $G$  en bonne position par rapport à toute paire parabolique de  $G$  contenant  $(P_\circ, M_\circ)$ . Ce groupe  $K_\circ$  n'est pas supposé  $\theta$ -stable.

À partir de 4.7, on suppose que toutes les mesures de Haar utilisées sont celles normalisées par  $K_\circ$ .

---

Nous remercions vivement le rapporteur pour ses nombreuses remarques et corrections, qui nous ont permis d'améliorer ce texte, et d'éviter des erreurs embarrassantes.

## 2. Représentations des espaces tordus

**2.1. Conventions.** — Pour éviter de tomber dans les pièges habituels, on fixe un *univers* de Grothendieck assez grand  $\mathfrak{U}$ , cf. [G, chap. I]. Toutes les catégories considérées dans cet article sont implicitement des  $\mathfrak{U}$ -catégories: les objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$  sont les éléments d'un ensemble qui appartient à l'univers  $\mathfrak{U}$ , noté  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , et pour  $M, N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , les flèches  $M \rightarrow N$  dans  $\mathcal{C}$  sont les éléments d'un ensemble qui appartient lui aussi à l'univers  $\mathfrak{U}$ , noté  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ . En particulier, on appelle simplement "ensemble" un ensemble qui appartient à l'univers  $\mathfrak{U}$ . Toutes les conventions de loc. cit. sont adoptées ici. Par exemple, quand on parle de *système inductif* (resp. *projectif*) d'objets d'une catégorie, on suppose implicitement que ce système est indexé par un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ ; idem pour les sommes directes et les produits directs.

Sauf mention expresse du contraire, les modules sur un anneau  $A$  sont des modules à gauche. Rappelons que tout anneau  $A$  possède une unité, disons  $1_A$ , et que tout  $A$ -module  $X$  vérifie  $1_A \cdot x = x$ ,  $x \in X$ . On note  $\text{Mod}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules.

**2.2. Les données.** — Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien (de caractéristique quelconque). On note  $\mathfrak{o}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $F$ , et  $\kappa$  le corps résiduel  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ .

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ , et soit  $G^\natural$  un  $G$ -espace algébrique tordu (au sens de J.-P. Labesse) lui aussi défini sur  $F$ . Rappelons que  $G^\natural$  est une variété algébrique affine définie sur  $F$ , munie:

— d'une action algébrique de  $G$  à gauche définie sur  $F$

$$G \times G^\natural \rightarrow G^\natural, (g, \delta) \mapsto g \cdot \delta$$

telle que pour tout  $\delta \in G^\natural$ , l'application  $G \rightarrow G^\natural$ ,  $g \mapsto g \cdot \delta$  est un isomorphisme de variétés algébriques;

— d’une application

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}} : \mathbf{G}^{\natural} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$$

où  $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$  désigne le groupe des automorphismes algébriques de  $\mathbf{G}$ , telle que pour tout  $g \in \mathbf{G}$  et tout  $\delta \in \mathbf{G}^{\natural}$ , on a

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(g \cdot \delta) = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}}(g) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(\delta).$$

Cela munit  $\mathbf{G}^{\natural}$  d’une action algébrique de  $\mathbf{G}$  à droite définie sur  $F$ , donnée par

$$\mathbf{G}^{\natural} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}^{\natural}, (\delta, g) \mapsto \delta \cdot g = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(\delta)(g) \cdot \delta.$$

On suppose que l’ensemble  $G^{\natural} = \mathbf{G}^{\natural}(F)$  des points  $F$ -rationnels de  $\mathbf{G}^{\natural}$  est non vide, et l’on munit  $G = \mathbf{G}(F)$  et  $G^{\natural}$  de la topologie  $\mathfrak{p}$ -adique, ce qui fait de  $G^{\natural}$  un  $G$ -espace topologique tordu, cf. [L2, 2.4]. La donnée de l’espace topologique tordu  $(G, G^{\natural})$  équivaut à celle d’un groupe topologique  $\mathbb{Z}$ -gradué  $\mathcal{G} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_k$  tel que  $\mathcal{G}_0 = G$  et  $\mathcal{G}_1 = G^{\natural}$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{G}_k$  est un  $G$ -espace topologique tordu, et le groupe des points  $F$ -rationnels d’un  $\mathbf{G}$ -espace algébrique tordu  $\mathbf{G}_k$  défini sur  $F$ . Les  $\mathbf{G}_k$  sont reliés entre eux par des  $F$ -morphisms de transition

$$\varphi_{k,k'} : \mathbf{G}_k \times \mathbf{G}_{k'} \rightarrow \mathbf{G}_{k+k'}$$

vérifiant

$$\varphi_k(g \cdot \gamma, g' \cdot \gamma') = g \mathrm{Int}_{\mathbf{G}_k}(\gamma)(g') \cdot \varphi_{k,k'}(\gamma, \gamma')$$

et

$$\mathrm{Int}_{\mathbf{G}_{k+k'}}(\varphi_{k,k'}(\gamma, \gamma')) = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}_k}(\gamma) \circ \mathrm{Int}_{\mathbf{G}_{k'}}(\gamma').$$

Pour  $k' = -k$ , on dispose d’un  $F$ -morphisme “inverse”

$$\mathbf{G}_k \rightarrow \mathbf{G}_{-k}, \gamma \mapsto \gamma^{-1}$$

donné par

$$\varphi_{k,-k}(\gamma, \gamma^{-1}) = 1_G.$$

On a donc  $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}_{-k}}(\gamma^{-1}) = \mathrm{Int}_{\mathbf{G}_k}(\gamma)^{-1}$ . Ces données définissent un  $F$ -schéma en groupes lisse de composantes connexes les  $\mathbf{G}_k$ , dont  $\mathcal{G}$  est le groupe des points  $F$ -rationnels.

Fixons un point-base  $\delta_1 \in G^{\natural}$ , et notons  $\theta$  le  $F$ -automorphisme  $\mathrm{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(\delta_1)$  de  $\mathbf{G}^{\natural}$ . Le sous-ensemble  $G\theta = G \times \theta$  de  $G \times \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$  est naturellement muni d’une structure de  $G$ -espace topologique tordu (cf. la remarque 1 de [L2, 3.4]); ici  $\mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$  désigne le groupe des  $F$ -automorphismes algébriques de  $\mathbf{G}$ . On peut bien sûr identifier  $G^{\natural}$  à  $G\theta$  via l’application  $g \cdot \delta_1 \mapsto g\theta$ , mais on préfère ne pas le faire car cette identification n’est pas canonique (en général elle dépend du choix de  $\delta_1$ , cf. la remarque 3 de loc. cit.).

On fixe aussi un caractère  $\omega$  de  $G = \mathbf{G}(F)$ , c’est-à-dire un morphisme continu de  $G$  dans  $\mathbb{C}^{\times}$ . Notons  $C(\mathbf{G})$  la composante neutre du centre  $Z(\mathbf{G})$  de  $\mathbf{G}$ . C’est un tore défini sur  $F$ .

**REMARQUE.** — La restriction de  $\theta$  à  $C(\mathbf{G})$  ne dépend pas du choix de  $\delta_1$ , et on ne suppose pas qu’elle est d’ordre fini. En d’autres termes, on ne suppose pas que  $\mathbf{G}^{\natural}$  est isomorphe à une composante connexe d’un groupe algébrique affine. On ne suppose pas non plus que  $\omega$  est unitaire. ■

**2.3.  $\omega$ -représentations de  $G^{\natural}$ .** — Pour un groupe topologique totalement discontinu  $H$ , on appelle *représentation de  $H$* , ou  *$H$ -module*, une représentation lisse de  $H$  à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel complexe. Les représentations de  $H$  forment une catégorie abélienne, notée  $\mathfrak{R}(H)$ . On note  $\text{Irr}(H)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $H$ .

On s'intéresse aux représentations  $\pi$  de  $G$  telles que  $\omega\pi = \omega \otimes \pi$  est isomorphe à  $\pi^\theta = \pi \circ \theta$ . Si  $\pi$  est irréductible, alors d'après le lemme de Schur, l'espace  $\text{Hom}_G(\omega\pi, \pi^\theta)$  des opérateurs d'entrelacement entre  $\omega\pi$  et  $\pi^\theta$  est de dimension 1, mais en général il n'y a pas de vecteur privilégié dans cet espace — sauf si le groupe  $G$  est quasi-déployé sur  $F$ , mais même dans ce cas il faut faire des choix. On a donc intérêt à travailler dans une catégorie de représentations englobant cet espace, par exemple celle des  $\omega$ -représentations (lisses) de  $G^{\natural}$  introduite dans [L2, 2.6].

Une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  — ou  $(G^{\natural}, \omega)$ -module —, est la donnée d'une représentation  $(\pi, V)$  de  $G$  et d'une application  $\Pi : G^{\natural} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$  telle que, pour tout  $\delta \in G^{\natural}$  et tous  $x, y \in G$ , on a

$$\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \omega(y)\pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(y).$$

Pour  $x \in G$  et  $\delta \in G^{\natural}$ , on a

$$\pi(x) = \Pi(x \cdot \delta) \circ \Pi(\delta)^{-1} = \omega(x)^{-1}\Pi(\delta)^{-1} \circ \Pi(\delta \cdot x).$$

La représentation  $\pi$  est déterminée par  $\Pi$ , et notée  $\Pi^\circ$  comme dans loc. cit. Remarquons que l'opérateur  $A = \Pi(\delta_1)$  est un isomorphisme de  $\omega\pi$  sur  $\pi^\theta$ . L'espace d'une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ , c'est-à-dire celui de la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  sous-jacente, est noté  $V_\Pi = V_{\Pi^\circ}$ .

Les  $\omega$ -représentations de  $G^{\natural}$  s'organisent naturellement en une catégorie, notée  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ . Un morphisme  $u$  entre deux  $\omega$ -représentations  $\Pi$  et  $\Pi'$  de  $G^{\natural}$  est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $u : V_\Pi \rightarrow V_{\Pi'}$  telle que  $u \circ \Pi(\delta) = \Pi'(\delta) \circ u$  pour tout  $\delta \in G^{\natural}$  — de manière équivalente,  $u$  est un morphisme entre  $\Pi^\circ$  et  $\Pi'^\circ$  tel que  $u \circ \Pi(\delta_1) = \Pi'(\delta_1) \circ u$ . L'application  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  définit un foncteur d'oubli de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  dans  $\mathfrak{R}(G)$ , et ce foncteur est fidèle. Notons que s'il existe une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^\circ$  est irréductible, alors le caractère  $\omega$  est trivial sur le centre  $Z^{\natural} = Z(G^{\natural})$  de  $G^{\natural}$ , défini par

$$Z^{\natural} = \{z \in Z(G) : \theta(z) = z\}.$$

En d'autres termes, si  $\omega|_{Z^{\natural}} \neq 1$  alors la théorie qui nous intéresse ici est vide.

On a des notions évidentes de sous- $\omega$ -représentation (resp. de  $\omega$ -représentation quotient) d'une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ , et de suite exacte courte de  $\omega$ -représentations de  $G^{\natural}$  (cf. loc. cit.). Si  $u$  est un morphisme entre deux  $\omega$ -représentations  $\Pi$  et  $\Pi'$  de  $G^{\natural}$ , le noyau  $\ker u$  et l'image  $\text{Im } u$  sont des sous- $\omega$ -représentations de  $\Pi$  et  $\Pi'$  respectivement, et l'on a la suite exacte courte de  $\omega$ -représentations de  $G^{\natural}$ :

$$0 \rightarrow \ker u \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi'/\text{Im } u \rightarrow 0.$$

Cela fait de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  une catégorie abélienne.

Une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  est dite *irréductible* si  $V_\Pi$  est l'unique sous-espace non nul  $G^{\natural}$ -invariant de  $V_\Pi$ , et  $G$ -irréductible (ou *fortement irréductible* [L2]) si la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  est irréductible. On note  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\omega$ -représentations irréductibles de  $G$ , et  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  formé des  $\omega$ -représentations qui sont  $G$ -irréductibles.

On a une action naturelle de  $\mathbb{C}^\times$  sur  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$ , notée

$$\mathbb{C}^\times \times \text{Irr}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \text{Irr}(G^{\natural}, \omega), (\lambda, \Pi) \mapsto \lambda \cdot \Pi.$$

Cette action stabilise  $\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ , et le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  induit une application injective

$$\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \text{Irr}(G)$$

d'image le sous-ensemble  $\text{Irr}_{G^\natural, \omega}(G)$  de  $\text{Irr}(G)$  formé des  $\pi$  tels que  $\omega^{-1}\pi^\theta = \pi$ .

**2.4. Les représentations  $\pi(k)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .** — Si  $\pi$  est une représentation de  $G$ , pour chaque entier  $k \geq 1$ , on note  $\omega_k$  le caractère de  $G$  défini par

$$\omega_k = \omega \circ \mathcal{N}_{\theta, k}, \quad \mathcal{N}_{\theta, k}(x) = x\theta(x) \cdots \theta^{k-1}(x), \quad x \in G,$$

et  $\pi(k)$  la représentation de  $G$  définie par

$$\pi(k) = \omega_k^{-1} \pi^{\theta^k}.$$

Le caractère  $\omega_k$  ne dépend pas du choix du point-base  $\delta_1$ , alors que (contrairement à ce que la notation pourrait faire croire) la représentation  $\pi(k)$  en dépend. Pour  $k, k' \geq 1$ , on a  $\pi(k)(k') = \pi(k + k')$ . Pour chaque entier  $k \geq 1$ , notons  $\pi(-k)$  la représentation de  $G$  telle que  $\pi(-k)(k) = \pi$ . Précisément, on a  $\pi(-k) = \omega_{-k}^{-1} \pi^{\theta^{-k}}$  où  $\omega_{-k}$  est le caractère de  $G$  défini par

$$\omega_{-k} = \omega_k^{-1} \circ \theta^{-k} = \omega^{-1} \circ \theta^{-1} \circ \mathcal{N}_{\theta^{-1}, k}.$$

On vérifie que  $\pi(k)(-k) = \pi$ . Par suite posant  $\pi(0) = \pi$ , on a

$$\pi(k)(k') = \pi(k + k'), \quad k, k' \in \mathbb{Z}.$$

On l'a dit plus haut, la représentation  $\pi(k)$  dépend du choix du point-base  $\delta_1$ . En effet, remplacer  $\delta_1$  par  $\delta'_1 = x \cdot \delta_1$  pour un  $x \in G$  revient à remplacer  $\theta$  par le  $F$ -automorphisme  $\theta' = \text{Int}_G(x) \circ \theta$  de  $\mathbf{G}$ , et pour chaque entier  $k \geq 1$ , à remplacer  $\pi(k)$  par

$$\omega_k^{-1} \pi^{\theta'^k} = \omega_k^{-1} \otimes (\pi \circ \text{Int}_G(\mathcal{N}_{\theta, k}(x)) \circ \theta^k),$$

qui est isomorphe à  $\pi(k)$ , et  $\pi(-k)$  par

$$\omega_{-k}^{-1} \pi^{\theta'^{-k}} = \omega_{-k}^{-1} \otimes (\pi \circ \theta^{-k} \circ \text{Int}_G(\mathcal{N}_{\theta, k}(x)^{-1})),$$

qui est isomorphe à  $\pi(-k)$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\pi(k)$  ne dépend donc à isomorphisme près que de  $G^\natural$ , de  $\omega$ , et de la classe d'isomorphisme de  $\pi$ .

**2.5. Le foncteur  $\iota_k$  pour  $k \geq 1$ .** — Soit un entier  $k \geq 1$ . Pour  $\delta \in G^\natural$ , on définit comme en 2.4 une application  $\mathcal{N}_{\delta, k} = \mathcal{N}_{\tau, k} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ ,  $\tau = \text{Int}_G(\delta)$ : pour  $x \in \mathbf{G}$ , on pose

$$\mathcal{N}_{\delta, k}(x) = x\tau(x) \cdots \tau^{k-1}(x).$$

L'application  $\mathcal{N}_{\delta, k}$  ainsi définie est un morphisme de variétés algébriques, et si  $\tau$  est défini sur  $F$  (e.g. si  $\delta \in G^\natural$ ) alors  $\mathcal{N}_{\delta, k}$  l'est aussi.

Le  $\mathbf{G}$ -espace algébrique tordu  $G^\natural$  est muni d'un  $F$ -morphisme de variétés algébriques

$$G^\natural \rightarrow G_k, \quad \delta \mapsto \delta^k$$

défini comme suit: on pose  $\delta^1 = \delta$  et  $\delta^k = \varphi_{1, k-1}(\delta, \delta^{k-1})$  si  $k > 1$ . Pour  $\delta \in G^\natural$  et  $g \in \mathbf{G}$ , on a

$$(g \cdot \delta)^k = \mathcal{N}_{\delta, k}(g) \cdot \delta^k,$$

et si  $k > 1$ , on a

$$\delta^{k-1} = \varphi_{k, -1}(\delta^k, \delta^{-1}) = \varphi_{-1, k}(\delta^{-1}, \delta^k).$$

Le choix d'un point-base  $\delta_1$  de  $G^\natural$  fournit un point-base  $\delta_k$  de  $G_k$ : on pose

$$\delta_k = (\delta_1)^k.$$

On définit comme suit un foncteur

$$\iota_k : \mathfrak{R}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega).$$

Pour une  $\omega_k$ -représentation  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_k$ , on note  $\iota_k(\Sigma) = \Pi$  la  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  définie par:

- la représentation  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  sous-jacente à  $\Pi$  est  $\bigoplus_{i=0}^{k-1} \Sigma^{\circ}(i)$ ,
- $\Pi(\delta_1)(v_0, \dots, v_{k-1}) = (v_1, \dots, v_{k-1}, \Sigma(\delta_k)(v_0))$ .

Pour un morphisme  $u$  entre deux  $\omega_k$ -représentations  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  de  $\mathcal{G}_k$ , on note  $\iota_k(u)$  le morphisme  $u \times \dots \times u$  entre  $\iota_k(\Sigma)$  et  $\iota_k(\Sigma')$ .

Pour  $k = 1$ , on a  $\mathcal{G}_1 = G^{\natural}$  et  $\iota_1$  est le foncteur identique de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ . Notons que pour  $k > 1$ , la  $\omega$ -représentation  $\iota_k(\Sigma)$  dépend du choix de  $\delta_1$ , mais sa classe d'isomorphisme n'en dépend pas.

**REMARQUE.** — Pour des entiers  $k, k' \geq 1$  tels que  $k'$  divise  $k$ , on définit de la même manière un  $F$ -morphisme de variétés algébriques

$$\mathcal{G}_{k'} \rightarrow \mathcal{G}_k, \delta \mapsto \delta^{k/k'}$$

et — grâce aux points-base  $\delta_{k'}$  de  $\mathcal{G}_{k'}$  et  $\delta_k = (\delta_{k'})^{k/k'}$  de  $\mathcal{G}_k$  — un foncteur

$$\iota_k^{k'} : \mathfrak{R}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \rightarrow \mathfrak{R}(\mathcal{G}_{k'}, \omega_{k'}).$$

Pour  $k, k', k'' \geq 1$  tels que  $k'$  divise  $k$  et  $k''$  divise  $k'$ , on a

$$\iota_{k'}^{k''} \circ \iota_k^{k'} = \iota_k^{k''}.$$

En particulier pour  $k'' = 1$ , on a  $\iota_{k'}^{k'} \circ \iota_k^{k'} = \iota_k$ . ■

**2.6. L'invariant  $s(\Pi)$ .** — Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , on lui associe comme suit un invariant  $s(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ . S'il existe un plus petit entier  $k_0 \geq 1$  tel que  $\pi(k_0)$  est isomorphe à  $\pi$ , on pose  $s(\pi) = k_0$ , sinon on pose  $s(\pi) = +\infty$ . Notons que cet invariant  $s(\pi)$  ne dépend que de  $G^{\natural}$ , de  $\omega$ , et de la classe d'isomorphisme de  $\pi$ . Si nécessaire, on le notera aussi  $s_{G^{\natural}, \omega}(\pi)$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$s(\pi(k)) = s(\pi).$$

D'après [L2, A.2], pour une  $\omega$ -représentation irréductible  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- il existe une sous-représentation irréductible  $\pi_0$  de  $\Pi^{\circ}$ ;
- la représentation  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  est semisimple (on dit alors que  $\Pi$  est  $G$ -semisimple).

Si  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation irréductible de  $G^{\natural}$  vérifiant les conditions ci-dessus, on lui associe comme en [L2, A.2] un invariant  $s(\Pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ . Rappelons la construction. On choisit une sous-représentation irréductible  $\pi_0$  de  $\Pi^{\circ}$ , et l'on pose

$$s(\Pi) = s(\pi_0).$$

L'invariant  $s(\Pi)$  est bien défini (i.e. il ne dépend pas du choix de  $\pi_0$ ), et il dépend seulement de la classe d'isomorphisme de  $\Pi$ . On a

$$\Pi^{\circ} \simeq \begin{cases} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \pi_0(k) & \text{si } s(\pi_0) = +\infty \\ \bigoplus_{k=0}^{s(\pi_0)-1} \pi_0(k) & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier la représentation  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  est de type fini si et seulement si  $s(\Pi) < +\infty$ , auquel cas elle est de longueur finie. Si  $s = s(\Pi) < +\infty$ , alors d'après loc. cit., il existe une  $\omega_s$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_s$  telle que  $\Sigma^{\circ} = \pi_0$  et  $\iota_s(\Sigma)$  est isomorphe à  $\Pi$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , notons  $\text{Irr}_{k-1}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  formé des  $\Pi$  tels que  $\Pi^{\circ}$  est semisimple et  $s(\Pi) = k$  (pour  $k = 1$ , les notations sont cohérentes), et  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  formé des  $\Sigma$  tels que  $s(\Sigma^{\circ}) = k$ . Ici  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\omega_k$ -représentations  $G$ -irréductibles de  $\mathcal{G}_k$ , et  $s(\Sigma^{\circ}) = s_{G^{\natural}, \omega}(\Sigma^{\circ})$ . Les  $\omega_k$ -représentations  $G$ -irréductibles de  $\mathcal{G}_k$  dont la classe d'isomorphisme appartient à  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  sont dites  $(G^{\natural}, \omega)$ -régulières.

**REMARQUE.** — On peut, pour toute représentation irréductible  $\sigma$  de  $G$ , définir l'invariant  $s_k(\sigma) = s_{\mathcal{G}_k, \omega_k}(\sigma) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$  en remplaçant dans la définition de  $s(\sigma)$  la paire  $(G^{\natural}, \omega)$  par la paire  $(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ . On a  $s_k(\sigma) = +\infty$  si  $s(\sigma) = +\infty$ , et  $s_k(\sigma) = \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : \sigma(ki) \simeq \sigma(k)\}$  sinon. En d'autres termes, on a

$$s_k(\sigma) = \frac{1}{k} \text{ppcm}(k, s(\sigma))$$

Pour une  $\omega_k$ -représentation irréductible  $\mathcal{G}_k$ -semisimple  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_k$ , l'invariant  $s(\Sigma)$  associé comme plus haut à  $\Sigma$  est donné par

$$s(\Sigma) = s_k(\sigma_0)$$

pour une (resp. pour toute) sous-représentation irréductible  $\sigma_0$  de  $\Sigma^{\circ}$ . Ainsi  $\Sigma$  est  $G$ -irréductible si et seulement si  $s(\Sigma) = 1$ . ■

On définit comme suit une action de  $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  sur  $\text{Irr}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ . Rappelons que l'on a posé  $\delta_k = (\delta_1)^k \in \mathcal{G}_k$ . Pour une  $\omega_k$ -représentation  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_k$  et un entier  $i \geq 1$ , on note  $\Sigma(i)$  la  $\omega_k$ -représentation de  $\mathcal{G}_k$  donnée par

$$\Sigma(i)(g \cdot \delta_k) = \Sigma^{\circ}(i)(g) \circ \Sigma(\delta_k), \quad g \in G.$$

La représentation de  $G$  sous-jacente est  $\Sigma(i)^{\circ} = \Sigma^{\circ}(i)$ , et à isomorphisme près,  $\Sigma(i)$  ne dépend pas du choix de  $\delta_1$ . Comme  $\text{Int}_{\mathcal{G}_k}(\delta_k) = \theta^k$ , la  $\omega_k$ -représentation  $\Sigma(k)$  de  $\mathcal{G}_k$  est isomorphe à  $\Sigma$ . On obtient ainsi une action de  $\mathbb{Z}_k$  sur  $\text{Irr}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  qui stabilise  $\text{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ , et  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  est le sous-ensemble de  $\text{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  formé des  $\Sigma$  dont le stabilisateur sous  $\mathbb{Z}_k$  est trivial. Le lemme suivant est une simple généralisation de [R, lemma 2.1].

**LEMME.** — *Le foncteur  $\iota_k$  induit une application bijective*

$$\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)/\mathbb{Z}_k \rightarrow \text{Irr}_{k-1}(G^{\natural}, \omega).$$

*Démonstration.* — Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation irréductible  $G$ -semisimple de  $G^{\natural}$  d'invariant  $s(\Pi) = k$ . On a vu que pour toute sous-représentation irréductible  $\pi_0$  de  $\Pi^{\circ}$ , il existe une  $\omega_k$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_k$  telle que  $\Sigma^{\circ} = \pi_0$  et  $\Pi \simeq \iota_k(\Sigma)$ . Par définition de  $s(\Pi)$ , les représentations  $\pi_0(i)$  de  $G$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , sont deux-à-deux non isomorphes. Par suite les  $\omega_k$ -représentations  $\Sigma(i)$  de  $\mathcal{G}_k$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , sont deux-à-deux non isomorphes. Elles définissent donc un élément de  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)/\mathbb{Z}_k$ . Réciproquement, soit  $\Sigma'$  une  $\omega_k$ -représentation  $G$ -irréductible de  $\mathcal{G}_k$  dont le stabilisateur sous  $\mathbb{Z}_k$  est trivial, telle que  $\iota_k(\Sigma') \simeq \Pi$ . Puisque  $\iota_k(\Sigma')^{\circ} \simeq \bigoplus_{i=0}^{k-1} \Sigma'(i)^{\circ}$  et  $\Pi^{\circ} \simeq \bigoplus_{i=0}^{k-1} \Sigma(i)^{\circ}$ , il existe un indice  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  tel que  $\Sigma'^{\circ} \simeq \Sigma(j)^{\circ}$ . On en déduit que  $\Sigma'$  est isomorphe à  $\lambda \cdot \Sigma(j)$  pour un nombre complexe non nul  $\lambda$ , mais comme  $\iota_k(\lambda \cdot \Sigma(j)) = \lambda \cdot \iota_k(\Sigma(j)) \simeq \lambda \cdot \iota_k(\Sigma)$ , ce  $\lambda$  vaut 1. D'où le lemme. □

**2.7. L'espace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ .** — L'action de  $\mathbb{C}^{\times}$  sur  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  provient d'une action fonctionnelle sur  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ , triviale sur les flèches, encore notée  $(\lambda, \Pi) \mapsto \lambda \cdot \Pi$ . Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré (sur  $\mathbb{C}$ ) par les  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telles que  $\Pi^{\circ}$  est de longueur finie, modulo les relations:

- pour toute suite exacte  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi_2 \rightarrow \Pi_3 \rightarrow 0$  de  $\omega$ -représentations de  $G^\natural$  (telles que les  $\Pi_i^\circ$  sont de longueur finie), on a  $\Pi_3 = \Pi_2 - \Pi_1$ ;
- pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , on a  $\lambda \cdot \Pi = \lambda\Pi$ ;
- pour tout entier  $k > 1$ , on a  $\iota_k(\mathcal{G}_k, \omega_k) = 0$ .

Pour une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  et un nombre complexe non nul  $\lambda$ , on a  $(\lambda \cdot \Pi)^\circ = \Pi^\circ$  mais  $\lambda \cdot \Pi \not\cong \Pi$  si  $\lambda \neq 1$ . La deuxième relation signifie que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des nombres complexes non nuls tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , alors pour toute  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  telle que  $\Pi^\circ$  est de longueur finie, on a  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Pi = 0$  dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ .

Notons  $\text{Irr}_{<+\infty}(G^\natural, \omega)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(G^\natural, \omega)$  formé des  $\Pi$  qui sont  $G$ -semisimples et tels que  $s(\Pi) < +\infty$ . On a donc

$$\text{Irr}_{<+\infty}(G^\natural, \omega) = \coprod_{k \geq 0} \text{Irr}_k(G^\natural, \omega),$$

et l'action de  $\mathbb{C}^\times$  sur  $\text{Irr}(G^\natural, \omega)$  stabilise chacun des espaces  $\text{Irr}_k(G^\natural, \omega)$ . D'autre part on a une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\text{Irr}(G)$ , donnée par  $(k, \pi) \mapsto \pi(k)$ . D'après 2.6, l'application  $\Pi \mapsto \pi_0$ , où  $\pi_0$  est sous-représentation irréductible de  $\Pi^\circ$ , induit une application injective

$$\text{Irr}_{<+\infty}(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Irr}(G)/\mathbb{Z}$$

d'image l'ensemble des  $\mathbb{Z}$ -orbites des  $\pi$  dans  $\text{Irr}(G)$  tels que  $s_{G^\natural, \omega}(\pi) < +\infty$ .

On note:

- $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}_{<+\infty}(G^\natural, \omega)$ ,
- $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  engendré par  $\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ ,
- $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  engendré par  $\coprod_{k \geq 1} \text{Irr}_k(G^\natural, \omega)$ .

On a donc la décomposition

$$\mathcal{G}(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}_0(G^\natural, \omega) \oplus \mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$$

Soit aussi  $\mathcal{G}(G)$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}(G)$ . Le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  induit un morphisme de groupes

$$\mathcal{G}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}(G),$$

encore noté  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$ .

On peut aussi, pour chaque entier  $k \geq 1$ , remplacer la paire  $(G^\natural, \omega)$  par la paire  $(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  dans les définitions ci-dessus (cf. 2.6, remarque). Le foncteur  $\iota_k^\circ : \mathfrak{R}(G) \rightarrow \mathfrak{R}(G)$  sous-jacent à  $\iota_k$  envoie représentation de longueur finie sur représentation de longueur finie, par conséquent  $\iota_k$  induit un morphisme de groupes

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k) \rightarrow \mathcal{G}(G^\natural, \omega),$$

encore noté  $\iota_k$ .

Le quotient  $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}(G^\natural, \omega)/\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$  est encore trop gros: il contient des éléments qui ne contribuent en rien à l'affaire qui nous intéresse (cf. 2.9). Soit donc  $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  engendré par  $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$  et par les éléments de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Pi$  pour un élément  $\Pi$  de  $\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ , un entier  $n > 1$ , et des nombres complexes non nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ .

**LEMME.** — *Pour tout entier  $k > 1$ , on a l'inclusion*

$$\iota_k(\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k)) \subset \mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega).$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que pour toute  $\omega_k$ -représentation irréductible  $\Sigma$  de  $\mathcal{G}_k$  telle que la représentation  $\Sigma^\circ$  de  $G$  est de longueur finie, la classe d'isomorphisme de la  $\omega$ -représentation  $\iota_k(\Sigma)$  de  $G^\natural$  appartient à  $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$  (rappelons que la représentation

$\iota_k(\Sigma)^\circ$  de  $G$  est semisimple et de longueur finie). D'après la remarque de 2.5 et le lemme de 2.6, il existe un entier  $a \geq 1$  et une  $\omega_{ka}$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Sigma'$  de  $\mathcal{G}_{ka}$  tels que  $\Sigma$  est isomorphe à  $\iota_{ka}^k(\Sigma')$ . Par suite  $\iota_k(\Sigma)$  est isomorphe à  $\iota_k(\iota_{ka}^k(\Sigma')) = \iota_{ka}(\Sigma')$ , et quitte à remplacer  $k$  par  $ka$  et  $\Sigma$  par  $\Sigma'$ , on peut supposer que  $\Sigma$  est  $G$ -irréductible. Soit alors  $\sigma = \Sigma^\circ$  et  $s = s(\sigma)$ . Puisque  $\sigma(k) \simeq \sigma$ ,  $s$  divise  $k$ . Si  $s = 1$ , alors d'après le lemme de 2.6,  $\iota_k(\Sigma)$  est une  $\omega$ -représentation irréductible  $G$ -semisimple de  $G^\natural$  d'invariant  $s(\iota_k(\Sigma)) = k$ , et son image dans  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  appartient à  $\mathcal{G}_{>0}(G^\natural, \omega)$ . On peut donc supposer  $s > 1$ . Posons  $\Delta = \iota_k^s(\Sigma)$ . C'est une  $\omega_s$ -représentation de  $\mathcal{G}_s$ , telle que

$$\Delta^\circ = \sigma \oplus \sigma(s) \oplus \cdots \oplus \sigma((k' - 1)s), \quad k' = k/s.$$

Choisissons un isomorphisme  $\tilde{B}$  de  $\sigma$  sur  $\sigma(s)$ . Alors  $\tilde{B}^{k'}$  est un isomorphisme de  $\sigma$  sur  $\sigma(k)$ , et l'on peut choisir  $\tilde{B}$  de telle manière que  $\tilde{B}^{k'} = \Sigma(\delta_k)$ . Notons  $\tilde{\Sigma}$  la  $\omega_s$ -représentation ( $G$ -irréductible) de  $\mathcal{G}_s$  définie par  $\tilde{\Sigma}^\circ = \sigma$  et  $\tilde{\Sigma}(\delta_s) = \tilde{B}$ . Soit  $\mu$  une racine primitive  $k'$ -ième de l'unité (dans  $\mathbb{C}^\times$ ). Posons  $\Delta' = \bigoplus_{i=0}^{k'-1} \mu^i \cdot \tilde{\Sigma}$ . C'est une  $\omega_s$ -représentation de  $\mathcal{G}_s$ , telle que  $\Delta'^\circ = \bigoplus_{i=0}^{k'-1} \sigma$ . Pour  $j = 0, \dots, k' - 1$ , notons  $V_{\Delta, j}$  le sous-espace vectoriel de  $V_\Delta = \bigoplus_{i=0}^{k'-1} V_\sigma$  formé des vecteurs de la forme

$$(v, \mu^j \tilde{B}(v), \mu^{2j} \tilde{B}^2(v), \dots, \mu^{(k'-1)j} \tilde{B}^{k'-1}(v)), \quad v \in V_\sigma.$$

Il est stable sous l'action de  $G$  (via  $\Delta^\circ$ ) et sous celle de  $\Delta(\delta_s)$ , donc définit une sous- $\omega_s$ -représentation de  $\Delta$ , que l'on note  $\Delta_j$ . L'application

$$V_\sigma \rightarrow V_{\Delta, j}, \quad v \mapsto (v, \mu^j \tilde{B}(v), \mu^{2j} \tilde{B}^2(v), \dots, \mu^{(k'-1)j} \tilde{B}^{k'-1}(v))$$

est un isomorphisme de  $\mu^j \cdot \tilde{\Sigma}$  sur  $\Delta_j$ . On en déduit que  $\Delta = \bigoplus_{j=0}^{k'-1} \Delta_j$  est isomorphe à  $\Delta'$ . Par conséquent  $\iota_k(\Sigma) = \iota_s(\Delta)$  est isomorphe à  $\bigoplus_{i=0}^{k'-1} \mu^i \cdot \iota_s(\tilde{\Sigma})$ , dont la classe d'isomorphisme appartient à  $\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$ .  $\square$

D'après le lemme, l'espace  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  introduit au début de ce  $n^\circ$  s'identifie canoniquement au quotient  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)/\mathcal{G}_{0+}(G^\natural, \omega)$ . De plus le dual algébrique

$$\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^* = \text{Hom}_\mathbb{C}(\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega), \mathbb{C})$$

coïncide avec l'espace des formes  $\mathbb{Z}$ -linéaires  $\Phi$  sur  $\mathcal{G}_0(G^\natural, \omega)$  vérifiant

$$\Phi(\lambda \cdot \Pi) = \lambda \Phi(\Pi)$$

pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ .

**NOTATIONS.** — La projection canonique  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  identifie  $\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$  à un sous-ensemble de  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ , que l'on note aussi  $\text{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  — il engendre  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  mais n'est pas une base sur  $\mathbb{C}$ . D'autre part, l'action de  $\mathbb{C}^\times$  sur  $\mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  est notée avec un “.”, que l'on aura tendance à supprimer après projection sur  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ .

**2.8.  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules et  $(\mathcal{H}_k^\natural, \omega)$ -modules.** — Pour un espace topologique totalement discontinu  $X$ , on note  $\mathcal{H}(X)$  l'espace des fonctions complexes sur  $X$  qui sont localement constantes et à support compact. On pose  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$  et  $\mathcal{H}^\natural = \mathcal{H}(G^\natural)$ .

Fixons une mesure de Haar  $dg$  sur  $G$ , et notons  $d\delta$  la mesure de Haar sur  $G^\natural$  au sens de [L2, 2.5] image de  $dg$  par l'isomorphisme  $G \rightarrow G^\natural$ ,  $g \mapsto g \cdot \delta$  pour un (resp. pour tout)  $\delta \in G^\natural$ . La mesure  $dg$  munit l'espace  $\mathcal{H}$  d'un produit de convolution, et l'espace  $\mathcal{H}^\natural$  d'une structure de  $\mathcal{H}$ -bimodule [L2, A.3]: pour  $f, f' \in \mathcal{H}$ ,  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et  $\delta \in G^\natural$ , on pose

$$(f * \phi)(\delta) = \int_G f(g) \phi(g^{-1} \cdot \delta) dg, \quad (\phi * f)(\delta) = \int_G \phi(\delta \cdot g) f(g^{-1}) dg.$$

Comme dans loc. cit. on appelle  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module un  $\mathcal{H}$ -module  $V$  muni d'une application  $\mathcal{H}^\natural \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ,  $\phi \mapsto (v \mapsto \phi \cdot v)$  telle que pour tout  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ , tous  $f, f' \in \mathcal{H}$  et tout  $v \in V$ , on a

$$(f * \phi * f') \cdot v = f \cdot (\phi \cdot (\omega f' \cdot v)).$$

Les  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules forment une sous-catégorie (non pleine) de la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à gauche: un morphisme entre deux  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules  $V_1$  et  $V_2$  est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $u : V_1 \rightarrow V_2$  telle que  $u(\phi \cdot v) = \phi \cdot u(v)$  pour tout  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et tout  $v \in V_1$  (une telle application est automatiquement  $\mathcal{H}$ -linéaire).

**VARIANTE.** — Soit  $\mathcal{H}_\omega^\natural = \mathcal{H}(G^\natural, \omega)$  l'espace vectoriel  $\mathcal{H}^\natural$  muni de la structure de  $\mathcal{H}$ -bimodule donnée par (pour  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}$ ):

$$f \cdot \phi = f * \phi, \quad \phi \cdot f = \phi * \omega^{-1} f.$$

Par définition, la notion de  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module équivaut à celle de  $\mathcal{H}_\omega^\natural$ -module (c'est-à-dire de  $(\mathcal{H}_\omega^\natural, \xi = 1)$ -module).  $\blacksquare$

**EXEMPLE.** — L'application  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\omega^\natural$ ,  $f \mapsto u(f) = u_{\delta_1}(f)$  définie par  $u(f)(g \cdot \delta_1) = f(g)$  ( $g \in G$ ) est un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire vérifiant  $u(f * h * f') = f \cdot u(h) \cdot \omega f'^\theta$ . Pour  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}$ , posons

$$\phi \bullet f = u^{-1}(\phi \cdot f) \in \mathcal{H}.$$

Pour  $f, f', h \in \mathcal{H}$  et  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ , on a

$$(f * \phi * f') \bullet h = f * (\phi \bullet (\omega f' * h)).$$

En d'autres termes,  $\mathcal{H}$  est muni d'une structure de  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module. À isomorphisme près, cette structure ne dépend pas du choix de  $\delta_1 \in G^\natural$ : remplacer  $\delta_1$  par  $\delta'_1 = x \cdot \delta$  revient à remplacer  $u$  par  $u' = \delta_x \circ u$ , où l'on a posé  $\delta_x(f)(g) = f(gx)$ ,  $f \in \mathcal{H}$ ,  $g \in G$ .  $\blacksquare$

Pour une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  et une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ , on note  $\Pi(\phi)$  le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de l'espace  $V$  de  $\Pi$  donné par

$$\Pi(\phi)(v) = \int_{G^\natural} \phi(\delta) \Pi(\delta)(v) d\delta, \quad v \in V.$$

Puisque  $\phi$  est localement constante et à support compact, et que  $\Pi^\circ$  est lisse, l'intégrale est absolument convergente (c'est même une somme finie). Cela munit  $V$  d'une structure de  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module *non dégénéré*, c'est-à-dire tel que  $\mathcal{H}^\natural \cdot V = V$ , et l'application  $(\Pi, V) \mapsto V$  est un isomorphisme entre  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  et la catégorie des  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules non dégénérés — une sous-catégorie pleine de celle des  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules.

Pour un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ , on note  $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K(G)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  formée des fonctions qui sont bi-invariantes par  $K$ . On note  $e_K$  l'élément unité de  $\mathcal{H}_K$ , c'est-à-dire la fonction caractéristique de  $K$  divisée par  $\text{vol}(K, dg)$ , et l'on pose

$$\mathcal{H}_K^\natural = \mathcal{H}_K(G^\natural) = e_K * \mathcal{H}^\natural * e_K.$$

C'est le sous- $\mathcal{H}_K$ -bimodule de  $\mathcal{H}^\natural$  formé des fonctions qui sont bi-invariantes par  $K$ . Si de plus  $\omega$  est trivial sur  $K$ , on définit comme ci-dessus les notions de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module et de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module non dégénéré, ainsi que les catégories correspondantes. Alors pour toute  $\omega$ -représentation  $(\Pi, V)$  de  $G^\natural$ , le sous-espace  $V^K = e_K \cdot V$  de  $V$  (formé des vecteurs qui sont fixés par  $K$ ) est naturellement muni d'une structure de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module.

Soit  $K^\natural$  un sous-espace tordu ouvert compact de  $G^\natural$ , c'est-à-dire un sous-ensemble de la forme  $K^\natural = K \cdot \delta$  pour un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$  et un élément  $\delta$  de  $G^\natural$  tel que  $\text{Int}_{G^\natural}(\delta)(K) = K$ . Le  $\mathcal{H}_K$ -bimodule  $\mathcal{H}_K^\natural$  est un  $\mathcal{H}_K$ -module à gauche (resp. à droite) libre

de rang 1: notant  $e_{K^\natural}$  la fonction caractéristique de  $K^\natural$  divisée par  $\text{vol}(K^\natural, d\delta) = \text{vol}(K, dg)$ , on a

$$\mathcal{H}_K^\natural = \mathcal{H}_K * e_{K^\natural} = e_{K^\natural} * \mathcal{H}_K.$$

Si de plus  $\omega$  est trivial sur  $K$ , alors pour toute  $\omega$ -représentation  $(\Pi, V)$  de  $G^\natural$ , le  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module  $V^K$  est automatiquement non dégénéré: on a

$$V^K = \mathcal{H}_K^\natural \cdot V^K (= \mathcal{H}_K^\natural \cdot V).$$

En particulier il coïncide avec le sous-espace  $V^{K^\natural} = e_{K^\natural} \cdot V$  de  $V$ .

Un  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module non dégénéré  $V$  est dit *simple* s'il est non nul et si le seul sous-espace non nul  $\mathcal{H}^\natural$ -invariant de  $V$  est  $V$  lui-même, et il est dit  *$\mathcal{H}$ -semisimple* (resp.  *$\mathcal{H}$ -simple*) s'il est semisimple (resp. simple) comme  $\mathcal{H}$ -module. On définit de la même manière les notions de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module (non dégénéré) simple,  $\mathcal{H}_K$ -semisimple et  $\mathcal{H}_K$ -simple.

D'après [L2, A.4, A.6], une  $\omega$ -représentation non nulle  $(\Pi, V)$  de  $G^\natural$  est irréductible (resp.  $G$ -irréductible) si et seulement si pour tout sous-espace tordu ouvert compact  $K^\natural$  de  $G^\natural$  tel que  $\omega$  est trivial sur  $K$ , le  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module  $V^K$  est nul ou simple (resp.  $\mathcal{H}_K$ -simple); où  $K$  est le sous-groupe de  $G$  sous-jacent à  $K^\natural$ . Soit un tel  $K^\natural$  vérifiant la condition supplémentaire suivante: il existe une base de voisinages de 1 dans  $G$  formée de sous-groupes ouverts distingués  $K'$  de  $K$  tels que  $\text{Int}_{G^\natural}(\delta)(K') = K'$  pour tout (i.e. pour un)  $\delta \in K^\natural$ . D'après loc. cit., l'application  $(\Pi, V) \mapsto V^{K^\natural} = V^K$  induit une bijection entre:

- l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\omega$ -représentations irréductibles  $G$ -semisimples (resp.  $G$ -irréductibles)  $(\Pi, V)$  de  $G^\natural$  telles que  $V^K \neq 0$ ,
- et l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -modules simples  $\mathcal{H}_K$ -semisimples (resp.  $\mathcal{H}_K$ -simples).

Elle induit aussi une bijection entre:

- l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\omega$ -représentations irréductibles  $(\Pi, V)$  de  $G^\natural$  telles que la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  est admissible et  $V^K \neq 0$ ,
- et l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -modules simples de dimension finie (sur  $\mathbb{C}$ ).

**REMARQUE 1.** — Les résultats ci-dessus sont vrais pour tout espace topologique tordu localement profini  $(G, G^\natural)$  vérifiant la propriété  $(P_2)$  de [L2, A.4], c'est-à-dire tel qu'il existe une base de voisinages de 1 dans  $G$  formée de sous-groupes ouverts compacts et un élément  $\delta \in G^\natural$  normalisant chacun des éléments de la base (on peut alors prendre  $K^\natural = K\delta$  pour n'importe quel élément  $K$  de la base tel que  $\omega|_K = 1$ ). Dans le cas qui nous intéresse ici, on a vérifié [L2, A.6] que si  $I^\natural$  est un sous-espace d'Iwahori de  $G^\natural$ , c'est-à-dire un sous-espace tordu de la forme  $I^\natural = I \cdot \delta$  pour un sous-groupe d'Iwahori  $I$  de  $G$ , alors tous les sous-groupes de congruence de  $I$  sont normalisés par  $\delta$  (voir 2.20). Notons que puisque les sous-groupes d'Iwahori de  $G$  sont tous conjugués dans  $G$ , il existe un sous-espace d'Iwahori de  $G^\natural$ . ■

**REMARQUE 2.** — Soit  $K^\natural$  un sous-espace tordu ouvert compact de  $G^\natural$  tel que  $\omega$  est trivial sur le groupe  $K$  sous-jacent à  $K^\natural$ . À tout  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module simple  $\mathcal{H}_K$ -semisimple  $W$  est associé comme en 2.6 un invariant  $s(W) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ . Puisque  $\mathcal{H}_K^\natural = \mathcal{H}_K * e_{K^\natural} = e_{K^\natural} * \mathcal{H}_K$ , l'application  $x \mapsto e_{K^\natural} \cdot x$  est un  $\mathbb{C}$ -automorphisme de  $W$ . Choisissons un sous- $\mathcal{H}_K$ -module simple  $W_0$  de  $W$ , et pour chaque entier  $k \geq 1$ , notons  $W_k$  et  $W_{-k}$  les sous- $\mathcal{H}_K$ -modules de  $W$  définis par  $W_k = e_{K^\natural} \cdot W_{k-1}$  et  $e_{K^\natural} \cdot W_{-k} = W_{-k+1}$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le  $\mathcal{H}_K$ -module  $W_k$  est simple. On distingue deux cas: ou bien  $\dim_{\mathbb{C}}(W) = +\infty$ , auquel cas on pose  $s(W) = +\infty$ , et l'on a  $W = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k$ ; ou bien  $\dim_{\mathbb{C}}(W) < +\infty$ , auquel cas il existe un plus petit entier

$s = s(W) \geq 1$  tel que  $W_s = W_0$ , et l'on a  $W = \bigoplus_{k=0}^{s-1} W_k$ . Bien sûr si  $(\Pi, V)$  est une  $\omega$ -représentation irréductible de  $G^{\natural}$  telle que le  $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ -module  $V^K$  est isomorphe à  $W$ , on a  $s(\Pi) = s(V^K)$ . ■

**REMARQUE 3.** — Puisque  $G$  est dénombrable à l'infini, la démonstration du lemme de Schur donnée dans [BZ2, 2.11] est valable ici: pour toute  $\omega$ -représentation irréductible (pas forcément  $G$ -semisimple)  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ , l'espace des  $G^{\natural}$ -endomorphismes de  $\Pi$  est de dimension 1. En particulier,  $\Pi$  possède un caractère central  $\omega_{\Pi} : Z(G^{\natural}) \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ . Si  $\Pi$  est  $G$ -semisimple, alors pour toute sous-représentation irréductible  $\pi_0$  de  $\Pi^{\circ}$ , la restriction à  $Z(G^{\natural})$  du caractère central  $\omega_{\pi_0} : Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  de  $\pi_0$  coïncide avec  $\omega_{\Pi}$ . Si de plus  $\Pi$  est  $G$ -irréductible, on a  $\omega^{-1}(\omega_{\Pi^{\circ}})^{\theta} = \omega_{\Pi^{\circ}}$ . ■

**2.9. Les caractères  $\Theta_{\Pi}$ .** — Pour toute  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^{\circ}$  est admissible, on définit comme suit une distribution  $\Theta_{\Pi}$  sur  $G^{\natural}$ , appelée *caractère-distribution* ou simplement *caractère*, de  $\Pi$ : pour  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$ , l'opérateur  $\Pi(\phi)$  sur l'espace de  $\Pi$  est de rang fini, et l'on pose

$$\Theta_{\Pi}(\phi) = \text{trace}(\Pi(\phi)).$$

La distribution  $\Theta_{\Pi}$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $\Pi$  (et bien sûr du choix de  $d\delta$ ), et vérifie

$$\Theta_{\lambda \cdot \Pi} = \lambda \Theta_{\Pi}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Pour tout élément  $\Pi$  de  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$ , on définit par linéarité une distribution  $\Theta_{\Pi}$  sur  $\mathcal{H}^{\natural}$ , qui vérifie

- $\Theta_{\lambda \cdot \Pi} = \lambda \Theta_{\Pi}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ ,
- $\Theta_{\Pi} = 0$  si  $\Pi \in \iota_k(\mathcal{G}(G_k, \omega_k))$  pour un entier  $k > 1$ .

On en déduit que pour  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$ , l'application

$$\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Pi \mapsto \Theta_{\Pi}(\phi)$$

se factorise à travers  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ . C'est donc un élément du dual algébrique  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , que l'on note  $\Phi_{\phi}$ . Notre théorème principal — cf. 3.1 pour un énoncé précis — est une description de ce morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{H}^{\natural} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*, \quad \phi \mapsto \Phi_{\phi}.$$

Le théorème de Paley–Wiener décrit son image, et le théorème de densité spectrale son noyau.

**2.10. Induction parabolique et restriction de Jacquet.** — Soit  $P^{\natural}$  un sous-espace parabolique de  $G^{\natural}$ , muni d'une décomposition de Levi

$$P^{\natural} = M^{\natural} \cdot U.$$

On note avec les mêmes lettres sans l'exposant “ $\natural$ ” les groupes topologiques sous-jacents à  $P^{\natural}$  et  $M^{\natural}$ :  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  de radical unipotent  $U$ , et  $M$  est une composante de Levi de  $P$ . Soit

$$i_P^G : \mathfrak{R}(M) \rightarrow \mathfrak{R}(G)$$

et

$$r_G^P : \mathfrak{R}(G) \rightarrow \mathfrak{R}(M)$$

les foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés. On considère  $\omega$  comme un caractère de  $M$  par restriction. Dans [L2, 5.9 et 5.10] sont définis les foncteurs induction parabolique normalisée

$${}^{\omega} i_{P^{\natural}}^G : \mathfrak{R}(M^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$$

et restriction de Jacquet normalisée

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M^\natural, \omega).$$

Ils vérifient  $({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^\circ = \iota_P^G$  et  $({}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural})^\circ = r_G^P$ , et commutent aux foncteurs  $\iota_k$ . Comme  $i_P^G$  et  $r_G^P$  préservent la propriété d'être de longueur finie, on obtient des morphismes de groupes

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathcal{G}(M^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$$

et

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}(M^\natural, \omega).$$

Par passage aux quotients, ces derniers induisent des morphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$$

et

$${}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega).$$

**REMARQUE.** — L'espace tordu  $M^\natural$  et le groupe  $M$  ne sont pas spécifiés dans les notations, mais cette ambiguïté disparaîtra plus loin puisque nous n'aurons à considérer que des sous-groupes paraboliques "standard", c'est-à-dire contenant un sous-groupe parabolique minimal de  $G$  fixé une fois pour toutes. Notons aussi que pour que l'espace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^\natural, \omega)$  soit non nul, il faut que  $\omega$  soit trivial sur le centre  $Z(M^\natural)$  de  $M^\natural$  ■

Fixons un sous-espace parabolique minimal  $P_\circ^\natural$  de  $G^\natural$ , et une décomposition de Levi

$$P_\circ^\natural = M_\circ^\natural \cdot U_\circ.$$

Notons  $\mathcal{P}(G^\natural)$  l'ensemble des sous-espaces paraboliques de  $G^\natural$  contenant  $P_\circ^\natural$  — on les qualifie de "standard" —, et  $\mathcal{P}(G^\natural, \omega)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(G^\natural)$  formé des  $P^\natural$  tels que  $\omega$  est trivial sur  $Z(M_P^\natural)$ . Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on note  $M_P^\natural$  l'unique composante de Levi de  $P^\natural$  contenant  $M_\circ^\natural$ ,  $P$  et  $M_P$  les groupes topologiques sous-jacents à  $P^\natural$  et  $M_P^\natural$ , et  $U_P$  le radical unipotent de  $P$ . On a la décomposition de Levi

$$P^\natural = M_P^\natural \cdot U_P.$$

Pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , on note  ${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural}$  le foncteur

$${}^\omega i_{Q^\natural \cap M_P^\natural}^{M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega)$$

et  ${}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural}$  le foncteur

$${}^\omega r_{M_P^\natural}^{Q^\natural \cap M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega).$$

On obtient comme plus haut des morphismes de groupes

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}(M_Q^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}(M_P^\natural, \omega), \quad {}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathcal{G}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}(M_Q^\natural, \omega),$$

et des morphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega), \quad {}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega),$$

que l'on notera parfois aussi  ${}^\omega i_{Q^\natural, \mathbb{C}}^{P^\natural}$  et  ${}^\omega r_{P^\natural, \mathbb{C}}^{Q^\natural}$  pour éviter toute ambiguïté.

Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on note  $\overline{P}^\natural$  le sous-espace parabolique de  $G^\natural$  opposé à  $P^\natural$  par rapport à  $M_P^\natural$ . Le groupe topologique sous-jacent à  $\overline{P}^\natural$  est le sous-groupe parabolique  $\overline{P}$  de  $G$  opposé à  $P$  par rapport à  $M_P$ . Notant  $U_{\overline{P}}$  le radical unipotent de  $\overline{P}$ , on a la décomposition de Levi

$$\overline{P}^\natural = M_P^\natural \cdot U_{\overline{P}}.$$

En remplaçant  $P^\natural$  par  $\overline{P}^\natural$ , on définit comme plus haut (i.e. comme en [L2, 5.9 et 5.10]) les foncteurs induction parabolique normalisée

$$\omega \overline{i}_{P^\natural}^{G^\natural} = \omega \overline{i}_{\overline{P}^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$$

et restriction de Jacquet normalisée

$$\omega \overline{r}_{G^\natural}^{P^\natural} = \omega \overline{r}_{G^\natural}^{\overline{P}^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega).$$

De même pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , on note  $\omega \overline{i}_{Q^\natural}^{P^\natural} = \omega \overline{i}_{\overline{Q}^\natural}^{\overline{P}^\natural}$  le foncteur

$$\omega \overline{i}_{Q^\natural \cap M_P^\natural}^{M_P^\natural} = \omega \overline{i}_{\overline{Q}^\natural \cap M_P^\natural}^{M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega)$$

et  $\omega \overline{r}_{P^\natural}^{Q^\natural} = \omega \overline{r}_{\overline{P}^\natural}^{\overline{Q}^\natural}$  le foncteur

$$\omega \overline{r}_{M_P^\natural}^{Q^\natural \cap M_P^\natural} = \omega \overline{r}_{M_P^\natural}^{\overline{Q}^\natural \cap M_P^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega).$$

Comme plus haut ces foncteurs définissent des morphismes de groupes entre les groupes de Grothendieck  $\mathcal{G}$ , et des morphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires entre les espaces vectoriels  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ .

**PROPOSITION.** — *Soit  $P^\natural, Q^\natural, R^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $R^\natural \subset Q^\natural \subset P^\natural$ . Soit  $\Sigma$  une  $\omega$ -représentation de  $M_R^\natural$ , et soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation de  $M_P^\natural$ .*

(1) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma$ ,*

$$\omega \overline{i}_{Q^\natural}^{P^\natural} \circ \omega \overline{i}_{R^\natural}^{Q^\natural}(\Sigma) \simeq \omega \overline{i}_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma).$$

(2) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Pi$ ,*

$$\omega \overline{r}_{Q^\natural}^{R^\natural} \circ \omega \overline{r}_{P^\natural}^{Q^\natural}(\Pi) \simeq \omega \overline{r}_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi).$$

(3) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma$  et  $\Pi$ ,*

$$\mathrm{Hom}_{M_R^\natural}(\omega \overline{r}_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi), \Sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P^\natural}(\Pi, \omega \overline{i}_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma)).$$

(4) *On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma$  et  $\Pi$ ,*

$$\mathrm{Hom}_{M_P^\natural}(\omega \overline{i}_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma), \Pi) \simeq \mathrm{Hom}_{M_R^\natural}(\Sigma, \omega \overline{r}_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi)).$$

*Démonstration.* — Les propriétés de transitivité des foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés sont conséquences directes des définitions. On épargne au lecteur leurs vérifications. Quant au point (3), on sait (théorème de réciprocité de Frobenius) que le foncteur  $r_P^R = (\omega \overline{r}_{P^\natural}^{R^\natural})^\circ$  est un adjoint à gauche du foncteur  $i_R^P = (\omega \overline{i}_{R^\natural}^{P^\natural})^\circ$ : on a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma^\circ$  et  $\Pi^\circ$ ,

$$\mathrm{Hom}_{M_R}(\overline{r}_P^R(\Pi^\circ), \Sigma^\circ) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P}(\Pi^\circ, \overline{i}_R^P(\Sigma^\circ)).$$

Il induit par restriction un isomorphisme de  $\mathrm{Hom}_{M_R^\natural}(\omega \overline{r}_{P^\natural}^{R^\natural}(\Pi), \Sigma)$  sur  $\mathrm{Hom}_{M_P^\natural}(\Pi, \omega \overline{i}_{R^\natural}^{P^\natural}(\Sigma))$ , fonctoriel en  $\Sigma$  et  $\Pi$ . Le point (4) s'obtient comme le point (3), à partir du théorème de "seconde adjonction" de Bernstein [B1, Bu].  $\square$

On note  $\mathcal{L}(G^\natural)$  l'ensemble  $\{M_P^\natural : P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)\}$ , et  $\mathcal{L}(G^\natural, \omega)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}(G^\natural)$  formé des  $M_P^\natural$  tels que  $\omega$  est trivial sur le centre  $Z(M_P^\natural) = Z(M_P)^\theta$  de  $M_P^\natural$ . Pour  $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on a  $P^\natural = M_P^\natural \cdot U_\circ$ , par conséquent l'application  $\mathcal{P}(G^\natural) \rightarrow \mathcal{L}(G^\natural)$ ,  $P^\natural \mapsto M_P^\natural$  est bijective, et elle induit une bijection  $\mathcal{P}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{L}(G^\natural, \omega)$ .

Le groupe  $P_\circ$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ , et l'on définit de la même manière  $\mathcal{P}(G)$ ,  $M_P$  pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ ,  $i_Q^P$  et  $r_P^Q$  pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ , et  $\mathcal{L}(G)$ . L'application  $\mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{L}(G)$ ,  $P \mapsto M_P$  est bijective.

**HYPOTHÈSE.** — *On suppose désormais que le point-base  $\delta_1$  est choisi dans  $M_\circ^\natural$ .*

Puisque  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$  stabilise  $P_\circ$ , il opère sur  $\mathcal{P}(G)$  et l'application  $P^\natural \mapsto P$  est une bijection de  $\mathcal{P}(G^\natural)$  sur le sous-ensemble  $\mathcal{P}(G)^\theta$  de  $\mathcal{P}(G)$  formé des  $P$  qui sont  $\theta$ -stables. Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , on a  $\theta(M_P) = M_{\theta(P)}$  et  $\theta(U_P) = U_{\theta(P)}$ . En particulier  $\theta$  opère aussi sur  $\mathcal{L}(G)$ . On note  $\mathcal{L}(G)^\theta$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}(G)$  formé des  $M$  qui sont  $\theta$ -stables. Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , puisque  $P = M_P P_\circ$ , on a

$$\theta(P) = \theta(M_P)P_\circ.$$

On en déduit que l'application  $\mathcal{P}(G)^\theta \rightarrow \mathcal{L}(G)^\theta$ ,  $P \mapsto M_P$  est elle aussi bijective.

**REMARQUE.** — Le couple  $(P_\circ, M_\circ)$  (où  $M_\circ = M_{P_\circ}$ ) est une paire parabolique minimale de  $G$ ,  $P_\circ^\natural$  est le normalisateur de  $P_\circ$  dans  $G^\natural$ , et  $M_\circ^\natural$  est le normalisateur commun de  $P_\circ^\natural$  et  $M_\circ^\natural$  dans  $G^\natural$ . En particulier l'espace tordu  $M_\circ^\natural$ , tout comme les ensembles  $\mathcal{P}(G)$  et  $\mathcal{L}(G)$ , est déterminé par  $(P_\circ, M_\circ)$ , et les opérations de  $\theta$  sur  $\mathcal{P}(G)$  et sur  $\mathcal{L}(G)$  ne dépendent pas du choix de  $\delta_1$  dans  $M_\circ^\natural$ . ■

**2.11. Contragrédiente.** — Si  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , sa contragrédiente  $\check{\Pi}$  est définie comme suit. Notant  $V$  l'espace de  $\pi = \Pi^\circ$  et  $\check{V}$  celui de la contragrédiente  $\check{\pi}$  de  $\pi$ , on pose

$$\langle v, \check{\Pi}(\delta)(\check{v}) \rangle = \langle \Pi(\delta)^{-1}(v), \check{v} \rangle, \quad (v, \check{v}) \in V \times \check{V}.$$

Cela définit une  $\omega^{-1}$ -représentation  $\check{\Pi}$  de  $G^\natural$ , telle que  $\check{\Pi}^\circ = \check{\pi}$ . L'application naturelle

$$\Pi \rightarrow \check{\Pi}, v \mapsto (\check{v} \mapsto \langle v, \check{v} \rangle)$$

est un morphisme de  $(G^\natural, \omega)$ -modules. Si de plus  $\pi$  est admissible, d'après [BZ1, prop. 2.15], c'est un isomorphisme.

**LEMME.** — *Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , et soit  $\Pi'$  une  $\omega^{-1}$ -représentation de  $G^\natural$ . On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Pi$  et  $\Pi'$ ,*

$$\text{Hom}_{G^\natural}(\Pi', \check{\Pi}) \simeq \text{Hom}_{G^\natural}(\Pi, \check{\Pi}').$$

*Démonstration.* — Posons  $V_\Pi^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\Pi, \mathbb{C})$ . C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , muni d'une action  $\Pi^*$  de  $G^\natural$  dont  $(\check{\Pi}, V_\Pi^*)$  est la partie lisse. On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{G^\natural}(\Pi', \check{\Pi}) &= \text{Hom}_{G^\natural}(V_{\Pi'}, V_\Pi^*) \simeq \text{Hom}_{G^\natural}(V_{\Pi'} \otimes_{\mathbb{C}} V_\Pi, \mathbb{C}) \\ &\simeq \text{Hom}_{G^\natural}(V_\Pi, V_{\Pi'}^*) = \text{Hom}_{G^\natural}(\Pi, \check{\Pi}'), \end{aligned}$$

car l'image d'un vecteur lisse par un  $G^\natural$ -morphisme est un vecteur lisse. □

**PROPOSITION.** — *Soit  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ .*

(1) *Soit  $\Sigma$  une  $\omega$ -représentation de  $M_{P^\natural}^\natural$ . On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma$ ,*

$$\omega_{i_{P^\natural}^\natural}(\Sigma)^\vee \simeq \omega^{-1}_{i_{P^\natural}^\natural}(\check{\Sigma}).$$

(2) *Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ . On a un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Pi$ ,*

$$\omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural}}(\Pi)^\vee \simeq \omega^{-1}_{r_{G^\natural}^{P^\natural}}(\check{\Pi}).$$

*Démonstration.* — Montrons (1). Soit  $\mathcal{S}(P \backslash G)$  l'espace des fonctions  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les conditions:

- $\phi(pg) = \delta_P(p)\phi(g)$  pour tout  $p \in P$  et tout  $g \in G$ ;
- il existe un sous-groupe ouvert compact  $K_\phi$  de  $G$  tel que  $\phi(gk) = \phi(g)$  pour tout  $g \in G$  et tout  $k \in K_\phi$ .

Ici  $\delta_P : P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  désigne le caractère module habituel (c'est-à-dire le caractère  $\Delta_P^{-1}$  de [BZ1, 1.19], noté aussi  $\text{mod}_{U_P}$  dans [BZ2, 1.7]). Soit  $\mu_{P \setminus G} : \mathbf{S}(P \setminus G) \rightarrow \mathbb{C}$  une mesure de Haar sur  $P \setminus G$ , c'est-à-dire une fonctionnelle linéaire non nulle vérifiant:

- $\mu_{P \setminus G}(\rho_x(\phi)) = \mu_{P \setminus G}(\phi)$  pour tout  $\phi \in \mathbf{S}(P \setminus G)$  et tout  $x \in G$ , où  $\rho_x(\phi) \in \mathbf{S}(P \setminus G)$  est la fonction donnée par  $\rho_x(\phi)(g) = \phi(gx)$ ,  $g \in G$ ;
- $\mu_{P \setminus G}(\phi) \geq 0$  pour tout  $\phi \in \mathbf{S}(P \setminus G)$  tel que  $\phi \geq 0$ .

On sait qu'une telle fonctionnelle linéaire existe, et qu'elle est unique à multiplication près par un élément de  $\mathbb{R}_{>0}$  [BZ1, theorem 1.21]. Notons  $V$  l'espace de  $\Pi = \omega \cdot i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)$  et  $V'$  celui de  $\Pi' = \omega^{-1} \cdot i_{P^\natural}^{G^\natural}(\check{\Sigma})$ . Rappelons que  $V$  est l'espace de  $i_{\check{P}}^G(\Sigma^\circ)$ , et que l'action de  $\delta_1$  sur  $V$  est donnée par

$$\Pi(\delta_1)(v)(g) = \omega(\theta^{-1}(g))\delta_{P^\natural}^{1/2}(\delta_1)\Sigma(\delta_1)(v(\theta^{-1}(g))), \quad v \in V, g \in G.$$

Ici  $\delta_{P^\natural} : P^\natural \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  est l'application définie par  $\delta_{P^\natural}(\delta) = \Delta_{P^\natural}(\delta)^{-1}$  (elle se factorise à travers  $P^\natural/U_P$ ). Pour  $(v, v') \in V \times V'$ , la fonction  $\phi_{v, v'} : G \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\phi_{v, v'}(g) = \langle v(g), v'(g) \rangle$$

est un élément de  $\mathbf{S}(P \setminus G)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_\Sigma \times V_{\check{\Sigma}} \rightarrow \mathbb{C}$  est l'accouplement canonique (donné par l'évaluation). D'où un accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V' \rightarrow \mathbb{C}$ , défini par

$$\langle v, v' \rangle = \int_{P \setminus G} \phi_{v, v'}(g) d\mu_{P \setminus G}(g), \quad (v, v') \in V \times V'.$$

Puisque  $\phi_{\Pi^\circ(x)(v), \Pi'^\circ(x)(v')}(g) = \phi_{v, v'}(gx)$  pour tout  $(v, v') \in V \times V'$  et tous  $g, x \in G$ , cet accouplement est  $G$ -équivariant. Montrons qu'il est  $G^\natural$ -équivariant. Puisque  $\theta(P) = P$  et  $\delta_P \circ \theta = \delta_P$  (cf. [L2, 2.1, lemme 1]), pour  $\phi \in \mathbf{S}(P \setminus G)$ , la fonction  ${}^\theta\phi = \phi \circ \theta^{-1}$  appartient à  $\mathbf{S}(P \setminus G)$ , et l'application  $\phi \mapsto {}^\theta\phi$  est un  $\mathbb{C}$ -automorphisme de l'espace  $\mathbf{S}(P \setminus G)$  tel que  $\phi \geq 0$  si et seulement si  ${}^\theta\phi \geq 0$ . D'où une autre mesure de Haar  $\mu_{P \setminus G}^\theta$  sur  $P \setminus G$ , donnée par  $\mu_{P \setminus G}^\theta(\phi) = \mu_{P \setminus G}({}^\theta\phi)$ . D'après [L2, 2.1, lemme 2], on a l'égalité  $\mu_{P \setminus G}^\theta = \mu_{P \setminus G}$ . Pour  $(v, v') \in V \times V'$  et  $g \in V$ , posant  $g' = \theta^{-1}(g)$ , on a

$$\begin{aligned} \phi_{\Pi(\delta_1)(v), \Pi'(\delta_1)(v')}(g) &= \langle \omega(g')\Sigma(\delta_1)(v(g')), \omega^{-1}(g')\check{\Sigma}(\delta_1)(v'(g')) \rangle \\ &= \phi_{v, v'}(g'), \end{aligned}$$

d'où

$$\langle \Pi(\delta_1)(v), \Pi'(\delta_1)(v') \rangle = \int_{P \setminus G} \phi_{v, v'}(\theta^{-1}(g)) d\mu_{P \setminus G}(g) = \langle v, v' \rangle.$$

L'accouplement  $G^\natural$ -équivariant  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V' \rightarrow \mathbb{C}$  induit un morphisme de  $G^\natural$ -modules, fonctoriel en  $\Sigma$ ,

$$\omega^{-1} \cdot i_{P^\natural}^{G^\natural}(\check{\Sigma}^\circ) \rightarrow \omega \cdot i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma^\circ)^\vee,$$

et d'après [BZ1, prop. 2.25], c'est un isomorphisme. Son inverse donne l'isomorphisme du point (1).

Montrons (2). Soit  $\Sigma'$  une  $\omega^{-1}$ -représentation de  $M_P^\natural$ , et soit  $\Pi' = \omega^{-1} \cdot i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma')$ . D'après le lemme, le point (1) que l'on vient de démontrer et le théorème de réciprocité de Frobenius

(proposition de 2.10, (3)), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi', \check{\Pi}) &\simeq \mathrm{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi, \check{\Pi}') \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi, \omega_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\check{\Sigma}')) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{M_P^{\natural}}(\omega_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Pi), \check{\Sigma}') \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{M_P^{\natural}}(\Sigma', \omega_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Pi)^{\vee}). \end{aligned}$$

D'après le théorème de seconde adjonction (proposition de 2.10, (4)), on a aussi

$$\mathrm{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi', \check{\Pi}) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P^{\natural}}(\Sigma', \omega_{G^{\natural}}^{-1} \bar{r}_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\check{\Pi})).$$

D'où un isomorphisme naturel, fonctoriel en  $\Sigma'$  et  $\Pi$ ,

$$\mathrm{Hom}_{M_P^{\natural}}(\Sigma', \omega_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Pi)^{\vee}) \simeq \mathrm{Hom}_{M_P^{\natural}}(\Sigma', \omega_{G^{\natural}}^{-1} \bar{r}_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\check{\Pi})).$$

L'isomorphisme du point (2) est alors donné par le lemme de Yoneda.  $\square$

**2.12. Caractères non ramifiés.** — Soit  $M$  un groupe topologique localement profini, et soit  $M^{\natural}$  un  $M$ -espace topologique tordu. On note  $M^1$  le sous-groupe (ouvert, distingué) de  $M$  engendré par ses sous-groupes ouverts compacts, et l'on pose

$$\mathfrak{P}(M) = \mathrm{Hom}(M/M^1, \mathbb{C}^{\times}).$$

Les éléments de  $\mathfrak{P}(M)$  sont appelés *caractères non ramifiés de  $M$* .

**REMARQUE 1.** — Si  $M$  est le groupe des points  $F$ -rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe  $\mathbf{M}$  défini sur  $F$ , alors il est connu que  $M^1$  est le noyau de l'homomorphisme d'Harish-Chandra  $H_M$  (cf. 4.2), c'est-à-dire l'intersection des noyaux des caractères de  $M$  de la forme  $m \mapsto |\psi(m)|_F$  où  $\psi$  parcourt le groupe  $X_F^*(M)$  des caractères algébriques de  $M$  (i.e. de  $\mathbf{M}$ ) qui sont définis sur  $F$ , et  $|\cdot|_F$  est la valeur absolue normalisée sur  $F$ . Comme nous n'avons trouvé aucune preuve de cette affirmation dans la littérature, on en donne brièvement une.

Notons  $M^0$  le noyau de  $H_M$ . On a clairement l'inclusion  $M^1 \subset M^0$ . Soit  $A_{\circ}$  ( $= \mathbf{A}_{\circ}(F)$ ) un tore déployé maximal de  $M$ , et soit  $M_{\circ} = Z_M(A_{\circ})$  ( $= \mathbf{M}_{\circ}(F)$ ) le centralisateur de  $A_{\circ}$  dans  $M$ . Pour  $i = 0, 1$ , on définit de la même manière les sous-groupes  $A_{\circ}^i \subset A_{\circ}^0$  de  $A_{\circ}$  et  $M_{\circ}^i \subset M_{\circ}^0$  de  $M_{\circ}$ . Puisque  $A_{\circ}^0$  (resp.  $M_{\circ}^0$ ) est l'unique sous-groupe compact maximal de  $A_{\circ}$  (resp.  $M_{\circ}$ ), ces deux inclusions sont des égalités (et on a aussi l'égalité  $A_{\circ}^0 = M_{\circ}^0 \cap A_{\circ}$ ). En particulier si  $M = M_{\circ}$  (i.e. si  $\mathbf{M}$  est  $F$ -anisotrope modulo le centre), on a bien l'égalité  $M^1 = M^0$ . En général, notons  $M^2 \subset M$  le sous-groupe engendré par les sous-groupes parahoriques (connexes) de  $M$ . On a donc  $M^2 \subset M^1$ . Soit  $\mathcal{J}$  un sous-groupe d'Iwahori de  $M$  correspondant à une chambre de l'immeuble affine de  $M$  dans l'appartement associé à  $A_{\circ}$ . Notons  $\mathcal{N} = N_M(\mathcal{J})$  le normalisateur de  $\mathcal{J}$  dans  $M$ . D'après la théorie de Bruhat-Tits, on a  $M = M^2 \mathcal{N}$  et  $\mathcal{N} \cap M^2 = M^1$ . Le quotient  $\Omega = \mathcal{N}/M_{\circ}^1$  est un groupe discret. D'après [HR], l'homomorphisme de Kottwitz  $w_M$  induit un isomorphisme de  $\Omega$  sur  $w_M(M)$ : cela s'obtient par descente (cf. loc. cit., remark 9) à partir du lemma 14 de loc. cit. On en déduit que  $\Omega$  est abélien de type fini. Il s'ensuit que  $\mathcal{N}$  a un unique sous-groupe compact maximal  $\mathcal{N}^1$  ( $\supset M_{\circ}^1$ ), et que le groupe  $\mathcal{N}/\mathcal{N}^1$  est abélien libre de même rang que celui de  $w_M(M)$ . D'après [HV, 3.2, lemma (proof)], ce rang commun est aussi le rang de  $H_M(M)$ , qui est le rang de  $X_F^*(M)$ . Puisque  $M = M^2 \mathcal{N}$ , on a  $H_M(M) = H_M(\mathcal{N})$  et  $H_M$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{N}/\mathcal{N}^1$  sur  $H_M(M)$ . Par conséquent  $M^0 \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}^1$  et  $M^0 = M^2 \mathcal{N}^1 = M^1$ .  $\blacksquare$

**EXEMPLE.** — Soit  $A$  le groupe des points  $F$ -rationnels d'un tore déployé et défini sur  $F$ , et soit  $X = X^*(A)$  le groupe des caractères algébriques de  $A$ . On a  $A = \text{Hom}(X, F^\times)$  et  $A^1$  est le sous-groupe compact maximal  $\text{Hom}(X, \mathfrak{o}^\times)$  de  $A$ . Le choix d'une uniformisante  $\varpi$  de  $F^\times$  définit un sous-groupe fermé (discret)  $A^\varpi = \text{Hom}(X, \langle \varpi \rangle)$  de  $A$ . L'application produit  $A^\varpi \times A^1 \rightarrow A$  est un isomorphisme de groupes topologiques; d'où un isomorphisme  $A^\varpi \simeq A/A^1$ , qui identifie  $\text{Hom}(A^\varpi, \mathbb{C}^\times)$  au groupe  $\mathfrak{P}(A)$ . ■

Pour tout caractère  $\chi$  de  $M$ , le caractère  $\chi^\tau = \chi \circ \tau$  de  $M$ , où  $\tau = \text{Int}_{M^\natural}(\delta)$  pour un  $\delta \in M^\natural$ , ne dépend pas du choix de  $\delta \in M^\natural$ . On note  $\mathfrak{P}(M^\natural)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{P}(M)$  formé des  $\psi$  tels que  $\psi \circ \text{Int}_{G^\natural}(\delta) = \psi$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in M^\natural$ . Les éléments de  $\mathfrak{P}(M^\natural)$  sont appelés *caractères non ramifiés de  $M^\natural$* . Pour  $\delta \in M^\natural$ , on pose aussi  $\mathfrak{P}(M)^\tau = \mathfrak{P}(M^\natural)$ ,  $\tau = \text{Int}_{M^\natural}(\delta)$ .

**REMARQUE 2.** — Supposons de plus que  $M^\natural$  est un sous-espace tordu de  $G^\natural$ , par exemple une composante de Levi d'un sous-espace parabolique de  $G^\natural$ . On peut alors définir un autre sous-groupe de  $\mathfrak{P}(M)$ , qui contient  $\mathfrak{P}(M^\natural)$ . Soit  $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{P}(M)$  formé des  $\psi$  vérifiant la propriété suivante: il existe un élément  $w$  de  $N_G(M)/M$  tel que pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in M^\natural$ , posant  $\tau = \text{Int}_{M^\natural}(\delta)$ , on a

$$\psi^\tau = {}^w\psi, \quad {}^w\psi = \psi \circ \text{Int } w^{-1};$$

où  $N_G(M)$  désigne le normalisateur de  $M$  dans  $G$ . En d'autres termes,  $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$  est le sous-groupe de  $\mathfrak{P}(M)$  formé des  $\psi$  tels que  $\psi \circ \text{Int}_{G^\natural}(\delta)|_M = \psi$  pour un  $\delta \in G^\natural$  normalisant  $M$ . Ce groupe  $\mathfrak{P}(M, G^\natural)$  dépend bien sûr de  $M$  et de  $G^\natural$ , mais il ne dépend pas de  $M^\natural$ . On a  $\mathfrak{P}(M^\natural) = \mathfrak{P}(M, M^\natural)$ . ■

Soit  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}_\mathbb{C}(M^\natural) = \text{Irr}_\mathbb{C}(M^\natural, \omega = 1)$  formé des  $\Pi$  tels que  $\Pi^\circ$  est un caractère non ramifié de  $M$ . Ce caractère est alors un élément de  $\mathfrak{P}(M^\natural)$ . D'ailleurs le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  induit une application bijective

$$\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)/\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{P}(M^\natural).$$

Pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$  et  $\delta \in M^\natural$ ,  $\Psi(\delta)$  est un  $\mathbb{C}$ -automorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension 1, c'est-à-dire la multiplication par un nombre complexe non nul, et l'on identifie  $\Psi(\delta)$  à ce nombre. Cela munit l'ensemble  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$  d'une structure de groupe: pour  $\Psi, \Psi' \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$  et  $\delta \in M^\natural$ , on pose

$$(\Psi\Psi')(\delta) = \Psi(\delta)\Psi'(\delta).$$

Tout élément  $\delta$  de  $M^\natural$  définit un scindage du morphisme  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(M^\natural)$ ,  $\Psi \mapsto \Psi^\circ$ : pour  $\psi \in \mathfrak{P}(M^\natural)$ , on note  $\psi^\delta$  l'élément de  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$  défini par  $\psi^\delta(g \cdot \delta) = \psi(g)$ ,  $g \in G$ . Pour tout caractère  $\eta$  de  $M$ , le groupe  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$  opère sur l'ensemble des  $\eta$ -représentations de  $M^\natural$ : pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M^\natural)$ ,  $\Pi$  une  $\eta$ -représentation de  $M^\natural$  et  $\delta \in M^\natural$ , on pose

$$(\Psi \cdot \Pi)(\delta) = \Psi(\delta)\Pi(\delta), \quad \delta \in M^\natural.$$

On a

$$(\Psi \cdot \Pi)^\circ = \Psi^\circ \Pi^\circ.$$

**REMARQUE 3.** — Pour  $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , le groupe  $\mathfrak{P}(M_P)$  est un tore complexe (de groupe des caractères algébriques  $M_P/M_P^1$ ), et  $\mathfrak{P}(M_P^\natural) = \mathfrak{P}(M_P)^\theta$ . Par suite les groupes  $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$  et  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$  sont des variétés algébriques affines complexes, en fait des groupes algébriques affines diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ . Le morphisme  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(M_P^\natural)$ ,  $\Psi \mapsto \Psi^\circ$  est algébrique, et pour  $\delta \in M_P^\natural$ , le morphisme  $\mathfrak{P}(M_P^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ ,  $\psi \mapsto \psi^\delta$  est lui aussi algébrique. On note  $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$  et  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}^0(M_P^\natural)$  les composantes neutres de  $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$  et  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_P^\natural)$ . Ce sont des tores

complexes, et le morphisme  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}(M_P^{\natural})$  induit par restriction un morphisme surjectif  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}^0(M_P^{\natural})$  de noyau  $\mathbb{C}^{\times}$ . ■

On aura aussi besoin de la variante suivante des constructions précédentes. Pour un caractère non ramifié  $\xi$  de  $M$ , on note  $\mathfrak{P}(M^{\natural}, \xi)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{P}(M)$  formé des  $\psi$  tels que  $\psi \circ \text{Int}_{G^{\natural}}(\delta) = \xi\psi$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in M^{\natural}$ , et l'on note  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)$  formé des  $\Pi$  tels que  $\Pi^{\circ}$  est un caractère non ramifié de  $M$ . Ce caractère appartient à  $\mathfrak{P}(M^{\natural}, \xi)$ , et le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^{\circ}$  induit une application bijective

$$\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)/\mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathfrak{P}(M^{\natural}, \xi).$$

L'ensemble  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)$  est un espace principal homogène sous  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural})$ , et pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)$  et  $\delta \in M^{\natural}$ , on peut comme plus haut identifier  $\Psi(\delta)$  à un nombre complexe non nul. Enfin pour tout caractère  $\eta$  de  $M$ , toute  $\eta$ -représentation  $\Pi$  de  $M^{\natural}$  et tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi)$ , on note  $\Psi \cdot \Pi$  la  $\xi\eta$ -représentation de  $M^{\natural}$  définie comme ci-dessus. On a encore

$$(\Psi \cdot \Pi)^{\circ} = \Psi^{\circ} \Pi^{\circ}.$$

**2.13. Quotient de Langlands.** — Soit  $|\omega|$  le caractère non ramifié de  $G$  donné par

$$|\omega|(g) = |\omega(g)|, \quad g \in G,$$

et soit  $\omega_{\mathfrak{u}}$  le caractère unitaire de  $G$  tel que

$$\omega = \omega_{\mathfrak{u}} |\omega|.$$

Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$ . D'après la classification de Langlands, il existe un triplet  $(P, \sigma, \xi)$  formé d'un sous-groupe parabolique standard  $P$  de  $G$ , d'une représentation irréductible tempérée  $\sigma$  de  $M_P$  et d'un caractère non ramifié  $\xi$  de  $M_P$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_{>0}$  qui est positif par rapport à  $U_P$ , tels que  $\Sigma^{\circ}$  est isomorphe à l'unique quotient irréductible de  $i_P^G(\xi\sigma)$ . L'unicité de la décomposition de Langlands implique que  $\theta(P) = P$  et que  $\omega^{-1}(\xi\sigma)^{\theta}$  est isomorphe à  $\sigma$ . Comme la représentation  $\omega_{\mathfrak{u}}^{-1}\sigma^{\theta}$  et le caractère  $|\omega|^{-1}\xi^{\theta}$  de  $M_P$  sont respectivement tempérée et positif par rapport à  $U_P$ ,  $\omega_{\mathfrak{u}}^{-1}\sigma^{\theta}$  est isomorphe à  $\sigma$  et  $|\omega|^{-1}\xi^{\theta} = \xi$ . On en déduit qu'il existe une  $\omega_{\mathfrak{u}}$ -représentation  $M_P$ -irréductible  $\Sigma$  de  $M_P^{\natural}$  et un élément  $\Xi$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  tels que  $\Sigma^{\circ} = \sigma$ ,  $\Xi^{\circ} = \xi$ , et  $\Pi$  est l'unique quotient irréductible de  ${}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi \cdot \Sigma)$ . De plus, quitte à remplacer  $\Xi$  par  $\lambda^{-1} \cdot \Xi$  et  $\Sigma$  par  $\lambda \cdot \Sigma$  pour un nombre complexe  $\lambda$  de module 1, on peut toujours supposer que  $\Xi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_{>0}$ .

**DÉFINITION.** — Une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  est dite *unitaire* s'il existe un produit scalaire hermitien  $G^{\natural}$ -invariant sur l'espace de  $\Pi$ , ce qui n'est possible que si le caractère  $\omega$  est lui-même unitaire. Un tel produit, s'il existe, est a fortiori  $G$ -invariant, et la représentation  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  sous-jacente à  $\Pi$  est unitaire.

Supposons que  $\pi = \Pi^{\circ}$  est unitaire, et fixons un produit scalaire hermitien  $G$ -invariant sur l'espace  $V$  de  $\pi$ . Posons

$$(v, v')^{\natural} = (\Pi(\delta)(v), \Pi(\delta)(v')), \quad v, v' \in V,$$

pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^{\natural}$ . Si  $\omega$  est unitaire, c'est un autre produit scalaire hermitien  $G$ -invariant sur  $V$ , par suite  $(\cdot, \cdot)^{\natural} = \lambda(\cdot, \cdot)$  pour un nombre réel  $\lambda > 0$ , et  $\Pi$  est unitaire si et seulement si  $\lambda = 1$ . On en déduit (toujours si  $\omega$  est unitaire) que pour tout nombre complexe  $\mu$  tel que  $\mu\bar{\mu} = \lambda$ , la  $\omega$ -représentation  $\mu^{-1} \cdot \Pi$  de  $G^{\natural}$  est unitaire.

**REMARQUE.** — Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ . Notons  $V$  l'espace de  $\Pi$ , et  $\check{V}$  celui de sa contragrédiente  $\check{\Pi}$ . Supposons que  $\pi = \Pi^{\circ}$  est irréductible et unitaire. Notant  $(\bar{\Pi}, \bar{V})$  la conjuguée complexe de  $\Pi$  — c'est une  $\bar{\omega}$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$  —, l'opérateur  $v \mapsto A_v = \langle v, \cdot \rangle$  de  $\bar{V}$  dans  $\check{V}$  est un isomorphisme de  $\bar{\pi}$  sur  $\check{\pi}$ , et c'est un isomorphisme de  $\bar{\Pi}$  sur  $\check{\Pi}$  si et seulement si  $\Pi$  est unitaire (auquel cas on a forcément  $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ ). ■

D'après ce qui précède, à toute  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  est associée un triplet  $(P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  où :

- $P^{\natural}$  est un sous-espace parabolique standard de  $G^{\natural}$ ,
- $\Sigma$  est une  $\omega_{\mathfrak{u}}$ -représentation  $M_P$ -irréductible *tempérée* de  $M_P^{\natural}$ , c'est-à-dire unitaire et telle que  $\Sigma^{\circ}$  est tempérée,
- $\Xi$  est un élément de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\Xi^{\circ}$  est positif par rapport à  $U_P$ .

Un tel triplet est appelé *triplet de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$* , et  $\Pi$  est l'unique quotient  $G$ -irréductible, donc aussi l'unique quotient irréductible, de l'induite parabolique  ${}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi \cdot \Pi)$ .

Réciproquement, à tout triplet de Langlands  $\mu = (P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  pour  $(G^{\natural}, \omega)$  est associée une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Pi = \Pi_{\mu}$  de  $G^{\natural}$ : c'est l'unique quotient irréductible de  $\tilde{\Pi}_{\mu} = {}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi \cdot \Sigma)$ . En effet, puisque  $\mu^{\circ} = (P, \Sigma^{\circ}, \Xi^{\circ})$  est un triplet de Langlands pour  $G$ , la représentation

$$i_P^G(\Xi^{\circ} \Sigma^{\circ}) = \tilde{\Pi}_{\mu}^{\circ}$$

de  $G$  a un unique quotient irréductible, disons  $\pi$ . Comme la représentation

$$i_P^G(\Xi^{\circ} \Sigma^{\circ})(1) = \omega^{-1} i_P^G(\Xi^{\circ} \Sigma^{\circ})^{\theta}$$

de  $G$  est isomorphe à  $i_P^G(\Xi^{\circ} \Sigma^{\circ})$ , on a nécessairement

$$\pi(1) \simeq \pi.$$

On en déduit qu'il existe un quotient  $\Pi$  de  $\tilde{\Pi}_{\mu}$  tel que  $\Pi^{\circ} = \pi$ . Ce quotient est l'unique quotient irréductible de  $\tilde{\Pi}_{\mu}$ .

Deux tels triplets de Langlands  $(P_1^{\natural}, \Sigma_1, \Xi_1)$ ,  $(P_2^{\natural}, \Sigma_2, \Xi_2)$  pour  $(G^{\natural}, \omega)$  sont dits équivalents si  $P_1^{\natural} = P_2^{\natural}$ ,  $\Sigma_1 \simeq \Sigma_2$  et  $\Xi_1 = \Xi_2$ . Comme dans le cas non tordu, l'application

$$\mu \mapsto \Pi_{\mu}$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de triplets de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$  sur  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$ .

**2.14. Décomposition de Langlands.** — Le sous-ensemble de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega_{\mathfrak{u}})$  formé des éléments (unitaires) tempérés est noté  $\text{Irr}_{0,t}(G^{\natural}, \omega_{\mathfrak{u}})$ . Il s'identifie à un sous-ensemble de  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega_{\mathfrak{u}})$ , que l'on note  $\text{Irr}_{\mathbb{C},t}(G^{\natural}, \omega_{\mathfrak{u}})$  — cf. 2.7 (notations). D'après 2.13, le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega)$  est somme directe des  $\mathbb{Z}$ -modules  $\mathbb{Z}\Pi_{\mu}$  pour  $\mu$  parcourant les classes d'équivalence de triplets de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$ . On en déduit la version tordue suivante du théorème de la base de Langlands (qu'il convient d'appeler "décomposition de Langlands", cf. la remarque ci-dessous).

**LEMME 1.** — *On a la décomposition dans  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$*

$$\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega) = \sum_{\mu} \mathbb{Z}\tilde{\Pi}_{\mu} + \mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $\mu$  parcourt les classes d'équivalence de triplets de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$ .

*Démonstration.* — Puisque  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega) \oplus \mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega)$  est contenu dans l'expression à droite de l'égalité dans l'énoncé. Soit donc  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$ , et soit  $(P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  un triplet de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$  associé à  $\Pi$ . Posons  $\sigma = \Sigma^{\circ}$ ,  $\xi = \Xi^{\circ}$ , et soit  $(M_{P'}, \sigma')$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $P' \subset P$  et  $\xi\sigma$  est isomorphe à un sous-quotient de l'induite parabolique  $i_{P'}^P(\sigma')$ . Chaque composant — i.e. classe d'isomorphisme d'un sous-quotient irréductible — de  $i_{P'}^G(\xi\sigma) = \omega_{i_{P'}^G}(\Xi \cdot \Sigma)^{\circ}$  est aussi un composant de  $i_{P'}^G(\sigma')$ . Dans  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$ , écrivons

$$\Pi \equiv \omega_{i_{P'}^G}(\Xi \cdot \Sigma) - \sum_{i=1}^n \Pi_i \pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)}$$

où les  $\Pi_i$  sont des éléments de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  tels que  $\theta_G(\Pi_i^{\circ}) = [M_{P'}, \sigma']$ . On refait ensuite la même chose avec chacun des  $\Pi_i$ :

$$\Pi_i \equiv \omega_{i_{P'}^G}(\Xi_i \cdot \Sigma_i) - \sum_{j=1}^{n_i} \Pi_{i,j} \pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)}.$$

Puisque l'application  $\theta_G : \text{Irr}(G) \rightarrow \Theta(G)$  est à fibres finies, d'après le résultat bien connu de Borel–Wallach [BW, 4.3], le processus de décomposition s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. On obtient donc une décomposition de la forme

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^m \tilde{\Pi}_{\mu_i} \pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)},$$

où les  $\mu_i$  sont des triplets de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$  (qui ne sont pas forcément deux-à-deux non équivalents).  $\square$

**REMARQUE.** — D'après le théorème de la base de Langlands pour  $G$ , la somme  $\sum_{\mu} \tilde{\Pi}_{\mu}$  est directe, mais sa projection sur  $\mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}(G^{\natural}, \omega) / \mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)$  ne l'est en général pas. En effet si  $\mu$  est un triplet de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$  tel que la  $\omega$ -représentation  $\tilde{\Pi}_{\mu}$  de  $G^{\natural}$  est réductible, les composants irréductibles de  $\tilde{\Pi}_{\mu}$  ne sont pas forcément  $G$ -irréductibles.  $\blacksquare$

Un triplet de Langlands  $(P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  pour  $(G^{\natural}, \omega)$  est dit *induit* si  $P^{\natural} \neq G^{\natural}$ . Une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  est dite *essentiellement tempérée* s'il existe un  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, |\omega|^{-1})$  tel que la  $\omega_{\mathfrak{u}}$ -représentation  $\Psi \cdot \Pi$  de  $G^{\natural}$  est tempérée, c'est-à-dire si  $\Pi$  est isomorphe à  $\tilde{\Pi}_{\mu} = \tilde{\Pi}_{\mu}$  pour un  $\mu$  non induit. De manière équivalente,  $\Pi$  est essentiellement tempérée si  $\Pi^{\circ}$  est une représentation essentiellement tempérée de  $G$ . On note  $\text{Irr}_{0,\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  formé des éléments essentiellement tempérés. On note aussi:

- $\mathcal{G}_{\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  $\iota_k(\text{Irr}_{0,\text{e.t.}}(\mathcal{G}_k, \omega_k))$  pour un entier  $k \geq 1$  — il est stable sous  $\mathbb{C}^{\times}$ ;
- $\mathcal{G}_{L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  $\iota_k(\tilde{\Pi}_{\mu})$  pour un entier  $k \geq 1$  et un triplet de Langlands induit  $\mu$  pour  $(G_k^{\natural}, \omega_k)$  — lui aussi est stable sous  $\mathbb{C}^{\times}$ ;
- $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{G}_{\mathbb{C},L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega)$  leurs projections respectives dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  — deux sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ .

D'après le lemme de 2.7,  $\mathcal{G}_{\mathbb{C},\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par  $\text{Irr}_{\mathbb{C},\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega) = \text{Irr}_{0,\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$ , et  $\mathcal{G}_{\mathbb{C},L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les projections des  $\tilde{\Pi}_{\mu}$  dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , où  $\mu$  parcourt les triplets de Langlands induits pour  $(G^{\natural}, \omega)$ .

D'après le lemme 1 et le théorème de la base de Langlands pour  $G$ , on a la décomposition en somme directe

$$\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega) \oplus \mathcal{G}_{L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega).$$

On en déduit le

**LEMME 2.** — *On a la décomposition en somme directe*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega) \oplus \mathcal{G}_{\mathbb{C}, L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega).$$

*Démonstration.* — Pour alléger l'écriture, posons  $\mathcal{G}_{0+} = \mathcal{G}_{0+}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{G}_{\text{e.t.}} = \mathcal{G}_{\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$ , etc. Il s'agit d'établir l'inclusion

$$(*) \quad \mathcal{G}_{0+} \subset (\mathcal{G}_{\text{e.t.}} \cap \mathcal{G}_{0+}) + (\mathcal{G}_{L\text{-ind}} \cap \mathcal{G}_{0+}).$$

Soit un élément  $\Pi$  de  $\text{Irr}_{k-1}(G^{\natural}, \omega)$  pour un entier  $k > 1$ , et soit  $\Sigma \in \text{Irr}_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  tel que  $\Pi = \iota_k(\Sigma)$ . Dans  $\mathcal{G}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ ,  $\Sigma$  se décompose en  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ , où  $\Sigma_1 \in \mathcal{G}_{\text{e.t.}}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  et  $\Sigma_2 \in \mathcal{G}_{L\text{-ind}}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ . Alors  $\Pi = \iota_k(\Sigma_1) + \iota_k(\Sigma_2)$ , et d'après le lemme de 2.7,  $\Pi$  appartient à la somme à droite de l'inclusion (\*).

Soit un élément  $\Pi'$  de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  et des nombres complexes non nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $n > 1$ , tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ . Écrivons  $\Pi' = \Pi'_1 + \Pi'_2$ , où  $\Pi'_1 \in \mathcal{G}_{\text{e.t.}}$  et  $\Pi'_2 \in \mathcal{G}_{L\text{-ind}}$ . Alors  $\Pi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Pi'$  s'écrit  $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ , où  $\Pi_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Pi'_1$  et  $\Pi_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \Pi'_2$ , par conséquent  $\Pi$  appartient à la somme à droite de l'inclusion (\*).

L'inclusion (\*) étant vérifiée, le lemme est démontré.  $\square$

**2.15. Support cuspidal et caractères infinitésimaux.** — Soit  $A_o$  le tore déployé maximal (du centre) de  $M_o$ . On a  $Z_G(A_o) = M_o$ , et le normalisateur  $N_G(A_o)$  de  $A_o$  dans  $G$  coïncide avec  $N_G(M_o)$ . On note  $W_G$  le groupe de Weyl de  $G$  défini par

$$W_G = N_G(A_o)/M_o.$$

Soit  $\pi$  une représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ . À  $\pi$  est associée une *paire cuspidale standard*  $(M_P, \rho)$  de  $G$ , où  $P \in \mathcal{P}(G)$  et  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $M_P$ , telle que  $\pi$  est isomorphe à un sous-quotient de  $i_P^G(\rho)$ . Si  $(M_{P'}, \rho')$  est une autre paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $\pi$  est isomorphe à un sous-quotient de  $i_{P'}^G(\rho')$ , alors il existe un élément  $w$  de  $W_G$  tel que  $w(M_P) = M_{P'}$  et  ${}^{n_w}\rho \simeq \rho'$ , où:

- $n_w$  est un représentant de  $w$  dans  $N_G(A_o)$ ,
- ${}^{n_w}\rho$  est la représentation  $\rho \circ \text{Int}_{\mathbf{G}}(n_w^{-1})$  de  $w(M_P) = \text{Int}_{\mathbf{G}}(n_w)(M_P)$ .

Pour  $X \subset G$  et  $g \in G$ , on pose  ${}^gX = \text{Int}_{\mathbf{G}}(g)(X)$ . Deux paires cuspidales — standard ou non —  $(M, \rho)$  et  $(M', \rho')$  de  $G$  telles que  $M' = {}^gM$  et  $\rho' \simeq {}^g\rho$  pour un  $g \in G$  sont dites *G-équivalentes* ou simplement *équivalentes*, et l'on note  $[M, \rho] = [M, \rho]_G$  la classe d'équivalence de  $(M, \rho)$ . Toute paire cuspidale de  $G$  est équivalente à une paire cuspidale standard. La classe d'équivalence d'une paire cuspidale standard  $(M_P, \rho)$  de  $G$  telle que  $\pi$  est isomorphe à un sous-quotient de  $i_P^G(\rho)$  est appelée *support cuspidal* de  $\pi$ , et notée  $\theta_G(\pi)$ .

Pour une paire cuspidale  $(M, \rho)$  de  $G$ , on note  $\rho(1)$  la représentation  $\omega^{-1}\rho^{\theta}$  de  $\theta^{-1}(M)$ . On obtient ainsi une autre paire cuspidale

$$(M, \rho)(1) = (\theta^{-1}(M), \rho(1))$$

de  $G$ , dont la classe de  $G$ -équivalence, notée  $[M, \rho](1)$ , ne dépend pas du choix de  $\delta_1 \in M_o^{\natural}$ . Notons que si  $(M, \rho)$  est standard, i.e. si  $M = M_P$  pour un  $P \in \mathcal{P}(G)$ , alors  $(M, \rho)(1)$  est aussi standard, puisque  $\theta^{-1}(P) \in \mathcal{P}(G)$  et  $\theta^{-1}(M_P) = M_{\theta^{-1}(P)}$ .

Soit  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$ . Posons  $\pi = \Pi^{\circ}$ , et soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $\theta_G(\pi) = [M_P, \rho]$ . Puisque  $\pi$  est isomorphe à  $\pi(1)$ , c'est un sous-quotient de  $i_{\theta^{-1}(P)}^G(\rho(1)) = i_{\theta^{-1}(M_P)P_o}^G(\rho(1))$ . Par suite les paires cuspidales standard  $(M_P, \rho)$  et  $(M_P, \rho)(1)$  de  $G$  sont équivalentes: il existe un élément  $w \in W_G$  tel que  $w(M_P) = \theta^{-1}(M_P)$  et  ${}^{n_w}\rho \simeq \rho(1)$ . En d'autres termes, posant  $\tau = \theta \circ \text{Int}_{\mathbf{G}}(n_w)$ , on a  $\tau(M_P) = M_P$  et  $\omega^{-1}\rho^{\tau} \simeq \rho$ .

On note  $\Theta(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence de paires cuspidales de  $G$ , et  $\Theta_1(G)$  le sous-ensemble de  $\Theta(G)$  formé des  $[M, \rho]$  tels que  $[M, \rho](1) = [M, \rho]$ . L'application support cuspidal

$$\theta_G : \text{Irr}(G) \rightarrow \Theta(G)$$

induit une application

$$\text{Irr}_0(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \rightarrow \Theta_1(G), \Pi \mapsto \theta_{G^\natural, \omega}(\Pi) = \theta_G(\Pi^\circ),$$

dont l'image est notée  $\Theta_{G^\natural, \omega}(G)$ . Notons que pour qu'une paire cuspidale standard  $(M_P, \rho)$  de  $G$  telle que  $[M_P, \rho](1) = [M_P, \rho]$  soit dans l'image de  $\theta_{G^\natural, \omega}$ , il faut et il suffit que l'induite parabolique  $\pi = i_P^G(\rho)$  — qui est isomorphe à  $\pi(1)$  — possède un sous-quotient irréductible  $\pi'$  tel que  $\pi'(1) \simeq \pi'$ .

L'application  $[M, \rho] \mapsto [M, \rho](1)$  définit comme en 2.6 une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\Theta(G)$ . On note  $\Theta(G)/\mathbb{Z}$  l'ensemble des orbites de  $\mathbb{Z}$  pour cette action, et l'on identifie  $\Theta_1(G)$  à un sous-ensemble de  $\Theta(G)/\mathbb{Z}$ . L'application  $\theta_G$  est  $\mathbb{Z}$ -équivariante, et l'application  $\Pi \mapsto \theta_{G^\natural, \omega}(\Pi)$  se prolonge en une application surjective

$$\theta_{G^\natural, \omega} : \text{Irr}(G^\natural, \omega)/\mathbb{C}^\times \rightarrow \Theta(G)/\mathbb{Z},$$

définie comme suit. Pour une  $\omega$ -représentation irréductible  $\Pi$  de  $G^\natural$ , on choisit une sous-représentation irréductible  $\pi_0$  de  $\Pi^\circ$ , et l'on note  $\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi)$  la  $\mathbb{Z}$ -orbite de  $\theta_G(\pi_0)$  dans  $\Theta(G)$ . Cette  $\mathbb{Z}$ -orbite est bien définie — i.e. elle ne dépend pas du choix de  $\pi_0$  — et dépend seulement de la classe d'isomorphisme de  $\Pi$ .

**2.16. Support inertiel.** — Deux paires cuspidales  $(M, \rho)$  et  $(M', \rho')$  de  $G$  sont dites *inertiellement équivalentes* s'il existe un caractère non ramifié  $\psi'$  de  $M'$  tel que  ${}^g M = M'$  et  ${}^g \rho \simeq \psi' \rho'$  pour un  $g \in G$ .

Soit  $\mathfrak{B}(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence inertielle de paires cuspidales de  $G$ . Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , on note  $\Theta(\mathfrak{s}) \subset \Theta(G)$  la fibre au-dessus de  $\mathfrak{s}$ . Si  $\mathfrak{s}$  est la classe d'équivalence inertielle d'une paire cuspidale  $(M, \rho)$  de  $G$ , alors  $\Theta(\mathfrak{s})$  est un espace homogène sous le tore complexe  $\mathfrak{P}(M)$  — pour  $\psi \in \mathfrak{P}(M)$ , on pose  $\psi \cdot [M, \rho] = [M, \psi\rho]$  —, et en particulier une variété algébrique affine complexe. Précisément, notons  $\mathfrak{P}(M)(\rho)$  la  $\mathfrak{P}(M)$ -orbite de  $\rho$  dans  $\text{Irr}(M)$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de  $M$  de la forme  $\psi\rho$  pour un  $\psi \in \mathfrak{P}(M)$ . C'est une variété algébrique affine complexe (le quotient de  $\mathfrak{P}(M)$  par un groupe fini). Posons

$$W_G(M) = N_G(M)/M$$

et

$$W_{\mathfrak{s}} = \{w \in W_G(M) : {}^{n_w} \rho \simeq \psi\rho, \exists \psi \in \mathfrak{P}(M)\},$$

où  $n_w$  désigne un représentant de  $w$  dans  $N_G(M)$ . Le groupe  $W_{\mathfrak{s}}$  opère sur la variété  $\mathfrak{P}(M)(\rho)$ , et l'application  $\psi\rho \mapsto [M, \psi\rho]$  est un isomorphisme de la variété quotient  $\mathfrak{P}(M)(\rho)/W_{\mathfrak{s}}$  sur  $\Theta(\mathfrak{s})$ .

L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\Theta(G)$  préserve les fibres de l'application  $\Theta(G) \rightarrow \mathfrak{B}(G)$ , donc induit une action sur  $\mathfrak{B}(G)$ , notée  $(k, \mathfrak{s}) \mapsto \mathfrak{s}(k)$ : si  $\mathfrak{s}$  est la classe inertielle d'une paire cuspidale  $(M, \rho)$  de  $G$ , alors  $\mathfrak{s}(k)$  est la classe inertielle de  $(\theta^{-k}(M), \rho(k))$ . On note  $\mathfrak{B}_1(G)$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{B}(G)$  formé des  $\mathfrak{s}$  tels que  $\mathfrak{s}(1) = \mathfrak{s}$ , i.e. tels que la fibre  $\Theta(\mathfrak{s})$  au-dessus de  $\mathfrak{s}$  est  $\mathbb{Z}$ -stable.

**LEMME.** — *Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$ , l'ensemble*

$$\Theta_1(\mathfrak{s}) = \Theta(\mathfrak{s}) \cap \Theta_1(G)$$

*est une sous-variété algébrique fermée (éventuellement vide) de  $\Theta(\mathfrak{s})$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer  $\Theta_1(\mathfrak{s})$  non vide sinon il n'y a rien à démontrer. Soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $[M_P, \rho] \in \Theta_1(\mathfrak{s})$ , et soit  $w \in W_G$  tel que  $\rho(1) \simeq {}^w \rho$ . D'après 2.15, posant  $\tau = \theta \circ \text{Int}_G(n_w)$ , on a  $\tau(M_P) = M_P$  et  $\omega^{-1} \rho^\tau \simeq \rho$ . De même pour  $\psi \in \mathfrak{B}(M_P)$ , la classe  $[M_P, \psi\rho]$  appartient à  $\Theta_1(\mathfrak{s})$  si et seulement s'il existe un élément  $w_\psi$  de  $W_G$  tel que, posant  $\tau_\psi = \theta \circ \text{Int}_G(n_{w_\psi})$ , on a  $\tau_\psi(M_P) = M_P$  et  $\omega^{-1}(\psi\rho)^{\tau_\psi} \simeq \psi\rho$ . Puisque

$$w(M_P) = \theta^{-1}(M_P) = w_\psi(M_P),$$

il existe un  $s_\psi \in N_G(M_P)$  tel que  $n_{w_\psi} = n_w s_\psi$ . On a donc  $\tau_\psi = \tau \circ \text{Int}_G(s_\psi)$ , et comme

$$\omega^{-1}(\psi\rho)^{\tau_\psi} = (\psi^\tau \omega^{-1} \rho^\tau)^{\text{Int}_G(s_\psi)} \simeq (\psi^\tau \rho)^{\text{Int}_G(s_\psi)}$$

est isomorphe à  $\psi\rho$ , on a

$${}^s \rho \simeq ({}^s \psi) \psi^{-1} \psi^\tau \rho.$$

En particulier,  $\bar{s}_\psi = s_\psi \pmod{M_P}$  appartient au sous-groupe  $W_{\mathfrak{s}}$  de  $W_G(M_P)$ , et  $(\bar{s}_\psi \psi)^{-1} \psi^\tau$  stabilise  $[M_P, \rho]$ . Réciproquement, supposons qu'il existe un  $s \in N_G(M_P)$  tel que  ${}^s \rho$  est isomorphe à  $({}^s \psi)^{-1} \psi^\tau \rho$ . Alors

$${}^s(\psi\rho) \simeq \psi^\tau \rho \simeq \psi^\tau (\omega^{-1} \rho^\tau) = \omega^{-1}(\psi\rho)^\tau,$$

et  $[M_P, \psi\rho]$  appartient à  $\Theta_1(\mathfrak{s})$ . En définitive, on a montré qu'un élément  $[M_P, \psi\rho]$  de  $\Theta(\mathfrak{s})$  appartient à  $\Theta_1(\mathfrak{s})$  si et seulement s'il existe un  $s \in N_G(M_P)$  tel que  ${}^s(\psi\rho) \simeq \psi^\tau \rho$ . Puisque le groupe  $W_G(M_P)$  est fini, cette condition définit une sous-variété algébrique fermée de  $\Psi(M_P)(\rho)$ . Comme le morphisme  $\Psi(M)(\rho) \rightarrow \Theta(\mathfrak{s})$ ,  $\psi\rho \mapsto [M_P, \psi\rho]$  est quasi-fini, il est fini (par homogénéité), donc fermé. D'où le lemme.  $\square$

L'application support inertiel

$$\beta_G : \text{Irr}(G) \rightarrow \mathfrak{B}(G)$$

induit une application

$$\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega) / \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{B}_1(G), \Pi \mapsto \beta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi) = \beta_G(\Pi^\circ),$$

dont l'image est notée  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ .

**REMARQUE.** — Soit  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$ , et soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $[M_P, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$ . Pour  $[M_P, \rho'] \in \Theta(\mathfrak{s})$ , l'élément  $[M_P, \rho'](1) = [M_{\theta^{-1}(P)}, \rho'(1)]$  est encore dans  $\Theta(\mathfrak{s})$ . Il est donc équivalent à  $[M_P, \rho'']$  pour une représentation irréductible cuspidale de  $M_P$ , et la représentation  $i_P^G(\rho')$  de  $G$  — définie seulement à isomorphisme près — est irréductible si et seulement si la représentation  $i_P^G(\rho'')$  l'est. On sait qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense  $\mathcal{V}$  de  $\Theta(\mathfrak{s})$ , que l'on peut supposer  $\mathbb{Z}$ -stable, tel pour tout  $[M_P, \rho'] \in \mathcal{V}$ , la représentation  $i_P^G(\rho')$  est irréductible. Si l'intersection  $\mathcal{V} \cap \Theta_1(G)$  est non vide, alors  $\mathfrak{s}$  est dans l'image de  $\beta_{G^{\natural}, \omega}$ .  $\blacksquare$

Comme en 2.15, on note  $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$  l'ensemble des orbites de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathfrak{B}(G)$ , et l'on identifie  $\mathfrak{B}_1(G)$  à un sous-ensemble de  $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ . L'application  $\beta_G$  est  $\mathbb{Z}$ -équivariante, et l'application  $\Pi \mapsto \beta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi)$  se prolonge comme en loc. cit. en une application surjective

$$\beta_{G^{\natural}, \omega} : \text{Irr}(G^{\natural}, \omega) / \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{B}(G) / \mathbb{Z}.$$

**2.17. Le “centre” (rappels, cas non tordu).** — Le centre d’une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est par définition l’anneau des endomorphismes du foncteur identique de  $\mathcal{A}$ . On le note  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$ . Un élément  $z$  de  $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$  est la donnée, pour chaque objet  $E$  de  $\mathcal{A}$ , d’une flèche  $z_E : E \rightarrow E$  dans  $\mathcal{A}$ , de sorte que pour toute flèche  $u : E_1 \rightarrow E_2$  dans  $\mathcal{A}$ , on ait

$$u \circ z_{E_1} = z_{E_2} \circ u.$$

Notons  $\mathfrak{Z}(G)$  le centre de la catégorie  $\mathfrak{R}(G)$ . Rappelons que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre *idempotent* (cf. [BD, 1.1]), et que l’application  $(\pi, V) \mapsto V$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{R}(G)$  sur la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules (à gauche) non dégénérés. On peut voir  $\mathcal{H}$  comme un  $\mathcal{H}$ -module non dégénéré pour la multiplication à gauche. Pour chaque élément  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ , on a donc un élément  $z_{\mathcal{H}} \in \text{End}_G(\mathcal{H})$ . D’après [BD, 1.5], l’application  $z \mapsto z_{\mathcal{H}}$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur le commutant  $\text{End}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}^{\text{op}}}(\mathcal{H})$  dans  $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$  des multiplications à gauche et à droite. Pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $f \in \mathcal{H}$ , on pose  $z \cdot f = z_{\mathcal{H}}(f)$ .

Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , notons  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G)$  formée des représentations  $\pi$  telles que  $\beta_G(\pi') = \mathfrak{s}$  pour tout sous-quotient irréductible  $\pi'$  de  $\pi$ . D’après [BD, 2.10],  $\mathfrak{R}(G)$  est le produit des catégories  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$  pour  $\mathfrak{s}$  parcourant les éléments de  $\mathfrak{B}(G)$ . En d’autres termes, toute représentation  $\pi$  de  $G$  s’écrit comme une somme directe  $\pi = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \pi_{\mathfrak{s}}$  où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}(G)$  et  $\pi_{\mathfrak{s}}$  est un objet de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$ , et si  $\pi' = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \pi'_{\mathfrak{s}}$  est une autre représentation de  $G$ , on a

$$\text{Hom}_G(\pi, \pi') = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \text{Hom}_G(\pi_{\mathfrak{s}}, \pi'_{\mathfrak{s}}).$$

On note  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G)$  le centre de la catégorie  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$ . On a la décomposition en produit d’anneaux

$$\mathfrak{Z}(G) = \prod_{\mathfrak{s}} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}.$$

Pour toute partie  $\mathfrak{S}$  de  $\mathfrak{B}(G)$ , on pose

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G), \quad \mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}.$$

Fixons un élément  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , et choisissons une paire cuspidale standard  $(M_P, \rho)$  de  $G$  telle que  $[M_P, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$ . Rappelons que  $M_P^1$  est le sous-groupe de  $M_P$  engendré par ses sous-groupes ouverts compacts. Posons  $\Lambda_P = M_P/M_P^1$ . C’est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini, et l’on a  $\mathfrak{P}(M_P) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_P, \mathbb{C}^{\times})$ . En d’autres termes,  $\Lambda_P$  est le groupe des caractères algébriques du tore complexe  $\mathfrak{P}(M_P)$ . Soit  $B_P = \mathbb{C}[\Lambda_P]$  l’algèbre affine de  $\mathfrak{P}(M_P)$ , et soit  $\varphi_P : M_P \rightarrow B_P$  le “caractère universel” donné par l’évaluation:

$$\varphi_P(m)(\psi) = \psi(m), \quad m \in M_P, \psi \in \mathfrak{P}(M_P).$$

C’est aussi le composé de la projection canonique  $M_P \rightarrow \Lambda_P$  et de l’inclusion  $\Lambda_P \hookrightarrow B_P$ . Soit  $\rho_{B_P}$  la représentation de  $M_P$  définie comme suit: l’espace de  $\rho_{B_P}$  est  $W = V_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} B_P$ , et pour  $m \in M_P$ ,  $v \in V_{\rho}$  et  $b \in B_P$ , on pose

$$\rho_{B_P}(m)(v \otimes b) = \rho(m)(v) \otimes \varphi_P(m)b.$$

Notons  $\pi$  la représentation  $i_P^G(\rho_{B_P})$  de  $G$ . L’anneau  $B_P$  opère naturellement sur l’espace  $V$  de  $\pi$ , et pour  $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$  correspondant à  $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(B_P, \mathbb{C})$  — i.e. tels que  $\psi = u \circ \varphi_P$  — la spécialisation  $\pi_{\psi}$  de  $\pi$  en  $\psi$ , c’est-à-dire la représentation de  $G$  déduite de  $\pi$  sur l’espace  $V_{\psi} = V \otimes_{B_P, u} \mathbb{C}$ , est isomorphe à  $i_P^G(\psi\rho)$ . Soit maintenant  $z$  un élément de  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ . D’après [BD, 1.17], l’endomorphisme  $z_{\pi}$  de  $\pi$  est la multiplication par un élément de  $B_P$ , disons  $b$ , et pour chaque  $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$ , l’endomorphisme  $z_{\pi_{\psi}}$  de  $\pi_{\psi}$  est la multiplication par  $b(\psi)$ . De plus (loc. cit.), si  $\psi, \psi' \in \mathfrak{P}(M_P)$  sont tels que  ${}^w(\psi\rho) \simeq \psi'\rho$  pour un  $w \in W_G(M_P)$ , alors

$b(\psi) = b(\psi')$ . Par conséquent la fonction  $\psi \mapsto b(\psi)$  sur  $\mathfrak{P}(M_F)$  se descend en une fonction régulière sur la variété  $\Theta(\mathfrak{s})$ , disons  $f_z$ . Le théorème 2.13 de [BD] dit que l'application

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} \rightarrow \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})], z \mapsto f_z$$

est un isomorphisme d'anneaux.

**REMARQUE.** — Soit  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ , décomposé en  $z = \prod_{\mathfrak{s}} z_{\mathfrak{s}}$ ,  $z_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ . Pour toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G$  telle que  $\beta_G(\pi) = \mathfrak{s}$ , on a

$$z_{\pi} = f_{z_{\mathfrak{s}}}(\theta_G(\pi))\text{id}_{V_{\pi}}. \quad \blacksquare$$

**2.18. L'anneau  $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$ .** — On l'a dit plus haut, l'action de  $\mathbb{C}^{\times}$  sur  $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  provient d'une action fonctorielle sur  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ , triviale sur les flèches. Par functorialité on obtient une action sur l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ . Soit  $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$  l'anneau des endomorphismes  $\mathbb{C}^{\times}$ -invariants du foncteur identique de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ . Un élément  $\mathcal{Z}$  de  $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$  est par définition la donnée, pour chaque  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ , d'un endomorphisme  $\mathcal{Z}_{\Pi}$  de  $\Pi$  tel que  $\mathcal{Z}_{\lambda \cdot \Pi} = \mathcal{Z}_{\Pi}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , de sorte que pour tout morphisme  $u : \Pi \rightarrow \Pi'$  entre deux  $\omega$ -représentations  $\Pi$  et  $\Pi'$  de  $G^{\natural}$ , on ait

$$u \circ \mathcal{Z}_{\Pi} = \mathcal{Z}_{\Pi'} \circ u.$$

Soit  $(\Pi, V)$  une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ . Décomposons  $\Pi^{\circ}$  en

$$\Pi^{\circ} = \bigoplus_{\mathfrak{S}} (\Pi^{\circ})_{\mathfrak{S}}$$

où  $\mathfrak{S}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ , et  $(\Pi^{\circ})_{\mathfrak{S}}$  est un objet de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G)$ . Pour chaque  $\mathbb{Z}$ -orbite  $\mathfrak{S}$  dans  $\mathfrak{B}(G)$ , l'opérateur  $\Pi(\delta_1)$  envoie  $(\Pi^{\circ})_{\mathfrak{S}}$  sur  $(\Pi^{\circ})_{\mathfrak{S}}(1) = (\Pi^{\circ})_{\mathfrak{S}}$ , par conséquent  $\Pi$  se décompose en

$$\Pi = \bigoplus_{\mathfrak{S}} \Pi_{\mathfrak{S}}, \quad \Pi^{\circ} = (\Pi_{\mathfrak{S}})^{\circ},$$

et si  $\Pi' = \bigoplus_{\mathfrak{S}} \Pi'_{\mathfrak{S}}$  est une autre  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ , on a

$$\text{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi, \Pi') = \bigoplus_{\mathfrak{S}} \text{Hom}_{G^{\natural}}(\Pi_{\mathfrak{S}}, \Pi'_{\mathfrak{S}}).$$

Pour une partie  $\mathfrak{S}$  de  $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ , on note  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  formée des  $\Pi$  tels que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G)$ , ou — ce qui revient au même — tels que  $\beta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi') \in \mathfrak{S}$  pour tout sous-quotient irréductible  $\Pi'$  de  $\Pi$ . Elle est stable sous l'action de  $\mathbb{C}^{\times}$ . On note  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-anneau de  $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$  formé des endomorphismes  $\mathbb{C}^{\times}$ -invariants du foncteur identique de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$ . D'après ce qui précède,  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  est le produit des catégories  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$  pour  $\mathfrak{S}$  parcourant les éléments de  $\mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ . Par suite on a la décomposition en produit d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega) = \prod_{\mathfrak{S} \in \mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega).$$

Posons

$$\mathfrak{R}_0(G^{\natural}, \omega) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}_0}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}(G).$$

Toute  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$  est un objet de  $\mathfrak{R}_0(G^{\natural}, \omega)$ , et  $\mathfrak{R}_0(G^{\natural}, \omega)$  est le produit des catégories  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$  pour  $\mathfrak{s}$  parcourant les éléments de  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ . Ainsi, pour décrire l'anneau

$$\mathfrak{Z}_0(G^{\natural}, \omega) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_0} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$$

des endomorphismes  $\mathbb{C}^{\times}$ -invariants du foncteur identique de  $\mathfrak{R}_0(G^{\natural}, \omega)$ , il suffit de décrire chacun des anneaux  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$ .

**2.19. Action de  $\mathbb{Z}$  sur le “centre”.** — L’application  $(k, \pi) \mapsto \pi(k)$  définit une action fonctorielle de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathfrak{R}(G)$ , triviale sur les flèches. On en déduit une action  $(k, z) \mapsto z(k)$  de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathfrak{Z}(G)$ : pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $z(k)$  est l’élément de  $\mathfrak{Z}(G)$  donné par

$$z(k)_\pi = z_{\pi(k)}.$$

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , l’application  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}(G)$ ,  $z \mapsto z(k)$  est un automorphisme d’anneau (et même de  $\mathbb{C}$ -algèbre). On note  $\mathfrak{Z}_1(G)$  le sous-anneau de  $\mathfrak{Z}(G)$  formé des  $z$  tels que  $z(1) = z$ . Pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\Pi$  une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , on a

$$z_{\Pi^\circ(1)} \circ \Pi(\delta_1) = \Pi(\delta_1) \circ z_{\Pi^\circ}.$$

En particulier si  $z(1) = z$ , alors  $z_{\Pi^\circ(1)} = z_{\Pi^\circ}$  est un endomorphisme de  $\Pi$ .

**REMARQUE 1.** — L’application  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $f \mapsto \omega f^\theta$  est un automorphisme d’anneau, disons  $\tau$ . Pour toute représentation  $\pi$  de  $\mathfrak{R}(G)$ , on a  $\pi(k)(f) = \pi(\tau^{-k}(f))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in \mathcal{H}$ . On en déduit que l’action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathfrak{Z}(G)$ , identifié à  $\text{End}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}^{\text{op}}}(\mathcal{H})$  via l’isomorphisme  $z \mapsto z_{\mathcal{H}}$ , est donnée par  $z(k)_{\mathcal{H}} = \tau^k \circ z_{\mathcal{H}} \circ \tau^{-k}$ , et que  $\mathfrak{Z}_1(G)$  est le sous-anneau de  $\mathfrak{Z}(G)$  formé des  $z$  tels que  $\tau \circ z_{\mathcal{H}} \circ \tau^{-1} = z_{\mathcal{H}}$ , c’est-à-dire le commutant de  $\tau$  dans  $\mathfrak{Z}(G)$ . ■

Soit  $\mathfrak{s}$  un élément de  $\mathfrak{B}_1(G)$ . L’anneau  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  est  $\mathbb{Z}$ -stable, et l’on note  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}(G)$  le sous-anneau de  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  formé des  $z$  tels que  $z(1) = z$ . La variété  $\Theta(\mathfrak{s})$  est elle-aussi  $\mathbb{Z}$ -stable, et l’isomorphisme  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]$ ,  $z \mapsto f_z$  se restreint en un isomorphisme d’anneaux

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1} \rightarrow \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z},$$

où  $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z}$  désigne le sous-anneau de  $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]$  formé des fonctions  $\mathbb{Z}$ -invariantes.

On définit comme suit une application

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1} \rightarrow \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega), \quad z \mapsto \iota(z).$$

Pour  $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$  et  $\Pi$  un objet de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ , l’endomorphisme  $z_{\Pi^\circ}$  de  $\Pi^\circ$  est en fait un endomorphisme de  $\Pi$ , et puisque  $(\lambda \cdot \Pi)^\circ = \Pi^\circ$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , c’est un élément de  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ . On pose  $\iota(z)_\Pi = z_{\Pi^\circ}$ . L’application  $\iota$  ainsi définie est un morphisme d’anneaux, et il est bijectif. En effet, on définit comme suit son inverse  $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}^\circ$ . Pour  $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$  et  $\pi$  un objet irréductible de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ , on pose  $\tilde{\pi} = \pi \oplus \pi(1) \oplus \cdots \oplus \pi(s-1)$  si  $s = s(\pi) < +\infty$  et  $\tilde{\pi} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \pi(k)$  sinon. La représentation  $\tilde{\pi}(1)$  de  $G$  est isomorphe à  $\tilde{\pi}$ , et il existe une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  telle que  $\Pi^\circ = \tilde{\pi}$ . Cette représentation est irréductible, et d’après le lemme de Schur, l’endomorphisme  $\mathcal{Z}_\Pi$  de  $\Pi$  est la multiplication par une constante  $\mu \in \mathbb{C}^\times$ . On pose  $(\mathcal{Z}^\circ)_\pi = \mu \text{id}_{V_\pi}$ . Par construction, on a  $(\mathcal{Z}^\circ)_{\pi(k)} = (\mathcal{Z}^\circ)_\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . D’après [BD, 1.8], cela définit un élément  $\mathcal{Z}^\circ$  de  $\mathfrak{Z}(G)$ , qui vérifie  $\mathcal{Z}^\circ(1) = \mathcal{Z}^\circ$ . L’application

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}, \quad \mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}^\circ$$

ainsi définie est un morphisme d’anneaux, et pour  $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$  et  $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ , on a bien

$$\iota(z)^\circ = z, \quad \iota(\mathcal{Z}^\circ) = \mathcal{Z}.$$

En composant l’isomorphisme  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1}$ ,  $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}^\circ$  avec l’isomorphisme

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s},1} \rightarrow \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z}, \quad z \mapsto f_z,$$

on obtient un isomorphisme d’anneaux

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z}, \quad \mathcal{Z} \mapsto f_\mathcal{Z}.$$

**REMARQUE 2.** — La description de l’anneau  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$  ci-dessus est valable même si la variété  $\Theta_1(\mathfrak{s})$  est vide, et a fortiori même si aucun objet de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$  n’est  $G$ -irréductible (on n’a pas supposé que  $\mathfrak{s}$  appartient à  $\mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}(G)$ ). ■

**REMARQUE 3.** — Si l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\Theta(\mathfrak{s})$  se factorise à travers un quotient fini de  $\mathbb{Z}$ , alors l'ensemble  $\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$  des  $\mathbb{Z}$ -orbites dans  $\Theta(\mathfrak{s})$  est un quotient géométrique de  $\Theta(\mathfrak{s})$ . En particulier c'est une variété algébrique affine, d'algèbre affine  $\mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}] = \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})]^\mathbb{Z}$ .

En général, cela n'est pas vrai: l'ensemble  $\Theta(\mathfrak{s})/\mathbb{Z}$  des  $\mathbb{Z}$ -orbites dans  $\Theta(\mathfrak{s})$  n'est pas un quotient géométrique de  $\Theta(\mathfrak{s})$ . Par exemple si  $G = \mathbb{G}_m$ ,  $\theta = \text{id}$  et  $\omega$  est un caractère non ramifié unitaire de  $G = F^\times$  dont les puissances sont denses dans le tore  $\mathfrak{P}(F^\times) \simeq \mathbb{C}^\times$ , alors les  $\mathbb{Z}$ -orbites dans  $\mathfrak{P}(F^\times)$  ne sont pas fermées, et toute fonction régulière  $\mathbb{Z}$ -invariante sur  $\mathfrak{P}(F^\times)$  est constante. ■

**2.20. “Bons” sous-groupes ouverts compacts de  $G$ .** — Si  $J$  est un sous-groupe ouvert compact de  $G$ , on note  $\text{Irr}_J(G)$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(G)$  formé des  $\pi$  tels que  $V_\pi^J \neq 0$ . D'après [BD, 3.7 et 3.9],  $\beta_G(\text{Irr}_J(G))$  est un sous-ensemble *fini* de  $\mathfrak{B}(G)$ . On dit que  $J$  est un “bon” sous-groupe ouvert compact de  $G$  si

$$\beta_G^{-1}(\beta_G(\text{Irr}_J(G))) = \text{Irr}_J(G),$$

auquel cas on pose  $\mathfrak{S}(J) = \beta_G(\text{Irr}_J(G))$ . De manière équivalente,  $J$  est un bon sous-groupe ouvert compact de  $G$  si et seulement si toute représentation  $\pi$  de  $G$  admet une décomposition en somme directe

$$\pi = \pi_J \oplus \pi_J^\perp$$

où  $\pi_J$  désigne la sous-représentation de  $\pi$  d'espace  $\pi(G)(V^J)$  de  $V$ , et  $\pi_J^\perp$  la sous-représentation de  $\pi$  d'espace la somme de tous les sous-espaces  $G$ -stables  $V'$  de  $V$  tels que  $V'^J = 0$  (c'est-à-dire que  $\pi_J^\perp$  est la plus grande sous-représentation  $\pi'$  de  $\pi$  telle que  $\pi'_J = 0$ ). Si  $J$  est un bon sous-groupe ouvert compact de  $G$ , on note  $\mathfrak{R}_J(G)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G)$  formée des représentations  $\pi$  telles que  $\pi_J = \pi$ . Elle est stable par sous-quotient, et coïncide avec  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}(J)}(G)$  [BD, 3.9]: on a

$$\pi_J = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(J)} \pi_{\mathfrak{s}}, \quad \pi_J^\perp = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G) \setminus \mathfrak{S}(J)} \pi_{\mathfrak{s}}.$$

De plus (loc. cit.), le foncteur  $V \mapsto V^J$  est une équivalence entre  $\mathfrak{R}_J(G)$  et la catégorie des  $\mathcal{H}_J$ -modules (à gauche), de quasi-inverse le foncteur qui à un  $\mathcal{H}_J$ -module  $W$  associe le  $\mathcal{H}$ -module non dégénéré  $(\mathcal{H} * e_J) \otimes_{\mathcal{H}_J} W$ .

D'après [BD, 2.9], pour qu'un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  soit bon, il suffit qu'il vérifie les conditions (a) et (b) suivantes — notées (3.7.1) et (3.7.2) dans [BD, 3.7] —, pour tout sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  de composante de Levi  $M$ :

- (a) pour tout conjugué  $J'$  de  $J$  dans  $G$ , la classe de conjugaison de  $J'_P = (J' \cap P)/(J' \cap U_P)$  dans  $M$  ne dépend pas de  $P$  ni de  $J'$ ; où  $J'_P$  est identifié à un sous-groupe de  $M$  via l'isomorphisme canonique  $M \rightarrow P/U_P$ .
- (b) pour toute représentation  $(\pi, V)$  de  $G$ , la projection canonique  $V \rightarrow V_P = V/V(U_P)$  induit une application surjective  $V^J \rightarrow (V_P)^{J_P}$ ; où  $V(U_P)$  est le sous-espace de  $V$  engendré par les vecteurs  $\pi(u)(v) - v$ ,  $u \in U_P$ ,  $v \in V$ .

Soit  $I$  un sous-groupe d'Iwahori de  $G$ , c'est-à-dire le fixateur *connexe* d'une chambre de l'immeuble (affine) étendu de  $G$ . Rappelons que  $I$  est le groupe des points  $\sigma$ -rationnels d'un  $\sigma$ -schéma en groupes affine lisse connexe  $\mathfrak{J}$  de fibre générique  $G$ . Pour chaque entier  $n \geq 1$ , on note  $I^n$  le  $n$ -ième sous-groupe de congruence de  $I$ , c'est-à-dire le noyau de la projection canonique (réduction modulo  $\mathfrak{p}^n$ )  $\mathfrak{J}(\sigma) \rightarrow \mathfrak{J}(\sigma/\mathfrak{p}^n)$ . On pose aussi  $I^0 = I$ .

**PROPOSITION.** — *Pour  $n \geq 0$ ,  $I^n$  est un bon sous-groupe ouvert compact de  $G$ .*

*Démonstration.* — Le résultat est connu mais nous n’en avons trouvé aucune démonstration dans la littérature. Puisque  $G$  opère transitivement sur les chambres de son immeuble étendu, quitte à remplacer  $I$  par l’un de ses conjugués dans  $G$ , on peut supposer que la chambre fixée par  $I$  est contenue dans l’appartement associé à  $A_\circ$ . En ce cas  $I$  est en “bonne position” par rapport à la paire  $(P_\circ, M_\circ)$ , c’est-à-dire qu’il vérifie la décomposition triangulaire

$$I = (I \cap \overline{U}_\circ)(I \cap M_\circ)(I \cap U_\circ),$$

où  $\overline{U}_\circ$  est le radical unipotent du sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P_\circ$  par rapport à  $M_\circ$ . D’ailleurs (cf. [BT]) cette décomposition est une “décomposition schématique” au sens où il existe des  $\sigma$ -schémas en groupes affines lisses connexes  $\mathfrak{M}_\circ, \mathfrak{U}_\circ, \overline{\mathfrak{U}}_\circ$  de fibres génériques  $M_\circ, U_\circ, \overline{U}_\circ$  et de groupes des points  $\sigma$ -rationnels  $I \cap M_\circ, I \cap U_\circ, I \cap \overline{U}_\circ$  tels que l’application produit  $\overline{\mathfrak{U}}_\circ \times_\sigma \mathfrak{M}_\circ \times_\sigma \mathfrak{U}_\circ \rightarrow \mathfrak{I}$  est un isomorphisme de  $\sigma$ -schémas. Ici  $M_\circ, U_\circ, \overline{U}_\circ$  désignent les groupes algébriques définis sur  $F$  dont  $M_\circ, U_\circ, \overline{U}_\circ$  sont les groupes des points  $F$ -rationnels. On en déduit que pour chaque entier  $n \geq 1$ ,  $I^n$  est en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ .

Fixons un entier  $n \geq 0$  et posons  $J = I^n$ . Fixons aussi un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  de composante de Levi  $M$ . Notons  $U$  le radical unipotent de  $P$ , et  $\overline{U}$  le radical unipotent du sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P$  par rapport à  $M$ .

Supposons pour commencer que  $M$  contient  $M_\circ$ . Soit  $g \in G$  tel que  ${}^gP = gPg^{-1}$  contient  $P_\circ$ . Rappelons que  $A_\circ$  est un tore déployé maximal de  $G$ . Puisque  $A_\circ$  et  ${}^{g^{-1}}A_\circ$  sont contenus dans  $P$ , il existe un  $p \in P$  tel que  ${}^{g^{-1}}A_\circ = {}^pA_\circ$ . Alors  $x = gp$  appartient à  $\mathcal{N}_\circ = N_G(A_\circ)$ , et l’on a  ${}^gP = {}^xP$ . Puisque  $x$  stabilise l’appartement de l’immeuble étendu de  $G$  associé à  $A_\circ$ , la chambre fixée par  ${}^xI$  est encore dans cet appartement, par conséquent  ${}^xJ$  est en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ , donc aussi par rapport à  $(P', M_{P'})$  pour tout  $P' \in \mathcal{P}(G)$ . Puisque  $P' = {}^xP \in \mathcal{P}(G)$  et  ${}^xM \supset {}^xM_\circ = M_\circ$ , on a  $M_{P'} = {}^xM$ , d’où

$${}^xJ = ({}^xJ \cap {}^x\overline{U})({}^xJ \cap {}^xM)({}^xJ \cap {}^xU).$$

En conjuguant par  $x^{-1}$ , on obtient la décomposition triangulaire

$$(*) \quad J = (J \cap \overline{U})(J \cap M)(J \cap U).$$

D’après [BD, 3.5.2], la propriété (\*) implique la condition **(b)** pour la paire  $(P, M)$ . Quant à la condition **(a)**, soit  $J' = {}^{g'}J$  pour un  $g' \in G$ . Puisque  $P_\circ \subset {}^xP$  pour un  $x \in \mathcal{N}_\circ$ , la décomposition d’Iwasawa  $G = P_\circ \mathcal{N}_\circ I$  implique la décomposition  $G = P \mathcal{N}_\circ I$ . Comme par ailleurs  $I$  normalise  $J$ , on peut supposer que  $g' = py$  pour un  $p \in P$  et un  $y \in \mathcal{N}_\circ$ . Ainsi  $J' \cap P = {}^p({}^yJ \cap P)$  et  $J'_P$  est conjugué dans  $M$  à  $({}^yJ)_P$ . Or le groupe  ${}^yJ$  est en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ , par conséquent lui aussi vérifie (\*). En particulier on a la décomposition

$${}^yJ \cap P = ({}^yJ \cap M)({}^yJ \cap U),$$

laquelle implique l’égalité  $({}^yJ)_P = {}^yJ \cap M$ . Par récurrence sur la longueur des éléments de  $W_G = \mathcal{N}_\circ/M_\circ$ , on en déduit comme dans la démonstration du lemme 1.3.2 de [L1] qu’il existe un élément  $y_M \in N_M(A_\circ)$  tel que  ${}^yJ \cap M = {}^{y_M}(J \cap M)$ . Cela prouve que la condition **(a)** est vérifiée.

Passons au cas général: on ne suppose plus que  $M$  contient  $M_\circ$ . On procède alors exactement comme dans les démonstrations des lemmes 1.3.2 et 1.3.3 de [L1].  $\square$

**REMARQUE.** — On suppose toujours que le groupe  $I$  est en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ . Le groupe  $\theta(I)$  est un autre sous-groupe d’Iwahori de  $G$ , et puisque  $\delta_1$  appartient

à  $M_\circ^{\natural}$ , il est lui aussi en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ : on a la décomposition triangulaire

$$\theta(I) = (\theta(I) \cap \overline{U}_\circ)(\theta(I) \cap M_\circ)(\theta(I) \cap U_\circ).$$

Par suite il existe un élément  $m_1 \in M_1$  tel que  $\theta(I) = m_1^{-1} I m_1$ . Quitte à remplacer  $\delta_1$  par  $m_1 \cdot \delta_1 \in M_\circ^{\natural}$ , on peut supposer  $\theta(I) = I$ . Alors  $\theta(I^n) = I^n$  pour chaque entier  $n \geq 0$ . ■

D'après la remarque, on peut supposer vérifiée l'hypothèse suivante.

**HYPOTHÈSE.** — *On suppose de plus que le point-base  $\delta_1 \in M_\circ^{\natural}$  est choisi de telle manière que le  $F$ -automorphisme  $\theta = \text{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(\delta_1)$  de  $\mathbf{G}$  stabilise un sous-groupe d'Iwahori de  $G$  en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ .*

D'après la proposition et la remarque ci-dessus, il existe une base de voisinages de 1 dans  $G$  formée de sous-groupes ouverts compacts qui sont tous bons,  $\theta$ -stables et en bonne position par rapport à  $(P_\circ, M_\circ)$ . Cette propriété sera très utile pour la suite.

**2.21. “Bons” sous-espaces tordus ouverts compacts de  $G^{\natural}$ .** — Un sous-espace tordu ouvert compact  $J^{\natural}$  de  $G^{\natural}$  est dit “bon” si le sous-groupe ouvert compact de  $G$  sous-jacent à  $J^{\natural}$  est bon. D'après 2.20, il existe des bons sous-espaces tordus ouverts compacts de  $G^{\natural}$  aussi petits que l'on veut.

Soit  $J^{\natural} = J \cdot \delta$  un bon sous-espace ouvert compact de  $G^{\natural}$  tel que  $\omega|_J = 1$ . Si  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ , puisque

$$V^J = \pi(e_J)(V) = \Pi(e_{J^{\natural}})(V) = \Pi(\delta)(V^J),$$

la décomposition de  $V$  en  $V = V_J \oplus V_J^{\perp}$  (cf. 2.20) est  $G^{\natural}$ -stable: pour  $g \in G$  et  $v \in V$ , on a

$$\Pi(g \cdot \delta) \circ \pi(e_J)(v) = \pi(g) \circ \Pi(\delta) \circ \pi(e_J)(v) = \pi(g) \circ \Pi(e_{J^{\natural}})(v).$$

En d'autres termes,  $\Pi$  se décompose en

$$\Pi = \Pi_J \oplus \Pi_J^{\perp},$$

où  $\Pi_J$  est la restriction de  $\Pi$  sur  $V_J$  et  $\Pi_J^{\perp}$  la restriction de  $\Pi$  sur  $V_J^{\perp}$ . On note  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G, \omega)$  formée des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  telles que  $\Pi_J = \Pi$ . Puisque le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  envoie  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  dans  $\mathfrak{R}_J(G)$ , la catégorie  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  est stable par sous-quotients.

Posons  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(J)$ . C'est une partie (finie)  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\mathfrak{B}(G)$ , et la catégorie  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  coïncide avec  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$ . De plus, le foncteur  $V \mapsto V^J$  est une équivalence entre  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  et la catégorie des  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -modules non dégénérés. En effet, pour un  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module non dégénéré  $W$ , l'espace  $V = (\mathcal{H} * e_J) \otimes_{\mathcal{H}_J} W$  est un  $\mathcal{H}$ -module non dégénéré, tel que  $V^J = W$  et  $V_J = V$ . Il définit donc une représentation de  $G$ , disons  $\pi$ . Pour  $g \in G$  et  $v \in V$  de la forme  $v = (f * e_J) \otimes w$ , où  $f \in \mathcal{H}$  et  $w \in W$ , on pose

$$\Pi(g \cdot \delta)(v) = \pi(g) \circ \Pi(\delta)(v), \quad \Pi(\delta)(v) = ({}^\tau(\omega^{-1} f) * e_J) \otimes w;$$

où l'on a posé  ${}^\tau f' = f' \circ \tau^{-1}$ ,  $\tau = \text{Int}_{\mathbf{G}^{\natural}}(\delta)$ . Notant  ${}_g f$  la fonction  $x \mapsto f(g^{-1}x)$ , on a

$$\begin{aligned} \Pi(\delta) \circ \pi(g)(v) &= \Pi(\delta)({}_g f * e_J \otimes w) \\ &= {}^\tau(\omega^{-1} {}_g f) * e_J \otimes w \\ &= \omega^{-1}(g) \pi(\tau(g)) \circ \Pi(\delta)(v) = \omega^{-1}(g) \Pi(\delta \cdot g)(v). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une  $\omega$ -représentation  $(\Pi, V)$  de  $G^{\natural}$ , telle que  $\Pi^\circ = \pi$ . Puisque le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^\circ$  est fidèle, cela définit un quasi-inverse du foncteur  $V \mapsto V^J$  entre  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)$  et la catégorie des  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -modules non dégénérés.

**NOTATION.** — Soit  $\mathbf{J}(G^{\natural}, \omega)$  l'ensemble des bons sous-espaces ouverts compacts  $J^{\natural}$  de  $G^{\natural}$  tels que  $\omega$  est trivial sur  $J$ , et soit  $\mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts  $J$  de  $G$  tels que  $J$  est le groupe sous-jacent à un élément  $J^{\natural}$  de  $\mathbf{J}(G^{\natural}, \omega)$ .

D'après 2.20, si  $I$  est un sous-groupe d'Iwahori de  $G^{\natural}$  normalisé par  $\delta_1$ , notant  $n_0$  le plus petit entier  $\geq 0$  tel que  $\omega|_{I^{n_0}} = 1$ , on a l'inclusion

$$\{I^n : n \geq n_0\} \subset \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G).$$

En particulier,  $\mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  est une base de voisinages de 1 dans  $G$ .

**2.22.  $(H^{\natural}, \omega, B)$ -modules admissibles.** — La représentation  $i_P^G(\rho_{B_P})$  de  $G$  introduite en 2.17 est un  $(G, B_P)$ -module admissible au sens de [BD], c'est-à-dire un  $B_P$ -module  $V$  muni d'une représentation  $\pi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$  telle que l'action de  $G$  sur  $V$  commute à celle de  $B_P$ , vérifiant la condition d'admissibilité: pour tout sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$ , le  $B_P$ -module  $V^J$  est projectif et de type fini. Plus généralement, on a:

**DÉFINITION.** — Soit  $H^{\natural}$  un espace topologique tordu de groupe sous-jacent  $H$  localement profini, et soit  $\mathfrak{X}$  une variété algébrique affine sur  $\mathbb{C}$  d'algèbre affine  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ . On appelle  $(H^{\natural}, \omega, B)$ -module admissible la donnée d'un  $B$ -module  $V$  et d'une  $\omega$ -représentation de  $H^{\natural}$  d'espace  $V$  telle que l'action de  $H^{\natural}$  sur  $V$  commute à celle de  $B$ , vérifiant la condition d'admissibilité: pour tout sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $H$ , le  $B$ -module  $V^J$  est projectif de type fini — i.e. le  $(H, B)$ -module sous-jacent est admissible.

**REMARQUE.** — Si  $H^{\natural}$  vérifie la propriété  $(P_1)$  de [L2, A.4], c'est-à-dire s'il existe une famille de sous-espaces tordus ouverts compacts de  $H^{\natural}$  telle que les sous-groupes de  $H$  sous-jacents aux éléments de cette famille forment une base de voisinage de 1 dans  $H$ , alors la condition d'admissibilité est équivalente à: pour tout sous-espace tordu ouvert compact  $J^{\natural}$  de  $H^{\natural}$ , le  $B$ -module  $V^{J^{\natural}}$  est projectif de type fini. ■

Soit  $V$  un  $(H^{\natural}, \omega, B)$ -module admissible, où  $B$  est l'algèbre affine d'une variété algébrique affine  $\mathfrak{X}$  sur  $\mathbb{C}$  et  $H^{\natural}$  opère sur  $V$  via une  $\omega$ -représentation  $\Pi$ . Tout morphisme de variétés algébriques  $u : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  définit comme suit un  $(H^{\natural}, \omega, B')$ -module admissible  $V_u = V \otimes_{B, \tilde{u}} B'$ , où  $B' = \mathbb{C}[\mathfrak{X}']$  et  $\tilde{u} : B' \rightarrow B$  est le morphisme d'algèbres correspondant à  $u$ . En particulier pour tout point  $x \in \mathfrak{X}$ , vu comme un morphisme  $x : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}$ , la spécialisation  $V_x = V \otimes_{B, \tilde{x}} \mathbb{C}$  de  $V$  en  $x$  est une  $\omega$ -représentation de  $H^{\natural}$ , notée  $\Pi_x$ , et la représentation sous-jacente  $\Pi_x^{\circ}$  de  $H$  est admissible et de longueur finie.

Soit  $P \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , et soit  $\Sigma$  une  $\omega$ -représentation de  $M_P^{\natural}$  telle que la représentation sous-jacente  $\Sigma^{\circ}$  de  $M_P$  est admissible. Rappelons que  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural})$  est un groupe algébrique affine, diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  (cf. la remarque 3 de 2.12). Notons  $B = B_{P^{\natural}}$  l'algèbre affine  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural})]$ , et  $\varphi_{P^{\natural}} : M_P^{\natural} \rightarrow B$  le "caractère universel" donné par l'évaluation:

$$\varphi_{P^{\natural}}(\delta)(\Xi) = \Xi(\delta), \quad \delta \in M_P^{\natural}, \Xi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}).$$

On définit comme en 2.17 une  $\omega$ -représentation  $\Sigma_B = \Sigma \otimes \varphi_{P^{\natural}}$  de  $M_P^{\natural}$ : l'espace de  $\Sigma_B$  est  $W = V_{\Sigma} \otimes_{\mathbb{C}} B$ , et pour  $\delta \in M_P^{\natural}$ ,  $v \in W$  et  $b \in B$ , on pose

$$\Sigma_B(\delta)(v \otimes b) = \Sigma(\delta)(v) \otimes \varphi_{P^{\natural}}(\delta)b.$$

Posons

$$(\Pi, V) = {}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Sigma_B, W).$$

C'est une  $\omega$ -représentation de  $G$ . L'anneau  $B$  opère naturellement sur l'espace  $V$ , ce qui le munit d'une structure de  $(G^\natural, \omega, B)$ -module admissible. Pour  $\Xi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$  correspondant à  $u : B \rightarrow \mathbb{C}$ , la  $\omega$ -représentation  $\Pi_\Xi$  de  $G^\natural$  d'espace  $V_\Xi = V \otimes_{B,u} \mathbb{C}$  est isomorphe à  ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)$ .

Soit une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ . Rappelons qu'on a noté  $\Phi_\phi$  l'élément de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*$  défini par

$$\Phi_\phi(\Pi') = \Theta_{\Pi'}(\phi), \quad \Pi' \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega).$$

Soit  $J^\natural$  un sous-espace tordu ouvert compact de  $G^\natural$ , de groupe sous-jacent  $J$ , tel que  $\omega|_J = 1$  et  $\phi \in \mathcal{H}_J^\natural$ . L'opérateur  $\Pi(\phi)$  est un  $B$ -endomorphisme du sous-espace  $V^J = V^{J^\natural}$  de  $V$  formé des vecteurs fixés par  $J$ . Puisque  $V^J$  est un  $B$ -module projectif de type fini, on dispose d'une application trace  $\text{tr}_B : \text{End}_B(V^J) \rightarrow B$ . On pose

$$b = \text{tr}_B(\Pi(\phi)) \in B.$$

Pour  $\Xi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$  correspondant à  $u : B \rightarrow \mathbb{C}$ , l'endomorphisme  $\Pi(\phi) \otimes_{B,u} \mathbb{C}$  de

$$(V \otimes_{B,u} \mathbb{C})^J = V^J \otimes_{B,u} \mathbb{C}$$

est isomorphe à  ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)(\phi)$ , par conséquent

$$b(\Xi) = \Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma)).$$

En d'autres termes, l'application  $\Xi \mapsto \Phi_\phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \cdot \Sigma))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$ .

### 3. Énoncé du résultat

**3.1. Le théorème principal.** — Soit  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*$  formé des formes linéaires  $\Phi$  qui vérifient les conditions (i) et (ii) suivantes:

- (i) Il existe un ensemble fini  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}(G)$  tel que  $\Phi(\Pi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\beta_{G^\natural, \omega}(\Pi) \notin \mathfrak{S}$ .
- (ii) Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \Sigma))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$ .

**REMARQUE 1.** — D'après [BD, 3.7 et 3.9], la condition (i) est équivalente à la condition (i') suivante: *il existe un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  tel que  $\Phi(\Pi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $V_\Pi^J = 0$* . D'ailleurs d'après 2.8 cette condition (i') est équivalente à la condition suivante: *il existe un sous-espace tordu ouvert compact  $J^\natural$  de  $G^\natural$  tel que  $\Phi(\Pi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $V_\Pi^{J^\natural} = 0$* .

Dans la condition (ii), on peut bien sûr remplacer le groupe algébrique affine  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)$  par sa composante neutre  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^\natural)$ . Notons  $B_{P^\natural} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^\natural)]$  l'algèbre affine du tore  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^\natural)$ , et soit  $B_{P^\natural}^*$  le sous-espace vectoriel de  $B_{P^\natural}$  formé des  $b \in B_{P^\natural}$  tels que  $b(\lambda \Xi) = \lambda b(\Xi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  et tout  $\Xi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^\natural)$ . La condition (ii) est équivalente à la condition suivante: *pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$ , l'application  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^\natural) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Xi \mapsto \Phi({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi \Sigma))$  est une fonction dans  $B_{P^\natural}^*$ .* ■

Soit aussi  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  formé des  $\Phi$  de la forme  $\Phi_\phi$  pour une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ .

Soit enfin  $[\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H}]_\omega$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}^\natural$  engendré par les fonctions de la forme  $\phi * f - \omega f * \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}$ . On note  $\overline{\mathcal{H}}_\omega^\natural = \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  l'espace quotient  $\mathcal{H}^\natural / [\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H}]_\omega$ .

En d'autres termes,  $\overline{\mathcal{H}}_\omega^\natural$  est le quotient de l'espace  $\mathcal{H}_\omega^\natural = \mathcal{H}(G^\natural, \omega)$  introduit en 2.8 (variante) par le sous-espace  $[\mathcal{H}_\omega^\natural, \mathcal{H}]$  engendré par les commutateurs  $\phi \cdot f - f \cdot \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{H}_\omega^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}$ .

**THÉORÈME.** — *L'application  $\mathcal{H}(G^\natural) \mapsto \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ ,  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{F}(G^\natural, \omega).$$

D'après 2.22, on a l'inclusion  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega) \subset \mathcal{F}(G^\natural, \omega)$ . Si  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , pour  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}$ , on a  $\Theta_\Pi(\phi * f) = \Theta_\Pi(\omega f * \phi)$  et donc  $\Theta_\Pi(\phi * f - \omega f * \phi) = 0$ . Ainsi, la transformée de Fourier  $\mathcal{H}^\natural \mapsto \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ ,  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  induit bien une application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{F}(G^\natural, \omega),$$

et il s'agit de prouver qu'elle est surjective (théorème de Paley–Wiener) et injective (théorème de densité spectrale). La suite de l'article est consacrée à la démonstration de ces deux résultats. Par récurrence sur la dimension des sous-espaces paraboliques de  $G^\natural$ , on se ramène dans la section 4 à démontrer un théorème analogue (4.8) sur la partie “discrète” de la théorie. La surjectivité de l'application du théorème de 4.8 est prouvée dans la section 5, tandis que son injectivité est prouvée dans la section 6.

On peut voir  $\mathcal{H}^\natural$  comme un  $\mathcal{H}$ -module non dégénéré (à gauche). Pour chaque élément  $z$  de  $\mathfrak{Z}(G)$ , on a donc un élément  $z_{\mathfrak{Z}(G)} \in \text{End}_G(\mathcal{H}^\natural)$ . Reprenons le  $\mathbb{C}$ -isomorphisme  $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\omega^\natural$  de l'exemple de 2.8 (rappelons que  $\mathcal{H}_\omega^\natural = \mathcal{H}^\natural$  comme  $\mathcal{H}$ -module à gauche). Pour  $f, h, f' \in \mathcal{H}$ , il vérifie  $u(f * h * f') = f \cdot u(h) \cdot \tau(f')$ , où l'on a posé  $\tau(f') = \omega f'^\theta$ . On a donc

$$u \circ z_{\mathfrak{Z}(G)} = z_{\mathfrak{Z}(G)} \circ u, \quad z \in \mathfrak{Z}(G).$$

En particulier pour  $f, f' \in \mathcal{H}$  et  $\phi \in \mathcal{H}_\omega^\natural$ , posant  $h = u^{-1}(\phi)$ , on a

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{Z}(G)}(f \cdot \phi \cdot f') &= z_{\mathfrak{Z}(G)} \circ u(f * h * \tau^{-1}(f')) \\ &= u \circ z_{\mathfrak{Z}(G)}(f * h * \tau^{-1}(f')) \\ &= u(f * z_{\mathfrak{Z}(G)}(h) * \tau^{-1}(f')) = f \cdot z_{\mathfrak{Z}(G)}(\phi) \cdot f'. \end{aligned}$$

L'application  $z \mapsto z_{\mathfrak{Z}(G)}$  est donc un isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\text{End}_{\mathfrak{Z}(G) \times \mathfrak{Z}(G)^{\text{op}}}(\mathcal{H}_\omega^\natural)$ . De plus  $[\mathcal{H}_\omega^\natural, \mathcal{H}]$  est un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{Z}(G)$ -stable de  $\mathcal{H}_\omega^\natural$ , i.e.  $[\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H}]_\omega$  est un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{Z}(G)$ -stable de  $\mathcal{H}^\natural$ .

L'anneau  $\mathfrak{Z}(G)$  opère sur l'espace  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ : pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\Phi \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ , on note  $z \cdot \Phi$  l'élément de  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$  défini par

$$(z \cdot \Phi)(\Pi) = f_z(\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi))\Phi(\Pi), \quad \Pi \in \text{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega).$$

**LEMME.** — *La transformée de Fourier  $\mathcal{H}(G^\natural) \mapsto \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ ,  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  est un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules.*

*Démonstration.* — D'après [BD, 1.5], le centre  $\mathfrak{Z}(G)$  de  $\mathfrak{R}(G)$  est la limite projective des centres  $Z(e * \mathcal{H} * e)$  où  $e$  parcourt les idempotents de  $\mathcal{H}$ , pour les morphismes de transitions

$$Z(e' * \mathcal{H} * e') \rightarrow Z(e * \mathcal{H} * e), \quad h \mapsto h * e \quad \text{si } e * \mathcal{H} * e \subset e' * \mathcal{H} * e'.$$

En d'autres termes, tout élément  $z$  de  $\mathfrak{Z}(G)$  est la donnée, pour chaque idempotent  $e$  de  $\mathcal{H}$ , d'un élément  $z(e) \in Z(e * \mathcal{H} * e)$ , avec la relation  $z(e) = z(e') * e$  si  $e = e * e'$ . L'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur le  $\mathcal{H}$ -module (à gauche)  $\mathcal{H}$  est donnée par (pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $f \in \mathcal{H}$ ):

$$z \cdot f = z(e) * f \quad \text{si } e * f = f$$

De même l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\mathcal{H}^\natural$  est donnée par (pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\phi \in \mathcal{H}^\natural$ ):

$$z \cdot \phi = z(e) * \phi \quad \text{si } e * \phi = \phi.$$

Si  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$ , pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$ , on a

$$\Pi(z \cdot \phi) = \Pi(z(e) * \phi) = \Pi^{\circ}(z(e)) \circ \Pi(\phi) = z_{\Pi^{\circ}} \circ \Pi(\phi),$$

où  $\Pi^{\circ}(z(e))$  est l'opérateur  $\int_G z(e)(g)\Pi^{\circ}(g)dg$  sur l'espace de  $\Pi$ . Si de plus  $\Pi$  est  $G$ -irréductible, on a  $z_{\Pi^{\circ}} = f_z(\theta_G(\Pi^{\circ}))\text{id}_{V_{\Pi}}$ . D'où le lemme.  $\square$

**REMARQUE 2.** — Le lemme ci-dessus ne dépend pas du théorème. Joint au théorème, il implique en particulier que le sous-espace  $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$  est  $\mathfrak{Z}(G)$ -stable.  $\blacksquare$

**3.2. Variante “tempérée” du théorème.** — Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ ,  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  est un espace principal homogène sous  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural})$ , donc en particulier une variété algébrique affine complexe. Comme dans le cas non tordu, on peut remplacer la condition (ii) du théorème de 3.1 par la condition (ii') suivante: *pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C},t}(M_P^{\natural}, \omega_u)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi\Sigma))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$ .* Cette affirmation résulte du lemme suivant.

**LEMME.** — *Soit  $\Phi \in \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$  tel que pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  et tout  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C},t}(M_P^{\natural}, \omega_u)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi\Sigma))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$ . Alors pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  et tout  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi\Sigma))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural})$ .*

*Démonstration.* — D'après le lemme 1 de 2.14, il suffit de montrer que pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  et tout triplet de Langlands  $\mu'$  pour  $(M_P^{\natural}, \omega)$ , notant  $\tilde{\Sigma}_{\mu'}$  la  $\omega$ -représentation de  $M_P^{\natural}$  associée à  $\mu'$  et  $\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C},\mu'}$  son image dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C},\mu'}))$  est une fonction régulière sur la variété  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural})$ . Le triplet  $\mu'$  s'écrit  $\mu' = (Q^{\natural} \cap M_P^{\natural}, \Sigma', \Xi')$  où  $Q^{\natural}$  est un élément de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  tel que  $Q^{\natural} \subset P^{\natural}$ ,  $\Sigma'$  est une  $\omega_u$ -représentation  $M_Q$ -irréductible tempérée de  $M_Q^{\natural}$ , et  $\Xi'$  est un élément de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, |\omega|)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\Xi'^{\circ}$  est positif par rapport à  $U_Q \cap M_P$ . On a (par définition)  $\tilde{\Sigma}_{\mu'} = \omega i_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Xi' \cdot \Sigma')$  et

$$\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi \cdot \tilde{\Sigma}_{\mu'}) = \omega i_{Q^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi|_{M_Q^{\natural}} \Xi' \cdot \Sigma'), \quad \Xi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}).$$

D'où le résultat, puisque l'application

$$\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, |\omega|), \quad \Xi \mapsto \Xi|_{M_Q^{\natural}} \Xi'$$

est un morphisme algébrique.  $\square$

**REMARQUE.** — Supposons le caractère  $\omega$  unitaire (i.e.  $|\omega| = 1$ ). Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , notons  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},u}^0(M_P^{\natural})$  le sous-groupe de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural})$  formé des éléments unitaires. Rappelons que  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural})$  est un sous-ensemble de  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}) = \text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \xi = 1)$ , et qu'une représentation de  $M_P^{\natural}$  est dite unitaire si son espace est muni d'un produit scalaire hermitien  $M_P^{\natural}$ -invariant (cf. 2.13). Alors on peut, comme le fait Waldspurger [W, 6.1], remplacer la condition (ii) du théorème de 3.1 par la condition (ii') suivante: *pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C},t}(M_P^{\natural}, \omega)$ , l'application  $\Xi \mapsto \Phi(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Xi\Sigma))$  est une “fonction de Paley–Wiener” sur  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},u}^0(M_P^{\natural})$ .* Pour la notion de fonction de Paley–Wiener, on renvoie à [W, 2.6] et 4.3.  $\blacksquare$

**3.3. Variante “finie” du théorème.** — Pour un sous-espace tordu ouvert compact  $K^\natural = K \cdot \delta$  de  $G$  tel que  $\omega$  est trivial sur  $K$ , on note  $[\mathcal{H}_K^\natural, \mathcal{H}_K]_\omega$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}_K^\natural = \mathcal{H}_K(G^\natural)$  engendré par les fonctions de la forme  $\phi * f - \omega f * \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{H}_K^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}_K$ , et l’on note  $\overline{\mathcal{H}}_{K,\omega}^\natural = \overline{\mathcal{H}}_K(G^\natural, \omega)$  l’espace quotient  $\mathcal{H}_K^\natural / [\mathcal{H}_K^\natural, \mathcal{H}_K]_\omega$ . En d’autres termes, notant  $\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural = \mathcal{H}_K(G^\natural, \omega)$  le  $\mathcal{H}_K$ -bimodule défini comme en 2.8 (variante) en remplaçant la paire  $(\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H})$  par la paire  $(\mathcal{H}_K^\natural, \mathcal{H}_K)$ , l’espace  $\overline{\mathcal{H}}_{K,\omega}^\natural$  est le quotient de  $\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural$  par le sous-espace  $[\mathcal{H}_{K,\omega}^\natural, \mathcal{H}_K]$  engendré par les commutateurs  $\phi \cdot f - f \cdot \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{H}_{K,\omega}^\natural$  et  $f \in \mathcal{H}_K$ .

D’autre part on note  $\mathcal{F}_K(G^\natural, \omega)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  formé des éléments  $\Phi$  telles que  $\Phi(\Pi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^K = 0$ , où  $\Pi^K$  désigne la classe d’isomorphisme du  $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -module  $\mathcal{H}_K$ -simple associé à  $\Pi$  (cf. 2.8).

Rappelons que  $\mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  est l’ensemble des sous-groupes ouverts compacts  $J$  de  $G$  tels que  $J$  est “bon” et normalisé par un élément de  $G^\natural$ , et  $\omega|_J = 1$

**THÉORÈME.** — *Pour tout  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , l’application  $\mathcal{H}(G^\natural, J) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*$ ,  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{F}_J(G^\natural, \omega).$$

D’après la remarque 1 de 3.1, l’espace  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  est la limite inductive des sous-espaces  $\mathcal{F}_J(G^\natural, \omega)$  pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ . D’autre part, pour  $J, J' \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  tels que  $J' \subset J$ , on verra plus loin (6.7) que l’inclusion  $\mathcal{H}_J(G^\natural, \omega) \subset \mathcal{H}_{J'}(G^\natural, \omega)$  induit par passage aux quotients une application injective ([K2, lemma 3.2] dans le cas non tordu)

$$\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega) \subset \overline{\mathcal{H}}_{J'}(G^\natural, \omega).$$

En d’autres termes, on a l’égalité

$$(*) \quad [\mathcal{H}_{J',\omega}^\natural, \mathcal{H}_{J'}] \cap \mathcal{H}_J^\natural = [\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural, \mathcal{H}_J].$$

D’ailleurs cette égalité est contenue dans le théorème ci-dessus. Par conséquent si le théorème ci-dessus est vrai, l’espace  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  est la limite inductive des sous-espaces  $\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega)$  pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G^\natural)$ , et par passage aux limites inductives on en déduit le théorème de 3.1.

**REMARQUE.** — Nous n’en aurons pas besoin par la suite, mais signalons quand même que la réciproque est vraie aussi: le théorème de 3.1 implique le théorème ci-dessus. En effet d’après 2.21, pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , on a la décomposition en produit de catégories abéliennes

$$\mathfrak{R}(G^\natural, \omega) = \mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega) \times \mathfrak{R}_J^\perp(G^\natural, \omega),$$

où  $\mathfrak{R}_J^\perp(G^\natural, \omega)$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  engendrée par les  $\omega$ -représentations  $\Pi_J^\perp$  de  $G^\natural$  pour  $\Pi$  parcourant les objets de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$ . D’où la décomposition

$$\mathcal{F}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}_J(G^\natural, \omega) \oplus \mathcal{F}_J^\perp(G^\natural, \omega),$$

où  $\mathcal{F}_J^\perp(G^\natural, \omega)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  formé des éléments  $\Phi$  tels que  $\Phi(\Pi) = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^J \neq 0$ . Via l’isomorphisme  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega) \simeq \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  de 6.7, l’espace vectoriel  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  admet lui aussi une décomposition

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega) \oplus \overline{\mathcal{H}}_J^\perp(G^\natural, \omega)$$

qui, par définition, vérifie  $\Theta_\Pi|_{\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega)} = 0$  pour tout  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^J \neq 0$ . On en déduit que si le théorème de 3.1 est vrai alors le théorème ci-dessus l’est aussi. ■

#### 4. Réduction à la partie “discrète” de la théorie

**4.1. Le “lemme géométrique”.** — Rappelons que l’on a posé  $W_G = N_G(A_\circ)/M_\circ$ . Pour chaque  $w \in W_G$ , on fixe un représentant  $n_w$  de  $w$  dans  $N_G(A_\circ)$ . De la même manière, pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , on pose

$$W_{M_P} = N_{M_P}(A_\circ)/M_\circ \subset W_G.$$

Pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$ , on pose

$$W_G(P, Q) = \{w \in W_G : w(M_P) = M_Q\}$$

et

$$W_G^{P,Q} = \{w \in W_G : w(M_P \cap P_\circ) \subset P_\circ, w^{-1}(M_Q \cap P_\circ) \subset P_\circ\};$$

où, pour toute partie  $X$  de  $G$  normalisée par  $M_\circ$ , on a posé  $w(X) = \text{Int}_G(n_w)(X)$ . D’après [BZ2, 2.11],  $W_G^{P,Q}$  est un système de représentants des doubles classes  $W_{M_Q} \backslash W_G / W_{M_P}$  dans  $W_G$ . Notons que  $W_G(P, Q) \cap W_G^{P,Q}$  est un système de représentants des classes de

$$W_{M_Q} \backslash W_G(P, Q) = W_G(P, Q) / W_{M_P}.$$

Pour  $w \in W_G^{P,Q}$ , on pose

$$M_{P,\bar{w}} = M_P \cap w^{-1}(M_Q), \quad M_{Q,w} = w(M_{P,\bar{w}}) = w(M_P) \cap M_Q.$$

Ces groupes sont les composantes de Levi standard des sous-groupes paraboliques standard  $P_{\bar{w}}$  et  $Q_w$  de  $G$  définis par

$$P_{\bar{w}} = M_{P,\bar{w}} U_\circ, \quad Q_w = M_{Q,w} U_\circ.$$

Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , le  $F$ -automorphisme  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$  de  $G^\natural$  opère sur  $W_{M_P}$ . On pose

$$W_{M_P}^\natural = \{w \in W_{M_P} : \theta(w) = w\}.$$

C’est un sous-groupe de  $W_{M_P}$  qui ne dépend pas du choix de  $\delta_1 \in M_\circ^\natural$ . D’autre part, pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ ,  $\theta$  opère sur  $W_G(P, Q)$  et sur  $W_G^{P,Q}$ , et l’on pose

$$W_{G^\natural}(P, Q) = \{w \in W_G(P, Q) : \theta(w) = w\}, \quad W_{G^\natural}^{P,Q} = \{w \in W_G^{P,Q} : \theta(w) = w\}.$$

On a donc

$$W_{G^\natural}(P, Q) = W_{G^\natural} \cap W_G(P, Q), \quad W_{G^\natural}^{P,Q} = W_{G^\natural} \cap W_G^{P,Q},$$

et tout comme  $W_{G^\natural}$ , ces groupes ne dépendent pas du choix de  $\delta_1 \in M_\circ^\natural$ . De plus,  $W_{G^\natural}^{P,Q}$  s’identifie au sous-ensemble  $[W_{M_Q} \backslash W_G / W_{M_P}]^\theta$  de  $W_{M_Q} \backslash W_G / W_{M_P}$  formé des doubles classes qui sont stabilisées par  $\theta$ . Pour  $w \in W_{G^\natural}^{P,Q}$ , les groupes  $P_{\bar{w}}$  et  $Q_w$  sont  $\theta$ -stables, donc définissent des sous-espaces paraboliques standard  $P_{\bar{w}} \cdot \delta_1$  et  $Q_w \cdot \delta_1$  de  $G^\natural$ , notés  $P_{\bar{w}}^\natural$  et  $Q_w^\natural$ . Leurs composantes de Levi standard,  $M_{P,\bar{w}}^\natural = M_{P,\bar{w}} \cdot \delta_1$  et  $M_{Q,w}^\natural = M_{Q,w} \cdot \delta_1$ , vérifient

$$w(M_{P,\bar{w}}^\natural) = M_{Q,w}^\natural;$$

où, pour toute partie  $Y$  de  $G^\natural$  normalisée par  $M_\circ$ , on a posé  $w(Y) = n_w \cdot Y \cdot n_w^{-1}$ . Soit

$$\mathbf{f}(w) = {}^\omega \mathbf{f}_{P^\natural}^{Q^\natural}(w) : \mathfrak{A}(M_{P^\natural}^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{A}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)$$

le foncteur défini par

$$\mathbf{f}(w) = {}^\omega \mathbf{i}_{Q_w^\natural}^{P_{\bar{w}}^\natural} \circ (\Sigma \rightarrow {}^{n_w} \Sigma) \circ {}^\omega \mathbf{r}_{P_{\bar{w}}^\natural}^{Q_w^\natural};$$

où  ${}^{n_w} \Sigma(\delta) = \Sigma(n_w^{-1} \cdot \delta \cdot n_w)$ ,  $\delta \in M_{P,\bar{w}}^\natural$ . Il induit un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathbf{f}_{\mathbb{C}}(w) = {}^\omega \mathbf{f}_{P^\natural, \mathbb{C}}^{Q^\natural}(w) : \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(M_{P^\natural}^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)$$

qui ne dépend pas du choix du représentant  $n_w$  de  $w$  dans  $N_G(A_\circ)$ .

Soit aussi

$$\mathbf{h} = {}^\omega \mathbf{h}_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega)$$

le foncteur défini par

$$\mathbf{h} = {}^\omega r_{G^\natural}^{Q^\natural} \circ {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}.$$

Il induit un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathbf{h}_{\mathbb{C}} = {}^\omega \mathbf{h}_{P^\natural, \mathbb{C}}^{Q^\natural} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega).$$

**PROPOSITION.** — Pour  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$

$$\mathbf{h}_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \sum_w \mathbf{f}_{\mathbb{C}}(w)(\Sigma),$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^\natural}^{P, Q}$ .

*Démonstration.* — Dans le cas non tordu — i.e. pour  $\theta = \text{id}$  et  $\omega = 1$  —, on sait d'après [BZ2, 2.12] qu'il existe une filtration  $0 = h_0 \subset h_1 \subset \dots \subset h_k = h$  du foncteur

$$h = r_G^Q \circ i_P^G : \mathfrak{R}(M_P) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q)$$

telle que pour  $i = 1, \dots, k$ , le foncteur quotient  $h_i/h_{i-1} : \mathfrak{R}(M_P) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q)$  est isomorphe à

$$f(w_i) = i_{Q_{w_i}}^Q \circ (\sigma \rightarrow {}^{n_{w_i}} \sigma) \circ r_P^{P_{w_i}}$$

pour un  $w_i \in W_G^{P, Q}$ . Les  $w_i$  sont deux-à-deux distincts, et  $W_G^{P, Q} = \{w_i : i = 1, \dots, k\}$ . Précisément, soit  $w_1, \dots, w_k$  les éléments de  $W_G^{P, Q}$  ordonnés de telle manière que pour  $i = 1, \dots, k-1$ , on ait

$$l(w_i) \geq l(w_{i+1}),$$

où  $l : W_G \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  désigne la fonction longueur. Alors pour  $i = 1, \dots, k$ ,

$$X_i = \coprod_{j=1}^i P n_{w_j} Q$$

est ouvert dans  $G$  (et  $Q$ -invariant à droite). Rappelons que pour une représentation  $\sigma$  de  $M_P$ , la représentation  $\pi = i_P^G(\sigma)$  de  $G$  opère par translations à droite sur l'espace des fonctions  $\varphi : G \rightarrow V_\sigma$  vérifiant:

- $\varphi(mug) = \delta_P^{1/2}(m)\sigma(m)\varphi(g)$  pour  $m \in M_P$ ,  $u \in U_P$ ,  $g \in G$ ;
- il existe un sous-groupe ouvert compact  $K_\varphi$  de  $G$  tel que  $\varphi(gx) = \varphi(g)$  pour  $g \in G$ ,  $x \in K_\varphi$ .

Ici  $\delta_P : M_P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  désigne le caractère module habituel. Pour  $i = 1, \dots, k$ , on note  $V_\pi(X_i)$  le sous-espace ( $Q$ -stable) de  $V_\pi$  formé des fonctions  $\varphi : G \rightarrow V_\sigma$  à support dans  $X_i$ . Il définit une sous-représentation  $\pi_i$  de  $\pi|_Q$ , dont on peut prendre la restriction de Jacquet normalisée (d'espace le quotient de  $V_\pi(X_i)$  par le sous-espace engendré par les  $\pi_i(u)(v) - v$  pour  $v \in V_\pi(X_i)$  et  $u \in U_Q$ ): c'est une représentation de  $M_Q$ , que l'on note  $h_i(\sigma)$ . La filtration  $0 = h_0 \subset h_1 \subset \dots \subset h_k = h$  ainsi définie vérifie  $h_i/h_{i-1} \simeq f(w_i)$  [BZ2, 5.2].

Passons au cas tordu. Notons  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  les  $\theta$ -orbites dans  $W_G^{P, Q}$ . Puisque  $l \circ \theta = l$ , on peut supposer que les éléments de  $W_G^{P, Q}$  ont été ordonnés de telle manière que

$$\Omega_j = \{w_{i_{j-1}+1}, w_{i_{j-1}+2}, \dots, w_{i_j}\}, \quad j = 1, \dots, s \quad (i_0 = 0, i_s = k).$$

Soit  $\Sigma$  une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ , et soit  $\Pi = {}^\omega i_{P^\natural}^{Q^\natural}(\Sigma)$ . Posons  $\sigma = \Sigma^\circ$  et  $\pi = \Pi^\circ$ . On a  $\pi = i_P^G(\sigma)$ , et d'après [L2, 2.7], l'action de  $\Pi(\delta_1)$  sur  $V_\pi$  est donnée par

$$\Pi(\delta_1)(\varphi)(g) = \omega(\theta^{-1}(g))\Sigma(\delta_1)(\varphi(\theta^{-1}(g))), \quad \varphi \in V_\pi, g \in G.$$

Pour  $j = 1, \dots, s$ , puisque  $\theta(X_{i_j}) = X_{i_j}$ , le sous-espace  $V_j = V_\pi(X_{i_j})$  de  $V_\pi$  est stable sous l'action de  $\Pi(\delta_1)$ , donc définit une sous- $\omega$ -représentation  $\Pi_j$  de  $\Pi|_{Q^\natural}$  telle que  $\Pi_j^\circ = \pi_{i_j}$ . Comme dans le cas non tordu, on peut prendre la restriction de Jacquet normalisée de  $\Pi_j$  (cf. [L2, 5.10]): c'est une  $\omega$ -représentation de  $M_Q^\natural$ , que l'on note  $\mathbf{h}_j(\Sigma)$ . On obtient ainsi une filtration  $0 = \mathbf{h}_0 \subset \mathbf{h}_1 \subset \dots \subset \mathbf{h}_s = \mathbf{h}$  du foncteur  $\mathbf{h}$  qui vérifie  $\mathbf{h}_j^\circ = h_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Soit  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Notons  $\bar{\mathbf{h}}_j$  le foncteur quotient

$$\mathbf{h}_j/\mathbf{h}_{j-1} : \mathfrak{R}(M_P^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q^\natural, \omega).$$

Posons  $k_j = i_j - i_{j-1}$ . C'est le cardinal de  $\Omega_j$ . Pour  $a = 1, \dots, k_j$ , posons  $w_{j,a} = w_{i_{j-1}+a}$  et notons  $V_j(a)$  le sous-espace de  $V_j$  formé des fonctions  $\varphi : G \rightarrow V_\sigma$  à support dans

$$X_{j,a} = X_{i_{j-1}} \coprod Pn_{w_{j,a}}Q.$$

Quitte à réordonner l'orbite  $\Omega_j$ , on peut supposer que  $w_{j,a} = \theta^{a-1}(w_{j,1})$  et  $\theta^{k_j}(w_{j,1}) = w_{j,1}$ . L'automorphisme  $\Pi_j(\delta_1) = \Pi(\delta_1)|_{V_j}$  de  $V_j$  permute les  $V_j(a)$ : on a

$$\Pi_j(\delta_1)(V_j(a)) = V_j(a+1), \quad a = 1, \dots, k_{j-1}$$

et

$$\Pi_j(\delta_1)(V_j(k_j)) = V_j(1).$$

On distingue deux cas:  $k_j > 1$  et  $k_j = 1$ . Si  $k_j > 1$ , la  $\omega$ -représentation  $\Pi_j/\Pi_{j-1}$  de  $Q^\natural$  est dans l'image du foncteur  $\iota_{k_j}$  pour  $Q^\natural$  (cf. 2.5), par suite la  $\omega$ -représentation  $\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma)$  de  $M_Q^\natural$  est dans l'image du foncteur  $\iota_{k_j}$  pour  $M_Q^\natural$ . Si  $k_j = 1$ , i.e. si  $\theta(w_{i_j}) = w_{i_j}$ , la  $\omega$ -représentation  $\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma)$  de  $M_Q^\natural$  vérifie

$$\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma)^\circ = h_{i_j}(\sigma)/h_{i_j-1}(\sigma) \simeq f(w_{i_j})(\sigma) = \mathbf{f}(w_{i_j})(\Sigma)^\circ.$$

L'isomorphisme ci-dessus n'est pas vraiment canonique: il dépend du choix d'une mesure de Haar sur l'espace quotient  $(U_Q \cap w(P)) \backslash U_Q$ , où l'on a posé  $w = w_{i_j}$ . Fixons une telle mesure, disons  $d\bar{u}$ . Notons  $\alpha : V_\sigma \rightarrow r_P^{P\bar{w}}(V_\sigma)$  la projection canonique, et  $\beta : V_{\pi_{i_j}} \rightarrow V_{f(w)(\sigma)}$  l'opérateur défini par

$$\beta(\varphi)(m_Q) = \delta_Q^{1/2}(m) \int_{U_Q \cap w(P) \backslash U_Q} \alpha(\varphi(n_w^{-1}um_Qn_w))d\bar{u}, \quad m_Q \in M_Q.$$

D'après [BZ2, 5.5],  $\beta$  induit par passage au quotient l'isomorphisme cherché

$$\bar{\beta} : h_{i_j}(\sigma)/h_{i_j-1}(\sigma) \rightarrow f(w)(\sigma).$$

Puisque  $\bar{\beta}$  commute aux opérateurs  $\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma)(\delta_1)$  et  $\mathbf{f}(w)(\Sigma)(\delta_1)$  — cf. l'action de  $\Pi(\delta_1)$  rappelée plus haut —, c'est un isomorphisme de  $\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma)$  sur  $\mathbf{f}(w)(\Sigma)$ . En conclusion, pour  $\Sigma \in \mathcal{G}(M_P^\natural, \omega)$ , si  $|\Omega_j| > 1$  on a  $\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma) \in \mathcal{G}_{0+}(M_Q^\natural, \omega)$ , et sinon on a l'égalité dans  $\mathcal{G}(M_Q^\natural, \omega)$

$$\bar{\mathbf{h}}_j(\Sigma) = \mathbf{f}(w_{i_j})(\Sigma).$$

La proposition est démontrée.  $\square$

**4.2. Les espaces  $\mathfrak{a}_P$ ,  $\mathfrak{a}_Q^P$ ,  $\mathfrak{a}_P^*$ , etc.**— Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , on note  $X_F^*(M_P)$  le groupe des caractères algébriques de  $M_P$  qui sont définis sur  $F$ . On note aussi  $A_P$  le tore central déployé maximal de  $M_P$ , et  $X^*(A_P) = X_F^*(A_P)$  le groupe des caractères algébriques de  $A_P$  — ils sont tous définis sur  $F$ . L'application  $X_F^*(M_P) \rightarrow X^*(A_P)$ ,  $\chi \mapsto \chi|_{A_P}$  est injective, de conoyau fini, et l'on pose

$$\mathfrak{a}_P = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_F^*(M_P), \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A_P), \mathbb{R}).$$

C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension finie  $\dim A_P$ . L'application  $H_P : M_P \rightarrow \mathfrak{a}_P$  définie par

$$e^{\langle \chi, H_P(m) \rangle} = |\chi(m)|_F, \quad m \in M_P, \chi \in X_F^*(M_P),$$

a pour noyau  $M_P^1$  et pour image un réseau de  $\mathfrak{a}_P$ , noté  $\mathfrak{a}_{P,F}$ . Rappelons que  $|\cdot|_F$  est la valeur absolue normalisée sur  $F$ . Comme la restriction de  $H_P$  à  $A_P$  coïncide avec  $H_{A_P}$ , on peut aussi poser  $\mathfrak{a}_{A_P,F} = H_P(A_P)$ . C'est encore un réseau de  $\mathfrak{a}_P$ , et un sous-groupe d'indice fini de  $A_{P,F}$ .

Posons

$$\mathfrak{a}_P^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C}) = \mathfrak{a}_P^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Pour tout sous-groupe fermé  $\Lambda$  de  $\mathfrak{a}_P$ , on note  $\Lambda^\vee$  le sous-groupe de  $\mathfrak{a}_P^*$  défini par

$$\Lambda^\vee = \{\nu \in \mathfrak{a}_P^* : \langle \lambda, \nu \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}, \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Pour  $\nu \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ , on note  $\psi_\nu$  le caractère non ramifié de  $M_P$  défini par

$$\psi_\nu(m) = e^{\langle H_P(m), \nu \rangle}.$$

L'application

$$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee \rightarrow \mathfrak{P}(M_P), \nu \mapsto \psi_\nu$$

est un isomorphisme de groupes. Il identifie  $\mathfrak{a}_P^*$  au groupe des caractères non ramifiés *positifs* de  $M_P$ , et  $i\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee$  au groupe des caractères non ramifiés *unitaires* de  $M_P$ . On obtient de la même manière un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee \rightarrow \mathfrak{P}(A_P), \nu \mapsto \chi_\nu.$$

Le groupe  $\mathfrak{a}_{P,F}^\vee$  est un réseau de  $\mathfrak{a}_P^*$  et un sous-groupe d'indice fini de  $\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee$ , et la projection canonique  $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{P,F}^\vee \rightarrow \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/i\mathfrak{a}_{A_P,F}^\vee$  correspond, via les isomorphismes  $\nu \mapsto \psi_\nu$  et  $\nu \mapsto \chi_\nu$ , à la restriction des caractères de  $\mathfrak{P}(M_P) \rightarrow \mathfrak{P}(A_P)$ ,  $\psi \mapsto \psi|_{A_P}$ .

Soit  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ . L'inclusion  $M_Q \subset M_P$  induit une application injective (restriction des caractères)  $X_F^*(M_P) \rightarrow X_F^*(M_Q)$ , et donc aussi une application surjective

$$\pi_Q^P : \mathfrak{a}_Q \rightarrow \mathfrak{a}_P,$$

dont le noyau est noté  $\mathfrak{a}_Q^P$ . D'autre part l'inclusion  $A_P \subset A_Q$  induit une application surjective (restriction des caractères)  $X(A_Q) \rightarrow X(A_P)$ , et donc aussi une application injective

$$\mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{a}_Q,$$

qui est une section de  $\pi_Q^P$ . On obtient les décompositions

$$\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_Q^P, \quad \mathfrak{a}_Q^* = \mathfrak{a}_P^* \oplus (\mathfrak{a}_Q^P)^*,$$

où l'on a posé  $(\mathfrak{a}_Q^P)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_Q^P, \mathbb{R})$ .

Pour alléger l'écriture, on remplace l'indice  $P_\circ$  par un indice  $\circ$  dans toutes les notations précédentes. Ainsi pour  $Q = P_\circ$  et  $P = G$ , on a les décompositions

$$\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_\circ^G, \quad \mathfrak{a}_\circ^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_\circ^G)^*.$$

On fixe une forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_\circ$  sur l'espace  $\mathfrak{a}_\circ$ , définie positive et invariante sous l'action du groupe de Weyl  $W_G$ . Cela munit  $\mathfrak{a}_\circ$  d'une norme, donnée par  $|\nu| = (\nu, \nu)_\circ^{1/2}$ . Par dualité l'espace  $\mathfrak{a}_\circ^*$  est lui aussi muni d'une norme. Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , la décomposition  $\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_\circ^P$  est orthogonale, et la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_\circ$  induit par restriction des formes quadratiques définies positives sur les espaces  $\mathfrak{a}_P$  et  $\mathfrak{a}_\circ^P$ , notées  $(\cdot, \cdot)_P$  et  $(\cdot, \cdot)_\circ^P$ . Plus généralement, pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ , la décomposition  $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_Q^P$  est orthogonale, et la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_Q$  induit par restriction une forme quadratique définie positive sur l'espace  $\mathfrak{a}_Q^P$ , notée  $(\cdot, \cdot)_Q^P$ .

**REMARQUE.** — Les racines de  $A_o$  dans  $\text{Lie}(G)$  sont des éléments de  $\mathfrak{a}_o^*$ , nuls sur  $\mathfrak{a}_G$ . Leurs restrictions à  $\mathfrak{a}_o^G$  forment un système de racine, en général non réduit. L'ensemble des racines simples relativement au sous-groupe parabolique minimal  $P_o$  de  $G$ , noté  $\Delta_o^G$ , est une base de  $(\mathfrak{a}_o^G)^*$ , et l'ensemble des coracines  $\check{\alpha}$  pour  $\alpha \in \Delta_o^G$  est une base de  $\mathfrak{a}_o^G$ .

Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , on définit de la même manière l'ensemble  $\Delta_o^P$  des racines simples de  $A_o$  dans  $\text{Lie}(M_P)$  relativement à  $P_o \cap M_P$ ; c'est une base de  $(\mathfrak{a}_o^P)^*$ . On peut aussi considérer les éléments de  $\Delta_o^P$  comme des formes linéaires sur  $\mathfrak{a}_o$ , ce qui fait de  $\Delta_o^P$  un sous-ensemble de  $\Delta_o^G$ . Ainsi  $\mathfrak{a}_P^G$  est le sous-espace de  $\mathfrak{a}_o^G$  intersection des noyaux des  $\alpha \in \Delta_o^P$ .

Pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ , soit  $\Delta_Q^P$  l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de  $\Delta_o^P$  au sous-espace  $\mathfrak{a}_Q^G$  de  $\mathfrak{a}_o^G$ . C'est une base de  $(\mathfrak{a}_Q^P)^*$ , et  $\mathfrak{a}_Q^G$  est le sous-espace de  $\mathfrak{a}_o^G$  intersection des noyaux des  $\alpha \in \Delta_Q^P$ . Notons que  $\Delta_Q^P$  n'est en général pas la base d'un système de racines. ■

**4.3. Les espaces  $\mathfrak{a}_{P^\natural}$ ,  $\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}$ ,  $\mathfrak{b}_{P^\natural}$ ,  $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ , etc.** — L'automorphisme  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$  de  $G$  induit par restriction un automorphisme de  $A_o$ , qui ne dépend pas du choix de  $\delta_1 \in M_o^\natural$ . D'où un automorphisme de  $\mathfrak{a}_o = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A_o), \mathbb{R})$ , déduit de  $\theta|_{A_o}$  par functorialité et que l'on note encore  $\theta$ , donné par

$$\langle \chi, \theta(u) \rangle = \langle \chi \circ \theta|_{A_o}, u \rangle, \quad u \in \mathfrak{a}_o, \chi \in X^*(A_o).$$

On note encore  $\theta$  l'automorphisme de  $\mathfrak{a}_o^*$  déduit de  $\theta$  par dualité:

$$\langle u, \theta(u^*) \rangle = \langle \theta^{-1}(u), u^* \rangle, \quad u \in \mathfrak{a}_o, u^* \in \mathfrak{a}_o^*.$$

La décomposition  $\mathfrak{a}_o = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_o^G$  est  $W_G$ -stable. Elle est aussi  $\theta$ -stable, et puisque  $\theta$  induit une permutation de l'ensemble fini  $\Delta_o^G$  (cf. la remarque de 4.2), il induit un automorphisme d'ordre fini de l'espace  $\mathfrak{a}_o^G$ . On peut donc supposer — i.e. on suppose! — que la forme quadratique définie positive  $W_G$ -invariante  $(\cdot, \cdot)_o^G$  sur  $\mathfrak{a}_o^G$ , est aussi  $\theta$ -invariante.

**REMARQUE 1.** — Il n'est en général pas possible de choisir la forme quadratique définie positive  $W_G$ -invariante  $(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathfrak{a}_o$  de telle manière qu'elle soit  $\theta$ -invariante. C'est possible par exemple si la restriction de  $\theta$  au centre  $Z(G)$  de  $G$  est d'ordre fini.

Une hypothèse moins restrictive consiste à supposer que l'application naturelle  $\mathfrak{a}_G^\theta \rightarrow \mathfrak{a}_{G,\theta}$  est un isomorphisme, où  $\mathfrak{a}_G^\theta \subset \mathfrak{a}_G$  désigne le sous-espace vectoriel des vecteurs  $\theta$ -invariants, et  $\mathfrak{a}_{G,\theta}$  l'espace vectoriel des coinvariants de  $\mathfrak{a}_G$  sous  $\theta$ , c'est-à-dire le quotient de  $\mathfrak{a}_G$  par le sous-espace vectoriel engendré par les  $u - \theta(u)$ ,  $u \in \mathfrak{a}_G$ . En ce cas le sous-espace vectoriel  $(\mathfrak{a}_G^*)^\theta \subset \mathfrak{a}_G^*$  s'identifie au dual  $(\mathfrak{a}_G^\theta)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_G^\theta, \mathbb{R})$  de  $\mathfrak{a}_G^\theta$ . ■

Pour  $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , les décompositions

$$\mathfrak{a}_o = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_o^P, \quad \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_P^G,$$

sont  $\theta$ -stables. Soit  $\mathfrak{a}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_P^\theta$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{a}_P$  formé des vecteurs  $\theta$ -invariants. Il coïncide avec  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A_{P^\natural}), \mathbb{R})$  où  $A_{P^\natural}$  est le plus grand tore déployé du centre  $Z(M_P^\natural)$  de  $M_P^\natural$  — c'est un sous-tore de  $A_P$ , et l'inclusion  $\mathfrak{a}_{P^\natural} \subset \mathfrak{a}_P$  est donnée par la restriction des caractères  $X^*(A_P) \rightarrow X^*(A_{P^\natural})$ . On note:

- $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural} = (\mathfrak{a}_P^G)^\theta$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{a}_P^G$  formé des vecteurs  $\theta$ -invariants;
- $\tilde{\mathfrak{a}}_G^{G^\natural}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{a}_G$  engendré par les  $u - \theta(u)$ ,  $u \in \mathfrak{a}_G$ ;
- $\mathfrak{b}_{G^\natural} = \mathfrak{a}_{G,\theta}$  l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}_G / \tilde{\mathfrak{a}}_G^{G^\natural}$  des coinvariants de  $\mathfrak{a}_G$  sous  $\theta$ ;
- $\mathfrak{b}_{P^\natural}$  l'espace vectoriel produit  $\mathfrak{b}_{G^\natural} \times \mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$ .

L'espace dual  $\mathfrak{b}_{G^\natural}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{G^\natural}, \mathbb{R})$  coïncide avec le sous-espace vectoriel  $(\mathfrak{a}_G^*)^\theta$  de  $\mathfrak{a}_G^*$  formé des vecteurs  $\theta$ -invariants. D'autre part, comme la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_P^G$  sur  $\mathfrak{a}_P^G$  est  $\theta$ -invariante, l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$  dans  $\mathfrak{a}_P^G$  coïncide avec le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{a}_P^G$  engendré par les  $u - \theta(u)$ ,  $u \in \mathfrak{a}_P^G$ . On en déduit que l'espace dual  $(\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural})^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}, \mathbb{R})$  coïncide avec le sous-espace vectoriel  $(\mathfrak{a}_P^G)^{*,\theta} = ((\mathfrak{a}_P^G)^*)^\theta$  de  $(\mathfrak{a}_P^G)^*$  formé des vecteurs  $\theta$ -invariants. Par suite l'espace dual  $\mathfrak{b}_{P^\natural}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathbb{R})$  coïncide avec le sous-espace  $(\mathfrak{a}_P^*)^\theta = (\mathfrak{a}_G^*)^\theta \oplus (\mathfrak{a}_P^G)^{*,\theta}$  de  $\mathfrak{a}_P^*$ . On note

$$\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection naturelle, produit de la projection canonique  $\mathfrak{a}_G \rightarrow \mathfrak{b}_{G^\natural}$  et de la projection orthogonale  $\mathfrak{a}_P^G \rightarrow \mathfrak{a}_{P^\natural}^{G^\natural}$ . Enfin comme plus haut, on pose

$$\mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathbb{C}) = \mathfrak{b}_{P^\natural}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q \subset P$ , on définit de la même manière l'espace  $\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural} = (\mathfrak{a}_Q^P)^\theta$ . On a les décompositions

$$\mathfrak{b}_{Q^\natural} = \mathfrak{b}_{P^\natural} \oplus \mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}, \quad \mathfrak{b}_{Q^\natural}^* = \mathfrak{b}_{P^\natural}^* \oplus (\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural})^*,$$

où l'on a posé  $(\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural})^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{P^\natural}, \mathbb{R})$ . Soit

$$\pi_Q^{P^\natural} : \mathfrak{a}_Q \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection naturelle, donnée par  $\pi_Q^{P^\natural} = \pi_P^{P^\natural} \circ \pi_Q^P$ . Notant

$$\pi_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{b}_{Q^\natural} \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural}$$

la projection orthogonale, on a l'égalité

$$\pi_Q^{P^\natural} = \pi_{Q^\natural}^{P^\natural} \circ \pi_Q^{Q^\natural}.$$

**REMARQUE 2.** — Soit  $\tilde{\mathfrak{a}}_P^{P^\natural}$  le sous-espace de  $\mathfrak{a}_P$  engendré par les  $u - \theta(u)$ ,  $u \in \mathfrak{a}_P$ , et  $\tilde{\mathfrak{a}}_{P^\natural}$  son orthogonal dans  $\mathfrak{a}_P$ . Soit aussi  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{P^\natural}$  l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_{P^\natural}$  dans  $\mathfrak{a}_P$ . Les espaces  $\tilde{\mathfrak{a}}_{P^\natural}$  et  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{P^\natural}$  ne sont en général pas  $\theta$ -stables. Ils le sont par exemple si la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_\circ$  sur  $\mathfrak{a}_\circ$  est  $\theta$ -invariante, c'est-à-dire si la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)_G$  sur  $\mathfrak{a}_G$  est  $\theta$ -invariante, auquel cas on a les égalités  $\tilde{\mathfrak{a}}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_{P^\natural}$  et  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^{P^\natural} = \tilde{\mathfrak{a}}_P^{P^\natural}$ , et la décomposition  $\theta$ -invariante  $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{P^\natural} \oplus \mathfrak{a}_P^{P^\natural}$ . En ce cas  $\mathfrak{b}_{P^\natural} = \mathfrak{a}_{P^\natural}$ , et  $\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{a}_{P^\natural}$  est la projection orthogonale. ■

Pour  $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , l'application  $\mathfrak{a}_P^* \rightarrow \mathfrak{P}(M_P)$ ,  $\nu \mapsto \psi_\nu$  est  $\theta$ -équivariante. Elle identifie  $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*$  au groupe des caractères non ramifiés positifs de  $M_P^\natural$ . Pour tout sous-groupe fermé  $\Lambda$  de  $\mathfrak{b}_{P^\natural}$ , on note  $\Lambda^\vee$  le sous-groupe de  $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*$  défini comme plus haut en remplaçant la paire  $(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_P^*)$  par la paire  $(\mathfrak{b}_{P^\natural}, \mathfrak{b}_{P^\natural}^*)$ . Soit  $\mathfrak{b}_{P^\natural, F}$  l'image de  $\mathfrak{a}_{P, F}$  par l'application  $\pi_P^{P^\natural} : \mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural}$ . On a l'égalité

$$\mathfrak{b}_{P^\natural, F}^\vee = \mathfrak{a}_{P, F}^\vee \cap \mathfrak{b}_{P^\natural}^*,$$

et l'application  $\nu \mapsto \psi_\nu$  induit par restriction un morphisme injectif

$$\mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^* / i\mathfrak{b}_{P^\natural, F}^\vee \rightarrow \mathfrak{P}(M_P^\natural).$$

L'image de ce morphisme est un sous-tore (algébrique, complexe) de  $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ , de dimension celle de  $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ . Ce tore est la composante neutre  $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$  de  $\mathfrak{P}(M_P^\natural)$ , et le morphisme  $\nu \mapsto \psi_\nu$  identifie  $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*$  (resp.  $i\mathfrak{b}_{P^\natural}^* / i\mathfrak{b}_{P^\natural, F}^\vee$ ) au sous-groupe de  $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural)$  formé des caractères

positifs (resp. unitaires). Soit aussi  $\mathfrak{b}_{A_{P^\natural}, F}$  l'image de  $H_P(A_{P^\natural}(F))$  par l'application  $\pi_P^{P^\natural}$ . L'application  $\nu \mapsto \chi_\nu$  induit par restriction un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*/i\mathfrak{b}_{A_{P^\natural}, F}^\vee \rightarrow \mathfrak{P}(A_{P^\natural}), \quad \mathfrak{P}(A_{P^\natural}) = \text{Hom}(A_{P^\natural}/A_{P^\natural}^1, \mathbb{C}^\times).$$

Comme en 4.2, la projection canonique  $\mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*/i\mathfrak{b}_{P^\natural, F}^\vee \rightarrow \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*/i\mathfrak{b}_{A_{P^\natural}, F}^\vee$  correspond, via les isomorphismes  $\nu \mapsto \psi_\nu$  et  $\nu \mapsto \chi_\nu$ , à la restriction des caractères  $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{P^\natural})$ .

**REMARQUE 3.** — Posons  $A_P^\natural = A_P \cdot \delta_1$ . C'est un sous-espace tordu de  $M_P^\natural$  (isomorphe à  $A_P^\natural \cdot \delta$  pour tout  $\delta \in M_P^\natural$ ), et le groupe  $\mathfrak{P}(A_P^\natural)$  des caractères non ramifiés de  $A_P^\natural$  est par définition le sous-groupe de  $\mathfrak{P}(A_P)$  formé des éléments  $\theta$ -invariants. Notons  $\mathfrak{b}_{A_P^\natural, F}$  l'image de  $\mathfrak{a}_{A_P, F}$  par l'application  $\pi_P^{P^\natural}$ . C'est un réseau de  $\mathfrak{a}_{P^\natural}$  qui vérifie la double inclusion

$$\mathfrak{b}_{A_{P^\natural}, F} \subset \mathfrak{b}_{A_P^\natural, F} \subset \mathfrak{b}_{P^\natural, F}.$$

La restriction des caractères  $\mathfrak{P}(M_P^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(A_P^\natural)$  est un morphisme de variétés algébriques, de noyau et de conoyau finis. D'après ce qui précède, il induit un morphisme surjectif  $\mathfrak{P}^0(M_P^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}^0(A_P^\natural)$  de noyau isomorphe au groupe (fini)  $i\mathfrak{b}_{A_P^\natural, F}^\vee/i\mathfrak{b}_{P^\natural, F}^\vee$ . ■

**NOTATION.** — Pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , on pose

$$d(M_P) = \dim \mathfrak{P}(M_P) (= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P),$$

et pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on pose

$$d(M_{P^\natural}) = \dim \mathfrak{P}(M_{P^\natural}) (= \dim \mathfrak{P}^0(M_{P^\natural}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{b}_{P^\natural}).$$

**REMARQUE 4.** — Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on a

$$P^\natural \neq G^\natural \Leftrightarrow d(M_{P^\natural}) > d(G^\natural).$$

En effet, d'après la remarque de 4.2, les restrictions non nulles des éléments de  $\Delta_P^G$  au sous-espace  $\mathfrak{a}_P^G$  de  $\mathfrak{a}_G^G$  forment une base  $\Delta_P^G$  de  $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ . Puisque  $P$  est  $\theta$ -stable,  $\theta$  induit une permutation de l'ensemble fini  $\Delta_P^G$ , et donc un automorphisme d'ordre fini  $l$  de l'espace  $\mathfrak{a}_P^G$ . Une racine  $\alpha \in \Delta_P^G$  définit par restriction une forme linéaire sur  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^G = (\mathfrak{a}_P^G)^\theta$ , qui ne dépend que de la  $\theta$ -orbite  $\{\theta^i(\alpha) : i = 0, \dots, l-1\}$  de  $\alpha$ . Notons  $\Delta_{P^\natural}^G$  l'ensemble de ces  $\theta$ -orbites. Les formes linéaires sur  $\mathfrak{a}_{P^\natural}^G$  associées aux éléments de  $\Delta_{P^\natural}^G$  forment une base de  $(\mathfrak{a}_{P^\natural}^G)^*$ . Comme  $\mathfrak{b}_{P^\natural} = \mathfrak{b}_{G^\natural} \times \mathfrak{a}_{P^\natural}^G$ , on a

$$d(M_{P^\natural}) - d(G^\natural) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{P^\natural}^G) = \#(\Delta_{P^\natural}^G),$$

et  $\Delta_{P^\natural}^G$  est non vide si et seulement si  $P \neq G$ , i.e. si et seulement si  $P^\natural \neq G^\natural$ . ■

**4.4. Les morphismes  ${}^\omega T_{P^\natural, \mathbb{C}}$ .** — Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on note  ${}^\omega T_{P^\natural}$  le foncteur

$${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural} \circ {}^\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(G^\natural, \omega).$$

Il induit un morphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$${}^\omega T_{P^\natural, \mathbb{C}} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega).$$

On note  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^\natural, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  engendré par les  ${}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_{P^\natural}, \omega))$  pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ ,  $P^\natural \neq G^\natural$ , et l'on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) / \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^\natural, \omega).$$

On définit comme dans le cas non tordu une filtration décroissante  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \omega)\}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ : pour chaque entier  $i \geq -1$ , on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \omega) = \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > i} \omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)),$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ . On a donc

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}(G^{\natural}, \omega), \quad i < d(G),$$

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \omega) = 0, \quad i \geq d(M_o),$$

et

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},d(G)}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C},\text{ind}}(G^{\natural}, \omega).$$

**PROPOSITION.** — Soit  $d$  un entier tel que  $d(G) \leq d < d(M_o)$ . Il existe une famille de nombres rationnels  $\lambda_d = \{\lambda_d(P^{\natural}) : P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}), d(M_P) > d\}$  telle que le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_{\lambda_d}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  défini par

$$\mathbf{A}_d = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_d(P^{\natural}) \omega_{T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}}$$

vérifie les propriétés:

$$\ker \mathbf{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathbf{A}_d \circ \mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d.$$

*Démonstration.* — Elle nécessite d'établir quelques lemmes. Le lemme 1 étend au cas tordu la propriété d'invariance du morphisme induction parabolique sous l'action de  $W_G$  par conjugaison [BDK, lemma 5.4]. Le lemme 2 est la variante tordue de [BDK, cor. 5.4].

**LEMME 1.** — Soit  $P^{\natural}, Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ . Supposons que  $M_Q^{\natural} = w(M_P^{\natural}) (= n_w \cdot M_P^{\natural} \cdot n_w^{-1})$  pour un  $w \in W_{G^{\natural}}$ . Pour  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$\omega_{i_{Q^{\natural}}}^{G^{\natural}}(w\Sigma) = \omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}}(\Sigma).$$

*Démonstration.* — Par transport de structures, on a l'égalité

$$\omega_{i_{w(P^{\natural}), \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(w\Sigma) = \omega_{i_{P^{\natural}, \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(\Sigma),$$

où  $\omega_{i_{w(P^{\natural}), \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}$  est le morphisme induction parabolique normalisé de  $M_Q^{\natural}$  à  $G^{\natural}$  par rapport au sous-espace parabolique (non standard)  $w(P^{\natural}) = M_Q^{\natural} \cdot U_{w(P)}$  de  $G^{\natural}$ . Rappelons que l'indice  $\mathbb{C}$  indique que l'on est dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ , cf. 2.10. Il s'agit de voir que l'on peut remplacer  $w(P^{\natural})$  par  $w(M_P^{\natural}) \cdot U_o = Q^{\natural}$ .

La double classe  $W_{M_Q} w W_{M_P} = W_{M_Q} w = w W_{M_P}$  est  $\theta$ -stable. Quitte à remplacer  $w$  par un élément de  $W_{M_Q} w$ , on peut supposer que  $w \in W_{G^{\natural}}^{P, Q}$ . Alors  $w(M_P \cap P_o) = M_Q \cap P_o$ , et pour tout sous-groupe parabolique standard  $R'$  de  $M_P$ ,  $w(R')$  est un sous-groupe parabolique standard de  $M_Q$ . On en déduit que pour  $R^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tel que  $R^{\natural} \subset P^{\natural}$ ,  $w(R^{\natural} \cap M_P^{\natural})$  est un sous-espace parabolique standard de  $M_Q^{\natural}$  de composante de Levi standard  $\omega(M_R^{\natural})$ .

D'après le lemme 1 de 2.14, on peut supposer que  $\Sigma = \omega_{i_{R^{\natural}, \mathbb{C}}}^{P^{\natural}}(\Xi' \Sigma')$  pour un  $R \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tel que  $R^{\natural} \subset P^{\natural}$ , une  $\omega_u$ -représentation  $\Sigma' \in \text{Irr}_{\mathbb{C}, t}(M_R^{\natural}, \omega_u)$  et un caractère  $\Xi' \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_R^{\natural}, |\omega|)$  tel que  $\Xi'^{\circ}$  est positif par rapport à  $U_R \cap M_P$ . Par transitivité du morphisme induction parabolique, on a l'égalité  $\omega_{i_{P^{\natural}, \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(\Sigma) = \omega_{i_{R^{\natural}, \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(\Xi' \Sigma')$  et (d'après ce qui précède)

$$\omega_{i_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(w\Sigma) = \omega_{i_{w(R^{\natural} \cap M_P^{\natural}) \cdot U_Q, \mathbb{C}}}^{G^{\natural}}(w(\Xi' \Sigma')).$$

Quitte à remplacer  $P^{\natural}$  par  $R^{\natural}$  et  $\Sigma$  par  $\Xi'\Sigma'$ , on peut donc supposer que  $\Sigma = \Xi'\Sigma'$  pour une  $\omega_u$ -représentation  $\Sigma' \in \text{Irr}_{\mathbb{C},t}(M_P^{\natural}, \omega_u)$  et un caractère  $\Xi' \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  tel que  $\Xi'^{\circ} > 0$ .

Supposons qu'il existe un sous-ensemble Zariski-dense  $\Omega$  de la sous-variété irréductible  $\mathfrak{X} = \{\Psi\Xi' : \Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural})\}$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  tel que pour tout  $\Psi \in \Omega$ , on a l'égalité

$$\omega \cdot i_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}(\Psi\Sigma') = \omega \cdot i_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}({}^w(\Psi\Sigma')).$$

Pour  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$ , les fonctions  $\Psi \mapsto \Phi_{\phi}(\omega \cdot i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Psi\Sigma'))$  et  $\Psi \mapsto \Phi_{\phi}(\omega \cdot i_{Q^{\natural}}^{G^{\natural}}({}^w(\Psi\Sigma')))$  sur  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, |\omega|)$  sont régulières (2.22), d'où l'égalité

$$\Phi_{\phi}(\omega \cdot i_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}(\Sigma)) = \Phi_{\phi}(\omega \cdot i_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}({}^w\Sigma)).$$

Enfin la propriété d'indépendance linéaire des caractères-distributions des  $\omega$ -représentations  $G$ -irréductibles de  $G^{\natural}$  [L2, A.5, prop.] implique l'égalité

$$\omega \cdot i_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}(\Sigma) = \omega \cdot i_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}({}^w\Sigma).$$

Reste à prouver l'existence de  $\Omega$ . Pour  $\nu \in \mathfrak{b}_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^*$ , notons  $\Psi_{\nu}$  l'élément de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural})$  défini par  $\Psi_{\nu} = \psi_{\nu}^{\delta_1}$  (4.3, et remarque 3 de 2.12); on a donc  $\Psi_{\nu}^{\circ} = \psi_{\nu}$  et  $\psi_{\nu}|_{A_{P^{\natural}}} = \chi_{\nu}$ . Soit  $\Sigma'$  une  $\omega_u$ -représentation  $M_P$ -irréductible de  $M_P^{\natural}$  dans la classe d'isomorphisme  $\Sigma'$ . Puisque  $\Sigma'$  est unitaire (2.13, définition), son caractère central (cf. 2.8, remarque 3) l'est aussi. Choisissons une uniformisante  $\varpi$  de  $F$ , et posons  $A_{P^{\natural}}^{\varpi} = \text{Hom}(X^*(A_{P^{\natural}}), \langle \varpi \rangle)$ . Via la décomposition  $A_{P^{\natural}} = A_{P^{\natural}}^1 \times A_{P^{\natural}}^{\varpi}$ , la restriction à  $A_{P^{\natural}}^{\varpi}$  du caractère central de  $\Sigma'$  définit un caractère non ramifié unitaire de  $A_{P^{\natural}}$  (cf. 2.12, exemple), i.e. de la forme  $\chi_{i\mu_0}$  pour un élément  $\mu_0 \in \mathfrak{b}_{P^{\natural}}^*$ . Posons  $\Sigma'_0 = \Psi_{-i\mu_0} \cdot \Sigma'$ . C'est une  $\omega_u$ -représentation  $M_P$ -irréductible tempérée de  $M_P^{\natural}$ , de classe d'isomorphisme  $\Sigma'_0 = \Psi_{-i\mu_0}\Sigma'$ . D'autre part, le caractère  $\omega$  est trivial sur le centre  $Z(M_P^{\natural})$  de  $M_P^{\natural}$ , par conséquent la restriction de  $\Xi'^{\circ}$  au tore  $A_{P^{\natural}}$  est un caractère non ramifié positif de  $A_{P^{\natural}}$ , i.e. de la forme  $\chi_{\eta_0}$  pour un élément  $\eta_0 \in \mathfrak{b}_{P^{\natural}}^*$  (cf. 4.3). Posons  $\Xi'_0 = \Psi_{-\eta_0} \cdot \Xi'$ . C'est un élément de  $\mathfrak{X}$  vérifiant  $\Xi'_0(\delta_1) = \Xi'(\delta_1)$  et  $\Xi'_0|_{A_{P^{\natural}}} = 1$ . En particulier,  $\Xi'_0$  se relève en un élément  $\tilde{\Xi}'_0 \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, |\omega|)$ . Posons  $\Sigma_0 = \tilde{\Xi}'_0 \cdot \Sigma'_0$ . C'est une  $\omega$ -représentation  $M_P$ -irréductible de  $M_P^{\natural}$ , de classe d'isomorphisme  $\Sigma_0 = \tilde{\Xi}'_0\Sigma'_0$ . Pour  $\nu \in \mathfrak{b}_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^*$ , d'après la proposition de 2.10 ((3), réciprocity de Frobenius), on a isomorphisme naturel

$$(*) \quad \text{Hom}_{G^{\natural}}(\omega \cdot i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0), \omega \cdot i_{Q^{\natural}}^{G^{\natural}}({}^w(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0))) \simeq \text{Hom}_{M_Q^{\natural}}(\mathbf{h}(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0), {}^w(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0));$$

où  $\mathbf{h}$  désigne le foncteur  $\omega \cdot r_{G^{\natural}}^{Q^{\natural}} \circ \omega \cdot i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}$ . D'après le lemme géométrique (4.1, proposition), l'image  $\mathbf{h}_{\mathbb{C}}(\Psi_{\nu}\Sigma_0)$  de  $\mathbf{h}(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0)$  dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, \omega)$  est donnée par

$$(**) \quad \mathbf{h}_{\mathbb{C}}(\Psi_{\nu}\Sigma_0) = \sum_s \mathbf{f}_{\mathbb{C}}(s)(\Psi_{\nu}\Sigma_0),$$

où  $s$  parcourt les éléments de  $W_{G^{\natural}}^{P,Q}$ . Pour  $s \in W_{G^{\natural}}^{P,Q}$ , l'élément  $\mathbf{f}_{\mathbb{C}}(s)(\Psi_{\nu}\Sigma_0)$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, \omega)$  a un caractère central, et la restriction à  $A_{Q^{\natural}}^{\varpi}$  (=  $w(A_{P^{\natural}}^{\varpi})$ ) de ce caractère, identifiée comme plus haut à un caractère non ramifié de  $A_{Q^{\natural}}$  via la décomposition  $A_{Q^{\natural}} = A_{Q^{\natural}}^{\varpi} \times A_{Q^{\natural}}^1$ , est donnée par la projection orthogonale (cf. 4.3) de  $s(\nu) \in s(\mathfrak{b}_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^*) = \mathfrak{b}_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}^*$  sur  $\mathfrak{b}_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}^*$ . De la même manière, la restriction à  $A_{Q^{\natural}}^{\varpi}$  du caractère central de  ${}^w(\Psi_{\nu}\Sigma_0)$  est donnée par  $w(\nu)$ . Comme  $s$  et  $w$  opèrent isométriquement sur les espaces en question, on en déduit que pour  $\nu$  générique, seul l'élément  $s = w$  dans la somme (\*\*) peut donner une contribution non triviale à l'espace  $\text{Hom}$  de droite dans l'isomorphisme (\*), et comme  ${}^w(\Psi_{\nu} \cdot \Sigma_0)$  est un quotient de

$\mathbf{h}(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0)$  — cf. la démonstration de la proposition de 4.1 —, il en donne effectivement une. On obtient que pour  $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*$  générique, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{M_Q^\natural}(\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0), \omega_{i_{Q^\natural, \mathbb{C}}^\natural}({}^{nw}(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0))) = 1.$$

Le même raisonnement entraîne que pour  $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*$  générique, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{End}_{M_P^\natural}(\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0)) = 1$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{End}_{M_Q^\natural}(\omega_{i_{Q^\natural, \mathbb{C}}^\natural}({}^w(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0))) = 1$$

D’après le raisonnement ci-dessus, on peut remplacer la condition “ $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*$  générique” par “ $\nu = i\mu$ ,  $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$  générique”. Pour  $\nu \in \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*$ , on a

$$\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_\nu \cdot \Sigma_0) = \widetilde{\Xi}' \cdot \omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_\nu \cdot \Sigma'_0).$$

Pour  $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ , la représentation  $\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_{i\mu} \cdot \Sigma'_0)^\circ = i_P^G(\psi_{i\mu}(\Sigma'_0)^\circ)$  de  $G$  est unitaire et donc semisimple, par suite la  $\omega$ -représentation  $\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_{i\mu} \cdot \Sigma_0)$  de  $G^\natural$  est elle aussi semisimple (c’est-à-dire somme directe de  $\omega$ -représentations irréductibles de  $G^\natural$ ). De même, toujours pour  $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ , la  $\omega$ -représentation  $\omega_{i_{Q^\natural, \mathbb{C}}^\natural}({}^{nw}(\Psi_{i\mu} \cdot \Sigma_0))$  de  $G^\natural$  est semisimple. Par suite pour  $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$  générique, les éléments  $\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Psi_{i\mu} \Sigma_0)$  et  $\omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}({}^w(\Psi_{i\mu} \Sigma_0))$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  appartiennent à  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ , et sont égaux.

Pour  $\mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^*$ , on a  $\Psi_{i\mu} \Sigma_0 = \Psi_{-\eta_0 + i(\mu - \mu_0)} \Xi' \Sigma'$ . On conclut en remarquant que

$$\Omega = \{\lambda \Psi_{-\eta_0 + i(\mu - \mu_0)} \Xi' : \mu \in \mathfrak{b}_{P^\natural}^* \text{ générique, } \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$$

est un sous-ensemble Zariski-dense de  $\mathfrak{X}$ . □

**LEMME 2.** — Soit  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ .

(1) Pour  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega)$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$

$$\omega_{T_{Q^\natural, \mathbb{C}}} \circ \omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Sigma) = \sum_w \omega_{i_{P_w^\natural, \mathbb{C}}^\natural} \circ \omega_{r_{P_w^\natural}^{P_w^\natural}}(\Sigma),$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^\natural}^{P, Q}$ .

(2) Pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$

$$\omega_{T_{Q^\natural, \mathbb{C}}} \circ \omega_{T_{P^\natural, \mathbb{C}}}(\Pi) = \sum_w \omega_{T_{P_w^\natural, \mathbb{C}}}(\Pi),$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^\natural}^{P, Q}$ .

*Démonstration.* — Lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté possible, pour  $w \in W_{G^\natural}$ , on note “ $w$ ” le foncteur “ $\Sigma \rightarrow {}^{nw}\Sigma$ ”. D’après la proposition de 4.1, on a l’égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$

$$\omega_{T_{Q^\natural, \mathbb{C}}} \circ \omega_{i_{P^\natural, \mathbb{C}}^\natural}(\Sigma) = \sum_w \omega_{i_{Q_w^\natural, \mathbb{C}}^\natural} \circ \omega_{i_{Q_w^\natural, \mathbb{C}}^\natural} \circ \omega_w \circ \omega_{r_{P_w^\natural}^{P_w^\natural}}(\Sigma),$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^\natural}^{P, Q}$ . D’après le lemme 1, pour  $w \in W_{P^\natural, Q^\natural}$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^\natural, \omega)$

$$\omega_{i_{Q_w^\natural, \mathbb{C}}^\natural} \circ \omega_w \circ \omega_{r_{P_w^\natural}^{P_w^\natural}}(\Sigma) = \omega_{i_{P_w^\natural, \mathbb{C}}^\natural} \circ \omega_{r_{P_w^\natural}^{P_w^\natural}}(\Sigma).$$

D’où le point (1), par transitivité du morphisme induction parabolique.

Quant au point (2), par transitivité du morphisme restriction de Jacquet, d'après la proposition de 4.1, on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, \omega)$

$$\omega r_{G^{\natural}}^{Q^{\natural}} \circ \omega T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}(\Pi) = \sum_w \omega i_{Q^{\natural}}^{Q^{\natural}} \circ w \circ \omega r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Pi),$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^{\natural}}^{P^{\natural}, Q^{\natural}}$ . On obtient le point (2) en appliquant le morphisme  $\omega i_{Q^{\natural}}^{G^{\natural}}$  à cette expression (grâce au lemme 1, et par transitivité du morphisme induction parabolique).  $\square$

On peut maintenant démontrer la proposition. Pour alléger l'écriture, on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}, i} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, i}(G^{\natural}, \omega), \quad i \geq -1.$$

D'après le point (1) du lemme 2, pour  $Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , l'opérateur  $\omega T_{Q^{\natural}, \mathbb{C}}$  préserve la filtration  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C}, i}\}$ . Pour  $P^{\natural}, Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , puisque  $W_G(P, Q) \cap W_G^{P^{\natural}, Q^{\natural}}$  est un système de représentants des classes de

$$W_{M_Q} \backslash W_G(P, Q) = W_G(P, Q) / W_{M_P},$$

l'ensemble  $W_{G^{\natural}}(P, Q) \cap W_{G^{\natural}}^{P^{\natural}, Q^{\natural}}$  paramétrise le sous-ensemble

$$[W_{M_Q} \backslash W_G(P, Q)]^{\theta} \subset W_{M_Q} \backslash W_G(P, Q)$$

formé des classes  $\theta$ -invariantes, et s'il est non vide alors il est de cardinal

$$p_{Q^{\natural}} = |[W_{M_Q} \backslash W_G(Q, Q)]^{\theta}|.$$

D'après loc. cit. et le lemme 1, on en déduit que pour et  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ , on a

$$\omega T_{Q^{\natural}, \mathbb{C}} \circ \omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Sigma) \equiv \begin{cases} p_{Q^{\natural}} \omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Sigma) \pmod{\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(M_Q)}} & \text{si } W_{G^{\natural}}(P, Q) \cap W_{G^{\natural}}^{P^{\natural}, Q^{\natural}} \neq \emptyset \\ 0 \pmod{\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(M_Q)}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour  $k > d$ , choisissons un ordre  $\{P_{k,1}^{\natural}, \dots, P_{k,n(k)}^{\natural}\}$  sur l'ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) = k$ , et notons  $U_k : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  le morphisme défini par

$$U_k = (T_{k,n(k)} - p_{k,n(k)}) \circ \dots \circ (T_{k,1} - p_{k,1});$$

où l'on a posé

$$T_{k,i} = \omega T_{P_{k,i}^{\natural}, \mathbb{C}}, \quad p_{k,i} = p_{P_{k,i}^{\natural}}.$$

D'après ce qui précède, l'opérateur  $U_k$  préserve la filtration  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C}, i}\}$  et annule  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, k-1} / \mathcal{G}_{\mathbb{C}, k}$ . Posons

$$\mathbf{A}'_d = U_{d(M_0)} \circ \dots \circ U_{d+1}.$$

On a  $\mathbf{A}'_d(\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}) \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(M_0)} = 0$ , et d'après le point (2) du lemme 2, il existe un  $\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et des  $\lambda_d(P^{\natural}) \in \mathbb{Q}$  pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ ,  $d(M_P) > d$ , tels que

$$\mathbf{A}'_d = \mu(\text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_d(P^{\natural}) \omega T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}).$$

L'opérateur  $\mathbf{A}_d = \mu^{-1} \mathbf{A}'_d : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  vérifiant

$$\mathbf{A}_d(\Pi) \equiv \Pi \pmod{\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G^{\natural}, \omega)},$$

on a bien

$$\ker \mathbf{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathbf{A}_d \circ \mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d.$$

Cela achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**VARIANTE.** — On peut définir une autre filtration décroissante  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_i\}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , en remplaçant la condition  $d(M_P) > i$  par la condition  $d(M_P^{\natural}) > i$ : pour chaque entier  $i \geq -1$ , on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \mathbb{C})_i = \sum_{P^{\natural}, d(M_P^{\natural}) > i} \omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)),$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_i &= \mathcal{G}(G^{\natural}, \omega), \quad i < d(G^{\natural}), \\ \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_i &= 0, \quad i \geq d(M_0^{\natural}). \end{aligned}$$

On peut aussi, grâce au lemme 2, établir la variante suivante de la proposition:

Soit  $d'$  un entier tel que  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_0^{\natural})$ . Il existe une famille de nombres rationnels  $\mu_{d'} = \{\mu_{d'}(P^{\natural}) : P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}), d(M_P^{\natural}) > d'\}$  telle que le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{B}_{d'} = \mathbf{B}_{\mu_{d'}}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  défini par

$$\mathbf{B}_{d'} = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P^{\natural}) > d} \mu_{d'}(P^{\natural}) \omega T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}$$

vérifie les propriétés:

$$\ker \mathbf{B}_{d'} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{d'}, \quad \mathbf{B}_{d'} \circ \mathbf{B}_{d'} = \mathbf{B}_{d'}.$$

D'après la remarque 4 de 4.3, pour  $d' = d(G^{\natural})$ , on a  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{d(G^{\natural})} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(G)}(G^{\natural}, \omega)$ . On peut donc prendre  $\mu_{d(G^{\natural})}(P^{\natural}) = \lambda_{d(G)}(P^{\natural})$  pour tout  $P^{\natural} \neq G^{\natural}$ , et l'on a  $\mathbf{B}_{d(G^{\natural})} = \mathbf{A}_{d(G)}$ . ■

**4.5. Actions duales de  $\mathfrak{Z}(G)$  et de  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$ .** — Commençons par quelques rappels sur le “centre”. Pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ , l'application naturelle

$$i_{P, Q} : \Theta(M_Q) \rightarrow \Theta(M_P),$$

qui a  $[L, \rho]_{M_Q}$  associe  $[L, \rho]_{M_P}$ , est un morphisme fini de variétés algébriques. Par dualité il induit un morphisme d'anneaux

$$i_{P, Q}^* : \mathfrak{Z}(M_P) \rightarrow \mathfrak{Z}(M_Q),$$

donné par

$$f i_{P, Q}^*(z)(x) = f_z(i_{P, Q}(x)), \quad z \in \mathfrak{Z}(M_P), x \in \Theta(M_Q).$$

Ce morphisme  $i_{P, Q}^*$  fait de  $\mathfrak{Z}(M_Q)$  un  $\mathfrak{Z}(M_P)$ -module de type fini, et d'après [BD, 2.13–2.16], on a le

**LEMME 1.** — Soit  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ . Soit  $z \in \mathfrak{Z}(M_P)$  et  $t = i_{P, Q}^*(z) \in \mathfrak{Z}(M_Q)$ .

- (1) Pour toute représentation  $\sigma$  de  $M_Q$ , l'endomorphisme  $i_Q^P(t)$  de  $i_Q^P(\sigma)$  coïncide avec  $z$ .
- (2) Pour toute représentation  $\pi$  de  $M_P$ , l'endomorphisme  $r_P^Q(z)$  de  $r_P^Q(\pi)$  coïncide avec  $t$ .

Rappelons (3.1) que l'anneau  $\mathfrak{Z}(G) = \prod_{\mathfrak{s}} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$  opère sur l'espace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$ : pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$ ,  $z \cdot \Phi$  est l'élément de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$  donné par

$$(z \cdot \Phi)(\Pi) = f_z(\theta_G(\Pi^{\circ})) \Phi(\Pi), \quad \Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega).$$

D'après le lemme 1, pour  $P^{\natural}, Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $Q^{\natural} \subset P^{\natural}$ , les morphismes  $(\omega i_{P^{\natural}}^{Q^{\natural}})^*$  et  $(\omega r_{P^{\natural}}^{Q^{\natural}})^*$  sont des morphismes de  $\mathfrak{Z}(M_P)$ -modules, i.e. on a

$$(\omega i_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}})^*(z \cdot \Phi) = i_{P, Q}^*(z) \cdot (\omega i_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}})^*(\Phi), \quad \Phi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)^*, z \in \mathfrak{Z}(M_P),$$

et

$$({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(i_{P,Q}^*(z) \cdot \Phi) = z \cdot ({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(\Phi).$$

On a aussi une action du groupe  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)$  sur l'espace  $\mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ : pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)$  et  $\Phi \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ , on pose

$$(\Psi\Phi)(\Pi) = \Phi(\Psi\Pi), \quad \Pi \in \text{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega).$$

**LEMME 2.** — *On a:*

$$(1) \quad \mathfrak{Z}(G) \cdot \mathcal{F}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}(G^\natural, \omega) \text{ et } \mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)\mathcal{F}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}(G^\natural, \omega).$$

$$(2) \quad \mathfrak{Z}(G) \cdot \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega) \text{ et } \mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^\natural, \omega).$$

*Démonstration.* — Soit  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  et  $\Phi \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ . Pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$ , posant  $t = i_{G,P}^*(z) \in \mathfrak{Z}(M_P)$ , on a

$$\begin{aligned} (z \cdot \Phi)({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma)) &= ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(z \cdot \Phi)(\Sigma) \\ &= (t \cdot ({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi))(\Sigma) \\ &= f_t(\theta_{M_P}(\Sigma^\circ))({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)(\Sigma). \end{aligned}$$

Supposons que  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{F}(G^\natural, \omega)$ . Alors  $({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural})^*(\Phi)$  appartient à  $\mathcal{F}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$ , d'après la propriété de transitivité du morphisme induction parabolique. Par suite l'application

$$\Xi \mapsto (z \cdot \Phi)({}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Xi\Sigma))$$

est une fonction régulière sur  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural)$ . Comme par ailleurs le “support inertiel” de  $z \cdot \Phi$  — c'est-à-dire l'ensemble des  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}(G)$  tels que  $\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi) = \mathfrak{s}$  pour un  $\Pi \in \text{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$  vérifiant  $(z \cdot \Phi)(\Pi) \neq 0$  — est contenu dans celui de  $\Phi$ , on a l'égalité  $\mathfrak{Z}(G) \cdot \mathcal{F}(G^\natural, \omega) = \mathcal{F}(G^\natural, \omega)$ . La seconde égalité du point (1) est claire, puisque pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)$  on a

$$\Psi {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma) = {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Psi|_{M_{P^\natural}^\natural} \Sigma).$$

Quant au point (2), la première égalité résulte du fait que l'application  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  est un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module (lemme de 3.1), et la seconde du fait qu'elle est  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)$ -équivariante pour l'action naturelle de  $\mathfrak{P}_\mathbb{C}(G^\natural)$  sur  $\mathcal{H}^\natural$  (donnée par  $(\Psi, \phi) \mapsto \Psi\phi$ ).  $\square$

#### 4.6. Induction parabolique et restriction de Jacquet: morphismes duaux. —

Pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , le morphisme  ${}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$  induit par dualité un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural})^* : \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)^* \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)^*.$$

Précisément, on a

$$({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(\Phi)(\Sigma) = \Phi({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural}(\Sigma)), \quad \Phi \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)^*, \Sigma \in \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega).$$

De la même manière, le morphisme  ${}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural} : \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)$  induit par dualité un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^* : \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)^* \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)^*.$$

**PROPOSITION.** — *Pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , on a:*

$$(1) \quad ({}^\omega i_{Q^\natural}^{P^\natural})^*(\mathcal{F}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)) \subset \mathcal{F}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega).$$

$$(2) \quad ({}^\omega r_{P^\natural}^{Q^\natural})^*(\mathcal{F}_{\text{tr}}(M_{Q^\natural}^\natural, \omega)) \subset \mathcal{F}_{\text{tr}}(M_{P^\natural}^\natural, \omega).$$

*Démonstration.* — Le point (1) — déjà utilisé dans la preuve du lemme 2 de 4.5 — résulte de la propriété de transitivité du morphisme induction parabolique.

Quant au point (2), on procède comme dans [BDK, 5.3], grâce aux résultats de Casselman reliant les caractères–distributions aux foncteurs restriction de Jacquet [C] (dans le cas tordu, voir aussi [L2, 5.10]). On peut supposer  $P^{\natural} = G^{\natural}$ . Fixons un sous–groupe d’Iwahori  $I$  de  $G^{\natural}$  en bonne position par rapport à  $(P_o, M_o)$  et tel que  $\theta(I) = I$ , et notons  $\mathfrak{J}$  l’ensemble  $\{I^n : n \geq 0\}$  des sous–groupes de congruence de  $\mathfrak{J}$ . Pour  $n \geq 0$ , posons  $\mathcal{H}_n(M_Q^{\natural}) = \mathcal{H}_{I^n \cap M_Q}(M_Q^{\natural})$ . Puisque  $\mathcal{H}(M_Q^{\natural}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{H}_n(M_Q^{\natural})$ , il suffit de montrer que pour chaque  $n \geq 0$ , le sous–espace  $\mathcal{H}_n^*(M_Q^{\natural})$  de  $\mathcal{H}_n(M_Q^{\natural})$  formé des fonctions  $\phi'$  telles que  $(\omega r_{G^{\natural}}^{\mathbb{Q}^{\natural}})^*(\Phi_{\phi'}) \in \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega)$ , coïncide avec  $\mathcal{H}_n(M_Q^{\natural})$ ; où  $\Phi_{\phi'}$  est l’élément de  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(M_Q^{\natural}, \omega)$  défini comme en 2.9 en remplaçant  $G^{\natural}$  par  $M_Q^{\natural}$ . Posons  $M = M_Q$ ,  $U = U_Q$  et  $\bar{U} = \bar{U}_Q$ .

Fixons  $n \geq 0$ , et posons  $J = I^n$  et  $J_{\Gamma} = J \cap \Gamma$  pour tout sous–groupe fermé  $\Gamma$  de  $G$ . Pour  $\delta \in G^{\natural}$ , on note  $\phi_{\delta}^J \in \mathcal{H}_J(G^{\natural})$  la fonction caractéristique de la double classe  $J \cdot \delta \cdot J$  divisée par  $\text{vol}(J \cdot \delta \cdot J, d\delta)$ . Pour  $\delta \in M^{\natural} = M_Q^{\natural}$ , on définit de la même manière  $\phi_{\delta}^{J_M} \in \mathcal{H}_{J_M}(M^{\natural})$ . Dans le cas non tordu (i.e. si  $G^{\natural} = G$ ), on pose  $f_g^J = \phi_g^J$  pour  $g \in G$ , et  $f_m^{J_M} = \phi_m^{J_M}$  pour  $m \in M$ . Fixons un élément  $a \in A = A_Q$  tel que  $\text{Int}_G(a)$  contracte strictement  $U$ , c’est–à–dire vérifiant

$$\bigcap_{k \geq 1} \text{Int}_G(a)^k(U_J) = \{1\}.$$

Soit  $\Pi$  une  $\omega$ –représentation de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^{\circ}$  est admissible. Posons  $V = V_{\Pi}$  et  $\pi = \Pi^{\circ}$ . L’espace

$$V(U) = \langle \pi(u)(v) - v : v \in V, u \in U \rangle$$

coïncide avec l’ensemble des  $v \in V$  tels que  $\int_{\Omega_v} \pi(u)(v) du = 0$  pour un sous–groupe ouvert compact  $\Omega_v$  de  $U$ . Puisque  $\pi$  est admissible, l’espace  $V(U) \cap V^J$  est dimension finie, et il existe un sous–groupe ouvert compact  $\Omega$  de  $U$  tel que  $\int_{\Omega} \pi(u)(v) du = 0$  pour tout  $v \in V(U) \cap V^J$ . Quitte à remplacer  $\Omega$  par un groupe plus gros, on peut supposer que  $J_U$  est contenu dans  $\Omega$ . Soit  $k_0 \geq 1$  un entier tel que  $\text{Int}_{G^{\natural}}(a)^{k_0}(\Omega) \subset J_U$ . Soit  $\bar{\Pi} = \delta_{Q^{\natural}}^{\frac{1}{2}} \omega r_{G^{\natural}}^{\mathbb{Q}^{\natural}}$  la  $\omega$ –représentation de  $M^{\natural}$  déduite de  $\Pi$  par passage au quotient sur l’espace  $\bar{V} = V/V(U)$ . D’après la proposition 3.3 de [C], pour tout entier  $k \geq k_0$ , notant  $V_a^{J,k}$  le sous–espace  $\pi(f_a^J)^k(V)$  de  $V^J$ , on a :

- la projection canonique  $p : V \rightarrow \bar{V}$  induit par restriction un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ –espaces vectoriels  $V_a^{J,k} \rightarrow \bar{V}^{J,k}$ ;
- $\pi(f_a^J)(V_a^{J,k}) = V_a^{J,k}$ .

D’autre part, pour tout  $\gamma \in M^{\natural}$  tel que  $\text{Int}_{G^{\natural}}(\gamma)$  contracte strictement  $U$ , d’après la démonstration du point (1) du lemme 2 de [L2, 5.10], on a

$$p(\Pi(\phi_{\gamma}^J)(v)) = \bar{\Pi}(\gamma)(p(v)), \quad v \in V^J.$$

Pour un tel  $\gamma$ , et pour tout entier  $k \geq k_0$ , on a  $\phi_{a^k \cdot \gamma}^J = (f_a^J)^{**k} * \phi_{\gamma}^J$ ,  $(f_a^J)^{**k} = f_a^J * \dots * f_a^J$  ( $k$  fois); de même on a  $\phi_{a^k \cdot \gamma}^{J_M} = (f_a^{J_M})^{**k} * \phi_{\gamma}^{J_M}$ . Par suite  $\Pi(\phi_{a^k \cdot \gamma}^J)(V) \subset V_a^{J,k}$ , et puisque  $p \circ \Pi(\delta_1) = \bar{\Pi}(\delta_1) \circ p$ , on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Pi(\phi_{a^k \cdot \gamma}^J); V^J) &= \text{tr}(\Pi(\phi_{a^k \cdot \gamma}^J); V_a^{J,k}) \\ &= \text{tr}(\bar{\Pi}(a^k \cdot \gamma); \bar{V}^{J,k}) = \text{tr}(\bar{\Pi}(\phi_{a^k \cdot \gamma}^{J_M}); \bar{V}^{J_M}). \end{aligned}$$

Posant  $\phi = \phi_{a^k \cdot \gamma}^J$  et  $\phi' = \phi_{a^k \cdot \gamma}^{J_M}$ , on a  $(\omega r_{G^{\natural}}^{\mathbb{Q}^{\natural}})^*(\Phi_{\phi'}) = \Phi_{\phi}$ , par conséquent  $\phi' \in \mathcal{H}_{J_M}^*(M^{\natural})$ .

Pour un  $\delta \in M^{\natural}$  arbitraire, il existe un entier  $m \geq 1$  tel que  $\text{Int}_{G^{\natural}}(a^m \cdot \delta)$  contracte strictement  $U$ , et d'après la discussion précédente, pour tout entier  $k \geq k_0$ , la fonction

$$\phi_{a^{k+m} \cdot \delta}^{J_M} = (f_a^{J_M})^{*(k+m)} * \phi_{\delta}^{J_M}$$

est dans l'espace  $\mathcal{H}_{J_M}^*(M^{\natural})$ . Puisque les fonctions  $\phi_{\delta}^{J_M}$  engendrent le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}_{J_M}(M^{\natural})$ , on obtient que pour toute fonction  $\phi' \in \mathcal{H}_{J_M}(M^{\natural})$ , il existe un entier  $l \geq 1$  tel que  $(f_a^{J_M})^{*l} * \phi'$  appartient à  $\mathcal{H}_{J_M}^*(M^{\natural})$ .

Rappelons que l'espace  $\mathcal{H}_{J_M}(M)$ , vu comme un  $\mathcal{H}_{J_M}(M)$ -module non dégénéré pour la multiplication à gauche, est un  $\mathfrak{Z}(M)$ -module de type fini [BD, cor. 3.4]. D'après 4.5, le morphisme

$$i_{G,Q}^* : \mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}(M)$$

en fait un  $\mathfrak{Z}(G)$ -module de type fini. Puisque  $(\omega r_{G^{\natural}}^{Q^{\natural}})^*$  est un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules (4.5) et que  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(M^{\natural}, \omega)$  est un sous- $\mathfrak{Z}(M)$ -module de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \omega)^*$  (lemme 2 de 4.5),  $\mathcal{H}_{J_M}^*(M)$  est un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{H}_{J_M}(M)$ . Par suite il existe un entier  $l_0 \geq 1$  tel que

$$(f_a^{J_M})^{*l_0} * \phi' \in \mathcal{H}_{J_M}^*(M), \quad \phi' \in \mathcal{H}_{J_M}(M).$$

Puisque  $f_a^{J_M}$  est inversible dans  $\mathcal{H}_{J_M}(M)$ , on obtient le résultat cherché:

$$\mathcal{H}_{J_M}^*(M) = \mathcal{H}_{J_M}(M).$$

Cela achève la démonstration du point (2).  $\square$

**4.7. Terme constant suivant  $P^{\natural}$  et caractères des induites paraboliques (formule de descente de Van Dijk).** — Rappelons qu'on a noté  $G^1$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les sous-groupes ouverts compacts de  $G$ . D'après la remarque 1 de 2.12,  $G^1$  coïncide avec le sous-groupe

$$\bigcap_{\chi \in X_F^*(G)} \ker |\chi|_F \subset G,$$

où (rappel)  $X_F^*(G)$  désigne le groupe des caractères algébriques de  $G$  qui sont définis sur  $F$ . Soit  $K_o$  le stabilisateur dans  $G^1$  d'un sommet spécial de l'appartement de  $G$  associé à  $A_o$ .  $C$  est un sous-groupe compact maximal spécial de  $G$ , en bonne position rapport à  $(P, M_P)$  pour tout  $P \in \mathcal{P}(G)$ : on a

$$G = K_o P, \quad P \cap K_o = (P \cap M_P)(U_P \cap K_o).$$

Notons qu'on ne suppose pas que  $\theta(K_o) = K_o$  (d'ailleurs  $K_o$  n'est en général pas  $\theta$ -stable, cf. la remarque (3) de [L2, 5.2]).

Pour  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$  et  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on note  $\omega \phi_{P^{\natural}, K_o} \in \mathcal{H}(M_P^{\natural})$  le terme constant de  $\phi$  suivant  $P^{\natural}$  relativement à  $(K_o, \omega)$ , défini par [L2, 5.9]

$$\omega \phi_{P^{\natural}, K_o}(\delta) = \delta_{P^{\natural}}^{1/2}(\delta) \int \int_{U_P \times K_o} \omega(k) \phi(k^{-1} \cdot \delta \cdot uk) du_P dk, \quad \delta \in M_P^{\natural},$$

où les mesures de Haar  $d\delta$ ,  $du_P$ ,  $dk$  sur  $G^{\natural}$ ,  $U_P$ ,  $K_o$  ont été choisies de manière compatible. Précisément, on peut supposer que toutes ces mesures sont celles *normalisées par  $K_o$* , comme suit.

**DÉFINITION.** — Soit  $K$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$ . Pour tout sous-groupe fermé unimodulaire  $H$  de  $G$ , on appelle *mesure de Haar sur  $H$  normalisée par  $K$*  l'unique mesure de Haar  $dh$  sur  $H$  telle que  $\text{vol}(H \cap K, dh) = 1$ . De même, pour tout sous-espace fermé  $H^{\natural}$  de  $G^{\natural}$  de groupe sous-jacent  $H$  unimodulaire, on appelle *mesure de Haar sur  $H^{\natural}$  normalisée par*

$K$  l'image de la mesure de Haar  $dh$  sur  $H$  normalisée par  $K$  par l'isomorphisme topologique  $H \rightarrow H^{\natural}$ ,  $h \mapsto h \cdot \delta$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in H^{\natural}$ .

**HYPOTHÈSE.** — *On suppose désormais que toutes les mesures de Haar utilisées sont celles normalisées par  $K_{\circ}$ .*

On a donc

$$\text{vol}(K_{\circ} \cdot \delta_1, d\delta) = \text{vol}(K_{\circ}, dg) = \text{vol}(K_{\circ}, dk) = 1,$$

et pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on a

$$\text{vol}(M_P^{\natural} \cap (K_{\circ} \cdot \delta_1), d\delta_{M_P^{\natural}}) = \text{vol}(M_P \cap K_{\circ}, dm_P) = 1$$

et

$$\text{vol}(U_P \cap K_{\circ}, du_P) = 1.$$

Soit  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ . Pour toute  $\omega$ -représentation  $\Sigma$  de  $M_P^{\natural}$  telle que  $\Sigma^{\circ}$  est admissible, on note  $\Theta_{\Sigma}$  la distribution sur  $M_P^{\natural}$  définie comme en 2.9 à l'aide de la mesure  $d\delta_{M_P^{\natural}}$ . On a la formule de descente de Van Dijk [L2, 5.9, théo.] :

**PROPOSITION.** — *Soit  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ . Soit  $\Sigma$  une  $\omega$ -représentation de  $M_P^{\natural}$  telle que  $\Sigma^{\circ}$  est admissible, et soit  $\Pi = \omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}}(\Sigma)$ . Pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$ , on a l'égalité*

$$\Theta_{\Pi}(\phi) = \Theta_{\Sigma}(\omega_{\phi_{P^{\natural}, K_{\circ}}})$$

**4.8. Le théorème principal sur la partie “discrète”.** — Une forme linéaire  $\Phi$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  est dite “discrète” si elle est nulle sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ . On note  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*$  l'espace des formes linéaires discrètes sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , et l'on pose

$$\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*,$$

$$\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*.$$

Une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$  est dite “ $\omega$ -cuspidale” si pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ , l'image de  $\omega_{\phi_{P^{\natural}, K_{\circ}}} \in \mathcal{H}(M_P^{\natural})$  dans  $\overline{\mathcal{H}}(M_P^{\natural}, \omega)$  est nulle; où (rappel)

$$\overline{\mathcal{H}}(M_P^{\natural}, \omega) = \mathcal{H}(M_P^{\natural}) / [\mathcal{H}(M_P^{\natural}), \mathcal{H}(M_P)]_{\omega}.$$

On note  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace de  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les images dans  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  des fonctions  $\omega$ -cuspidales.

**THÉORÈME.** — *L'application  $\mathcal{H}(G^{\natural}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$ ,  $\phi \mapsto \Phi_{\phi}$  induit par restriction un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels*

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

D'après la proposition de 4.7, la transformée de Fourier  $\mathcal{H}^{\natural} \rightarrow \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\phi \mapsto \Phi_{\phi}$  induit bien une application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

**REMARQUE.** — Si  $G = M_{\circ}$ , c'est-à-dire si  $G$  est compact modulo son centre, alors on a  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ ; en ce cas le théorème ci-dessus coïncide avec le théorème principal (3.1). En général, si le théorème de 3.1 est vrai pour tous les sous-espaces tordus  $M_P^{\natural}$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ , alors d'après la proposition de 4.7, une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$  est  $\omega$ -cuspidale si et seulement si elle annule toutes les traces des représentations  $\omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}}(\Sigma)$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ ,  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ . On en déduit que si le théorème de 3.1 est vrai

en général — donc en particulier pour tous les espaces tordus  $M_P^{\natural}, P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  —, alors le théorème ci-dessus l'est aussi.  $\blacksquare$

**4.9. Réduction du théorème principal (3.1) au théorème de 4.8.** — Supposons démontré le théorème de 4.8 (en général, c'est-à-dire pour tout  $G^{\natural}$ ) et déduisons-en le théorème de 3.1. D'après la remarque de 4.8, le théorème de 3.1 est vrai pour  $G^{\natural} = M_{\mathfrak{S}}^{\natural}$ . Par récurrence sur la dimension de  $M_P$  pour  $P \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on peut donc supposer que le théorème de 3.1 est vrai pour tout sous-espace  $M_P^{\natural}, P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ .

Commençons par le théorème de Paley–Wiener, c'est-à-dire la surjectivité de l'application  $\mathcal{H}^{\natural} \rightarrow \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\phi \mapsto \Phi_{\phi}$ . D'après la proposition de 4.4 pour  $d = d(G)$ , il existe des nombres rationnels  $\lambda(P^{\natural})$  pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$  tels que le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$\mathbf{A}_d = \text{id} + \sum_{P^{\natural} \neq G^{\natural}} \lambda(P^{\natural})^{\omega} T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}$$

vérifie

$$\ker \mathbf{A}_d = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathbf{A}_d \circ \mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d.$$

Le morphisme adjoint

$$\mathbf{A}_d^* = \text{id} + \sum_{P^{\natural} \neq G^{\natural}} \lambda(P^{\natural}) (\omega r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}})^* \circ (\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}})^*$$

envoie  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$  dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ . Posons  $\Phi' = \mathbf{A}_d^*(\Phi) \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*$ . Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ , d'après la proposition de 4.6 et le théorème de Paley–Wiener pour  $M_P^{\natural}$ , on a

$$(\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}})^*(\Phi) \in \mathcal{F}(M_P^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}}(M_P^{\natural}, \omega),$$

Ensuite, d'après le point (2) de la proposition de 4.6, on a

$$(\omega r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}})^* \circ (\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}})^*(\Phi) \in \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega) \subset \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega).$$

Par conséquent  $\Phi'$  appartient à  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^* \cap \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , et d'après le théorème de 4.8, il existe une fonction  $\omega$ -cuspidale  $\phi' \in \mathcal{H}^{\natural}$  telle que  $\Phi' = \Phi_{\phi'}$ . D'autre part, on vient de voir qu'il existe une fonction  $\phi'' \in \mathcal{H}^{\natural}$  telle que

$$\sum_{P^{\natural} \neq G^{\natural}} \lambda(P^{\natural}) (\omega r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}})^* \circ (\omega i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}})^*(\Phi) = \Phi_{\phi''}.$$

On a donc

$$\Phi = \Phi_{\phi'} - \Phi_{\phi''} = \Phi_{\phi' - \phi''} \in \mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega).$$

Passons au théorème de densité spectrale, c'est-à-dire à l'injectivité de l'application  $\overline{\mathcal{H}}_{\omega}^{\natural} \rightarrow \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\phi \mapsto \Phi_{\phi}$ . Soit  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$  une fonction telle que  $\Phi_{\phi} = 0$ . Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tel que  $P^{\natural} \neq G^{\natural}$ , d'après la proposition de 4.7 et le théorème de densité spectrale pour  $M_P^{\natural}$ , le terme constant  $\phi_{P^{\natural}} = \omega \phi_{P^{\natural}, K_0}$  appartient au sous-espace  $[\mathcal{H}(M_P^{\natural}), \mathcal{H}(M_P)]_{\omega}$  de  $\mathcal{H}(M_P^{\natural})$ . Par conséquent la fonction  $\phi$  est  $\omega$ -cuspidale, et d'après le théorème de 4.8, elle est dans  $[\mathcal{H}^{\natural}, \mathcal{H}]_{\omega}$ , ce qu'il fallait démontrer.

Récapitulons. D'après ce qui précède, par récurrence sur la dimension de  $G$ , la surjectivité de l'application du théorème de 3.1 est impliquée par la surjectivité de celle du théorème de 4.8; idem pour l'injectivité. Pour démontrer le théorème principal (3.1), il suffit donc de démontrer sa variante sur la partie discrète (4.8).

### 5. Le théorème de Paley–Wiener sur la partie discrète

D’après 4.9, le théorème de Paley–Wiener est impliqué par la surjectivité de l’application du théorème de 4.8. C’est cette dernière que l’on établit dans cette section 5.

**5.1. Support cuspidal des représentations discrètes.** — Une  $\omega$ –représentation  $G$ –irréductible  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  est dite “discrète” si son image dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  n’est pas nulle; où (rappel)  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) / \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ . On note  $\text{Irr}_0^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous–ensemble de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  formé des  $\omega$ –représentations discrètes. Il s’identifie à un sous–ensemble de  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , que l’on note  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .

**LEMME.** — *Soit  $\Pi$  une  $\omega$ –représentation  $G$ –irréductible discrète de  $G^{\natural}$ . Il existe une  $\omega_{\mathbb{C}}$ –représentation  $G$ –irréductible tempérée  $\Pi'$  de  $G^{\natural}$  et un élément  $\Psi$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^{|\omega|}(G^{\natural})$  tels que  $\theta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi) = \theta_{G^{\natural}, \omega}(\Psi \cdot \Pi')$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  un triplet de Langlands associé à  $\Pi$ . Posons  $\sigma = \Sigma^{\circ}$ ,  $\xi = \Xi^{\circ}$ , et soit  $(M_{P'}, \sigma')$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $P' \subset P$  et  $\xi \cdot \sigma$  est isomorphe à un sous–quotient (irréductible) de l’induite parabolique  $i_{P'}^G(\sigma')$ . D’après la démonstration du lemme 1 de 2.14, on a une décomposition

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^m \tilde{\Pi}_{\mu_i} \pmod{\mathcal{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)}$$

où les  $\mu_i$  sont des triplets de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$  tels que  $\theta_G(\Pi_{\mu_i}^{\circ}) = [M_{P'}, \sigma']$ . Rappelons que si  $\mu = (P^{\natural}, \Sigma, \Xi)$  est un triplet de Langlands pour  $(G^{\natural}, \omega)$ , on a posé  $\tilde{\Pi}_{\mu} = \omega_{i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}}(\Xi \cdot \Pi)$ . Puisque  $\Pi$  est discrète, l’un au moins de ces triplets, disons  $\mu_{i_0}$  est de la forme  $(G^{\natural}, \Pi', \Psi)$ , et l’on a  $\theta_{G^{\natural}, \omega}(\Psi \cdot \Pi') = \theta_G(\Pi_{\mu_{i_0}}^{\circ}) = \theta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi)$ .  $\square$

**5.2. Un résultat de finitude.** — Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , on note  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  le sous–ensemble de  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}(\mathfrak{s})$  formé des  $\theta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi)$  pour un  $\Pi \in \text{Irr}_0^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .

**PROPOSITION.** — *Soit  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ . L’ensemble  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ , s’il est non vide, est union finie de  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$ –orbites.*

*Démonstration.* — On reprend la méthode de [BDK] en l’adaptant au cas tordu, comme le fait Flicker dans [F]. Cette méthode consiste à vérifier que  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est une partie *constructible* de  $\Theta(\mathfrak{s})$ , c’est–à–dire une union finie de parties localement fermés (pour la topologie de Zariski). Admettons pour l’instant ce résultat — il sera démontré en 5.5 — et déduisons–en la proposition.

Notons  $\omega^+$  le caractère  $\overline{\omega^{-1}}$  de  $G$ . L’application  $\Pi \mapsto \Pi^+ = \overline{\tilde{\Pi}}$  est une bijection de  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  sur  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega^+)$ , vérifiant  $(\Pi^+)^+ = \Pi$ . Elle commute au foncteur d’oubli  $\Pi \mapsto \Pi^{\circ}$ : en notant  $\pi \mapsto \pi^+$  l’involution de  $\text{Irr}(G)$  définie de la même manière, on a  $(\Pi^+)^{\circ} = (\Pi^{\circ})^+$ . De plus, l’involution  $\pi \mapsto \pi^+$  de  $\text{Irr}(G)$  induit par linéarité une involution de  $\mathcal{G}(G)$ , qui commute au morphisme induction parabolique  $i_P^G$ ,  $P \in \mathcal{P}(G)$ . D’où une involution “+” sur la variété algébrique complexe  $\Theta(\mathfrak{s})$ , qui commute à l’application support cuspidal  $\theta_G$ : si  $\theta_G(\pi) = [M, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$  pour une paire cuspidale standard  $(M, \rho)$  de  $G$ , on a

$$\theta_G(\pi^+) = [M, \rho^+] = \theta_G(\pi)^+.$$

On a aussi une involution  $\psi \mapsto \psi^+$  sur  $\mathfrak{P}(M)$ , donnée par  $\psi^+ = \overline{\psi^{-1}}$ . Les involutions  $+$  sur  $\mathfrak{P}(M)$  et  $\Theta(\mathfrak{s})$  sont anti-algébriques, et compatibles: pour  $[M, \rho] \in \Theta(\mathfrak{s})$  et  $\psi \in \mathfrak{P}(M)$ , on a

$$(\psi \cdot [M, \rho])^+ = [M, (\psi\rho)^+] = \psi^+ \cdot [M, \rho]^+.$$

Supposons que  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est non vide. D'après le lemme de 5.1, tout élément  $x$  de  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est de la forme  $x = \theta_G(\psi\Pi'^{\circ})$  pour une  $\omega_u$ -représentation  $G$ -irréductible tempérée  $\Pi'$  de  $G^\natural$  et un élément  $\psi$  de  $\mathfrak{P}(G^\natural)$ . Puisque  $\pi' = \Pi'^{\circ}$  est tempérée, donc en particulier unitaire, on a  $\pi'^+ = \pi'$  et

$$x^+ = \theta_G(\psi^+\pi') = \psi^+\psi^{-1} \cdot x$$

appartient à  $\mathfrak{P}(G^\natural) \cdot x$ . Ici  $\mathfrak{P}(G^\natural)$  ( $= \mathfrak{P}(G)^\theta$ ) opère sur  $\Theta(\mathfrak{s})$  via la restriction des caractères de  $G$  à  $M$ . L'involution  $+$  sur  $\Theta(\mathfrak{s})$  induit par passage au quotient une involution anti-algébrique sur la variété algébrique quotient  $\mathfrak{X} = \Theta(\mathfrak{s})/\mathfrak{P}(G^\natural)$ , que l'on note encore " $+$ ". D'après le calcul ci-dessus, cette involution  $+$  sur  $\mathfrak{X}$  fixe les points du sous-ensemble  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})/\mathfrak{P}(G^\natural)$ . Ce dernier est constructible, donc fini, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**5.3. Décomposition des fonctions régulières.** — On est donc ramené à vérifier que pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , l'ensemble  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est une partie constructible de  $\Theta(\mathfrak{s})$ . Posons  $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$  et  $\Theta' = \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ . Comme dans [BDK, 5.1], il suffit de montrer que la paire  $\Theta' \subset \Theta$  satisfait au critère suivant (loc. cit., p. 187):

- (\*) Pour toute sous-variété localement fermée  $\mathfrak{X}$  de  $\Theta$ , il existe un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que, notant  $(\mathfrak{X} \cap \Theta')^c$  le complémentaire de  $\mathfrak{X} \cap \Theta'$  dans  $\mathfrak{X}$ , l'ensemble  $\phi^{-1}((\mathfrak{X} \cap \Theta')^c)$  est vide ou égal à  $\mathfrak{Y}$  tout entier.

**DÉFINITION.** — Soit  $\mathfrak{X}$  une variété algébrique affine complexe, d'anneau de fonctions régulières  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ . Une application  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  est dite *régulière* si elle est de la forme  $x \mapsto \Pi_x$  pour un  $(G^\natural, \omega, B)$ -module admissible  $(\Pi, V)$ , où  $\Pi_x$  désigne la (semisimplifiée de la) spécialisation de  $\Pi$  en  $x$  — cf. 2.22. Une application régulière  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  est dite *irréductible* si  $\nu(\mathfrak{X}) \subset \text{Irr}(G^\natural, \omega)$ , et  *$G$ -irréductible* si  $\nu(\mathfrak{X}) \subset \text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$ . Deux applications régulières (irréductibles)  $\nu, \nu' : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Irr}(G^\natural, \omega)$  sont dites *disjointes* si  $\nu(x) \neq \nu'(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ , et elles sont dites  $\mathbb{C}^\times$ -disjointes si  $\nu(x) \neq \lambda \cdot \nu'(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ .

**REMARQUE.** — Pour chaque  $x \in \mathfrak{X}$ , la spécialisation  $\Pi_x$  de  $\Pi$  en  $x$  est une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$  de longueur finie, et puisque la représentation  $\Pi_x^\circ$  de  $G$  sous-jacente est elle aussi de longueur finie, pour tout sous-quotient irréductible  $\Pi'$  de  $\Pi_x$ , on a  $s(\Pi') < +\infty$ . Choisissons une suite de Jordan-Hölder de  $\Pi$ :

$$0 = \Pi_{x,0} \subset \Pi_{x,1} \subset \cdots \subset \Pi_{x,n} = \Pi_x.$$

Pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Pi_{x,i}$  est une sous- $\omega$ -représentation de  $\Pi$ , et le sous-quotient  $\Pi_{x,i}/\Pi_{x,i-1}$  de  $\Pi_x$  est irréductible. La semisimplifiée de  $\Pi_x$  est par définition la somme sur  $i$  des classes d'isomorphisme des  $\Pi_{x,i}/\Pi_{x,i-1}$ .  $\blacksquare$

Le lemme suivant est une variante tordue des constructions de loc. cit. (step 1 – step 2). On aurait pu se contenter de la version non tordue (cf. la proposition de 5.4), mais comme ces constructions sont au coeur du raisonnement, et qu'il nous faut de toutes façons les reprendre en détail, on préfère le faire dans le cadre tordu qui nous intéresse ici.

**LEMME.** — Soit  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G^\natural, \omega)$  une application régulière. Il existe un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ , des applications régulières  $\mu_1, \dots, \mu_m : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}(G^\natural, \omega)$  deux-à-deux disjointes, et des entiers  $a_1, \dots, a_m > 0$  tels que  $\nu \circ \phi = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i$ .

*Démonstration.* — Posons  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ , et soit  $(\Pi, V)$  un  $(G^{\natural}, \omega, B)$ -module admissible tel que  $\nu(x) = \Pi_x$ . Choisissons un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  tel que  $V^J$  engendre  $V$  comme  $\mathcal{H}$ -module, i.e. tel que  $\Pi^\circ(G)(V^J) = V$ . D'après 2.20, on peut supposer que  $J$  est "bon",  $\theta(J) = J$  et  $\omega|_J$ . C'est donc un élément de  $\mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , et  $J^{\natural} = J \cdot \delta_1$  est un élément de  $\mathbf{J}(G^{\natural}, \omega)$ . D'après 2.21, l'étude du  $(\mathcal{H}^{\natural}, \omega)$ -module non dégénéré  $V$  se ramène à celle du  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module non dégénéré  $V^J = V^{J^{\natural}}$ . En particulier, tout sous-quotient irréductible  $\Pi'$  de  $\Pi$  vérifie  $\Pi'^{J^{\natural}} \neq 0$ .

Quitte à remplacer la variété  $\mathfrak{X}$  par l'une de ses composantes irréductibles, on peut la supposer irréductible. Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{X})$  le corps des fractions de  $B$ , et soit  $\overline{\mathbb{K}}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ . Le  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module  $V^J$  est aussi un  $B$ -module de type fini. Par conséquent  $W = \mathbb{K} \otimes_B V^J$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\overline{W} = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} W$  est un  $\overline{\mathbb{K}}$ -espace vectoriel de dimension finie, et il existe une suite de  $\overline{\mathbb{K}}$ -espaces vectoriels

$$0 = \overline{W}_0 \subset \overline{W}_1 \subset \cdots \subset \overline{W}_n = \overline{W}$$

telle que pour  $i = 1, \dots, n$ :

- $\overline{W}_i$  est un sous- $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module de  $\overline{W}$ ;
- $\overline{W}_i/\overline{W}_{i-1}$  est un  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module simple sur  $\overline{\mathbb{K}}$ .

De plus, il existe une sous-extension finie  $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$  de  $\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ , un sous- $\mathbb{K}'$ -espace vectoriel  $W'$  de  $\overline{W}$  de dimension finie, et une suite de  $\mathbb{K}'$ -espaces vectoriels

$$0 = W'_0 \subset W'_1 \subset \cdots \subset W'_n = W'$$

telle que pour  $i = 1, \dots, n$ :

- $W'_i$  est un sous- $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module de  $W'$ ;
- $\overline{W}_i = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}'} W'_i$ .

Ainsi pour  $i = 1, \dots, n$ , le quotient  $X'_i = W'_i/W'_{i-1}$  est un  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module simple sur  $\mathbb{K}'$ . D'après la remarque 2 de 2.8,  $X'_i$  est un  $\mathcal{H}_J$ -module semisimple sur  $\mathbb{K}'$ . Précisément, on choisit un sous- $\mathcal{H}_J$ -module simple (sur  $\mathbb{K}'$ )  $X'_{i,0}$  de  $X'_i$ , et pour chaque entier  $k \geq 1$ , on note  $X'_{i,k}$  le sous- $\mathcal{H}_J$ -module simple de  $X'_i$  défini par  $X'_{i,k} = e_{J^{\natural}} \cdot X'_{i,k-1}$ . Alors il existe un plus petit entier  $s = s(i) \geq 1$  tel que

$$X'_i = X'_{i,0} \oplus X'_{i,1} \oplus \cdots \oplus X'_{i,s-1}.$$

D'après le théorème de Burnside,  $\mathcal{H}_J$  engendre l'espace  $\text{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,k})$  sur  $\mathbb{K}'$ .

Le corps  $\mathbb{K}'$  est une extension finie séparable de  $\mathbb{K}$ , par suite il existe une variété algébrique affine irréductible  $\mathfrak{Y}'$  étale sur  $\mathfrak{X}$  (c'est-à-dire un morphisme dominant étale  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$ ) telle que  $\mathbb{K}' = \mathbb{C}(\mathfrak{Y}')$ . Notons  $B' = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}']$  l'algèbre affine de  $\mathfrak{Y}'$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Choisissons une  $\mathbb{K}'$ -base de  $X'_{i,0}$ , et notons  $Y'_{i,0}$  le sous- $B'$ -module de  $X'_{i,0}$  engendré par cette base. On a donc  $\mathbb{K}' \otimes_{B'} Y'_{i,0} = X'_{i,0}$ . Rappelons que  $\mathcal{H}_J$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini. Puisque

$$\text{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,0}) = \mathbb{K}' \otimes_{B'} \text{End}_{B'}(Y'_{i,0})$$

et que  $\mathcal{H}_J$  engendre  $\text{End}_{\mathbb{K}'}(X'_{i,0})$  sur  $\mathbb{K}'$ , il existe un ouvert dense  $\mathfrak{Y}_i$  de  $\mathfrak{Y}'$  (ce qui revient à inverser certains éléments de  $B'$ ) tel que, notant  $B_i = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$  l'algèbre affine de  $\mathfrak{Y}_i$ , on a:

- $Y_{i,0} = B_i \otimes_{B'} Y'_{i,0}$  est libre (de type fini) sur  $B_i$ ;
- $\mathcal{H}_J \subset \text{End}_{B_i}(Y_{i,0})$ ;
- $\mathcal{H}_J$  engendre  $\text{End}_{B_i}(Y_{i,0})$  sur  $B_i$ .

Pour  $k = 1, \dots, s(i) - 1$ , posons  $Y_{i,k} = e_{J^{\natural}} \cdot Y_{i,0}$ . C'est un sous- $(\mathcal{H}_J \otimes_{\mathbb{C}} B_i)$ -module de  $X'_{i,k}$ , qui vérifie  $\mathbb{K}' \otimes_{B_i} Y_{i,k} = X'_{i,k}$ . On obtient ainsi un sous- $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module (non dégénéré)

$$Y_i = Y_{i,0} \oplus \cdots \oplus Y_{i,s(i)-1}$$

de  $X'_i$ , qui est aussi un  $B_i$ -module libre de type fini, tel que  $\mathcal{H}_J^{\natural}$  engendre  $\text{End}_{B_i}(Y_i)$  sur  $B_i$ . Pour  $y \in \mathfrak{Y}_i$ , la spécialisation  $(Y_{i,0})_y$  de  $Y_{i,0}$  en  $y$  est un  $\mathcal{H}_J$ -module simple, et la spécialisation  $(Y_i)_y$  de  $Y_i$  en  $y$  est un  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module simple. Notons  $\Pi_i$  la  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  d'espace  $\mathcal{H} * e_J \otimes_{\mathcal{H}_J} Y_i$  correspondant au  $(\mathcal{H}_J^{\natural}, \omega)$ -module non dégénéré  $Y_i$  (2.21). C'est un  $(G^{\natural}, \omega, B_i)$ -module admissible tel que pour  $y \in \mathfrak{Y}_i$ , la spécialisation  $\Pi_{i,y}$  de  $\Pi_i$  en  $y$  est irréductible (elle est  $G$ -irréductible si et seulement si  $s(i) = 1$ ).

Notons  $\mathfrak{Y}$  l'intersection des  $\mathfrak{Y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . C'est un ouvert dense de  $\mathfrak{Y}'$ , étale sur  $\mathfrak{X}$ . La composition des morphismes  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{Y}'$  est un morphisme dominant étale  $\nu : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ . Pour  $y \in \mathfrak{Y}$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$ :

$$\Pi_{\nu(y)} = \sum_{i=1}^n \Pi_{i,y}.$$

En regroupant les indices  $i$  tels que les fonctions  $\mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $y \mapsto \Pi_{i,y}$  sont égales, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\Pi_{\nu(y)} = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i(y)$$

pour des applications régulières  $\mu_i : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$  deux-à-deux distinctes et des entiers  $a_1, \dots, a_m > 0$ . Pour  $i \neq j$ , l'ensemble des  $y \in \mathfrak{Y}$  tels que  $\mu_i(y) = \mu_j(y)$  est fermé dans  $\mathfrak{Y}$  pour la topologie de Zariski. Quitte à remplacer  $\mathfrak{Y}$  par un ouvert plus petit, on peut supposer les fonctions  $\mu_i$  deux-à-deux disjointes. Cela achève la démonstration du lemme.  $\square$

**5.4. Une conséquence du lemme de décomposition.** — La définition de 5.3 s'applique bien sûr au cas non tordu: si  $\mathfrak{X}$  est une variété algébrique affine complexe, d'anneau de fonctions régulières  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ , une application  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G)$  est dite *régulière* si elle est de la forme  $x \mapsto \pi_x$  pour un  $(G, B)$ -module admissible  $(\pi, V)$ , où  $\pi_x$  est la (semisimplifiée de la) spécialisation de  $\pi$  en  $x$ . Toute application régulière  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G^{\natural}, \omega)$  induit une application régulière  $\nu^{\circ} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G)$ , donnée par  $\nu^{\circ}(x) = \nu(x)^{\circ}$ ,  $x \in \mathfrak{X}$ . Notons que deux applications régulières ( $G$ -irréductibles)  $\nu, \nu' : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  sont  $\mathbb{C}^{\times}$ -disjointes si et seulement si les applications régulières sous-jacentes  $\nu^{\circ}, \nu'^{\circ} : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Irr}(G)$  sont disjointes.

Rappelons que le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^{\circ}$  induit une application injective

$$\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)/\mathbb{C}^{\times} \hookrightarrow \text{Irr}(G)$$

d'image le sous-ensemble  $\text{Irr}_1(G) = \text{Irr}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  de  $\text{Irr}(G)$  formé des  $\pi$  tels que  $\pi(1) = \pi$ . Soit  $\mathcal{G}_1(G)$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G)$  engendré par  $\text{Irr}_1(G)$  — c'est aussi un quotient de  $\mathcal{G}(G)$  — et

$$q_1 : \mathcal{G}(G) \rightarrow \mathcal{G}_1(G)$$

la projection canonique. Par définition, le foncteur d'oubli  $\Pi \mapsto \Pi^{\circ}$  induit un morphisme de groupes surjectif  $\mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_1(G)$ , de noyau le sous-groupe de  $\mathcal{G}_0(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  $\Pi - \lambda \cdot \Pi$  pour  $\Pi \in \text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ .

**PROPOSITION.** — *Soit  $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{G}(G)$  une application régulière. Il existe un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ , des applications régulières  $\mu_1, \dots, \mu_m : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$  deux-à-deux  $\mathbb{C}^{\times}$ -disjointes, et des entiers  $a_1, \dots, a_m > 0$ , tels que  $q_1 \circ \nu \circ \phi = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i^{\circ}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ . Par définition l'application  $\nu$  est de la forme  $x \mapsto \pi_x$  pour un  $(G, B)$ -module admissible  $(\pi, V)$ . On choisit un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  comme dans la démonstration du lemme de 5.3, i.e. tel que  $V^J$  engendre  $V$  comme  $\mathcal{H}$ -module,  $J$  est "bon",  $\theta(J) = J$  et  $\omega|_J = 1$ . On peut aussi supposer  $\mathfrak{X}$  irréductible. D'après le lemme de 5.3, il existe un morphisme dominant étale  $\phi' : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$ , des applications régulières

$\mu'_1, \dots, \mu'_n : \mathfrak{Y}' \rightarrow \text{Irr}(G)$  deux-à-deux disjointes, et des entiers  $a'_1, \dots, a'_n > 0$ , tels que  $\nu \circ \phi' = \sum_{i=1}^n a'_i \mu'_i$ . Précisément,  $\mathfrak{Y}'$  est une variété algébrique affine complexe irréductible, d'anneau de fonctions régulières  $B' = \mathbb{C}[\mathfrak{Y}']$ , et pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $\mu'_i(y) = \pi_{i,y}$  pour un  $(G, B')$ -module admissible  $(\pi_i, V_i)$  tel que:

- $W_i = (V_i)^J$  engendre  $V_i$  comme  $G$ -module,
- $\mathcal{H}_J$  engendre  $\text{End}_{B'}(W_i)$  comme  $B'$ -module.

Pour chaque  $y \in \mathfrak{Y}'$ , le  $\mathcal{H}_J$ -module  $W_{i,y} = (V_{i,y})^J$  est simple, et pour  $i \neq j$ , les  $\mathcal{H}_J$ -modules simples  $W_{i,y}$  et  $W_{j,y}$  sont non isomorphes.

Pour  $i = 1, \dots, n$ , notons  $(\pi_i(1), V_i(1))$  le  $(G, B')$ -module admissible défini par  $V_i(1) = V_i$  et  $\pi_i(1) = \omega^{-1}(\pi_i)^\theta$ . Pour  $y \in \mathfrak{Y}'$ , la spécialisation  $\pi_i(1)_y$  de  $\pi_i(1)$  en  $y$  est donnée par

$$\pi_i(1)_y = \omega^{-1}(\pi_{i,y})^\theta = \pi_{i,y}(1).$$

L'application

$$\mu'_i(1) : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{G}(G), y \mapsto \pi_i(1)_y$$

est encore régulière. Notons  $W_i(1)$  le  $(\mathcal{H}_J \otimes_{\mathbb{C}} B')$ -module  $V_i(1)^J = (V_i)^J$  déduit de  $\pi_i(1)$  par passage aux points fixes sous  $J$ . Soit  $\mathbb{K}' = \mathbb{C}(\mathfrak{Y}')$  le corps des fractions de  $B'$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , les  $\mathcal{H}_J$ -modules  $W_{i,\mathbb{K}'} = \mathbb{K}' \otimes_{B'} W_i$  et  $\mathbb{K}' \otimes_{B'} W_i(1)$  sont simples (sur  $\mathbb{K}'$ ), et l'on note  $I_0$  le sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  formé des indices  $i$  tels qu'ils sont isomorphes. D'après [L2, A.3], pour  $i \in I_0$ , il existe un  $\mathbb{K}'$ -automorphisme  $A_{i,\mathbb{K}'}$  de  $W_{i,\mathbb{K}'}$  tel que

$$A_{i,\mathbb{K}'}(\omega f \cdot v) = {}^\theta f \cdot A_{i,\mathbb{K}'}(v), \quad f \in \mathcal{H}_J, v \in W_{i,\mathbb{K}'},$$

où l'on a posé  ${}^\theta f = f \circ \theta^{-1}$ . Puisque  $W_{i,\mathbb{K}'}$  est de dimension finie sur  $\mathbb{K}'$ , il existe un ouvert  $\mathfrak{Y}_i$  de  $\mathfrak{Y}'$  tel que  $A_{i,\mathbb{K}'}$  induit par localisation un  $\mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$ -automorphisme de  $W_i$ , disons  $A_i$ . Cela munit  $W_i$  d'une structure de  $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$ -module non dégénéré, l'action de  $\mathcal{H}_J^\natural$  commutant à celle de  $\mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i]$ . Soit  $\Pi_i$  la  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$  d'espace  $V_i = (\mathcal{H} * e_J) \otimes_{\mathcal{H}_J} W_i$  correspondant au  $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$ -module  $W_i$  (2.21). Notons que  $A_i$  coïncide avec la restriction de  $\Pi_i(\delta_1)$  à  $W_i = (V_i)^J$ . Par construction,  $(\Pi_i, V_i)$  est un  $(G^\natural, \omega, \mathbb{C}[\mathfrak{Y}_i])$ -module admissible tel que pour  $y \in \mathfrak{Y}_i$ , la spécialisation  $\Pi_{i,y}$  de  $\Pi_i$  en  $y$  est une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$ .

L'intersection  $\mathfrak{Y} = \bigcap_{i \in I_0} \mathfrak{Y}_i$  est un ouvert (dense) de  $\mathfrak{Y}'$ , et pour  $i \in I_0$ , l'application régulière

$$\mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}_0(G^\natural, \omega), y \mapsto \mu_i(y) = \Pi_{i,y}$$

vérifie  $\mu_i^\circ(y) = \mu'_i(y)$ , où  $\mu'_i : \mathfrak{Y}' \rightarrow \text{Irr}(G)$  est l'application régulière introduite en début de démonstration. La composition des morphismes  $\phi' : \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{Y}'$  est un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ , et pour  $y \in \mathfrak{Y}$ , on a

$$q_1 \circ \nu \circ \phi(y) = \sum_{i \in I_0} a'_i \mu'_i(y).$$

Puisque par construction les applications  $\mu_i$  (pour  $i \in I_0$ ) sont deux-à-deux  $\mathbb{C}^\times$ -disjointes, la proposition est démontrée.  $\square$

**COROLLAIRE.** — Soit  $\nu_1, \dots, \nu_m : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(G)$  des applications régulières, et  $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$  des applications régulières deux-à-deux  $\mathbb{C}^\times$ -disjointes. Soit  $\mathfrak{X}'$  l'ensemble des  $x \in \mathfrak{X}$  tels que  $\{\mu_1^\circ(x), \dots, \mu_n^\circ(x)\}$  est contenu dans le sous-groupe de  $\mathfrak{G}_1(G)$  engendré par  $q_1 \circ \nu_1(x), \dots, q_1 \circ \nu_m(x)$ . Il existe un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $\phi^{-1}(\mathfrak{X}')$  est soit vide soit égal à  $\mathfrak{Y}$  tout entier.

*Démonstration.* — D'après la proposition, il existe un morphisme dominant étale  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  et des applications régulières  $\lambda_1, \dots, \lambda_s : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}_0(G^\natural, \omega)$  tels que pour  $i = 1, \dots, m$ ,

l'application  $q_1 \circ \nu_i \circ \phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathcal{G}_1(G)$  se décompose en

$$q_1 \circ \nu_i \circ \phi = \sum_{j=1}^s a_{i,j} \lambda_j^\circ$$

pour des entiers  $a_{i,j} > 0$ . Quitte à remplacer  $\mathfrak{Y}$  par un ouvert plus petit, on peut supposer que les applications  $\lambda_1^\circ, \dots, \lambda_s^\circ : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}_{G^\natural, \omega}(G)$  sont deux-à-deux disjointes, et que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $j \in \{1, \dots, s\}$ , les applications  $\mu_k^\circ \circ \phi$  et  $\lambda_j^\circ$  sont soit égales soit disjointes. Supposons  $\phi^{-1}(\mathfrak{X}') \neq \emptyset$  et soit  $y \in \phi^{-1}(\mathfrak{X}')$ . On a forcément  $n \leq s$  et quitte à réordonner les  $\lambda_j$ , on peut supposer que  $\mu_k^\circ \circ \phi = \lambda_k^\circ$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Par hypothèse, pour  $k = 1, \dots, n$ , il existe des entiers  $b_{k,i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) tels que

$$\mu_k^\circ \circ \phi(y) = \sum_{i=1}^m b_{k,i} \sum_{j=1}^s a_{i,j} \lambda_j^\circ(y).$$

Pour  $k = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, s$ , on a donc

$$\sum_{i=1}^m b_{k,i} a_{i,j} = \delta_{k,j}.$$

Par suite  $\phi^{-1}(\mathfrak{X}') = \mathfrak{Y}$  et le lemme est démontré.  $\square$

**5.5. La partie  $\Theta' = \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  de  $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$  est constructible.** — Montrons que la paire  $\Theta' \subset \Theta$  satisfait au critère (\*) de 5.3. On peut supposer que  $\Theta'$  est non vide. Soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $[M_P, \rho] \in \Theta$ . Pour  $Q \in \mathcal{P}(G)$  tel que  $P \subset Q$ , notons  $\eta_Q : \mathfrak{P}(M_P) \rightarrow \mathcal{G}(M_Q)$  l'application régulière définie par

$$\eta_Q(\psi) = i_P^Q(\psi\rho).$$

Pour  $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on définit comme en 5.3 la projection canonique  $q_{Q,1} : \mathcal{G}(M_Q) \rightarrow \mathcal{G}_1(M_Q)$ , où  $\mathcal{G}_1(M_Q)$  est le sous-groupe de  $\mathcal{G}(M_Q)$  engendré par les représentations  $\sigma \in \text{Irr}(M_Q)$  telles que  $\omega^{-1}\sigma^\theta = \sigma$ .

Soit  $\mathfrak{X}$  une sous-variété localement fermée de  $\Theta$ . Puisque le morphisme

$$\mathfrak{P}(M_P) \rightarrow \Theta, \psi \mapsto [M_P, \psi\rho]$$

est dominant (et même fini) étale, il existe une sous-variété  $\tilde{\mathfrak{X}}$  de  $\mathfrak{P}(M_P)$  telle que l'ensemble  $\{[M_P, \psi\rho] : \psi \in \tilde{\mathfrak{X}}\}$  est contenu dans  $\mathfrak{X}$  et le morphisme

$$\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}, \psi \mapsto [M_P, \psi\rho]$$

est dominant étale. D'après la proposition de 5.4, il existe un morphisme dominant étale  $\tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$  tel que pour chaque  $Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  contenant  $P^\natural$ , l'application régulière

$$\tilde{\eta}_Q = \eta_Q \circ \tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathcal{G}(M_Q)$$

composée avec la projection canonique  $q_{Q,1} : \mathcal{G}(M_Q) \rightarrow \mathcal{G}_1(M_Q)$  se décompose en

$$q_{Q,1} \circ \tilde{\eta}_Q = \sum_{i=1}^{m(Q^\natural)} a_{Q^\natural, i} \mu_{Q^\natural, i}^\circ$$

où:

- $\mu_{Q^\natural, 1}, \dots, \mu_{Q^\natural, m(Q^\natural)}^\circ : \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Irr}_0(M_Q^\natural, \omega)$  sont des applications régulières deux-à-deux  $\mathbb{C}^\times$ -disjointes;
- $a_{Q^\natural, 1}, \dots, a_{Q^\natural, m(Q^\natural)}$  sont des entiers  $> 0$ .

Posons  $n = m(G^{\natural})$  et  $\mu_i = \mu_{G^{\natural}, i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Pour  $Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$  contenant  $P^{\natural}$  et  $i = 1, \dots, m(Q^{\natural})$ , l'application

$$\nu_{Q, i} = i_Q^G \circ \mu_{Q^{\natural}, i}^{\circ} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{G}(G)$$

est régulière. La famille des  $\nu_{Q, i} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{G}(G)$  obtenue en faisant varier  $Q^{\natural} (\neq G^{\natural})$  et  $i$  de cette manière, est notée  $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ . L'ensemble des points  $y \in \mathfrak{Y}$  tels que  $\{\mu_1^{\circ}(y), \dots, \mu_n^{\circ}(y)\}$  est contenu dans le sous-groupe de  $\mathfrak{G}_1(G)$  engendré par  $q_1 \circ \nu_1(y), \dots, q_1 \circ \nu_m(y)$  est exactement l'image réciproque du complémentaire  $(\mathfrak{X} \cap \Theta')^c$  de  $\mathfrak{X} \cap \Theta'$  dans  $\mathfrak{X}$  par le morphisme dominant étale

$$\phi = (\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}) \circ \tilde{\phi} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}.$$

On conclut grâce au corollaire de 5.4. Puisque  $\Theta'$  vérifie la propriété (\*) de 5.3, c'est une partie constructible de  $\Theta$ . Cela achève la démonstration de la proposition de 5.2.

**5.6. Décomposition des espaces  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .** — Pour tout sous-ensemble  $Y$  de  $\Theta(G)$ , on note  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  engendré par les  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  tels que  $\theta_{G^{\natural}, \omega}(\Pi) \in Y$ . On a la décomposition

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = \bigoplus_y \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; y)$$

où  $y$  parcourt les éléments de l'ensemble  $Y \cap \Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ . Dualement, pour  $Y \subset \Theta(G)$ , on note  $\mathcal{F}_Y(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*$  formé des restrictions à  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  des éléments de  $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ , et pour  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(G)$ , on pose

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\Theta(\mathfrak{S})}(G^{\natural}, \omega), \quad \Theta(\mathfrak{S}) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \Theta(\mathfrak{s}).$$

On a la décomposition

$$\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{F}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}(G^{\natural})$ .

**REMARQUE.** — Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , notant  $z_{\mathfrak{s}}$  l'élément unité de l'anneau  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$ , on a l'égalité  $\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega) = z_{\mathfrak{s}} \cdot \mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ . ■

Posons

$$\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s}).$$

Pour  $Y \subset \Theta(G)$ , on note  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  la projection de  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , et l'on pose

$$\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_Y(G^{\natural}, \omega) \cap \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \subset \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*.$$

Pour  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(G)$ , on pose

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\Theta(\mathfrak{S})}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

Pour  $Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$  et  $\Sigma \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(M_Q^{\natural}, \omega)$ , l'élément  ${}^{\omega}i_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Sigma)$  de  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$  appartient à  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; \Theta(\mathfrak{s}))$ , où  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$  est la classe d'équivalence inertielle de  $i_{G, Q}(\theta_{M_Q}(\Sigma^{\circ})) \in \Theta(G)$ . On a donc l'égalité

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega) \cap \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; \Theta(\mathfrak{s})).$$

Puisque  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^* \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G))^*$ , on en déduit la décomposition

$$\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de l'ensemble  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G) = \beta_{G^{\natural}, \omega}(\text{Irr}_0^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega))$  — le sous-ensemble de  $\mathfrak{B}(G)$  formé des  $\mathfrak{s}$  tels que  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est non vide.

En remplaçant  $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$  par  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega)$ , on définit de la même manière le sous-espace  $\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}(G^{\natural}, \omega)$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*$  (pour  $Y \subset \Theta(G)$ ), et l'on pose  $\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}, \Theta(\mathfrak{S})}(G^{\natural}, \omega)$  (pour  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(G)$ ). On a la décomposition

$$\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ . De même, posant

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}, Y}(G^{\natural}, \omega) \cap \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), \quad Y \subset \Theta(G),$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{S}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_{\text{tr}, \Theta(\mathfrak{S})}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}(G),$$

on a la décomposition

$$\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

Pour démontrer la surjectivité dans le théorème de 4.8, il suffit de démontrer que pour chaque  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , l'inclusion

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

est une égalité. En effet, supposons cette égalité prouvée. Alors puisqu'on a la décomposition  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_{\mathfrak{s}} \mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  où  $\mathfrak{s}$  parcourt les éléments de  $\mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , on a l'égalité  $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ . En d'autres termes, pour tout élément  $\Phi \in \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , il existe une fonction  $\phi \in \mathcal{H}^{\natural}$  telle que  $\Phi = \Phi_{\phi}$ . Puisque  $\Phi$  est une forme linéaire discrète sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , la fonction  $\phi$  annule les traces de toutes les représentations  $\omega_{i_{P^{\natural}} G^{\natural}}(\Sigma)$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ ,  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega)$ . En supposant, par récurrence sur la dimension de  $G$ , que le théorème de 4.8 est vrai pour tous les sous-espaces tordus  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ , on obtient (grâce à la proposition de 4.7 et au théorème de densité spectrale pour  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ ) que la fonction  $\phi$  est  $\omega$ -cuspidale.

Le lemme suivant est impliqué par la propriété d'indépendance linéaire des caractères-distributions des  $\omega$ -représentations  $G$ -irréductibles de  $G^{\natural}$  [L2, A.5, prop.].

**LEMME.** — *Pour tout sous-ensemble fini  $Y$  de  $\Theta(G)$ , on a l'égalité*

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*.$$

**REMARQUE.** — Notons que si le groupe  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$  est fini, alors pour chaque  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , l'ensemble  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$  est fini (proposition de 5.2), et on a l'égalité cherchée:

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; \Theta(\mathfrak{s}))^* = \mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

En effet, posant  $Y = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ , d'après le lemme on a l'égalité

$$\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)^* = \mathcal{F}_Y(G^{\natural}, \omega).$$

Il suffit ensuite d'intersecter ces espaces avec le sous-espace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)^*$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$ . ■

**5.7. Surjectivité dans le théorème de 4.8.** — L'idée consiste à se ramener au lemme de 5.6, comme dans [BDK, 4.2].

Rappelons que  $A_G$  est le tore central déployé maximal de  $G$ . Choisissons une uniformisante  $\varpi$  de  $F$  et identifions le groupe  $\text{Hom}(A_G^{\varpi}, \mathbb{C}^\times)$  à  $\mathfrak{P}(A_G)$  comme dans l'exemple de 2.12. Pour  $u \in \mathcal{H}(A_G)$ , on note  $z(u)$  l'élément de  $\mathfrak{Z}(G)$  défini par

$$z(u)_\pi = \int_{A_G} u(a)\pi(a)da, \quad \pi \in \text{Irr}(G);$$

où  $da$  est la mesure de Haar sur  $A_G$  qui donne le volume 1 à  $A_G^1$ . L'algèbre  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(A_G)]$  des fonctions régulières sur la variété  $\mathfrak{P}(A_G)$ , identifiée à l'algèbre de groupe  $\mathbb{C}[A_G^{\varpi}]$ , est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}(A_G)$ ; d'où un morphisme d'algèbres  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(A_G)] \rightarrow \mathfrak{Z}(G)$ . Pour chaque  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , on peut composer ce morphisme d'algèbres avec la projection canonique  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ . Le morphisme de variétés correspondant  $\eta_\mathfrak{s} : \Theta(\mathfrak{s}) \rightarrow \mathfrak{P}(A_G)$  est donné par

$$\eta_\mathfrak{s}(\theta_G(\pi)) = \omega_\pi|_{A_G^{\varpi}}, \quad \pi \in \beta_G^{-1}(\mathfrak{s}).$$

Notons que ce morphisme  $\eta_\mathfrak{s}$  est  $\mathfrak{P}(G)$ -équivariant pour l'action (algébrique) de  $\mathfrak{P}(G)$  sur  $\mathfrak{P}(A_G)$  donnée par  $(\psi, \chi) \mapsto (\psi|_{A_G})\chi$ , pour  $\psi \in \mathfrak{P}(G)$  et  $\chi \in \mathfrak{P}(A_G)$ .

Comme pour  $A_G$ , on identifie le groupe  $\text{Hom}(A_{G^\natural}^{\varpi}, \mathbb{C}^\times)$  à  $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ ; où (rappel)  $A_{G^\natural}$  est le tore déployé maximal du centre  $Z^\natural$  de  $G^\natural$ . L'action de  $\mathfrak{P}(G)$  sur  $\mathfrak{P}(A_G)$  induit par restriction une action (algébrique) de  $\mathfrak{P}(G^\natural)$  sur  $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ . L'application  $\mathfrak{P}(G^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ ,  $\psi \mapsto \psi|_{A_{G^\natural}}$  est un morphisme surjectif de groupes algébriques, de noyau fini (cf. 4.3). En particulier c'est un morphisme fini, donc étale (puisqu'il est lisse).

Fixons  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$  et posons  $Y = \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ . Posons aussi  $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ . Par restriction,  $\eta_\mathfrak{s}$  induit une application  $\mathfrak{P}(G^\natural)$ -équivariante  $\eta_Y : Y \rightarrow \mathfrak{X}$ , donnée par

$$\eta_Y(\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi)) = \omega_\Pi|_{A_{G^\natural}^{\varpi}}, \quad \Pi \in \theta_{G^\natural, \omega}^{-1}(Y).$$

Pour  $\Pi \in \theta_{G^\natural, \omega}^{-1}(Y)$  et  $\psi \in \mathfrak{P}(G^\natural)$ , elle vérifie

$$\eta_Y(\psi \cdot \theta_{G^\natural, \omega}(\Pi)) = \psi|_{A_{G^\natural}^{\varpi}} \cdot \eta_Y(\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi)).$$

Comme  $Y$  est union d'un nombre fini de  $\mathfrak{P}(G^\natural)$ -orbites (proposition de 5.2), et que pour chacune de ces orbites le stabilisateur dans  $\mathfrak{P}(G^\natural)$  est fini, l'application  $\eta_Y$  est un morphisme fini étale de variétés algébriques affines lisses. Ainsi le comorphisme  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}] \rightarrow \mathbb{C}[Y]$  fait de  $\mathbb{C}[Y]$  un  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ -module de type fini. En particulier, l'espace  $\mathcal{E}_Y = \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega; Y)^*$  est un  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ -module de type fini pour l'action de  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$  donnée par  $(\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{X}], \Phi \in \mathcal{E}_Y, \Pi \in \theta_{G^\natural, \omega}^{-1}(Y))$

$$(\varphi \cdot \Phi)(\Pi) = \varphi(\omega_\Pi|_{A_{G^\natural}^{\varpi}})\Phi(\Pi).$$

En d'autres termes,  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$  opère sur  $\mathcal{E}_Y$  via le morphisme d'algèbres  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}] \rightarrow \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}, 1}$ ,  $\varphi \mapsto z_\varphi$  donné par  $(z_\varphi)_\Pi = \varphi(\omega_\Pi|_{A_{G^\natural}^{\varpi}})\text{id}_{V_\Pi}$  pour tout objet irréductible  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ , cf. 2.19. On en déduit que les espaces  $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  et  $\mathcal{F}'_Y = \mathcal{F}'_{\text{tr}, Y}(G^\natural, \omega)$  sont des sous- $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ -modules de  $\mathcal{E}_Y$ . L'action de  $\mathfrak{P}(G^\natural)$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)^*$  définie en 4.5 induit une action sur  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)^*$ , et les espaces  $\mathcal{E}_Y$ ,  $\mathcal{F}_Y$  et  $\mathcal{F}'_Y$  sont stables pour cette action.

Soit  $x \in \mathfrak{X}$  correspondant à  $u : \mathbb{C}[\mathfrak{X}] \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour tout  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ -module  $E$ , on note  $E_x$  la fibre  $E_{\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{X}], u} \mathbb{C}}$  de  $E$  au-dessus de  $x$ . Comme le morphisme  $\eta_Y : Y \rightarrow \mathfrak{X}$  est fini et lisse, l'ensemble  $Y_x = \eta_Y^{-1}(x)$  est fini et la fibre  $\mathbb{C}[Y]_x$  coïncide avec  $\mathbb{C}[Y_x]$ , i.e. la "fibre géométrique" au-dessus de  $x$  est régulière. D'après le lemme de 5.6, on a l'égalité  $\mathcal{F}'_{Y_x} = \mathcal{E}_{Y_x}$ . En d'autres termes, posant  $\mathfrak{p}_x = \ker u$ , on a l'inclusion

$$\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{F}'_Y + \mathfrak{p}_x \cdot \mathcal{E}_Y.$$

Posons  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_Y/\mathcal{F}'_Y$  et  $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_Y/\mathcal{F}'_Y \subset \bar{\mathcal{E}}$ . D'après l'inclusion ci-dessus, on a  $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{p}_x \cdot \bar{\mathcal{E}}$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ . Puisque  $\bar{\mathcal{E}}$  est un  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}]$ -module de type fini, il est localement libre en presque tout point de  $\mathfrak{X}$ . Comme d'après le lemme 2 de 4.5,  $\bar{\mathcal{E}}$  est  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ -équivariant, il est localement libre en tout point de  $\mathfrak{X}$ , et l'inclusion  $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{p}_x \cdot \bar{\mathcal{E}}$  ( $x \in \mathfrak{X}$ ) implique que  $\bar{\mathcal{F}} = 0$ ; ce qu'on voulait démontrer.

## 6. Le théorème de densité spectrale sur la partie discrète

D'après 4.9, le théorème de densité spectrale est impliqué par l'injectivité de l'application du théorème de 4.8. C'est cette dernière que l'on établit dans cette section 6.

Dans les numéros 6.1–6.8 on identifie  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  à un facteur direct d'une variante tordue, notée  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , du cocentre de la catégorie  $\mathfrak{R}(G)$  [D, 5.1]. Pour cela, on commence par établir des résultats assez généraux dans un "contexte à la Morita" tordu (6.1–6.4). L'espace  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module, et donc d'une filtration topologique (6.12). L'idée — due à Bernstein — est de comparer cette filtration topologique avec la filtration combinatoire donnée par les foncteurs de Jacquet (6.11). Le principe de la démonstration est exposé en 6.10 et les détails apparaissent dans les numéros 6.13–6.25.

**6.1. Trace tordue pour les modules projectifs de type fini.** — Soit  $A$  un anneau (à unité, mais pas forcément commutatif), et soit  $A^{\natural}$  un  $A$ -bimodule, libre de rang 1 comme  $A$ -module à gauche et aussi comme  $A$ -module à droite. Tout élément  $a^{\natural}$  de  $A^{\natural}$  qui engendre  $A^{\natural}$  à gauche sur  $A$ , i.e. tel que  $A^{\natural} = A \cdot a^{\natural}$ , définit un endomorphisme  $\gamma_{a^{\natural}}$  de l'anneau  $A$ , donné par

$$a^{\natural} \cdot a = \gamma_{a^{\natural}}(a) \cdot a^{\natural}.$$

Si de plus  $a^{\natural}$  engendre  $A^{\natural}$  à droite sur  $A$ , i.e. si  $a^{\natural} \cdot A = A^{\natural}$ , alors  $\gamma_{a^{\natural}}$  est un automorphisme. L'ensemble des générateurs à gauche et à droite de  $A^{\natural}$  sur  $A$ , s'il est non vide, est un  $A^{\times}$ -espace tordu, où  $A^{\times}$  désigne le groupe des éléments inversibles de  $A$ . On le note  $A^{\natural, \times}$ .

**HYPOTHÈSE.** — On suppose que  $A^{\natural, \times}$  est non vide.

**DÉFINITION.** — Comme en 2.8, on appelle  $A^{\natural}$ -module la donnée d'un  $A$ -module  $V$  et d'une application  $A^{\natural} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(V)$ ,  $a^{\natural} \mapsto (v \mapsto a^{\natural} \cdot v)$  telle que pour tout  $a^{\natural} \in A^{\natural}$ , tous  $a, a' \in A$  et tout  $v \in V$ , on a

$$(a \cdot a^{\natural} \cdot a')(v) = a \cdot (a^{\natural} \cdot (a' \cdot v)).$$

Un  $A^{\natural}$ -module  $V$  est dit *non dégénéré* si  $A^{\natural} \cdot V = V$ .

**REMARQUE 1.** — Fixons un élément  $a_1^{\natural} \in A^{\natural, \times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^{\natural}}$ . Soit  $V$  un  $A$ -module. Pour  $a \in A$  et  $v \in V$ , on pose

$$a \cdot_{\gamma} v = \gamma^{-1}(a) \cdot v.$$

Cela munit  $V$  d'une autre structure de  $A$ -module, disons  $V_{\gamma}$ , et l'application

$$V_{\gamma} \rightarrow A^{\natural} \otimes_A V, v \mapsto a_1^{\natural} \otimes v$$

est un isomorphisme de  $A$ -modules. On en déduit que pour tout  $A$ -module  $V'$ , l'application

$$\text{Hom}_A(V, V') \rightarrow \text{Hom}_A(A^{\natural} \otimes_A V, A^{\natural} \otimes_A V'), u \mapsto \text{id} \otimes u$$

est un isomorphisme de  $A$ -modules. On identifie  $\text{Hom}_A(A^{\natural} \otimes_A V, A^{\natural} \otimes_A V')$  à  $\text{Hom}_A(V, V')$  via cet isomorphisme. En particulier, via l'identification naturelle  $A^{\natural} = A^{\natural} \otimes_A A$ , on a l'identification

$$\text{Hom}_A(A^{\natural} \otimes_A V, A^{\natural}) = \text{Hom}_A(V, A). \quad \blacksquare$$

**NOTATION.** — Soit  $\eta$  un automorphisme de l’anneau  $A$ . On note  $A \cdot \eta$  le  $A$ -bimodule défini par

$$a \cdot (a' \cdot \eta) \cdot a'' = aa'\eta(a'') \cdot \eta, \quad a, a', a'' \in A.$$

Il est libre de rang 1 comme  $A$ -module à gauche (resp. à droite), l’élément  $a_1^\natural = 1_A \cdot \eta$  appartient à  $(A \cdot \eta)^\times$ , et l’on a  $\gamma_{a_1^\natural} = \eta$ . Pour tout  $A^\natural$ -module  $V$ , on identifie  $A^\natural \otimes_A V$  à  $V_\eta$  via l’isomorphisme de la remarque 1.

Soit  $V$  un  $A$ -module (à gauche). On pose

$$V^\natural = A^\natural \otimes_A V, \quad V^{*,\natural} = \text{Hom}_A(V, A^\natural).$$

On dispose d’un accouplement  $\mathbb{Z}$ -linéaire

$$V \times V^{*,\natural} \rightarrow A^\natural, \quad (v, v^*) \mapsto \langle v, v^* \rangle = v^*(v),$$

et  $V^{*,\natural}$  est muni d’une structure de  $A$ -module à droite: pour  $v^* \in V^{*,\natural}$  et  $a \in A$ , on pose

$$\langle v, v^* \cdot a \rangle = \langle v, v^* \rangle \cdot a, \quad v \in V.$$

On a aussi une application  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$V^{*,\natural} \times V \rightarrow \text{Hom}_A(V, V^\natural), \quad (v^*, v) \mapsto [v^*, v]$$

donnée par  $[v^*, v](v') = \langle v', v^* \rangle \otimes v$ ,  $v' \in V$ . Elle induit un morphisme de groupes

$$[\cdot, \cdot] : V^{*,\natural} \otimes_A V \rightarrow \text{Hom}_A(V, V^\natural).$$

L’anneau  $\text{End}_A(V)$  opère naturellement à gauche sur  $V$ , à droite sur  $V^{*,\natural}$ , à droite sur  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$  et, vu comme  $\text{End}_A(V^\natural)$  via l’identification de la remarque 1, aussi à gauche sur  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ . Pour  $v^* \in V^{*,\natural}$ ,  $v, v' \in V$  et  $u \in \text{End}_A(V)$ , on a

$$[v^*, u(v)](v') = u \circ [v^*, v](v')$$

et

$$[v^* \circ u, v](v') = [v^*, v] \circ u(v').$$

En d’autres termes,  $[\cdot, \cdot]$  est un morphisme de  $\text{End}_A(V)$ -bimodules. D’ailleurs il est plus naturel de travailler avec l’anneau opposé  $B = \text{End}_A(V)^{\text{op}}$ . Ce dernier opère à gauche sur  $V^{*,\natural}$  et à droite sur  $V$ , et à gauche et à droite sur  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ , et l’application  $[\cdot, \cdot]$  est un morphisme de  $B$ -bimodules. D’autre part, l’accouplement  $V \times V^{*,\natural} \rightarrow A^\natural$ ,  $v \otimes v^* \mapsto \langle v, v^* \rangle$  vérifiant

$$\langle a \cdot v, v^* \rangle = a \cdot \langle v, v^* \rangle, \quad \langle v, v^* \cdot a \rangle = \langle v, v^* \rangle \cdot a,$$

il induit un morphisme de  $A$ -bimodules

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes_B V^{*,\natural} \rightarrow A^\natural.$$

**REMARQUE 2.** — Posons  $V^* = \text{Hom}_A(V, A)$  ( $= \text{Hom}_A(V^\natural, A^\natural)$ ). On note encore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  les accouplements  $\mathbb{Z}$ -linéaires  $V \times V^* \rightarrow A$  et  $V^\natural \times V^* \rightarrow A^\natural$ . Tout comme  $V^{*,\natural}$ , le  $\mathbb{Z}$ -module  $V^*$  est muni d’une structure de  $(B, A)$ -bimodule, et l’on est dans un “contexte à la Morita” tordu (cf. [CR, def. 3.53]): pour tous  $v, v' \in V$ , tout  $v^* \in V^{*,\natural}$  et tout  $v'^* \in V^*$ , on a

$$\langle [v^*, v](v'), v'^* \rangle = \langle \langle v', v^* \rangle \otimes v, v'^* \rangle = \langle v', v^* \rangle \cdot \langle v, v'^* \rangle.$$

Les résultats ci-dessous sont des variantes des théorèmes de Morita [CR, 3.54]. ■

**LEMME.** — Si  $V$  est projectif de type fini comme  $A$ -module, alors l’application

$$[\cdot, \cdot] : V^{*,\natural} \otimes_A V \rightarrow \text{Hom}_A(V, V^\natural)$$

est un isomorphisme de  $B$ -bimodules.

*Démonstration.* — Fixons un élément  $a_1^{\natural} \in A^{\natural, \times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^{\natural}}$ . Notons  $W$  le  $A$ -module  $V$  tordu par  $\gamma$ , c'est-à-dire le  $A$ -module  $V_{\gamma^{-1}}$  (cf. la remarque 1), et identifions  $V_{\gamma}$  à  $V^{\natural}$  via l'application  $v \mapsto a_1^{\natural} \otimes v$ . De même, identifions les  $A$ -modules (à gauche)  $A_{\gamma}$  et  $A^{\natural}$  via l'application  $a \mapsto a_1^{\natural} \cdot a$ . Alors on a les identifications

$$\mathrm{Hom}_A(W, A) = \mathrm{Hom}_A(V, A_{\gamma}) = V^{*, \natural}$$

et

$$\mathrm{Hom}_A(W, V) = \mathrm{Hom}_A(V, V_{\gamma}) = \mathrm{Hom}_A(V, V^{\natural}).$$

D'après [CR, prop. 2.29], l'application  $[\cdot, \cdot]$  est un isomorphisme de groupes additifs

$$\mathrm{Hom}_A(W, A) \otimes_A V \rightarrow \mathrm{Hom}_A(W, V).$$

D'où le lemme.  $\square$

Notons  $Z(A)$  le centre de  $A$ , et pour  $z \in Z(A)$ , notons  $z_V$  le  $A$ -endomorphisme de  $V$  défini par  $z_V(v) = z \cdot v$ ,  $v \in V$ . L'application

$$Z(A) \rightarrow B, z \mapsto z_V$$

identifie  $Z(A)$  à un sous-anneau de  $B$ .

Notons  $\bar{A}^{\natural}$  le  $Z(A)$ -module (à gauche) quotient de  $A^{\natural}$  par le sous-groupe — en fait un sous- $Z(A)$ -module — engendré par les commutateurs  $a \cdot b^{\natural} - b^{\natural} \cdot a$  pour  $a \in A$  et  $b^{\natural} \in A^{\natural}$ . L'action à droite de  $A$  sur  $A^{\natural}$  munit aussi  $\bar{A}^{\natural}$  d'une structure de  $Z(A)$ -module à droite, qui coïncide avec la précédente: pour  $a \in A$  et  $\bar{b}^{\natural} \in \bar{A}^{\natural}$ , on a  $\bar{b}^{\natural} \cdot a = a \cdot \bar{b}^{\natural}$ . D'autre part  $Z(A)$  opère via  $B$  à gauche sur  $V^{*, \natural}$  et à droite sur  $V$ , et les deux actions induites sur  $V^{*, \natural} \otimes_A V$  coïncident. L'accouplement  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $V^{*, \natural} \times V \rightarrow A^{\natural}$ ,  $(v^*, v) \mapsto \langle v, v^* \rangle$  induit, par passage aux quotients, un morphisme de  $Z(A)$ -modules (à gauche ou à droite)

$$\beta : V^{*, \natural} \otimes_A V \rightarrow \bar{A}^{\natural}.$$

Si  $V$  est projectif de type fini comme  $A$ -module, notant  $\alpha$  l'application inverse (lemme)

$$[\cdot, \cdot]^{-1} : \mathrm{Hom}_A(V, V^{\natural}) \rightarrow V^{*, \natural} \otimes_A V,$$

on peut alors définir une application "trace tordue" :

$$\mathrm{tr}_{A^{\natural}} = \mathrm{tr}_{V, A^{\natural}} : \mathrm{Hom}_A(V, V^{\natural}) \xrightarrow{\alpha} V^{*, \natural} \otimes_A V \xrightarrow{\beta} \bar{A}^{\natural}.$$

C'est un morphisme de  $Z(A)$ -modules.

**REMARQUES.** — (3) Dans le cas non tordu ( $A^{\natural} = A$ ), si  $V$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie des  $A$ -modules, e.g. un  $A$ -module libre de type fini, alors l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes_B V^* \rightarrow A$  est un isomorphisme de  $A$ -bimodules [CR, 3.54].

Dans le cas tordu, l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes_B V^{*, \natural} \rightarrow A^{\natural}$  n'est en général pas un isomorphisme de  $A$ -bimodules, même si  $V$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie des  $A$ -modules. Elle l'est si de plus le  $A$ -module  $V^{\natural}$  est isomorphe à  $V$ , c'est-à-dire si  $V$  est muni d'une structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré (cf. 6.2). Le point, qui nous sera utile par la suite, est que l'on n'a pas besoin de cette structure supplémentaire pour définir l'application trace tordue  $\mathrm{tr}_{V, A^{\natural}}$ .

(4) L'application  $V \mapsto V^{\natural} = A^{\natural} \otimes_A V$  définit un automorphisme fonctoriel de la catégorie  $\mathrm{Mod}(A)$  trivial sur les flèches (cf. la remarque 1). En particulier, il préserve la propriété d'être:

- un  $A$ -module projectif de type fini;
- un générateur de  $\mathrm{Mod}(A)$ .  $\blacksquare$

**6.2. Trace tordue (suite).** — Continuons avec les hypothèses et les notations de 6.1.

D'après la définition de 6.1, un  $A^{\natural}$ -module  $V$  est un  $A$ -module muni d'un morphisme de  $A$ -modules  $\gamma_V : V^{\natural} = A^{\natural} \otimes_A V \rightarrow V$ . Si  $V$  est un  $A^{\natural}$ -module, alors pour tout  $a^{\natural} \in A^{\natural}$  et tout  $v \in V$ , on a l'égalité

$$\gamma_V(a^{\natural} \otimes v) = a^{\natural} \cdot v,$$

et  $V$  est non dégénéré si et seulement si  $\gamma_V$  est un isomorphisme. En ce cas,  $\gamma_V^{-1}$  appartient à l'ensemble  $\text{Isom}_A(V, V^{\natural})$  des isomorphismes  $A$ -linéaires de  $V$  sur  $V^{\natural}$ , lequel est un  $\text{Aut}_A(V)$ -espace tordu. Pour tout  $A^{\natural}$ -module  $V$ , on note

$$\gamma_V^* : V^{*,\natural} \rightarrow \text{Hom}_A(V^{\natural}, A^{\natural}) (= \text{Hom}_A(V, A))$$

l'adjoint de  $\gamma_V$ , donné par

$$\langle a^{\natural} \otimes v, \gamma_V^*(v^*) \rangle = \langle a^{\natural} \cdot v, v^* \rangle, \quad a^{\natural} \in A^{\natural}, v \in V, v^* \in V^{*,\natural}.$$

C'est un morphisme de  $A$ -modules à droite, et un isomorphisme si  $V$  est non dégénéré.

**REMARQUE.** — Fixons un élément  $a_1^{\natural} \in A^{\natural,\times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^{\natural}}$ . L'application

$$\gamma_A : A^{\natural} \rightarrow A, a_1^{\natural} \cdot a \mapsto \gamma(a)$$

est un isomorphisme de  $A$ -modules, qui munit  $A$  d'une structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré. Remplacer  $a_1^{\natural}$  par  $a_1'^{\natural} = a_1^{\natural} \cdot u$  pour un  $u \in A^{\times}$  revient à remplacer  $\gamma$  par  $\gamma' = \gamma \circ \text{Int}_A(u)$  et  $\gamma_A$  par  $\gamma'_A : A^{\natural} \rightarrow A, a^{\natural} \mapsto \gamma_A(a^{\natural})\gamma^{-1}(u)$ . ■

**LEMME.** — Soit  $V$  un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré. Si  $V$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie des  $A$ -modules, alors l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes_B V^{*,\natural} \rightarrow A^{\natural}$$

est un isomorphisme de  $A$ -bimodules, où l'on a posé  $B = \text{End}_A(V)^{\text{op}}$ .

*Démonstration.* — D'après [CR, 3.54], les propriétés suivantes sont vérifiées:

- $V^* = \text{Hom}_A(V, A)$  est un  $B$ -module projectif de type fini,
- l'application  $V \rightarrow \text{Hom}_B(V^*, B), v \mapsto [\cdot, v]$  est un isomorphisme de  $B$ -modules,
- l'application  $A \rightarrow \text{End}_B(V^*)^{\text{op}}, a \mapsto (v^* \mapsto v^* \cdot a)$  est un isomorphisme d'anneaux.

Identifions l'anneau  $B$  à  $\text{End}_A(V^{\natural})^{\text{op}}$  et le  $(B, A)$ -bimodule  $V^*$  à  $\text{Hom}_V(V^{\natural}, A^{\natural})$  comme dans la remarque 1 de 6.1. L'isomorphisme de  $A$ -modules à droite

$$\gamma_V^* : V^{*,\natural} \rightarrow V^*$$

est aussi un morphisme de  $B$ -modules à gauche, i.e. un isomorphisme de  $(B, A)$ -bimodules. En particulier,  $V^{*,\natural}$  est un  $B$ -module projectif de type fini. D'autre part, l'application

$$B \rightarrow B, u \mapsto \gamma_V \circ u \circ \gamma_V^{-1}$$

est un automorphisme d'anneau, que l'on note  $\eta$ . Notons  $B^{\natural}$  le  $B$ -bimodule  $B \cdot \eta$  (cf. 6.1), et posons  $X = V^{*,\natural}$ . Le  $B$ -module  $X$  est muni d'une structure naturelle de  $B^{\natural}$ -module non dégénéré, donnée par l'isomorphisme de  $B$ -modules

$$\eta_X : B^{\natural} \otimes_B X \rightarrow X, (u \cdot \eta) \otimes v^* \mapsto \eta^{-1}(u) \cdot v^* = v^* \circ \eta^{-1}(u).$$

On peut donc lui appliquer le lemme de 6.1: l'application

$$[\cdot, \cdot] : \text{Hom}_B(X, B^{\natural}) \otimes_B X \rightarrow \text{Hom}_B(X, B^{\natural} \otimes_B X)$$

est un isomorphisme de  $C$ -bimodules, où l'on a posé  $C = \text{End}_B(X)^{\text{op}}$ . Reste à identifier ces modules à ceux de l'énoncé.

Pour  $v^* \in X$  et  $u \in B$ , on a

$$(\eta(u) \cdot v^*) \circ \gamma_V = u \cdot (v^* \circ \gamma_V).$$

Notons  $W$  le  $(B, A)$ -bimodule  $X_{\eta^{-1}}$  (cf. la remarque 1 de 6.1), c'est-à-dire le  $A$ -module à droite  $X$  muni de la structure de  $B$ -module (à gauche) tordue par  $\eta$ . D'après l'égalité ci-dessus, l'application

$$W \rightarrow \text{Hom}_A(V^{\natural}, A^{\natural}) = V^*, \quad v^* \mapsto v^* \circ \gamma_V$$

est un isomorphisme de  $(B, A)$ -bimodules. Identifions  $W$  à  $V^*$  via cet isomorphisme. On a aussi les identifications naturelles  $B^{\natural} = B_{\eta}$  et  $B^{\natural} \otimes_B X = X_{\eta}$ . D'où les identifications

$$\begin{aligned} \text{Hom}_B(X, B^{\natural}) &= \text{Hom}_B(W, B) = \text{Hom}_B(V^*, B), \\ \text{Hom}_B(X, B^{\natural} \otimes_B X) &= \text{Hom}_B(W, X) = \text{Hom}_B(V^*, X), \end{aligned}$$

et

$$C = \text{End}_B(W)^{\text{op}} = \text{End}_B(V^*)^{\text{op}}.$$

Or d'après les résultats rappelés au début de la démonstration, l'application

$$V \rightarrow \text{Hom}_B(V^*, B), \quad v \mapsto [\cdot, v]$$

est un isomorphisme de  $(A, B)$ -bimodules, et l'application

$$A \rightarrow \text{End}_B(V^*)^{\text{op}}, \quad a \mapsto (v^* \mapsto v^* \cdot a)$$

est un isomorphisme d'anneaux. On en déduit que l'application

$$A^{\natural} \rightarrow \text{Hom}_B(V^*, V^{*\natural}), \quad a^{\natural} \mapsto (v^* \mapsto v^* \cdot a^{\natural})$$

un isomorphisme de  $A$ -bimodules, où l'on a posé

$$\langle v, v^* \cdot a^{\natural} \rangle = \langle v, v^* \rangle \cdot a^{\natural}, \quad v \in V, v^* \in V^*, a^{\natural} \in A^{\natural}.$$

D'où le lemme.  $\square$

Pour tout  $A$ -module  $V$ , on note  $\overline{\text{Hom}}_A(V, V^{\natural})$  le  $Z(A)$ -module (à gauche) quotient de  $\text{Hom}_A(V, V^{\natural})$  par le sous- $Z(A)$ -module engendré par les commutateurs  $\alpha \cdot u - u \cdot \alpha$  pour  $\alpha \in \text{Hom}_A(V, V^{\natural})$  et  $u \in \text{End}_A(V)^{\text{op}} = \text{End}_A(V^{\natural})^{\text{op}}$ .

**PROPOSITION.** — *Soit  $V$  un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré. Si  $V$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie des  $A$ -modules, alors l'application trace tordue  $\text{tr}_{A^{\natural}} = \text{tr}_{V, A^{\natural}}$  induit par passage au quotient un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules*

$$\overline{\text{tr}}_{A^{\natural}} = \overline{\text{tr}}_{V, A^{\natural}} : \overline{\text{Hom}}_A(V, V^{\natural}) \rightarrow \overline{A^{\natural}}.$$

*Démonstration.* — Posons  $B = \text{End}_A(V)^{\text{op}} (= \text{End}_A(V^{\natural})^{\text{op}})$ . Notons  $[V^{*\natural} \otimes_A V, B]$  le sous-groupe de  $V^{*\natural} \otimes_A V$  engendré par les commutateurs  $(v^* \otimes v) \cdot u - u \cdot (v^* \otimes v)$  pour  $v^* \in V^{*\natural}$ ,  $v \in V$ ,  $u \in B$ . De même, notons  $[V \otimes_B V^{*\natural}, A]$  le sous-groupe de  $V \otimes_B V^{*\natural}$  engendré par les commutateurs  $(v \otimes_B v^*) \cdot a - a \cdot (v \otimes_B v^*)$  pour  $v \in V$ ,  $v^* \in V^{*\natural}$ ,  $a \in A$ . Posons

$$\overline{V^{*\natural} \otimes_A V} = V^{*\natural} \otimes_A V / [V^{*\natural} \otimes_A V, B]$$

et

$$\overline{V \otimes_B V^{*\natural}} = V \otimes_B V^{*\natural} / [V \otimes_B V^{*\natural}, A].$$

L'application

$$V^{*\natural} \times V \rightarrow V \times V^{*\natural}, \quad (v^*, v) \mapsto (v, v^*)$$

induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes

$$\overline{V^{*\natural} \otimes_A V} \xrightarrow{\delta} \overline{V \otimes_B V^{*\natural}}.$$

D'autre part, l'isomorphisme de  $B$ -bimodules (lemme de 6.1)

$$[\cdot, \cdot] : V^{*,\natural} \otimes_A V \rightarrow \text{Hom}_A(V, V^\natural)$$

induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes

$$\overline{[\cdot, \cdot]} : \overline{V^{*,\natural} \otimes_A V} \rightarrow \overline{\text{Hom}_A(V, V^\natural)},$$

et l'isomorphisme de  $A$ -bimodules (lemme ci-dessus)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes_B V^{*,\natural}$$

induit par passage aux quotients un isomorphisme de groupes

$$\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle} : \overline{V \otimes_B V^{*,\natural}} \rightarrow \overline{A^\natural}$$

D'où un isomorphisme de groupes

$$\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle} \circ \delta \circ \overline{[\cdot, \cdot]}^{-1} : \overline{\text{Hom}_A(V, V^\natural)} \rightarrow \overline{A^\natural},$$

qui n'est autre que  $\overline{\text{tr}_{A^\natural}}$ . On conclut en remarquant que puisque  $\text{tr}_{A^\natural}$  est un morphisme de  $Z(A)$ -modules,  $\overline{\text{tr}_{A^\natural}}$  l'est aussi.  $\square$

**6.3. L'isomorphisme  $\mathcal{C}'(A^\natural) \simeq \overline{A^\natural}$ .** — Dans ce numéro et dans le suivant, on continue avec les hypothèses et les notations de 6.1 et 6.2. Rappelons que pour tout  $A^\natural$ -module  $V$ , on a noté  $\gamma_V$  le morphisme de  $A$ -modules  $V^\natural = A^\natural \otimes_A V \rightarrow V$ ,  $a^\natural \otimes v \mapsto a^\natural \cdot v$ . Un morphisme de  $A^\natural$ -modules  $u : V \rightarrow V'$  est par définition un morphisme de  $A$ -modules tel que  $u \circ \gamma_V = \gamma_{V'} \circ u$ . Si de plus le  $A^\natural$ -module  $V$  est non dégénéré, alors pour tout  $A^\natural$ -module  $V'$  et tout morphisme de  $A$ -modules  $u : V \rightarrow V'$ , on peut poser

$$\tilde{u} = \gamma_{V'} \circ u \circ \gamma_V^{-1} \in \text{Hom}_A(V^\natural, V'^\natural) = \text{Hom}_A(V, V').$$

C'est encore un morphisme de  $A$ -modules, et  $\tilde{u} = u$  si et seulement si  $u$  est un morphisme de  $A^\natural$ -modules. On note:

- $\text{Mod}(A^\natural)$  la catégorie formée des  $A^\natural$ -modules non dégénérés munis des morphismes de  $A^\natural$ -modules (c'est une catégorie abélienne);
- $\text{Mod}(A, A^\natural)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(A)$  formée des  $A^\natural$ -modules non dégénérés (c'est une catégorie additive, en général non abélienne).

On a donc

$$\text{Ob}(\text{Mod}(A^\natural)) = \text{Ob}(\text{Mod}(A, A^\natural)) \subset \text{Ob}(A),$$

et pour  $V, V' \in \text{Ob}(\text{Mod}(A^\natural))$ ,

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(A^\natural)}(V, V') \subset \text{Hom}_{\text{Mod}(A, A^\natural)}(V, V') = \text{Hom}_{\text{Mod}(A)}(V, V')$$

Si  $A^\natural = A$ , les trois catégories  $\text{Mod}(A)$ ,  $\text{Mod}(A, A^\natural)$  et  $\text{Mod}(A^\natural)$ , coïncident. En général ce n'est pas le cas, ce qui est la source de difficultés nouvelles, aucune de ces trois catégories n'étant vraiment adaptée aux constructions qui suivent:  $\text{Mod}(A)$  a trop d'objets,  $\text{Mod}(A^\natural)$  n'a pas assez de flèches, et  $\text{Mod}(A, A^\natural)$  n'est pas abélienne.

Soit  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  le groupe abélien — en fait un  $Z(A)$ -module, voir plus loin — défini comme suit. C'est le groupe abélien libre de base les paires  $(V, u)$  où  $V$  est un  $A^\natural$ -module non dégénéré, projectif<sup>(1)</sup> de type fini comme  $A$ -module, et  $u$  est un élément de  $\text{End}_A(V)$ , quotienté par les relations:

- $(V, u) + (V, u') = (V, u + u')$ ;
- $(V, u' \circ u) = (V', \tilde{u} \circ u')$  pour tous morphismes de  $A$ -modules  $V \xrightarrow{u} V'$  et  $V' \xrightarrow{u'} V$ .

1. Le “/” dans la notation  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  correspond à l'adjectif “projectif”. On verra plus loin (6.4) comment supprimer cette hypothèse de projectivité.

On note  $[V, u]'$  l'élément de  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  défini par une paire  $(V, u)$  comme ci-dessus, et l'on munit  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  de la structure de groupe abélien donnée par

$$[V_1, u_1]' + [V_2, u_2]' = [V_1 \times V_2, u_1 \times u_2]'$$

**REMARQUE 1.** — La seconde relation définissant  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  implique la relation suivante:

$$- (V, u) = (V', u') \text{ s'il existe un isomorphisme de } A\text{-modules } V \xrightarrow{\alpha} V' \text{ tel que } u' \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ u.$$

En effet, on a  $u' = (\widetilde{\alpha} \circ u) \circ \alpha^{-1}$  et  $\widetilde{\alpha^{-1}} = \widetilde{\alpha}^{-1}$ . En particulier, on a aussi la relation (plus faible) suivante:

$$- (V, u) = (V', u') \text{ s'il existe un isomorphisme de } A^\natural\text{-modules } V \xrightarrow{\alpha} V' \text{ tel que } u' \circ \alpha = \alpha \circ u. \quad \blacksquare$$

Le centre  $Z(A)$  de  $A$  opère sur  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  via la formule:

$$z \cdot [V, u]' = [V, z_V \circ u]', \quad z \in Z(A), [V, u]' \in \mathcal{C}'(A^\natural).$$

Cela munit  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  d'une structure de  $Z(A)$ -module<sup>(2)</sup>. Fixons un élément  $a_1^\natural \in A^{\natural, \times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^\natural}$ . L'automorphisme  $\gamma$  de  $A$  induit par restriction un automorphisme de  $Z(A)$ , qui ne dépend pas du choix de  $a_1^\natural$ . On note  $\overline{Z}_{A^\natural} = Z(A)_\gamma$  l'anneau quotient de  $Z(A)$  par l'idéal, disons  $\mathfrak{J}_Z = \mathfrak{J}_Z(A^\natural)$ , formé par les commutateurs tordus

$$\gamma^{-1}(a)b - ba = b(\gamma^{-1}(a) - a), \quad a, b \in Z(A).$$

C'est encore un anneau à unité, et puisque pour tout  $[V, u]' \in \mathcal{C}'(A^\natural)$  et tout  $z \in Z(A)$ , on a

$$[V, z_V \circ u]' = [V, u \circ z_V]' = [V, \widetilde{z}_V \circ u]' = [V, \gamma(z)_V \circ u]',$$

l'action de  $Z(A)$  sur  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  se factorise à travers  $\overline{Z}_{A^\natural}$ .

Les principales propriétés de  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  sont décrites dans le lemme suivant. Son énoncé nécessite d'introduire quelques notations:

— Soit un entier  $k \geq 1$ . Posons  $A_k = A \cdot \gamma^k$ , et soit  $W$  un  $A_k$ -module non dégénéré, c'est-à-dire un  $A$ -module muni d'un isomorphisme  $\gamma_W^k$  de  $W_{\gamma^k}$  sur  $W$ . On définit comme en 2.5 un  $A^\natural$ -module non dégénéré  $(V, \gamma_V) = \iota_k(W, \gamma_W^k)$ : on pose

$$V = W \times W_{\gamma^{-1}} \times \cdots \times W_{\gamma^{-k+1}}$$

et l'on note  $\gamma_V = \iota_k(\gamma_W^k)$  l'isomorphisme de  $V^\natural$  sur  $V$  défini par

$$\gamma_V(v_0, \dots, v_{k-1}) = (v_1, \dots, v_{k-1}, \gamma_W^k(v_0)),$$

où l'on identifie  $V_\gamma$  à  $V^\natural$  via l'isomorphisme  $V_\gamma \rightarrow V^\natural$ ,  $v \mapsto a_1^\natural \otimes v$ . Si  $W$  est projectif de type fini comme  $A$ -module, alors  $V = \iota_k(W)$  l'est aussi.

— Pour tout  $A^\natural$ -module non dégénéré  $V$  et tout  $A^\natural$ -automorphisme  $b$  de  $V$ , on note  $b \cdot V$  le  $A$ -module  $V$  muni de la structure de  $A^\natural$ -module non dégénéré donnée par  $\gamma_{b \cdot V} = b \circ \gamma_V = \gamma_V \circ b$ .

**LEMME.** — (1) Soit un entier  $k > 1$ , et soit  $W$  un  $A_k$ -module non dégénéré, projectif de type fini comme  $A$ -module. Alors pour tout  $A$ -endomorphisme de  $\iota_k(W)$  de la forme  $u_0 \times \cdots \times u_{k-1}$ ,  $u_i \in \text{End}_A(W) = \text{End}_A(W_{\gamma^{-i}})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$

$$[\iota_k(W), u_0 \times \cdots \times u_{k-1}]' = 0.$$

2. Notons que si  $A$  est muni d'une structure de  $R$ -algèbre pour un anneau commutatif  $R$ , alors  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  est a fortiori un  $R$ -module. En pratique, nous n'aurons à considérer que des anneaux  $A$  qui contiennent dans leur centre un anneau noethérien  $R$  faisant de  $A$  un  $R$ -module de type fini.

(2) Soit  $(V, u)$  une paire formée d'un  $A^\natural$ -module non dégénéré  $V$ , projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ , et soit  $b \in \text{Aut}_{A^\natural}(V)$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$

$$[b \cdot V, b \circ u]' = [V, u]'$$

*Démonstration.* — Montrons (1). Posons  $V = \iota_k(W)$ , et soit  $u = u_0 \times \cdots \times u_{k-1} \in \text{End}_A(V)$ ,  $u_i \in \text{End}_A(W)$ , comme dans l'énoncé. Posant  $\tilde{u}_0^k = \gamma_W^k \circ u_0 \circ \gamma_W^{-k}$  et (rappel)  $\tilde{u} = \gamma_V \circ u \circ \gamma_V^{-1}$ , on a

$$\tilde{u} = u_1 \times \cdots \times u_{k-1} \times \tilde{u}_0^k.$$

Pour  $i = 0, \dots, k-1$ , notons  $p_i : V \rightarrow W_{\gamma^{-i}}$  la projection canonique, et posons  $a_i = u_i \circ p_i$ . C'est un élément de  $\text{Hom}_A(V, W_{\gamma^{-i}}) \subset \text{End}_A(V)$ , et  $\tilde{a}_i = \gamma_V \circ a_i \circ \gamma_V^{-1}$  est un élément de  $\text{End}_A(V, W_{\gamma^{-i+1}})$ , où l'on a posé  $W_\gamma = W_{\gamma^{-k+1}}$ . Comme  $\tilde{a}_i \circ p_i = \tilde{u}_i \circ \tilde{p}_i \circ p_i = 0$ , on a

$$[V, a_i]' = [V, p_i \circ a_i]' = [V, \tilde{a}_i \circ p_i]' = 0.$$

Puisque  $u = a_0 + \cdots + a_{k-1}$ , d'après la loi d'additivité dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$ , on obtient

$$[V, u]' = \sum_{i=0}^{k-1} [V, a_i]' = 0.$$

Montrons (2). Posons  $V' = b \cdot V$  et identifions  $u \in \text{End}_A(V)$  à un élément de  $\text{Hom}_A(V, V')$ , disons  $u_1$ . De même, identifions  $\text{id}_V$  à un élément de  $\text{Isom}_A(V', V)$ , disons  $u_2$ . On a

$$\gamma_{V'} \circ u_1 \circ \gamma_V^{-1} = u_2^{-1} \circ b \circ \tilde{u}, \quad \tilde{u} = \gamma_V \circ u \circ \gamma_V^{-1},$$

et d'après la relation de commutation dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$ , on a

$$[V, u]' = [V, u_2 \circ u_1]' = [V', (\gamma_{V'} \circ u_1 \circ \gamma_V^{-1}) \circ u_2]' = [V', b \circ \tilde{u}]';$$

où l'on a identifié  $b \circ \tilde{u}$  à  $u_2^{-1} \circ (b \circ \tilde{u}) \circ u_2 \in \text{End}_A(V')$ . Puisque  $[V, u]' = [V, \gamma_V^{-1} \circ u \circ \gamma_V]'$ , en remplaçant  $u$  par  $\gamma_V^{-1} \circ u \circ \gamma_V$  dans le raisonnement ci-dessus, on obtient l'égalité cherchée.  $\square$

**REMARQUE 2.** — Notons  $Z(A^\natural)$  le commutant de  $A^\natural$  dans  $Z(A)$ . On a donc

$$Z(A^\natural) = \{z \in Z(A) : \gamma(z) = z\}.$$

C'est un sous-anneau de  $Z(A)$ . Pour  $z \in Z(A^\natural)^\times$  et  $V$  un  $A^\natural$ -module non dégénéré, on note  $V_z$  le  $A$ -module  $V$  muni de la structure de  $A^\natural$ -module donnée par

$$a^\natural \cdot_z v = z^{-1} \cdot (a^\natural \cdot v) = a^\natural \cdot (z \cdot v), \quad a^\natural \in A^\natural, v \in V.$$

Autrement dit on a

$$\gamma_{V_z} = z_V^{-1} \circ \gamma_V = \gamma_V \circ z_V^{-1}.$$

D'après le lemme, pour toute paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^\natural$ -module non dégénéré  $V$ , projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ , et tout élément  $z$  de  $Z(A^\natural)^\times$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$

$$[V_z, u]' = [z_V^{-1} \cdot V, u]' = [V, z_V \circ u]'. \quad \blacksquare$$

**PROPOSITION.** — L'application  $(V, u) \mapsto \text{tr}_{A^\natural}(u \circ \gamma_V^{-1})$  induit un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}'(A^\natural) \xrightarrow{\cong} \bar{A}^\natural, [V, u]' \mapsto \bar{a}_{[V, u]}^\natural.$$

*Démonstration.* — Pour une paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré, projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ , la flèche  $\alpha_u = u \circ \gamma_V^{-1} : V \rightarrow V^{\natural}$  est un élément de  $\text{Hom}_A(V, V^{\natural})$ , et l'élément  $\text{tr}_{A^{\natural}}(\alpha_u)$  de  $\bar{A}^{\natural}$  est bien défini. Rappelons que pour toute paire  $(V, u)$  comme ci-dessus, on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$

$$[V, u]' = [V, \tilde{u}]'.$$

On en déduit — la vérification est immédiate — que l'application  $(\Pi, u) \mapsto \text{tr}_{A^{\natural}}(\alpha_u)$  se factorise en un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}'(A^{\natural}) \rightarrow \bar{A}^{\natural}, [V, u]' \mapsto \bar{a}_{[V, u]}'^{\natural},$$

et il s'agit de montrer qu'il est bijectif.

Fixons un élément  $a_1^{\natural} \in A^{\natural, \times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^{\natural}}$ .

Pour la surjectivité, reprenons le  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V_1 = A$  de la remarque 2 de 6.1: on a  $V_1^{\natural} = A^{\natural}$  et  $\gamma_{V_1} : V_1^{\natural} \rightarrow V_1$  est donné par  $\gamma_{V_1}(a_1^{\natural} \cdot a) = \gamma(a)$ . Soit  $\bar{a}^{\natural} \in \bar{A}^{\natural}$ . Relevons  $\bar{a}^{\natural}$  en un élément  $a^{\natural} = a \cdot a_1^{\natural}$  de  $A^{\natural}$ , et notons  $u_a$  le  $A$ -endomorphisme  $v \mapsto v \cdot a$  de  $V_1$ . Alors on a  $\text{tr}_{A^{\natural}}(u_a \circ \gamma_{V_1}^{-1}) = \bar{a}^{\natural}$ .

Quant à l'injectivité, soit une paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré, projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ . Puisque  $V$  est projectif de type fini comme  $A$ -module, il existe un  $A$ -module de type fini  $W$  tel que le  $A$ -module  $V \times W$  est libre. Montrons que l'on peut choisir un tel  $W$  muni d'une structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré. Choisissons un isomorphisme de  $A$ -modules  $i : V \times W \xrightarrow{\sim} A^n$ . Posons  $V' = i(V)$ ,  $W' = i(W)$ , et notons  $e$  l'idempotent de  $M_n(A)$  défini par  $e|_{V'} = \text{id}_{V'}$  et  $e|_{W'} = 0$ . On a donc  $V' = e(A^n)$  et  $W' = (1 - e)(A^n)$ . Pour chaque entier  $k \geq 1$ , l'automorphisme  $\gamma$  de  $A$  induit un automorphisme de  $A^k = A \times \cdots \times A$  ( $k$  fois) et un automorphisme de  $M_k(A)$ , que l'on note encore  $\gamma$ . Posons  $j = i|_V : V \xrightarrow{\sim} V'$  et

$$\tilde{j} = \gamma \circ j \circ \gamma_V^{-1} : V \xrightarrow{\sim} \gamma(V') = \gamma(e)(A^n).$$

D'où un isomorphisme de  $A$ -modules

$$\tilde{j} \circ j^{-1} : e(A^n) \xrightarrow{\sim} \gamma(e)(A^n).$$

Plongeons  $\mathfrak{l} = M_n(A) \times M_n(A)$  diagonalement dans  $M_{2n}(A)$ , et notons  $e$  l'idempotent  $(e, 0_n)$  de  $\mathfrak{l}$ . On a donc  $e(A^{2n}) = V' \subset A^{2n}$  et  $\gamma(e) = (\gamma(e), 0_n)$ . Montrons que  $e$  et  $\gamma(e)$  sont conjugués dans  $\text{GL}_{2n}(A)$ . Notons  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le  $A$ -endomorphisme de  $A^n$  prolongeant  $\tilde{j} \circ j^{-1}$  (resp.  $j \circ \tilde{j}^{-1}$ ) par 0 sur  $W'$  (resp. sur  $\gamma(W')$ ). On a les relations

$$\beta \circ \alpha = e, \quad \alpha \circ \beta = \gamma(e)$$

et

$$\gamma(e) \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha, \quad e \circ \beta = \beta \circ \gamma(e) = \beta.$$

Notons  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$  les matrices par blocs de taille  $n \times n$  données par

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 - e & \beta \\ \alpha & 1 - \gamma(e) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathbf{s}^2 = 1_{2n} \quad \mathbf{t}^2 = 1_{2n}, \quad \mathbf{t} \circ \mathbf{e} \circ \mathbf{t} = \mathbf{s} \circ \gamma(\mathbf{e}) \circ \mathbf{s}.$$

Par suite, posant  $\mathbf{g} = \mathbf{s} \circ \mathbf{t} \in \text{GL}_{2n}(A)$ , on a bien

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{e} \circ \mathbf{g}^{-1} = \gamma(\mathbf{e}).$$

Posons  $\mathbf{W} = (1 - e)(A^{2n})$ . L'isomorphisme de  $A$ -modules  $A_\gamma^{2n} \rightarrow A^{2n}$ ,  $x \mapsto \gamma(x)$  induit un isomorphisme de  $A$ -modules

$$\mathbf{W}_\gamma \rightarrow \gamma(\mathbf{W}) = (1 - \gamma(e))(A^{2n}) = \mathbf{g} \circ (1 - e) \circ \mathbf{g}^{-1}(A^{2n}) = \mathbf{g}(\mathbf{W}).$$

D'où un isomorphisme de  $A$ -modules

$$\mathbf{W}_\gamma \rightarrow \mathbf{W}, x \mapsto \mathbf{g}^{-1} \circ \gamma(x).$$

En le composant avec l'inverse de l'isomorphisme de  $A$ -modules

$$\mathbf{W}_\gamma \rightarrow \mathbf{W}^\natural = A^\natural \otimes_A \mathbf{W}, x \mapsto a_1^\natural \otimes x,$$

on obtient un isomorphisme de  $A$ -modules

$$\gamma_{\mathbf{W}} : \mathbf{W}^\natural \rightarrow \mathbf{W}.$$

L'application

$$V \times \mathbf{W} \rightarrow A^{2n}, (v, \mathbf{w}) \mapsto j(v) + \mathbf{w}$$

est un isomorphisme de  $A$ -modules, et le  $A$ -module  $V \times \mathbf{W}$  est muni d'une structure  $A^\natural$ -module non dégénéré donnée par  $\gamma_{V \times \mathbf{W}} = \gamma_V \times \gamma_{\mathbf{W}}$ . Puisqu'on a l'égalité

$$[V, u]' = [V \times \mathbf{W}, u \times 0_{\mathbf{W}}]'$$

on peut supposer que  $V$  est libre comme  $A$ -module. Alors  $V$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie  $\text{Mod}(A)$ , et d'après la proposition de 6.2, si  $\overline{\text{tr}}_{A^\natural}(\alpha_u) = 0$  dans  $\bar{A}^\natural$ , alors l'image de  $\alpha_u$  dans  $\overline{\text{Hom}}_A(V, V^\natural)$  est nulle, et  $[V, u]' = 0$  dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$ . Cela achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**REMARQUE 3.** — D'après la démonstration de la proposition,  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  est engendré (comme groupe abélien) par les paires  $[V, u]'$  où  $V$  est un  $A^\natural$ -module non dégénéré, libre de type fini comme  $A$ -module, et  $u \in \text{End}_A(V)$ .  $\blacksquare$

**6.4. Variante (sur la condition de projectivité).** — L'isomorphisme  $\mathcal{C}'(A^\natural) \simeq \bar{A}^\natural$  de la proposition de 6.3 n'utilise pas vraiment la structure de  $A^\natural$ -module non dégénéré sur les  $A$ -modules projectifs de type fini  $V$ , mais seulement l'ensemble  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ . Soit donc  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$  le groupe abélien libre de base les paires  $(V, \alpha)$  où  $V$  est un  $A$ -module projectif de type fini, et  $\alpha$  est un élément de  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ , quotienté par les relations:

- $(V, \alpha) + (V, \alpha') = (V, \alpha + \alpha')$ ;
- $(V, u \circ \alpha) = (V', \alpha \circ u)$  pour tout  $\alpha \in \text{Hom}_A(V, V'^\natural)$  et tout  $u \in \text{Hom}_A(V', V)$ .

Comme pour  $\mathcal{C}'(A^\natural)$  — cf. la remarque 1 de 6.3 —, la seconde relation ci-dessus implique la relation suivante:

- $(V, \alpha) = (V', \alpha')$  s'il existe un  $a \in \text{Isom}_A(V, V')$  tel que  $\alpha' = a \circ \alpha \circ a^{-1}$ .

On note  $[V, \alpha]'_\star$  l'élément de  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$  défini par une paire  $(V, \alpha)$  comme ci-dessus. Comme en 6.3, on munit  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$  de la structure de  $Z(A)$ -module donnée par:

- $[V_1, \alpha_1]'_\star + [V_2, \alpha_2]'_\star = [V_1 \times V_2, \alpha_1 \times \alpha_2]'_\star$ ;
- $z \cdot [V, \alpha]'_\star = [V, z_V \circ \alpha]'_\star$ ,  $z \in Z(A)$ .

**LEMME 1.** — Soit  $(V_i, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , des paires formées d'un  $A$ -module projectif de type fini  $V_i$  et d'un élément  $\alpha_i$  de  $\text{Hom}_A(V_i, V_i^\natural)$ , et soit

$$0 \rightarrow V_2 \xrightarrow{a} V_1 \xrightarrow{b} V_3 \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de  $A$ -modules telle que  $\alpha_1 \circ a = a \circ \alpha_2$  et  $\alpha_3 \circ b = b \circ \alpha_2$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$

$$[V_1, \alpha_1]'_\star = [V_2, \alpha_2]'_\star + [V_3, \alpha_3]'_\star.$$

*Démonstration.* — Puisque le  $A$ -module  $V_3$  est projectif, la suite exacte est scindée: il existe un morphisme de  $A$ -modules  $c : V_3 \rightarrow V_1$  tel que  $b \circ c = \text{id}_{V_3}$ . Posons  $W_2 = a(V_1)$  et  $W_3 = c(V_3)$ . On a la décomposition  $V_1 = W_2 \times W_3$ . De plus  $\alpha_1$  induit par restriction un élément  $\beta_2$  de  $\text{Hom}_A(W_2, W_2^\natural)$ , et  $c \circ \alpha_3 \circ b : V_1 \rightarrow V_1$  induit par restriction un élément  $\beta_3$  de  $\text{Hom}_A(W_3, W_3^\natural)$ . Puisque les morphismes de  $A$ -modules  $V_2 \xrightarrow{a} W_2$  et  $W_3 \xrightarrow{b} V_3$  sont bijectifs et qu'ils vérifient  $\beta_2 \circ a = a \circ \alpha_2$  et  $\alpha_3 \circ b = b \circ \beta_3$ , on a les égalités

$$[V_2, \alpha_2]'_\star = [W_2, \beta_2]'_\star, \quad [V_3, \alpha_3]'_\star = [W_3, \beta_3]'_\star.$$

Notons  $\beta_1$  l'élément  $\beta_2 \times \beta_3 \in \text{Hom}_A(V_1, V_1^\natural)$ . D'après la relation d'additivité dans  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$ , on a l'égalité

$$[V_1, \beta_1]'_\star = [W_2, \alpha_2]'_\star + [W_3, \alpha_3]'_\star.$$

Posons  $\mu = \alpha_1 - \beta_1 \in \text{Hom}_A(V_1, V_1^\natural)$ , et soit  $p : V_1 \rightarrow W_2 \subset V_1$  la projection orthogonale par rapport à  $W_3$  (on voit  $p$  comme un élément de  $\text{End}_A(V_1)$ ). On a  $\mu|_{W_2} = 0$  et  $\mu(V_1) \subset W_2$ , et pour  $w_3 \in W_3$ , on a  $\alpha_1(w_3) = p \circ \alpha_1(w_3) + \beta_1(w_3)$ . On en déduit l'égalité

$$\mu = p \circ \alpha_1 - \alpha_1 \circ p.$$

D'après les relations d'additivité et de commutation dans  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$ , on a donc  $[V_1, \mu]'_\star = 0$  et

$$[V_1, \alpha_1]'_\star = [V_1, \beta_1 + \mu]'_\star = [V_1, \beta_1]'_\star + [V_1, \mu]'_\star = [V_1, \beta_1]'_\star.$$

D'où le lemme. □

**PROPOSITION.** — *L'application  $(V, \alpha) \mapsto \text{tr}_{A^\natural}(\alpha)$  induit un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules*

$$\mathcal{C}'_\star(A^\natural) \xrightarrow{\simeq} \bar{A}^\natural, \quad [V, \alpha]'_\star \mapsto \bar{a}_{[V, \alpha]'_\star}^\natural.$$

*Démonstration.* — La démonstration est la même que celle de la proposition de 6.3, en plus simple puisque pour l'injectivité on n'a pas besoin de construire un supplémentaire  $W$  de  $V$  qui soit muni d'une structure de  $A^\natural$ -module non dégénéré. Précisément, pour une paire  $(V, \alpha)$  formée d'un  $A$ -module projectif de type fini  $V$  et d'un élément  $\alpha$  de  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ , on choisit un isomorphisme de  $A$ -modules  $i : V \times W \xrightarrow{\simeq} A^n$  comme dans loc. cit., et l'on munit  $V \times W$  de la structure de  $A^\natural$ -module non dégénéré déduite via  $i$  de celle sur  $A^n$ . Puisque  $[V, \alpha]'_\star = [V \times W, \alpha \times 0_W]'_\star$ , si  $\text{tr}_{A^\natural}(\alpha) = 0$  dans  $\bar{A}^\natural$ , alors d'après la proposition de 6.2, l'image de  $\alpha$  dans  $\overline{\text{Hom}}_A(V, V^\natural)$  est nulle, et  $[V, \alpha]'_\star = 0$  dans  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$ . □

**COROLLAIRE 1.** — *L'application  $(V, u) \mapsto (V, u \circ \gamma_V^{-1})$  induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules*

$$\mathcal{C}'(A^\natural) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}'_\star(A^\natural), \quad [V, u]' \mapsto [V, u \circ \gamma_V^{-1}]'_\star.$$

**COROLLAIRE 2.** — *Soit  $(V_i, u_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , des paires formées d'un  $A^\natural$ -module non dégénéré  $V_i$ , projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u_i$  de  $\text{End}_A(V_i)$ , et soit*

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V_3 \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

*une suite exacte courte de  $A$ -modules telle que  $u_3 \circ a = \tilde{a} \circ u_1$  et  $u_2 \circ b = \tilde{b} \circ u_3$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^\natural)$*

$$[V_3, u_3]' = [V_1, u_1]' + [V_2, u_2]'$$

On s'intéresse maintenant à la condition de projectivité. Soit  $(V, \alpha)$  une paire formée d'un  $A$ -module de type fini  $V$  et d'un élément  $\alpha$  de  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ . Supposons que  $V$  possède une *résolution projective bornée de type fini*, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte longue de  $A$ -modules de la forme

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\epsilon} V \rightarrow 0,$$

où les  $V_i$  sont des  $A$ -modules projectifs de type fini. Le  $A$ -module  $V^\natural$  est lui aussi de type fini, et la suite exacte ci-dessus donne une résolution projective bornée de type fini de  $V^\natural$ :

$$0 \rightarrow V_d^\natural \rightarrow V_{d-1}^\natural \rightarrow \cdots \rightarrow V_1^\natural \rightarrow V_0^\natural \xrightarrow{\epsilon} V^\natural \rightarrow 0.$$

Choisissons un morphisme de chaînes  $\alpha_\bullet = (\alpha_i)_{i=0}^d$ ,  $\alpha_i \in \text{Hom}_A(V_i, V_i^\natural)$ , qui relève  $\alpha$  au sens où  $\alpha \circ \epsilon = \epsilon \circ \alpha_0$ . Ce relèvement est unique à homotopie de chaînes près, et l'on pose

$$(*) \quad \text{tr}_{A^\natural}(\alpha) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \text{tr}_{A^\natural}(\alpha_i) \in \bar{A}^\natural.$$

Pour  $i = 0, \dots, d$ , la paire  $(V_i, \alpha_i)$  définit un élément  $[V_i, \alpha_i]'_\star$  de  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural)$ , et l'on pose

$$(**) \quad [V, \alpha]'_\star = \sum_{i=0}^d (-1)^i [V_i, \alpha_i]'_\star \in \mathcal{C}'_\star(A^\natural).$$

Soit  $\mathcal{C}_\star(A^\natural)$  le groupe abélien libre de base les paires  $(V, \alpha)$  où  $V$  est un  $A$ -module de type fini, et  $\alpha$  est un élément de  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ , quotienté par les relations:

—  $(V, \alpha) = (V_1, \alpha_1) + (V_2, \alpha_2)$  pour toute suite exacte courte de  $A$ -modules

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

telle que  $\alpha \circ a = a \circ \alpha_1$  et  $\alpha_2 \circ b = b \circ \alpha$ ;

—  $(V, \alpha) + (V, \alpha') = (V, \alpha + \alpha')$ ;

—  $(V, u \circ \alpha) = (V', \alpha \circ u)$  pour tout  $\alpha \in \text{Hom}_A(V, V^\natural)$  et tout  $u \in \text{Hom}_A(V', V)$ .

On note  $[V, \alpha]_\star$  l'élément de  $\mathcal{C}_\star(A^\natural)$  défini par une paire  $(V, \alpha)$  comme ci-dessus, et comme plus haut, on munit  $\mathcal{C}_\star(A^\natural)$  de la structure de  $Z(A)$ -module donnée par:

—  $[V_1, \alpha_1]_\star + [V_2, \alpha_2]_\star = [V_1 \times V_2, \alpha_1 \times \alpha_2]_\star$ ;

—  $z \cdot [V, \alpha]_\star = [V, z_V \circ \alpha]_\star$ ,  $z \in Z(A)$ .

**COROLLAIRE 3.** — *Supposons que tout  $A$ -module de type fini  $V$  possède une résolution projective bornée de type fini. L'application  $(V, \alpha) \mapsto [V, \alpha]'_\star$  induit par passage au quotient un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules*

$$\mathcal{C}_\star(A^\natural) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}'_\star(A^\natural), [V, \alpha]_\star \mapsto [V, \alpha]'_\star,$$

et l'application  $(V, \alpha) \mapsto \text{tr}_{A^\natural}(\alpha)$  induit par passage au quotient un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}_\star(A^\natural) \xrightarrow{\cong} \bar{A}^\natural, [V, \alpha]_\star \mapsto \bar{a}_{[V, \alpha]_\star}^\natural.$$

*Démonstration.* — D'après (\*\*), et la relation sur les suites exactes dans  $\mathcal{C}_\star(A^\natural)$ , l'application  $\mathcal{C}_\star(A^\natural) \rightarrow \mathcal{C}'_\star(A^\natural)$ ,  $[V, \alpha]_\star \mapsto [V, \alpha]'_\star$  est bien définie, et c'est un morphisme surjectif de  $Z(A)$ -modules. Il est scindé par l'application naturelle  $\mathcal{C}'_\star(A^\natural) \rightarrow \mathcal{C}_\star(A^\natural)$ ,  $[V, \alpha]'_\star \mapsto [V, \alpha]_\star$ , elle aussi surjective d'après la relation sur les suites exactes dans  $\mathcal{C}_\star(A^\natural)$ . D'où la première assertion du corollaire, et aussi la seconde (d'après le corollaire 1 et la proposition de 6.3).  $\square$

Pour une paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V$ , de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u \in \text{End}_A(V)$ , on pose

$$\{V, u\} = [V, u \circ \gamma_V^{-1}]_{\star} \in \mathcal{C}_{\star}(A^{\natural}).$$

On note  $\bar{\mathcal{C}}(A^{\natural})$  le sous-groupe de  $\mathcal{C}_{\star}(A^{\natural})$  — en fait un sous- $Z(A)$ -module — formé des éléments  $\{V, u\}$  comme ci-dessus.

**COROLLAIRE 4.** — *Supposons que tout  $A$ -module de type fini  $V$  possède une résolution projective bornée de type fini. On a l'égalité*

$$\bar{\mathcal{C}}(A^{\natural}) = \mathcal{C}_{\star}(A^{\natural}).$$

Soit enfin  $\mathcal{C}(A^{\natural})$  le groupe abélien libre de base les paires  $(V, u)$  où  $V$  est un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré, de type fini comme  $A$ -module, et  $u$  est un élément de  $\text{End}_A(V)$ , quotienté par les relations:

—  $(V, u) = (V_1, u_1) + (V_2, u_2)$  pour toute suite exacte de  $A^{\natural}$ -modules

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

telle que  $u \circ a = a \circ u_1$  et  $u_2 \circ b = b \circ u$ ;

—  $(V, u) + (V, u') = (V, u + u')$ ;

—  $(V, u' \circ u) = (V', \tilde{u} \circ u')$  pour tout  $u \in \text{Hom}_A(V, V')$  et tout  $u' \in \text{Hom}_A(V', V)$ .

On note  $[V, u]$  l'élément de  $\mathcal{C}(A^{\natural})$  défini par une paire  $(V, u)$  comme plus haut, et l'on munit  $\mathcal{C}(A^{\natural})$  de la structure de  $Z(A)$ -module donnée par:

—  $[V_1, u_1] + [V_2, u_2] = [V_1 \times V_2, \alpha_1 \times \alpha_2]$ ;

—  $z \cdot [V, u] = [V, z_V \circ u]$ ,  $z \in Z(A)$ .

Soit aussi  $\mathcal{S}(A^{\natural})$  le sous-groupe — en fait un sous- $Z(A)$ -module — de  $\mathcal{C}(A^{\natural})$  engendré par les éléments de la forme

$$[V, u] - [V_1, u_1] - [V_2, u_2]$$

où

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

est une suite exacte de  $A$ -modules telle que  $u \circ a = \tilde{a} \circ u_1$  et  $u_2 \circ b = \tilde{b} \circ u$ .

L'application  $[V, u] \mapsto \{V, u\}$  induit par passage au quotient un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}(A^{\natural}) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}(A^{\natural}), [V, u] \mapsto \{V, u\},$$

dont le noyau contient  $\mathcal{S}(A^{\natural})$ .

**REMARQUE 1.** — Le lemme de 6.3 reste vrai si l'on remplace  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$  par  $\mathcal{C}(A^{\natural})$ . ■

**REMARQUE 2.** — Soit  $V$  un  $A$ -module de type fini. Supposons que  $V$  possède une résolution projective bornée de type fini

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\epsilon} V \rightarrow 0.$$

Quitte à remplacer les  $V_i$ , on peut supposer que pour  $i = 0, \dots, d-1$ , le  $A$ -module  $V_i$  est libre. Alors pour  $i = 0, \dots, d-1$ , on peut choisir un isomorphisme de  $A$ -modules  $\iota_i : V_i \rightarrow A^{n_i}$  et munir  $V_i$  de la structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré déduite via  $\iota_i$  de celle sur  $A^{n_i}$ . Les flèches  $V_i \rightarrow V_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, d-1$ ) ne sont bien sûr a priori pas des morphismes de  $A^{\natural}$ -modules, et si de plus  $V$  et  $V_d$  sont munis d'une structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré, les flèches  $V_0 \xrightarrow{\epsilon} V$  et  $V_d \rightarrow V_{d-1}$  ne sont a priori pas non plus des morphismes de  $A^{\natural}$ -modules. D'ailleurs si  $V$  est un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré, de type fini comme  $A$ -module, qui possède une résolution projective bornée de type fini, il n'est en général pas possible de choisir une telle résolution qui soit en plus une suite exacte longue dans  $\text{Mod}(A^{\natural})$ . ■

Considérons les propriétés  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  suivantes:

$\mathbf{P}_1$ : pour tout  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V$ , de type fini comme  $A$ -module, il existe une suite exacte longue de  $A$ -modules

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\epsilon} V \rightarrow 0,$$

où les  $V_i$  sont des  $A^{\natural}$ -modules non dégénérés, projectifs de type fini comme  $A$ -modules.

$\mathbf{P}_2$ : pour tout  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V$ , de type fini comme  $A$ -module, il existe une suite exacte longue de  $A^{\natural}$ -modules

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\epsilon} V \rightarrow 0,$$

où les  $V_i$  sont des  $A^{\natural}$ -modules non dégénérés, projectifs de type fini comme  $A$ -modules.

On a donc l'implication

$$\mathbf{P}_2 \Rightarrow \mathbf{P}_1.$$

Seul le point (1) du lemme suivant sera utilisé dans la suite. Quant aux points (2) et (3), il nous a semblé utile de les énoncer pour fixer les idées, bien que nous n'ayons pas démontré la propriété  $\mathbf{P}_2$ , ni la propriété  $\mathbf{P}_1$ , dans le cas qui nous intéresse ici (6.6–6.8).

**LEMME 2.** — Supposons que tout  $A$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini, et soit  $\rho$  le morphisme de  $Z(A)$ -modules  $\mathcal{C}(A^{\natural}) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(A^{\natural})$ ,  $[V, u] \mapsto \{V, u\}$ .

- (1) Le morphisme  $\rho$  est scindé par l'application naturelle  $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(A^{\natural})$ ,  $[V, u]' \mapsto [V, u]$ , où l'on identifie  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$  à  $\overline{\mathcal{C}}(A^{\natural})$  via les isomorphismes des corollaires 1 et 3.
- (2) Supposons que la propriété  $\mathbf{P}_1$  est vérifiée. Alors  $\ker \rho = \mathcal{S}(A^{\natural})$ .
- (3) Supposons que la propriété  $\mathbf{P}_2$  est vérifiée. Alors  $\rho$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* — D'après le corollaire 4, on a l'égalité  $\overline{\mathcal{C}}(A^{\natural}) = \mathcal{C}_*(A^{\natural})$ , et d'après les corollaires 1 et 3, l'application  $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}_*(A^{\natural})$ ,  $[V, u]' \mapsto [V, u \circ \gamma_V^{-1}]_*$  est un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules. Identifions  $\overline{\mathcal{C}}(A^{\natural})$  à  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$  via cet isomorphisme. L'application naturelle  $\iota : \mathcal{C}'(A^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(A^{\natural})$ ,  $[V, u]' \mapsto [V, u]$  est un morphisme de  $Z(A)$ -module, qui vérifie

$$\rho \circ \iota([V, u]') = \{V, u\} = [V, u \circ \gamma_V^{-1}] = [V, u]'.$$

D'où le point (1).

Soit  $(V, u)$  une paire formée d'un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V$ , de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ . Choisissons une résolution projective bornée de type fini du  $A$ -module  $V$ :

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\epsilon} V \rightarrow 0.$$

Posons  $\alpha = u \circ \gamma_V^{-1}$ , et choisissons un morphisme de chaînes  $\alpha_{\bullet} = (\alpha_i)_{i=1}^d$ ,  $\alpha_i \in \text{Hom}_A(V_i, V_i^{\natural})$ , qui relève  $\alpha$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}'_*(V^{\natural})$

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i [V_i, \alpha_i]' = 0.$$

Supposons que la propriété  $\mathbf{P}_1$  est vérifiée. Alors on peut supposer que les  $V_i$  sont des  $A^{\natural}$ -modules non dégénérés, et poser  $u_i = \alpha_i \circ \gamma_{V_i}$ ,  $i = 0, \dots, d$ . L'élément

$$[V, u] - \sum_{i=0}^d (-1)^i [V_i, u_i]$$

appartient à  $\mathcal{S}(A^{\natural})$ , d'où l'égalité

$$\mathcal{C}(A^{\natural}) = \mathcal{S}(A^{\natural}) + \iota(\mathcal{C}'(A^{\natural})).$$

Puisque  $\mathcal{S}(A^{\natural}) \subset \ker \rho$ , cette inclusion est une égalité, et la somme ci-dessus est directe.

Supposons que la propriété  $\mathbf{P}_2$  est vérifiée. Alors on peut supposer que la résolution projective de  $V$  choisie plus haut est une suite exacte longue dans  $\text{Mod}(A^{\natural})$ . En posant toujours  $u_i = \alpha_i \circ \gamma_{V_i}$ ,  $i = 0, \dots, d$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(A^{\natural})$

$$[V, u] = \sum_{i=0}^d (-1)^i [V_i, u_i] = \sum_{i=0}^d (-1)^i \iota([V_i, u_i]').$$

Par suite on a  $\mathcal{C}(A^{\natural}) = \iota(\mathcal{C}'(A^{\natural}))$ , et donc  $\ker \rho (= \mathcal{S}(A^{\natural})) = \{0\}$ .  $\square$

**6.5. Les isomorphismes  $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \simeq \mathcal{C}'(\mathbf{A}^{\natural})$  et  $\mathcal{C}_*(A^{\natural}) \simeq \mathcal{C}_*(\mathbf{A}^{\natural})/\Omega_*$ .** — On a vu que l'action de  $Z(A)$  sur  $\bar{A}^{\natural}$  se factorise à travers l'anneau quotient  $\bar{Z}_{A^{\natural}}$  (cf. 6.3). Cette propriété a des implications naturelles, qui sont regroupées dans ce numéro. Signalons qu'il ne sera pas vraiment utilisé dans la suite, sauf si la propriété  $\mathbf{P}_2$  est vérifiée (cf. la remarque de 6.17).

Soit  $A^{\natural}$  un  $A$ -bimodule, libre de rang 1 comme  $A$ -module à gauche (resp. à droite), et tel que l'ensemble  $A^{\natural, \times}$  est non vide. Fixons un élément  $a_1^{\natural} \in A^{\natural, \times}$  et posons  $\gamma = \gamma_{a_1^{\natural}}$ . Rappelons que  $\gamma$  induit par restriction un automorphisme de l'anneau  $Z(A)$ , qui ne dépend pas du choix de  $a_1^{\natural}$ . L'automorphisme  $\gamma$  de  $Z(A)$  induit par passage au quotient l'automorphisme trivial de l'anneau  $\bar{Z}_{A^{\natural}} = Z(A)/\mathcal{J}_Z$ , où (rappel)  $\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Z(A^{\natural})$  est l'idéal de  $Z(A)$  engendré par les  $\gamma^{-1}(z) - z$ ,  $z \in Z(A)$ .

Notons  $\mathbf{A}$  l'anneau défini par

$$\mathbf{A} = A \otimes_{Z(A)} \bar{Z}_{A^{\natural}} = A/\mathcal{J}$$

où  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(A^{\natural})$  est l'idéal bilatère ( $\gamma$ -stable) de  $A$  engendré par  $\mathcal{J}_Z$ , et identifions  $\bar{Z}_{A^{\natural}}$  à un sous-anneau de  $\mathbf{A}$  via l'application  $\bar{Z}_{A^{\natural}} \rightarrow \mathbf{A}$ ,  $\bar{z} \mapsto 1 \otimes \bar{z}$ . On a l'inclusion

$$\bar{Z}_{A^{\natural}} \subset Z(\mathbf{A}).$$

Posons

$$\mathcal{J}^{\natural} = \mathcal{J} \cdot A^{\natural} = A^{\natural} \cdot \mathcal{J}.$$

Le  $A$ -bimodule quotient  $\mathbf{A}^{\natural} = A^{\natural}/\mathcal{J}^{\natural}$  est un  $\mathbf{A}$ -bimodule, libre de rang 1 comme  $\mathbf{A}$ -module à gauche (resp. à droite), et tel que  $\mathbf{A}^{\natural, \times}$  est non vide. En effet, soit  $\bar{\gamma}$  l'automorphisme de l'anneau  $\mathbf{A} = A/\mathcal{J}$  déduit de  $\gamma$  par passage au quotient. L'image  $\mathbf{a}_1^{\natural}$  de  $a_1^{\natural}$  dans  $\mathbf{A}^{\natural}$  est un générateur à gauche et à droite de  $\mathbf{A}^{\natural}$  sur  $\mathbf{A}$ , et  $\bar{\gamma}$  est l'automorphisme  $\gamma_{\mathbf{a}_1^{\natural}}$  de  $\mathbf{A}$  défini par  $\mathbf{a}_1^{\natural}$  comme en 6.1.

On définit les  $Z(\mathbf{A})$ -modules  $\mathcal{C}'(\mathbf{A}^{\natural})$ ,  $\mathcal{C}'_*(\mathbf{A}^{\natural})$ , etc., comme en 6.3 et 6.4. Pour une paire  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  formée d'un  $\mathbf{A}^{\natural}$ -module non dégénéré, projectif de type fini comme  $\mathbf{A}$ -module, et d'un élément  $\mathbf{u}$  de  $\text{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{V})$ , on note  $\llbracket \mathbf{V}, \mathbf{u} \rrbracket'$  l'élément de  $\mathcal{C}'(\mathbf{A}^{\natural})$  défini par  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$ . On définit de la même manière  $\llbracket \mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha} \rrbracket'_* \in \mathcal{C}'_*(\mathbf{A}^{\natural})$ , etc.

Soit  $V$  un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré. Notons  $\bar{V}$  le  $\mathbf{A}$ -module  $\mathbf{A} \otimes_A V$ . On a

$$\bar{V} = V/\mathcal{J} \cdot V = V/\mathcal{J}_Z \cdot V,$$

et  $\bar{V}$  est muni d'une structure naturelle de  $\mathbf{A}^{\natural}$ -module non dégénéré: posant  $V^{\natural} = A^{\natural} \otimes_A V$  et  $\bar{V}^{\natural} = \mathbf{A}^{\natural} \otimes_{\mathbf{A}} \bar{V}$ , on a  $\bar{V}^{\natural} = V^{\natural}/\mathcal{J} \cdot V^{\natural}$  et  $\gamma_{\bar{V}^{\natural}} : \bar{V}^{\natural} \rightarrow \bar{V}^{\natural}$  est l'isomorphisme de  $\mathbf{A}$ -modules déduit de  $\gamma_V$  par passage aux quotients. L'application naturelle

$$\delta : \text{Hom}_{\mathbf{A}}(V, V^{\natural}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\bar{V}, \bar{V}^{\natural})$$

induit par passage aux quotients une application

$$\bar{\delta} : \overline{\text{Hom}}_{\mathbf{A}}(V, V^{\natural}) \rightarrow \overline{\text{Hom}}_{\mathbf{A}}(\bar{V}, \bar{V}^{\natural})$$

qui est un morphisme de  $Z(A)$ -modules, où la structure de  $Z(A)$ -module sur  $\overline{\text{Hom}}_{\mathbf{A}}(\overline{V}, \overline{V}^{\natural})$  est celle donnée par le morphisme  $Z(A) \rightarrow Z(\mathbf{A})$  induit par la projection canonique  $A \rightarrow \mathbf{A}$ . D'autre part, puisque  $\mathcal{J}^{\natural}$  est contenu dans le sous- $Z(A)$ -module de  $A^{\natural}$  engendré par les commutateurs  $a' \cdot a^{\natural} - a^{\natural} \cdot a'$  pour  $a^{\natural} \in A^{\natural}$  et  $a' \in A$ , la projection canonique  $A^{\natural} \rightarrow \mathbf{A}^{\natural}$  induit par passage aux quotients une identification  $\overline{A}^{\natural} = \overline{\mathbf{A}}^{\natural}$ , et le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{\text{Hom}}_A(V, V^{\natural}) & \xrightarrow{\delta} & \overline{\text{Hom}}_{\mathbf{A}}(\overline{V}, \overline{V}^{\natural}) \\ \text{tr}_{A^{\natural}} \downarrow & & \downarrow \text{tr}_{\mathbf{A}^{\natural}} \\ \overline{A}^{\natural} & \xlongequal{\quad} & \overline{\mathbf{A}}^{\natural} \end{array}$$

est commutatif. La catégorie  $\text{Mod}(\mathbf{A})$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(A)$ , et si  $V$  est un générateur projectif de type fini de  $\text{Mod}(A)$ , alors  $\overline{V}$  est un générateur projectif de type fini de  $\text{Mod}(\mathbf{A})$ . En ce cas, d'après la proposition de 6.2, le morphisme  $\delta$  est un isomorphisme. D'autre part,  $\text{Mod}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\natural})$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(A, A^{\natural})$ , et d'après la démonstration de loc. cit., pour toute paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $V$ , projectif de type fini comme  $A$ -module, et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_A(V)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$

$$[V, u]' = [\overline{V}, \overline{u}]',$$

où  $\overline{u}$  est le  $\mathbf{A}$ -endomorphisme de  $\overline{V}$  déduit de  $u$  par passage au quotient. En effet, on choisit un  $A^{\natural}$ -module non dégénéré  $W$ , de type fini comme  $A$ -module, tel que le  $A^{\natural}$ -module (non dégénéré)  $V_1 = V \times W$  est libre comme  $A$ -module, et l'on pose  $u_1 = u \times 0_W \in \text{End}_A(V_1)$ . Alors on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(A^{\natural})$

$$[V, u]' = [V_1, u_1]' = [\overline{V}_1, \overline{u}_1]' = [\overline{V}, \overline{u}]'.$$

Puisque  $\overline{A}^{\natural} = \overline{\mathbf{A}}^{\natural}$ , d'après la proposition de 6.3 appliquée à  $A^{\natural}$  et à  $\mathbf{A}^{\natural}$ , on a la

**PROPOSITION.** — *L'application  $(V, u) \mapsto (\overline{V}, \overline{u})$  induit un isomorphisme de  $\overline{Z}_{A^{\natural}}$ -modules  $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}'(\mathbf{A}^{\natural})$ ,  $[V, u]' \mapsto \llbracket \overline{V}, \overline{u} \rrbracket'$ .*

D'après la proposition de 6.4 appliquée à  $A^{\natural}$ , l'application  $(V, u) \mapsto (V, u \circ \gamma_V^{-1})$  induit un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}'(A^{\natural}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}'_{*}(A^{\natural}).$$

Ici  $\gamma_V : V^{\natural} = A^{\natural} \otimes_A V \rightarrow V$  est l'isomorphisme de  $A$ -modules donné par la structure de  $A^{\natural}$ -module non dégénéré sur  $V$ . D'après la proposition de 6.4 appliquée à  $A^{\natural}$  et la proposition ci-dessus, on en déduit le

**COROLLAIRE 1.** — *L'application  $(V, \alpha) \mapsto (\overline{V}, \overline{\alpha})$  induit un isomorphisme de  $\overline{Z}_{A^{\natural}}$ -modules*

$$\mathcal{C}'_{*}(A^{\natural}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}'_{*}(\mathbf{A}^{\natural}), [V, \alpha]'_{*} \mapsto \llbracket \overline{V}, \overline{\alpha} \rrbracket'_{*},$$

où  $\overline{\alpha}$  est l'élément de  $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\overline{V}, \overline{V}^{\natural})$  déduit de  $\alpha$  par passage aux quotients.

Si le morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \mathbf{A}$  est plat, alors l'application  $(V, \alpha) \mapsto (\overline{V}, \overline{\alpha})$  induit un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}_{*}(A^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}_{*}(\mathbf{A}^{\natural}),$$

qui par restriction donne un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\overline{\mathcal{C}}(A^{\natural}) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^{\natural}).$$

Ces deux morphismes sont surjectifs et scindés (par l'application naturelle).

En général c'est un peu plus compliqué: soit  $\Omega_*$  le sous-groupe de  $\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)$  engendré par les éléments de la forme

$$[[\bar{V}, \bar{\alpha}]_* - [[\bar{V}_1, \bar{\alpha}_1]_* - [[\bar{V}_2, \bar{\alpha}_2]_*$$

pour des éléments  $[V, \alpha]_*$ ,  $[V_1, \alpha_1]_*$ ,  $[V_2, \alpha_2]_*$  de  $\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)$  tels qu'il existe une suite exacte de  $A$ -modules

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

vérifiant  $\alpha \circ a = a \circ \alpha_1$  et  $\alpha_2 \circ b = b \circ \alpha$ . C'est un sous- $Z(\mathbf{A})$ -module de  $\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)$ , et l'application  $(V, \alpha) \mapsto (\bar{V}, \bar{\alpha})$  induit un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural) \rightarrow \mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)/\Omega_*, [V, \alpha]_* \mapsto [[\bar{V}, \bar{\alpha}]_* + \Omega_*,$$

qui par restriction donne un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural)/\bar{\Omega}, \{V, u\} \mapsto \{\{\bar{V}, \bar{u}\} + \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} = \Omega_* \cap \bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural),$$

où l'on a posé  $\{\{\bar{V}, \bar{u}\} = [[\bar{V}, \bar{u} \circ \gamma_{\bar{V}}^{-1}]_*$ . Comme plus haut, ces deux morphismes sont surjectifs et scindés (par l'application naturelle). Soit aussi  $\Omega$  le sous-groupe de  $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural)$  engendré par les éléments de la forme

$$[[\bar{V}, \bar{u}] - [[\bar{V}_1, \bar{u}_1] - [[\bar{V}_2, \bar{u}_2]$$

pour des éléments  $[V, u]$ ,  $[V_1, u_1]$ ,  $[V_2, u_2]$  de  $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural)$  tels qu'il existe une suite exacte de  $A^\natural$ -modules

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} V_2 \rightarrow 0$$

vérifiant  $u \circ a = a \circ u_1$  et  $u_2 \circ b = b \circ u$ . C'est un sous- $Z(\mathbf{A})$ -module de  $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural)$ , et l'application  $(V, u) \mapsto (\bar{V}, \bar{u})$  induit un morphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural)/\Omega, [V, u] \mapsto [[\bar{V}, \bar{u}] + \Omega,$$

qui est surjectif et scindé par l'application naturelle. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural)/\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural) & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural)/\bar{\Omega} \end{array}$$

est commutatif, où la flèche verticale de droite est le morphisme surjectif de  $Z(A)$ -modules déduit de la projection  $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\natural) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}(\mathbf{A}^\natural)$ ,  $[[\mathbf{V}, \mathbf{u}]] \mapsto \{\{\mathbf{V}, \mathbf{u}\}$  par passage aux quotients.

Supposons que tout  $A$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini. Alors pour toute paire  $(V, \alpha)$  formée d'un  $A$ -module de type fini et d'un élément  $\alpha$  de  $\text{Hom}_A(V, V^\natural)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)$

$$[V, \alpha]_* = [[\bar{V}, \bar{\alpha}]_*.$$

En effet, choisissons une résolution projective bornée de type finie du  $A$ -module  $V$

$$0 \rightarrow V_d \rightarrow V_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 \xrightarrow{\varepsilon} V \rightarrow 0$$

et un morphisme de chaînes  $\alpha_\bullet = (\alpha_i)_{i=0}^d$ ,  $\alpha_i \in \text{Hom}_A(V_i, V_i^\natural)$ , qui relève  $\alpha$ . D'après ce qui précède, on a l'égalité dans  $\mathcal{C}_*(\mathbf{A}^\natural)$

$$[V, \alpha]_* = \sum_{i=0}^d (-1)^i [[\bar{V}_i, \bar{\alpha}_i]_*.$$

Or on a

$$[\overline{V}, \overline{\alpha}]_* \equiv \sum_{i=0}^d (-1)^i [\overline{V}_i, \overline{\alpha}_i]_* \pmod{\Omega_*},$$

d'où

$$[\overline{V}, \overline{\alpha}]_* = \sum_{i=0}^d (-1)^i [\overline{V}_i, \overline{\alpha}_i]_*.$$

On en déduit le

**COROLLAIRE 2.** — *Supposons que tout  $A$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini. L'application*

$$\mathcal{C}_*(A^\natural) \rightarrow \mathcal{C}_*(A^\natural)/\Omega_*, [V, \alpha]_* \mapsto [\overline{V}, \overline{\alpha}]_* + \Omega_*$$

*est un isomorphisme de  $\overline{Z}_{A^\natural}$ -modules, et l'inclusion  $\overline{\mathcal{C}}(A^\natural) \subset \mathcal{C}_*(A^\natural)$  induit par passage aux quotient l'égalité*

$$\overline{\mathcal{C}}(A^\natural)/\overline{\Omega} = \mathcal{C}_*(A^\natural)/\Omega_*.$$

**COROLLAIRE 3.** — *Supposons que tout  $A$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini, et que  $A^\natural$  vérifie la propriété  $\mathbf{P}_2$  de 6.4. Les applications*

$$\mathcal{C}(A^\natural) \rightarrow \mathcal{C}(A^\natural)/\overline{\Omega}, [V, u] \mapsto [\overline{V}, \overline{u}] + \Omega$$

et

$$\mathcal{C}(A^\natural)/\Omega \rightarrow \overline{\mathcal{C}}(A^\natural)/\overline{\Omega}, [\mathbf{V}, \mathbf{u}] + \Omega \mapsto \{\{\mathbf{V}, \mathbf{u}\} + \overline{\Omega}$$

*sont des isomorphismes de  $\overline{Z}_{A^\natural}$ -modules.*

**6.6. Application aux algèbres de Hecke finies.** — Soit  $J^\natural$  un sous-espace tordu ouvert compact de  $G^\natural$  tel que  $\omega$  est trivial sur le groupe  $J$  sous-jacent à  $J^\natural$ . D'après 2.21, un tel  $J^\natural$  existe et peut être choisi aussi petit que l'on veut (on supposera plus que loin que  $J^\natural$  est "bon").

On a vu (2.8) que  $\mathcal{H}_J^\natural$  est un  $\mathcal{H}_J$ -bimodule libre de rang 1 (à gauche et à droite), qui vérifie l'hypothèse de 6.1: il est engendré, à droite et à gauche, par la fonction  $e_{J^\natural}$ . Rappelons qu'on a noté  $\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural = \mathcal{H}_J(G^\natural, \omega)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}_J^\natural$  muni de la structure de  $\mathcal{H}_J$ -bimodule définie comme en loc. cit. (variante) en remplaçant la paire  $(\mathcal{H}^\natural, \mathcal{H})$  par la paire  $(\mathcal{H}_J^\natural, \mathcal{H}_J)$ . L'élément  $e_{J^\natural}$  engendre  $\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural$  à droite et à gauche sur  $\mathcal{H}_J$ , et pour  $f \in \mathcal{H}_J$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural$

$$e_{J^\natural} \cdot f = (\omega^{-1}f) \circ \text{Int}_{G^\natural}(\delta)^{-1} \cdot e_{J^\natural}, \quad J^\natural = J \cdot \delta.$$

L'application  $f \mapsto (\omega^{-1}f) \circ \text{Int}_{G^\natural}(\delta)^{-1}$  est un automorphisme de l'anneau (et même de la  $\mathbb{C}$ -algèbre)  $\mathcal{H}_J$ , qui ne dépend pas du choix de  $\delta$  tel que  $J^\natural = J \cdot \delta$ ; on la note  $\gamma = \gamma_{J^\natural}$ .

Soit  $W$  un  $\mathcal{H}_J$ -module projectif de type fini. L'application

$$W_\gamma \rightarrow \mathcal{H}_{J,\omega}^\natural \otimes_{\mathcal{H}_J} W, w \mapsto e_{J^\natural} \otimes w$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{H}_J$ -modules (cf. la remarque 1 de 6.1), via lequel on identifie  $W_\gamma$  à  $\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural \otimes_{\mathcal{H}_J} W$ . Pour  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_J}(W, W_\gamma)$ , on peut comme en 6.1 définir l'élément

$$\text{tr}_\gamma(\alpha) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural}(\alpha) \in \overline{\mathcal{H}}_{J,\omega}^\natural,$$

où l'on a posé (rappel)  $\overline{\mathcal{H}}_{J,\omega}^\natural = \mathcal{H}_{J,\omega}^\natural / [\mathcal{H}_{J,\omega}^\natural, \mathcal{H}_J]$ .

Supposons de plus que  $J^\natural$  est un "bon" sous-espace tordu ouvert compact de  $G^\natural$ , i.e. que  $J$  est un élément de  $\mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ . D'après 2.21, toute  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$  se décompose en  $\Pi = \Pi_J \oplus \Pi_J^\perp$ , et le foncteur  $V \mapsto V^J$  est une équivalence de catégories entre  $\mathfrak{K}_J(G^\natural, \omega)$  et la

catégorie des  $(\mathcal{H}_J^\natural, \omega)$ -modules non dégénérés — c'est-à-dire la catégorie des  $\mathcal{H}_{J, \omega}^\natural$ -modules non dégénérés (cf. 2.8, variante). Soit  $(\Pi, u)$  une paire formée d'un objet de  $\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)$  tel que la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  sous-jacente est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi^\circ$ . Pour  $f \in \mathcal{H}_J$ , on a

$$\Pi(\delta)(f) = \Pi(\gamma(f)).$$

En d'autres termes,  $\Pi(\delta)$  induit un isomorphisme de  $V_\gamma^J = \mathcal{H}_{J, \omega}^\natural \otimes_{\mathcal{H}_J} V^J$  sur  $V^J$ , et comme  $V^J$  est un  $\mathcal{H}_J$ -module projectif de type fini, on peut définir l'élément

$$\bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J = \text{tr}_\gamma(u \circ \Pi(\delta)^{-1}; V^J) \in \overline{\mathcal{H}}_{J, \omega}^\natural.$$

Il ne dépend que de  $J$ , et pas du choix du sous-espace tordu ouvert compact  $J^\natural$  de  $G^\natural$  de groupe sous-jacent  $J$  (ni bien sûr du choix de  $\delta \in J^\natural$ ).

**REMARQUE.** — D'après la proposition de 6.3, tout élément  $\bar{\phi}$  de  $\overline{\mathcal{H}}_{J, \omega}^\natural$  est de la forme  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J$  pour une paire  $(\Pi, u)$  comme ci-dessus. Concrètement, notons  $W$  le  $\mathcal{H}_J$ -module  $\mathcal{H}_J$  pour la multiplication à gauche (il est libre de rang 1), et munissons-le de la structure de  $\mathcal{H}_{J, \omega}^\natural$ -module non dégénéré donnée par  $e_{J^\natural} \cdot f = \gamma(f)$ ,  $f \in \mathcal{H}_J$ . On a donc  $\gamma_W = \gamma (= \gamma_{J^\natural})$ . Pour  $f \in \mathcal{H}_J$ , l'application  $u_f : W \rightarrow W$ ,  $h \mapsto h * f$  est un élément de  $\text{End}_{\mathcal{H}_J}(W)$ , que l'on note  $u_f$ , et  $\text{tr}_\gamma(u_f \circ \gamma_W^{-1})$  est l'image dans  $\overline{\mathcal{H}}_{J, \omega}^\natural$  de la fonction  $f \cdot e_{J^\natural} \in \mathcal{H}_{J, \omega}^\natural$ . On note  $V$  le  $\mathcal{H}$ -module non dégénéré  $\mathcal{H} * e_J$  — c'est un objet projectif de  $\mathfrak{R}(G)$  —, muni de la structure de  $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -module non dégénéré défini comme dans l'exemple de 2.8 par

$$\phi \bullet (f * e_J) = u_\delta^{-1}(\phi \cdot f) * e_J, \quad \phi \in \mathcal{H}^\natural, f \in \mathcal{H}.$$

On a en particulier  $e_{J^\natural} \bullet (f) = \gamma(f)$ ,  $f \in \mathcal{H}_J$ . Pour  $f \in \mathcal{H}_J$ , l'application

$$h * e_J \mapsto (h * e_J) * f = (h * f) * e_J$$

est un  $\mathcal{H}$ -endomorphisme de  $V$ , et sa restriction à  $W = e_J * V$  est l'endomorphisme  $u_f$ . ■

**6.7. L'isomorphisme  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \simeq \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ .** — Soit  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega))$  le groupe abélien libre de base les paires  $(\Pi, u)$  où  $\Pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et  $u$  est un  $G$ -endomorphisme de  $\Pi^\circ$ , quotienté par les relations:

- $(\Pi, u) = (\Pi', u')$  s'il existe un isomorphisme de  $(G^\natural, \omega)$ -modules  $a : \Pi \rightarrow \Pi'$  tel que  $u' \circ a = a \circ u$ ;
- $(\Pi, u) + (\Pi, u') = (\Pi, u + u')$ ;
- $(\Pi, v \circ u) = (\Pi', u(1) \circ v)$  pour toutes flèches  $u : \Pi^\circ \rightarrow \Pi'^\circ$  et  $v : \Pi'^\circ \rightarrow \Pi^\circ$  dans  $\mathfrak{R}(G)$ , où l'on a posé  $u(1) = \Pi'(\delta) \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1}$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^\natural$ .

On note  $[\Pi, u]'$  l'élément de  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  défini par une paire  $(\Pi, u)$  comme ci-dessus, et l'on munit  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  de la structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module définie par:

- $[\Pi_1, u_1]' + [\Pi_2, u_2]' = [\Pi_1 \oplus \Pi_2, u_1 \oplus u_2]'$ ;
- $z \cdot [\Pi, u]' = [\Pi, z_{\Pi^\circ} \circ u]'$ ,  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ .

Pour toute partie  $\mathfrak{S}$ -stable  $\mathfrak{S}$  de  $\mathfrak{B}(G)$ , on définit de la même manière le  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G)$ -module  $\mathcal{C}'_{\mathfrak{S}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^\natural, \omega))$ , où (2.18)  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^\natural, \omega)$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  formée des  $\Pi$  tels que  $\Pi^\circ$  est un objet de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G)$ . Pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  on pose

$$\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'_{\mathfrak{S}(J)}(G^\natural, \omega) (= \mathcal{C}'(\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega)) \simeq \mathcal{C}'(\mathcal{H}_J(G^\natural, \omega))).$$

C'est un  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -module, où

$$\mathfrak{Z}_J(G) = Z(e_J * \mathcal{H}(G) * e_J)$$

est le centre de  $\mathcal{H}_J(G) = e_J * \mathcal{H}(G) * e_J$ ; notons que  $\mathfrak{Z}_J(G)$  coïncide avec le centre  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}(J)}(G)$  de la catégorie abélienne  $\mathfrak{R}_J(G) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}(J)}(G)$ . Via le morphisme d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}_J(G), \quad z \mapsto z(e_J),$$

$\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega)$  est aussi un  $\mathfrak{Z}(G)$ -module.

La proposition suivante est une simple reformulation de celle de 6.3.

**PROPOSITION.** — *Pour tout groupe  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , l'application  $(\Pi, u) \mapsto \bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J$  induit un isomorphisme de  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -modules*

$$\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega) \xrightarrow{\simeq} \bar{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega).$$

Soit  $J_1, J_2 \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  tels que  $J_1 \subset J_2$ . La catégorie  $\mathfrak{R}_{J_2}(G^\natural, \omega)$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}_{J_1}(G^\natural, \omega)$ , et l'on a la décomposition en produit de catégories abéliennes

$$\mathfrak{R}_{J_1}(G^\natural, \omega) = \mathfrak{R}_{J_2}(G^\natural, \omega) \times \mathfrak{R}_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega), \quad \mathfrak{R}_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}(J_1) \setminus \mathfrak{S}(J_2)}(G^\natural, \omega).$$

Notons que puisque  $\mathfrak{S}(J_i)$  est une partie  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\mathfrak{B}(G)$ ,  $\mathfrak{S}(J_1) \setminus \mathfrak{S}(J_2)$  l'est aussi et la catégorie  $\mathfrak{R}_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega)$  est bien définie. Ainsi l'espace  $\mathcal{C}'_{J_2}(G^\natural, \omega)$  est un sous-espace vectoriel — en fait un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module — de  $\mathcal{C}'_{J_1}(G^\natural, \omega)$ , et l'on a la décomposition en somme directe de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules

$$\mathcal{C}'_{J_1}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'_{J_2}(G^\natural, \omega) \oplus \mathcal{C}'_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega), \quad \mathcal{C}'_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'_{\mathfrak{S}(J_1) \setminus \mathfrak{S}(J_2)}(G^\natural, \omega).$$

D'autre part l'inclusion  $\mathcal{H}_{J_2, \omega}^\natural \rightarrow \mathcal{H}_{J_1, \omega}^\natural$  induit par passage aux quotients un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $q = q_{J_2}^{J_1} : \bar{\mathcal{H}}_{J_2, \omega}^\natural \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{J_1, \omega}^\natural$ . Si  $(\Pi, u)$  est une paire formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}_{J_1}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}_{J_1}(G)$ , et d'un  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi^\circ$ , alors pour  $i = 1, 2$ , on peut définir  $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_{(\Pi, u)}^{J_i} \in \bar{\mathcal{H}}_{J_i, \omega}^\natural$ . Par construction on a  $\bar{\phi}_1 = q(\bar{\phi}_2)$ . D'après la proposition, on a l'égalité ([K2, lemma 3.2] dans le cas non tordu)

$$[\bar{\mathcal{H}}_{J_2, \omega}^\natural, \bar{\mathcal{H}}_{J_2}^\natural] = [\bar{\mathcal{H}}_{J_1, \omega}^\natural, \bar{\mathcal{H}}_{J_1}^\natural] \cap \bar{\mathcal{H}}_{J_2, \omega}^\natural.$$

En d'autres termes,  $q$  est un morphisme injectif, qui identifie  $\bar{\mathcal{H}}_{J_2, \omega}^\natural$  à un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\bar{\mathcal{H}}_{J_1, \omega}^\natural$ . De plus, notant  $\bar{\mathcal{H}}_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega)$  le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\bar{\mathcal{H}}_{J_1, \omega}^\natural$  image de  $\mathcal{C}'_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega)$  par l'isomorphisme  $\mathcal{C}'_{J_1}(G^\natural, \omega) \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{J_1, \omega}^\natural$ , on a la décomposition en somme directe de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules

$$\bar{\mathcal{H}}_{J_1}(G^\natural, \omega) = \bar{\mathcal{H}}_{J_2}(G^\natural, \omega) \oplus \bar{\mathcal{H}}_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega).$$

Rappelons que l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathcal{H}_\omega^\natural$  est donnée par (cf. la démonstration du lemme de 3.1)

$$z \cdot \phi = z(e) * \phi, \quad z \in \mathfrak{Z}(G), \quad \phi \in \mathcal{H}_\omega^\natural,$$

où  $e$  est un idempotent de  $\mathcal{H}$  tel que  $e * \phi = \phi$ . Puisque  $\mathfrak{Z}(G) \simeq \text{End}_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}^{\text{op}}}(\mathcal{H})$ , le sous-espace  $[\mathcal{H}_\omega^\natural, \mathcal{H}]$  de  $\mathcal{H}_\omega^\natural$  est  $\mathfrak{Z}(G)$ -stable, et l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\mathcal{H}_\omega^\natural$  se factorise en une action sur l'espace quotient  $\bar{\mathcal{H}}_\omega^\natural = \mathcal{H}_\omega^\natural / [\mathcal{H}_\omega^\natural, \mathcal{H}]$ . Soit une paire  $(\Pi, u)$  formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi^\circ$ . Choisissons un groupe  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  tel que  $\Pi_J = \Pi$  — la condition “de type fini” assure l'existence d'un tel  $J$  —, et un sous-espace tordu  $J^\natural = J \cdot \delta$  de  $G^\natural$  de groupe sous-jacent  $J$ . Posant  $\pi = \Pi^\circ$ , on a

$$z_\pi \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1}|_{V_J} = \pi(z(e_J)) \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1}|_{V_\pi}.$$

On en déduit que

$$\bar{\phi}_{(\Pi, z_\pi \circ u)}^J = \bar{\phi}_{(\Pi, \pi(z(e_J)) \circ u)}^J = z(e_J) \cdot \bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J = z \cdot \bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J.$$

D'après ce qui précède, le  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  (resp.  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ ) est la limite inductive des sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega)$  (resp.  $\overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega)$ ) pour  $J$  parcourant les éléments de l'ensemble  $\mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , et on a le corollaire suivant.

**COROLLAIRE.** — *Les isomorphismes de  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -modules  $\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega)$  induisent, par passage aux limites inductives sur  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , un isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules*

$$\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega), [\Pi, u]' \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]}'.$$

Concrètement, pour toute paire  $(\Pi, u)$  formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi^\circ$ , on choisit un groupe  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$  tel que  $\Pi = \Pi_J$ , et l'on pose  $\overline{\phi}_{(\Pi, u)} = \overline{\phi}_{(\Pi, u)}^J$ . L'élément  $\overline{\phi}_{(\Pi, u)}$  est bien défini — i.e. il ne dépend pas du choix de  $J$  tel que  $\Pi = \Pi_J$  — et ne dépend que de la projection  $[\Pi, u]'$  de  $(\Pi, u)$  sur  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ , laquelle est un élément de  $\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega)$ .

Pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , on pose

$$\mathcal{C}'_J^\perp(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(\mathfrak{R}_J^\perp(G^\natural, \omega)) (= \mathcal{C}'_{\mathfrak{B}(G) \setminus \mathfrak{S}(J)}(G^\natural, \omega)).$$

C'est un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ , et l'on a la décomposition en somme directe de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules

$$\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega) \oplus \mathcal{C}'_J^\perp(G^\natural, \omega).$$

De même, notant  $\overline{\mathcal{H}}_J^\perp(G^\natural, \omega)$  le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  image de  $\mathcal{C}'_J^\perp(G^\natural, \omega)$  par l'isomorphisme  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ , on a la décomposition en somme directe de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules

$$\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathcal{H}}_J(G^\natural, \omega) \oplus \overline{\mathcal{H}}_J^\perp(G^\natural, \omega).$$

**REMARQUE 1.** — D'après le lemme de 6.3, pour tout entier  $k > 1$ , tout objet  $\Sigma$  de  $\mathfrak{R}(\mathcal{G}_k, \omega_k)$  tel que la représentation sous-jacente  $\Sigma^\circ$  de  $G$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et tous  $u_0, \dots, u_{k-1} \in \text{End}_G(\Sigma^\circ)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$

$$[\iota_k(\Sigma), u_0 \times \dots \times u_{k-1}]' = 0. \quad \blacksquare$$

**REMARQUE 2.** — Soit  $(\Pi, u)$  une paire formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet projectif de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi^\circ$ . Soit aussi  $b$  un  $G^\natural$ -isomorphisme de  $\Pi$ . Notons  $b \cdot \Pi$  la  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$  donnée par

$$(b \cdot \Pi)(\delta) = b \circ \Pi(\delta) = \Pi(\delta) \circ b, \quad \delta \in G^\natural.$$

On a  $(b \cdot \Pi)^\circ = \Pi^\circ$ , et d'après le lemme de 6.3, on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$

$$[b \cdot \Pi, b \circ u]' = [\Pi, u]'. \quad \blacksquare$$

**REMARQUE 3.** — Identifions  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  à  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  via l'isomorphisme  $[\Pi, u]' \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]}'$  (corollaire). Alors la transformée de Fourier  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^*$ ,  $[\Pi, u]' \mapsto \Phi_{[\Pi, u]}'$  est donnée par

$$\Phi_{[\Pi, u]}'(\Pi') = \Theta_{\Pi'}(\overline{\phi}_{[\Pi, u]}) = \text{trace}(u_{\Pi'}^{\Pi'}; \text{Hom}_G(\Pi^\circ, \Pi'^\circ)), \quad \Pi' \in \text{Irr}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega),$$

où l'on a posé

$$u_{\Pi'}^{\Pi'}(a) = \Pi'(\delta) \circ a \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1}, \quad a \in \text{Hom}_G(\Pi^\circ, \Pi'^\circ)$$

pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^\natural$ . La notation sous-entend que l'on a choisi une paire  $(\Pi, u)$  qui représente  $[\Pi, u]'$ , et une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$  dans la classe  $\Pi'$ . Cette remarque servira de façon cruciale à la fin de la démonstration (6.25), pour déduire par un argument de dimension l'injectivité de la transformée de Fourier sur la partie discrète du théorème de Paley–Wiener.  $\blacksquare$

**6.8. La projection**  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ . — On s'intéresse dans ce numéro à la condition de projectivité dans la définition de  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ . Contrairement au cas non tordu (cf. [D]), la supprimer n'est pas complètement sans douleur! Soit  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega))$  le groupe abélien libre de base les paires  $(\Pi, u)$  où  $\Pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  tel que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et  $u$  est un  $G$ -endomorphisme de  $\Pi^{\circ}$ , quotienté par les relations:

—  $(\Pi, u) = (\Pi_1, u_1) + (\Pi_2, u_2)$  pour toute suite exacte courte dans  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$

$$0 \rightarrow \Pi_1 \xrightarrow{a} \Pi \xrightarrow{b} \Pi_2 \rightarrow 0$$

telle que  $u \circ a = a \circ u_1$  et  $u_2 \circ b = b \circ u$ ;

—  $(\Pi, u) + (\Pi, u') = (\Pi, u + u')$ ;

—  $(\Pi, v \circ u) = (\Pi', u(1) \circ v)$  pour toutes flèches  $u : \Pi^{\circ} \rightarrow \Pi'^{\circ}$  et  $v : \Pi'^{\circ} \rightarrow \Pi^{\circ}$  dans  $\mathfrak{R}(G)$ , où l'on a posé  $u(1) = \Pi'(\delta) \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1}$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^{\natural}$ .

On note  $[\Pi, u]$  l'élément de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  défini par une paire  $(\Pi, u)$  comme ci-dessus, et l'on munit  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  de la structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module définie par:

—  $[\Pi_1, u_1] + [\Pi_2, u_2] = [\Pi_1 \oplus \Pi_2, u_1 \oplus u_2]$ ;

—  $z \cdot [\Pi, u] = [\Pi, z_{\Pi^{\circ}} \circ u]$ ,  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ .

On appelle  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  le *cocentre tordu*<sup>(3)</sup> de la catégorie  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ .

Comme en 6.7, pour toute partie  $\mathbb{Z}$ -stable  $\mathfrak{S}$  de  $\mathfrak{B}(G)$ , on définit de la même manière le  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G)$ -module  $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega))$ , et pour  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  on pose

$$\mathcal{C}_J(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}_{\mathfrak{S}(J)}(G^{\natural}, \omega) (= \mathcal{C}(\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega)) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{H}_J(G^{\natural}, \omega))).$$

C'est un  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -module, et un  $\mathfrak{Z}(G)$ -module via le morphisme d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}_J(G), z \mapsto z(e_J).$$

D'après loc. cit., le  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est la limite inductive des sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\mathcal{C}_J(G^{\natural}, \omega)$  pour  $J$  parcourant les éléments de l'ensemble  $\mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ . D'après Bernstein [B2, theorem 29], la catégorie  $\mathfrak{R}(G)$  est de dimension cohomologique finie. Tout objet de type fini  $\pi$  de  $\mathfrak{R}(G)$  possède donc une résolution projective bornée de type fini, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte dans  $\mathfrak{R}(G)$  de la forme

$$(*) \quad 0 \rightarrow \pi_d \rightarrow \pi_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi_0 \xrightarrow{\epsilon} \pi \rightarrow 0$$

où les  $\pi_i$  sont des objets projectifs de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ . Si  $J$  est un bon sous-groupe ouvert compact de  $G$  tel que  $\pi = \pi_J$ , on peut choisir les  $\pi_i$  dans  $\mathfrak{R}_J(G)$ . Par passage aux points fixes sous l'action de  $J$ , on obtient une suite exacte courte de  $\mathcal{H}_J(G)$ -modules

$$(**) \quad 0 \rightarrow V_{\pi_d}^J \rightarrow V_{\pi_{d-1}}^J \rightarrow \cdots \rightarrow V_{\pi_1}^J \rightarrow V_{\pi_0}^J \xrightarrow{\epsilon} V_{\pi}^J \rightarrow 0$$

où les  $V_{\pi_i}^J$  sont des  $\mathcal{H}_J(G)$ -modules projectifs de type fini. En particulier, tout  $\mathcal{H}_J$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini, et l'on peut, par limite

3. Dans [D, 5.1] est défini le cocentre  $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$  d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  "pas trop grosse". Si de plus la catégorie  $\mathcal{A}$  est munie d'un foncteur  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  qui est une équivalence de catégories, on définit comme suit une catégorie abélienne  $\mathcal{A}^{\natural}$ : les objets de  $\mathcal{A}^{\natural}$  sont les paires  $(X, \alpha)$  formées d'un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  et d'un  $\mathcal{A}$ -isomorphisme  $\alpha$  de  $X$  sur  $\gamma(X)$ , et une flèche  $u : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$  dans  $\mathcal{A}^{\natural}$  est simplement une flèche  $u : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $\gamma(u) \circ \alpha = \beta \circ u$ . On peut alors définir comme ci-dessus le *cocentre tordu*  $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\natural})$ : les deux premières relations sont évidentes, et la relation de commutation est donnée par  $((X, \alpha), v \circ u) = ((Y, \beta), \tilde{u} \circ v)$  pour toutes flèches  $u : X \rightarrow Y$  et  $v : Y \rightarrow X$  dans  $\mathcal{A}$ , où l'on a posé  $\tilde{u} = \beta \circ u \circ \alpha^{-1}$ . Si  $A$  est un anneau commutatif muni d'un automorphisme  $\eta$ , alors posant  $\mathcal{A}^{\natural} = A \cdot \eta$  et notant  $\gamma$  l'automorphisme de la catégorie  $\mathcal{A} = \text{Mod}(A)$  induit par  $\eta$  (i.e.  $\gamma(V) = V_{\eta}^{-1}$  pour tout  $V \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , et  $\gamma(u) = u$  pour toute flèche  $u$  dans  $\mathcal{A}$ ), on a  $\mathcal{A}^{\natural} = \text{Mod}(A^{\natural})$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\natural}) = \mathcal{C}(A^{\natural})$ .

inductive sur les  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , définir comme en 6.4 un morphisme surjectif scindé de  $\mathfrak{Z}(G)$ –modules

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]'$$

Concrètement, pour une paire  $(\Pi, u)$  formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  tel que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un  $G$ –endomorphisme  $u$  de  $\Pi^{\circ}$ , on choisit un groupe  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  tel que  $\Pi_J = \Pi$ , et un sous–espace compact  $J^{\natural} = J \cdot \delta$  de  $G^{\natural}$ . On choisit aussi une résolution projective bornée de type fini  $(*)$  de  $\pi = \Pi^{\circ}$  telle que les  $\pi_i$  sont des objets de  $\mathfrak{R}_J(G)$ . D'où une résolution projective bornée de type fini  $(**)$  du  $\mathcal{H}_J$ –module  $V_{\pi}^J$ . L'élément  $\alpha_J = (u \circ \Pi(\delta)^{-1})|_{V_{\pi}^J}$  appartient à  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_J}(V_{\pi}^J, (V_{\pi}^J)_{\gamma})$ , où  $\gamma = \gamma_{J^{\natural}}$  est l'automorphisme  $f \mapsto (\omega^{-1}f) \circ \text{Int}_{G^{\natural}}(\delta)^{-1}$  de l'anneau  $\mathcal{H}_J$  (cf. 6.6). Il se relève en un morphisme de chaînes  $\alpha_{J, \bullet} = (\alpha_{J, i})_{i=0}^d$ ,  $\alpha_{J, i} \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_J}(V_{\pi_i}^J, (V_{\pi_i}^J)_{\gamma})$ , et  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'_J(G^{\natural}, \omega)$  est l'inverse de l'élément

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \text{tr}_{\gamma}(\alpha_i) \in \overline{\mathcal{H}}_{J, \omega}^{\natural}$$

par l'isomorphisme de la proposition de 6.6. Cet élément ne dépend pas du choix de  $J^{\natural}$  de groupe sous–jacent  $J$ , ni de celui de  $\delta \in J^{\natural}$ . Il ne dépend pas non plus du choix du groupe  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  tel que  $\Pi_J = \Pi$ : on a  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'_J(G^{\natural}, \omega)$  pour tout  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  tel que  $\Pi_J = \Pi$ . Le morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ –modules

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]'$$

ainsi défini est surjectif, et il est scindé par l'application naturelle

$$\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u]' \mapsto [\Pi, u].$$

Via cette dernière, on identifie  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  à un facteur direct de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .

**REMARQUE 1.** — Supposons démontrée la variante tordue suivante du résultat de finitude de Bernstein [B2, theorem 29]: *pour tout objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  tel que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , il existe une suite exacte longue dans  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  de la forme*

$$0 \rightarrow \Pi_d \rightarrow \Pi_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi_0 \xrightarrow{\epsilon} \Pi \rightarrow 0$$

où les  $\Pi_i^{\circ}$  sont des objets projectifs de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ . En ce cas d'après le lemme 2 de 6.4, on a l'égalité

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega).$$

Nous n'essaierons pas dans cet article de démontrer cette propriété de finitude, ni même l'égalité ci–dessus. Nous nous contenterons ici de démontrer sur l'espace  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  — plus facile à manipuler — les résultats qui nous intéressent, puis d'en déduire par projection les propriétés voulues sur  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ . ■

**REMARQUE 2.** — On peut supprimer tous les “'” dans les décompositions de 6.7. D'autre part les remarques 1 et 2 de 6.7 restent vraies dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , c'est–à–dire sans l'hypothèse de projectivité. ■

**REMARQUE 3.** — Reprenons les notations de la remarque 3 de 6.6. D'après le théorème de Paley–Wiener (démontré en 4.9 et 5.7), l'application

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*, [\Pi, u] \mapsto \Phi_{[\Pi, u]'}$$

est un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ –modules d'image  $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ , et il s'agit de montrer que son noyau coïncide avec celui de la projection  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ ,  $[\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]'$ . ■

**6.9. L'application d'Euler–Poincaré.** — Rappelons que la composante neutre  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$  est un tore complexe de dimension  $\dim(A_{G^{\natural}}) + 1$ . Soit  $B = B_{G^{\natural}}^0$  l'algèbre affine  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})]$  de ce tore — c'est un quotient de  $B_{G^{\natural}} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})]$  —, et  $\varphi = \varphi_{G^{\natural}}^0 : G^{\natural} \rightarrow B$  le “caractère universel” donné par l'évaluation (cf. 2.22): pour  $\delta \in G^{\natural}$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ , on a

$$\varphi(\delta)(\Psi) = \Psi(\delta).$$

Ainsi  $\varphi$  est la composée de  $\varphi_{G^{\natural}}$  et de la projection canonique  $B_{G^{\natural}} \rightarrow B$ , et la paire  $(\varphi, B)$  est une  $(\omega = 1)$ -représentation de  $G^{\natural}$  — en fait un quotient de  $(\varphi_{G^{\natural}}, B_{G^{\natural}})$  — pour l'action par translations à gauche: pour  $\delta \in G^{\natural}$ , on identifie  $\varphi(\delta)$  au  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $b \mapsto \varphi(\delta)b$  de  $B$ . Notons que la représentation sous-jacente  $\varphi^{\circ}$  de  $G$  est la composée de  $\varphi_G$  et de la projection canonique  $B_G \rightarrow B$ , où  $\varphi_G : G \rightarrow B_G = \mathbb{C}[\mathfrak{P}(G)]$  est le “caractère universel” donné par l'évaluation dans le cas non tordu.

Soit:

- $\overline{B} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}^0(G^{\natural})]$  l'algèbre affine du tore  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ , identifiée à la sous-algèbre de  $B$  formée des  $b$  tels que  $b(\lambda\Psi) = b(\Psi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$  et tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ ;
- $C = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  l'algèbre affine du tore  $\mathbb{C}^{\times}$ ;
- $B \rightarrow C, b \mapsto b_C$  le morphisme d'algèbres correspondant à l'inclusion  $\mathbb{C}^{\times} \subset \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ .

Pour  $\delta \in G^{\natural}$ , on note  $\mu_{\delta} : C \rightarrow B$  le morphisme d'algèbres correspondant au morphisme de variétés  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural}) \rightarrow \mathbb{C}^{\times}, \Psi \mapsto \Psi(\delta)$ . C'est une section du morphisme  $B \rightarrow C, b \mapsto b_C$ , qui définit une structure de  $C$ -module sur  $B$ , notée  $B_{\delta}$ . D'autre part, l'application  $t \mapsto 1$  définit un morphisme  $C \rightarrow \mathbb{C}$  qui correspond à l'élément unité 1 du tore  $\mathbb{C}^{\times}$ . Posons

$$\overline{B}_{\delta} = B_{\delta} \otimes_{C, t \mapsto 1} \mathbb{C} = B_{\delta} \otimes_C C/(t - 1).$$

C'est l'algèbre affine  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\delta}^0(G^{\natural})]$  du sous-groupe fermé  $\mathfrak{P}_{\delta}^0(G^{\natural})$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$  formé des  $\Psi$  tels que  $\Psi(\delta) = 1$ , c'est-à-dire l'image du morphisme  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural}), \psi \mapsto \psi^{\delta}$  (cf. 2.12). Pour  $b \in B$ , on note  $b_{\delta}$  l'élément de  $\overline{B}$  défini par  $b_{\delta}(\psi) = b(\psi^{\delta}), \psi \in \mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ . L'application

$$B \rightarrow C \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}, b \mapsto b_C \otimes b_{\delta}$$

est un isomorphisme d'algèbres. Il correspond à l'isomorphisme de variétés (en fait de groupes algébriques)

$$\mathbb{C}^{\times} \times \mathfrak{P}^0(G^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural}), (\lambda, \psi) \mapsto \lambda\psi^{\delta}$$

Pour  $b \in B$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ , on a donc

$$(*) \quad b(\Psi) = b_C(\Psi(\delta))b(\Psi(\delta)^{-1}\Psi).$$

Soit  $B^*$  le sous-espace vectoriel de  $B$  formé des  $b$  tels que  $b(\lambda\Psi) = \lambda b(\Psi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$  et tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ . D'après l'égalité (\*), un élément  $b$  de  $B$  appartient à  $B^*$  si et seulement si  $b(\Psi) = \Psi(\delta)b_{\delta}(\Psi^{\circ})$  pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^{\natural}$  et tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ , où (rappel)  $\Psi^{\circ} \in \mathfrak{P}^0(G^{\natural})$  est le caractère non ramifié de  $G$  sous-jacent à  $\Psi$ . L'espace  $B^*$  est un sous- $\overline{B}$ -module de  $B$ , libre de rang 1 comme  $\overline{B}$ -module: pour tout  $\delta \in G^{\natural}$ , l'isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $B \rightarrow C \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}, b \mapsto b_C \otimes b_{\delta}$  induit par restriction un isomorphisme de  $\overline{B}$ -modules  $B^* \rightarrow C t \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}$ . Notons que pour  $\delta' \in G^{\natural}$ , l'élément  $\varphi(\delta')$  de  $B$  appartient à  $B^*$ .

Choisissons un point-base  $\delta_0 \in G^{\natural}$ , et notons  $\varphi_{\delta_0} : G^{\natural} \rightarrow \overline{B}$  l'application  $\delta' \mapsto \varphi(\delta')_{\delta_0}$ . C'est une  $(\omega = 1)$ -représentation de  $G^{\natural}$  pour l'action par translations à gauche, et la représentation  $\varphi_{\delta_0}^{\circ}$  de  $G$  sous-jacente est donnée par le “caractère universel”

$$\overline{\varphi} : G \rightarrow \overline{B},$$

c'est-à-dire la composée de  $\varphi_G : G \rightarrow \overline{B}$  et de la projection canonique  $B_G \rightarrow B$ . Pour tout caractère  $\xi$  de  $G$  et toute  $\xi$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$ , on note  $\Pi_{\overline{B}, \delta_0} = \Pi \otimes \varphi_{\delta_0}$  la

$\xi$ -représentation de  $G^\natural$  d'espace  $V_{\Pi, \bar{B}} = V_\Pi \otimes_{\mathbb{C}} \bar{B}$  définie par

$$\Pi_{\bar{B}, \delta_0}(\delta)(v \otimes \bar{b}) = \Pi(\delta)(v) \otimes \varphi_{\delta_0}(\delta)\bar{b}.$$

Si la représentation  $\Pi^\circ$  de  $G$  sous-jacente est admissible (e.g. irréductible), alors  $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0}, V_{\Pi, \bar{B}})$  est un  $(G^\natural, \xi, \bar{B})$ -module admissible au sens de 2.22, et pour  $\psi \in \mathfrak{P}^0(G^\natural)$  correspondant au morphisme d'algèbres  $u : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}$ , la  $\xi$ -représentation  $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0})_\psi$  de  $G^\natural$  d'espace  $V_{\Pi, \bar{B}} \otimes_{\bar{B}, u} \mathbb{C}$  est isomorphe à  $\psi^{\delta_0} \cdot \Pi$ . Si de plus  $\Pi^\circ$  est irréductible, alors la représentation  $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0})^\circ = \Pi^\circ \otimes \varphi_{\delta_0}^\circ$  de  $G$  est  $\mathfrak{Z}(G)$ -admissible. En effet, soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  telle que  $\theta_{G^\natural, \omega}(\Pi) = [M_P, \rho]_G$ , et soit  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}(G)$  la classe d'équivalence inertielle de  $(M_P, \rho)$ . Notons  $\eta : \Psi^0(G^\natural) \rightarrow \Theta_{G^\natural, \omega}(\mathfrak{s}) \subset \Theta(\mathfrak{s})$  le morphisme de variétés défini par

$$\eta(\psi) = [M_P, \psi\rho]_G = \theta_{G^\natural, \omega}(\psi^{\delta_0} \cdot \Pi).$$

Le morphisme d'algèbres correspondant  $\eta^\sharp : \mathfrak{Z}_\mathfrak{s} \rightarrow \bar{B}$  muni  $\bar{B}$  d'une structure de  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ -module de type fini, et pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ , l'action de  $z$  sur  $V_{\Pi, \bar{B}}$  est donnée par la multiplication par  $\eta^\sharp(z_\mathfrak{s}) \in \bar{B}$ . Ainsi  $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0})^\circ$  est une représentation  $\mathfrak{Z}(G)$ -admissible de  $G$  à support cuspidal contenu dans  $\Theta(\mathfrak{s})$ ; elle est donc de type fini [BD, cor. 3.10]. Pour  $b \in B$ , l'élément  $b_{\delta_0} \in \bar{B}$  définit un  $G^\natural$ -endomorphisme  $v \otimes \bar{b} \mapsto v \otimes \bar{b}b_{\delta_0}$  de  $\Pi_{\bar{B}, \delta_0}$ , encore noté  $b_{\delta_0}$ ; c'est a fortiori un  $G$ -endomorphisme de  $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0})^\circ$ .

L'application d'Euler-Poincaré utilisée ici est la version tordue suivante de celle définie dans [D, 1.3]:

$$\begin{aligned} \text{EP} : \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* &\rightarrow \mathcal{C}(G^\natural, \omega), \\ \Pi \otimes b &\mapsto [\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}]. \end{aligned}$$

Précisément, soit  $\Pi$  une  $\omega^{-1}$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$ . Sa contragrédiente  $\tilde{\Pi}$  est une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$ , et l'on forme la  $\omega$ -représentation  $\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0} = \tilde{\Pi} \otimes \varphi_{\delta_0}$  de  $G^\natural$  comme plus haut. La représentation  $(\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0})^\circ$  de  $G$  est de type fini, et pour  $b \in B^*$ , l'élément  $b_{\delta_0} \in \bar{B}$  est un  $G^\natural$ -endomorphisme de  $\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}$ . Par conséquent l'élément  $[\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}]$  de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$  est bien défini (cf. 6.8). D'après la remarque 2 de 6.7 (et celle de 6.8), il ne dépend pas vraiment de  $(\Pi, b)$  mais seulement de  $\Pi' \otimes b$ , où  $\Pi'$  est l'élément de  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1})$  défini par  $\Pi$ . L'application EP est bien définie (par linéarité).

Pour  $b \in B$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ , on note  $b_\Psi$  l'élément de  $B$  défini par

$$b_\Psi(\Psi') = b(\Psi\Psi'), \quad \Psi' \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural).$$

L'application  $B \rightarrow B$ ,  $b \mapsto b_\Psi$  est un automorphisme d'algèbre, qui stabilise le sous-espace vectoriel  $B^* \subset B$ .

**LEMME.** — (1) L'application EP ne dépend pas du choix du point-base  $\delta_0 \in G^\natural$ .

(2) Le sous-espace de  $\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*$  engendré par les vecteurs  $\Psi\Pi \otimes b - \Pi \otimes b_\Psi$  pour  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1})$ ,  $b \in B^*$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ , est contenu dans  $\ker \text{EP}$ .

*Démonstration.* — Montrons (1). Soit  $\delta'_0 = x \cdot \delta_0 \in G^\natural$  un autre point-base. Pour  $\psi \in \mathfrak{P}^0(G^\natural)$  et  $\delta \in G^\natural$ , on a  $\psi^{\delta'_0}(\delta) = \psi(x^{-1})\psi^{\delta_0}(\delta)$ , i.e.  $\varphi_{\delta'_0} = \bar{\varphi}(x^{-1})\varphi_{\delta_0}$ . D'autre part pour  $b \in B^*$  et  $\psi \in \mathfrak{P}^0(G^\natural)$ , on a

$$b_{\delta'_0}(\psi) = b(\psi^{\delta'_0}) = b(\psi(x^{-1})\psi^{\delta_0}) = \psi(x^{-1})b_{\delta_0}(\psi),$$

i.e.  $b_{\delta'_0} = \bar{\varphi}(x^{-1})b_{\delta_0}$ . Pour  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1})$ , on a donc

$$[\tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta'_0}, b_{\delta'_0}] = [\bar{\varphi}(x^{-1}) \cdot \tilde{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}, \bar{\varphi}(x^{-1})b_{\delta_0}].$$

On conclut grâce à la remarque 2 de 6.7 (et à celle de 6.8).

Montrons (2). Soit  $\Pi$  une  $\omega^{-1}$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$ , et soit  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ . Posons  $\psi = \Psi^\circ$  et soit  $A = A_\Psi$  le  $\mathbb{C}$ -automorphisme de  $V_{\check{\Pi}, \bar{B}}$  donné par  $A(\check{v} \otimes \bar{b}) = \check{v} \otimes \bar{b}_\psi$ ,  $\check{v} \in V_{\check{\Pi}}$ ,  $\bar{b} \in \bar{B}$ . Posons  $\Pi' = \Psi \cdot \Pi$  et  $b' = b_\Psi$ . Pour  $\delta \in G^\natural$ , on a

$$\begin{aligned} A \circ \check{\Pi}'_{\bar{B}, \delta_0}(\delta)(\check{v} \otimes \bar{b}) &= A(\Psi(\delta)^{-1} \check{\Pi}(\delta)(\check{v}) \otimes \varphi_{\delta_0}(\delta) \bar{b}) \\ &= \Psi(\delta)^{-1} \check{\Pi}(\delta)(\check{v}) \otimes [\varphi_{\delta_0}(\delta) \bar{b}]_\psi \\ &= \check{\Pi}(\delta)(\check{v}) \otimes \Psi(\delta)^{-1} [\varphi_{\delta_0}(\delta)]_\psi \bar{b}_\psi \end{aligned}$$

et

$$\Psi(\delta)^{-1} [\varphi_{\delta_0}(\delta)]_\psi = \Psi(\delta)^{-1} \psi^{\delta_0}(\delta) \varphi_{\delta_0}(\delta) = \Psi(\delta_0)^{-1} \varphi_{\delta_0}(\delta),$$

d'où

$$A \circ \check{\Pi}'_{\bar{B}, \delta_0}(\delta)(\check{v} \otimes \bar{b}) = \Psi(\delta_0)^{-1} \cdot \check{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}(\delta) \circ A.$$

En d'autres termes,  $A_\Psi$  est un isomorphisme de  $\check{\Pi}'_{\bar{B}, \delta_0}$  sur  $\Psi(\delta_0)^{-1} \cdot \check{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}$ . Quant à  $b$  et  $b'$ , pour  $\bar{b} \in \bar{B}$  et  $\psi' \in \mathfrak{P}^0(G^\natural)$ , on a

$$\begin{aligned} [\bar{b} b_{\delta_0}]_\psi(\psi') &= \bar{b}_\psi(\psi') b(\psi^{\delta_0} \psi'^{\delta_0}) \\ &= \bar{b}_\psi(\psi') b(\Psi(\delta_0)^{-1} \Psi \psi'^{\delta_0}) \\ &= \bar{b}_\psi(\psi') \Psi(\delta_0)^{-1} b'_{\delta_0}(\psi'), \end{aligned}$$

d'où

$$A \circ b_{\delta_0} = \Psi(\delta_0)^{-1} b'_{\delta_0} \circ A.$$

On a donc

$$[\check{\Pi}'_{\bar{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}] = [\Psi(\delta_0)^{-1} \cdot \check{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}, \Psi(\delta_0)^{-1} b'_{\delta_0}] = [\check{\Pi}_{\bar{B}, \delta_0}, b'_{\delta_0}],$$

ce qui achève la démonstration du point (2).  $\square$

D'après le lemme, l'application d'Euler–Poincaré EP est bien définie, et notant

$$\mathcal{K}_{\text{EP}} = \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_\Psi : \Pi, b, \Psi \rangle$$

le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*$  engendré par les vecteurs  $\Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_\Psi$  pour  $\Pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1})$ ,  $b \in B^*$  et  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ , elle se factorise en un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* / \mathcal{K}_{\text{EP}} \rightarrow \mathcal{C}(G^\natural, \omega).$$

**6.10. Principe de la démonstration.** — Avant de poursuivre, décrivons brièvement le principe de la démonstration — rappelons qu'il s'agit de d'établir l'injectivité dans le théorème de 4.8 — et l'utilité des constructions qui vont suivre. Par récurrence sur la dimension de  $G$ , on peut supposer ce résultat d'injectivité vrai pour tous les sous-espaces tordus  $M_P^\natural$ ,  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural) \setminus \{G^\natural\}$ . On montre alors facilement (6.25, lemmes 1 et 2) que l'image réciproque de  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  par l'isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  de la proposition de 6.7, coïncide avec le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  de  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  défini par (cf. 6.11)

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) = \bigcap_{P^\natural \neq G^\natural} \ker(\omega r_{G^\natural}^{P^\natural} : \mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(M_P^\natural, \omega))$$

où  $P^\natural$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^\natural)$ . On définit de la même manière (en supprimant les “'”) le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Alors  $\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  est l'image de  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  par la projection  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ ,  $[\pi, u] \mapsto [\pi, u]'$  (voir 6.11).

On commence par établir la décomposition (corollaire de 6.22)

$$(1) \quad \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_Y \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , et  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  est un sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  défini comme suit. On note  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  formée des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telles que:

—  $\Pi^{\circ}$  est une représentation de type fini de  $G$ ;

— l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur l'espace de  $\pi$  se factorise à travers le morphisme  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[Y]$ .

On définit le cocentre tordu  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y))$  comme en 6.8, et l'on pose

$$\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega) = \iota^Y \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y),$$

où  $\iota^Y : \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est l'application naturelle.

On montre ensuite (corollaire 1 de 6.24) que pour toute  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbite  $Y$  dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , l'application d'Euler–Poincaré EP induit un morphisme surjectif

$$(2) \quad (\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*) / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega).$$

Notons que l'espace quotient à gauche de la flèche ci-dessus est l'espace des coinvariants  $(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})}$  pour l'action de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*$  donnée par  $\Psi \cdot (\Pi \otimes b) = \Psi \Pi \otimes b_{\Psi^{-1}}$ . D'autre part, d'après la surjectivité dans le théorème de 4.8 (établie en 5.7), la transformée de Fourier (cf. la remarque 3 de 6.7)

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*, [\Pi, u] \mapsto \Phi_{[\Pi, u]}$$

induit par restriction un morphisme surjectif

$$(3) \quad \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

De plus, d'après la définition de l'espace  $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_Y(G^{\natural}, \omega) \cap \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , on a un isomorphisme naturel (voir 6.25)

$$(4) \quad \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y), B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})}.$$

En composant les morphismes (2), (3) et (4), on obtient un morphisme surjectif

$$(5) \quad (\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y), B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})},$$

qui d'après le lemme 3 de 6.25 est aussi injectif (c'est évident si  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) = \{1\}$  puisqu'en ce cas les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont même dimension finie, et sinon on s'y ramène par un argument de spécialisation). Au bout du compte on obtient que le morphisme (3) est un isomorphisme, ce qui implique en particulier que  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  est contenu dans  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ . D'où l'égalité

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

et l'injectivité dans le théorème de 4.8. Comme conséquence de la démonstration, on obtient aussi que le morphisme (2) est un isomorphisme, ce qui entraîne que l'application d'Euler–Poincaré se factorise en un isomorphisme

$$(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*) / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

La démonstration de la décomposition (1) est longue et laborieuse: elle occupe les numéros 6.14–6.22.

**REMARQUE.** — L'isomorphisme (5) fait apparaître une forme bilinéaire sur l'espace

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \tilde{Y}) \otimes \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y),$$

qui suggère un lien avec la formule des traces locale tordue. Rappelons que si le corps de base  $F$  est de caractéristique nulle, et si l'automorphisme  $\theta$  de  $Z(G)$  défini par  $G^{\natural}$  est d'ordre fini, la formule des traces locale pour  $(G^{\natural}, \omega)$  a été démontrée par J.-L. Waldspurger [W]. Sous ces hypothèses, on doit certainement pouvoir déduire de loc. cit. la plupart des résultats contenus dans cette section 6 (voir aussi 1.5).

**6.11. Filtrations combinatoires.** — On a défini en 4.4 une filtration décroissante  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \omega)\}_{i \geq -1}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ :

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C},i}(G^{\natural}, \mathbb{C}) = \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > i} \omega \cdot i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)),$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ . Rappelons aussi que l'on a posé

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) / \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega), \quad \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d(G)}(G^{\natural}, \omega).$$

On peut définir de manière analogue une filtration croissante  $\{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^i(G^{\natural}, \omega)\}_{i \geq -1}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ :

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^i(G^{\natural}, \omega) = \bigcap_{P^{\natural}, d(M_P) > i} \ker \omega \cdot r_{G^{\natural}, \mathbb{C}}^{P^{\natural}},$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ .

**REMARQUE.** — Soit  $d$  un entier tel que  $d(G) \leq d < d(M_o)$ . Pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^d(G^{\natural}, \omega)$ , d'après le proposition de 4.4, on a  $\mathbf{A}_d(\Pi) = \Pi$ , par suite l'espace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^d(G^{\natural}, \omega)$  est contenu dans  $\mathbf{A}_d(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega))$  et la somme  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G^{\natural}, \omega) + \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^d(G^{\natural}, \omega)$  est directe. Mais l'inclusion

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G^{\natural}, \omega) \oplus \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^d(G^{\natural}, \omega) \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$$

est en général stricte, même dans le cas non tordu.

On donne un exemple très simple dans le cas non tordu. Prenons le groupe  $G = \text{GL}(2, F)$ , et notons  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de base  $\text{Irr}(G)$ . Notons  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  formé des matrices triangulaires supérieures, et  $T$  le tore maximal de  $B$  formé des matrices diagonales. Soit  $\text{St}_G$  la représentation de Steinberg de  $G$ . On sait que  $r_G^B(\text{St}_G) \simeq \delta_B^{1/2}$ . D'autre part on sait aussi (d'après le lemme géométrique) que si  $\chi$  est un caractère de  $T$ , notant  $\pi_{\chi}$  la représentation  $i_B^G(\chi)$  de  $G$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(T)$

$$r_G^B(\pi_{\chi}) = \chi + {}^s\chi;$$

où  $s$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$ . Prenons  $d = d(G) (= 1)$ , et supposons par l'absurde que  $\text{St}_G$  se décompose (dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G)$ ) en  $\text{St}_G = \pi + \pi'$  avec  $\pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}, d}(G)$  et  $\pi' \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^d(G)$ . On a donc  $r_G^B(\pi') = 0$  et  $r_G^B(\pi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\chi_i + {}^s\chi_i)$  pour des caractères  $\chi_i$  de  $T$  et des nombres complexes  $\lambda_i$ . La représentation (virtuelle)  $r_G^B(\pi)$  de  $T$  est invariante sous l'action du groupe de Weyl  $W_G = \{1, s\}$ , ce qui est impossible puisque le caractère  $\delta_B^{1/2}$  de  $T$  n'est pas invariant sous l'action de  $W_G$ . ■

Rappelons que pour  $P, Q \in \mathcal{P}(G)$  tels que  $Q \subset P$ , les foncteurs  $i_Q^P : \mathfrak{R}(M_Q) \rightarrow \mathfrak{R}(M_P)$  et  $r_P^Q : \mathfrak{R}(M_P) \rightarrow \mathfrak{R}(M_Q)$  sont exacts et préservent les propriétés d'être:

— un objet de *type fini*: [BD, 3.11] pour  $i_Q^P$ , et pour  $r_P^Q$  c'est immédiat (à partir de la définition);

— *un objet projectif*: pour  $i_Q^P$  c'est une conséquence du théorème de seconde adjonction de Bernstein [B1, Bu], et pour  $r_P^Q$  cela résulte de l'isomorphisme de réciprocity de Frobenius.

Rappelons aussi (4.5) que le morphisme d'anneaux  $i_{P,Q}^* : \mathfrak{Z}(M_P) \rightarrow \mathfrak{Z}(M_Q)$  fait de  $\mathfrak{Z}(M_Q)$  un  $\mathfrak{Z}(M_P)$ -module de type fini. D'après le lemme 1 de loc. cit., pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , les foncteurs  $\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}} : \mathfrak{R}(M_{Q^\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_{P^\natural}, \omega)$  et  $\omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}} : \mathfrak{R}(M_{P^\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_{Q^\natural}, \omega)$  induisent des morphismes de  $\mathfrak{Z}(M_P)$ -modules

$$\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}} : \mathcal{C}(M_{Q^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(M_{P^\natural}, \omega), \quad \omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}} : \mathcal{C}(M_{P^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(M_{Q^\natural}, \omega).$$

On définit comme ci-dessus (c'est-à-dire en remplaçant  $\mathfrak{G}_\mathbb{C}$  par  $\mathcal{C}$ ) une filtration décroissante  $\{\mathcal{C}_i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  et une filtration croissante  $\{\mathcal{C}^i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  du  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . On pose

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}^{d(G)}(G^\natural, \omega).$$

**VARIANTE.** — On a défini en 4.4 (variante) une filtration décroissante  $\{\mathfrak{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)_i\}_{i \geq -1}$  de  $\mathfrak{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ . On peut aussi définir une filtration croissante  $\{\mathfrak{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)^i\}_{i \geq -1}$  de  $\mathfrak{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \omega)$ :

$$\mathfrak{G}_\mathbb{C}(G^\natural, \mathbb{C})^i = \bigcap_{P^\natural, d(M_{P^\natural}) > i} \ker \omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural, \mathbb{C}}}$$

où  $P^\natural$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^\natural)$ .

On définit enfin, de la même manière, une filtration décroissante  $\{\mathcal{C}(G^\natural, \omega)_i\}_{i \geq -1}$  et une filtration croissante  $\{\mathcal{C}^i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq -1}$  de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . D'après la remarque 4 de 4.3, le cran  $d(G^\natural)$  de ces filtrations coïncide avec le cran  $d(G)$  des précédentes: on a

$$\mathcal{C}(G^\natural, \omega)_{d(G^\natural)} = \mathcal{C}_{d(G)}(G^\natural, \omega), \quad \mathcal{C}(G^\natural, \omega)^{d(G^\natural)} = \mathcal{C}^{d(G)}(G^\natural, \omega).$$

Bien sûr si  $\theta = \text{id}$ , ces filtrations coïncident avec les précédentes: on a  $\mathcal{C}(G, \omega)_\bullet = \mathcal{C}_\bullet(G, \omega)$  et  $\mathcal{C}(G, \omega)^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(G, \omega)$ . ■

Pour  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tels que  $Q^\natural \subset P^\natural$ , les foncteurs  $\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}} : \mathfrak{R}(M_{Q^\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_{P^\natural}, \omega)$  et  $\omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}} : \mathfrak{R}(M_{P^\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(M_{Q^\natural}, \omega)$  induisent aussi des morphismes de  $\mathfrak{Z}(M_P)$ -modules

$$\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}} : \mathcal{C}'(M_{Q^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(M_{P^\natural}, \omega), \quad \omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}} : \mathcal{C}'(M_{P^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(M_{Q^\natural}, \omega),$$

qui coïncident avec ceux déduits par restriction des morphismes précédents (ceux sans les "''"). De plus, puisque les foncteurs  $i_Q^P$  et  $r_P^Q$  sont exacts, ces morphismes sont compatibles aux projections  $\mathcal{C}(M_{P^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(M_{P^\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{C}(M_{Q^\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(M_{Q^\natural}, \omega)$ , au sens où les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(M_{Q^\natural}, \omega) & \xrightarrow{\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}}} & \mathcal{C}(M_{P^\natural}, \omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}'(M_{Q^\natural}, \omega) & \xrightarrow{\omega_{i_{Q^\natural}^{P^\natural}}} & \mathcal{C}'(M_{P^\natural}, \omega) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(M_{P^\natural}, \omega) & \xrightarrow{\omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}}} & \mathcal{C}(M_{Q^\natural}, \omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}'(M_{P^\natural}, \omega) & \xrightarrow{\omega_{r_{P^\natural}^{Q^\natural}}} & \mathcal{C}'(M_{Q^\natural}, \omega) \end{array}$$

sont commutatifs.

Les filtrations  $\{\mathcal{C}_i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  et  $\{\mathcal{C}^i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  donnent par restriction une filtration décroissante  $\{\mathcal{C}'_i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  et une filtration croissante  $\{\mathcal{C}'^i(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  du  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ . D'après la commutativité des diagrammes précédents, ces filtrations coïncident

avec celles déduites de  $\{\mathcal{C}_i(G^{\natural}, \omega)\}_{i \geq 0}$  et  $\{\mathcal{C}^i(G^{\natural}, \omega)\}_{i \geq 0}$  par projection. En particulier, posant

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'^{d(G)}(G^{\natural}, \omega),$$

on a l'égalité

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \text{Im}(\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]').$$

De même, les filtrations  $\{\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)_i\}_{i \geq -1}$  et  $\{\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^i\}_{i \geq -1}$  (variante) donnent par restriction une filtration décroissante  $\{\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)_i\}_{i \geq 0}$  et une filtration croissante  $\{\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)^i\}_{i \geq 0}$  du  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , qui coïncident avec les filtrations déduites de  $\{\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)_i\}_{i \geq -1}$  et  $\{\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^i\}_{i \geq -1}$  par projection.

**6.12. Filtration topologique.** — Nous focalisons maintenant notre attention sur la structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module sur  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Rappelons que l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est donnée par

$$z \cdot [\Pi, u] = [\Pi, z_{\Pi^{\circ}} \circ u], \quad z \in \mathfrak{Z}(G), [\Pi, u] \in \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega).$$

Elle se factorise à travers l'anneau  $\overline{\mathfrak{Z}}_{G^{\natural}, \omega}$  quotient de  $\mathfrak{Z}(G)$  par l'idéal engendré par les  $z(1) - z$ ,  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ .

**REMARQUE 1.** — L'application

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]'}$$

est un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules pour l'action naturelle de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ , c'est-à-dire celle déduite par passage au quotient de l'action naturelle sur  $\mathcal{H}(G^{\natural}, \omega)$ , cf. 6.7–6.8. L'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  se factorise elle aussi à travers l'anneau quotient  $\overline{\mathfrak{Z}}_{G^{\natural}, \omega}$ , et l'application ci-dessus est un morphisme de  $\overline{\mathfrak{Z}}_{G^{\natural}, \omega}$ -modules. ■

Pour un objet de type fini  $\pi$  de  $\mathfrak{R}(G)$ , on note  $\text{Supp}(\pi) \subset \Theta(G)$  le support du faisceau quasi-cohérent associé au  $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $V_{\pi}$ . Si  $J$  est un “bon” sous-groupe ouvert compact de  $G$  tel que  $\pi_J = \pi$ , c'est aussi le support du faisceau cohérent associé au  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -module de type fini  $V_{\pi}^J$ . En particulier, c'est une sous-variété fermée de  $\Theta_{\mathfrak{S}(J)}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}(J)} \Theta(\mathfrak{s})$ , d'idéal associé le radical de l'anneau

$$\text{Ann}_{\mathfrak{Z}_J(G)}(V_{\pi}^J) = \{z \in \mathfrak{Z}_J(G) : z \cdot V_{\pi}^J = 0\}.$$

Pour chaque entier  $i \geq 0$ , on note  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  formée des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telles que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$  tel que  $\dim(\text{Supp}(\Pi^{\circ})) \leq i$ , et l'on pose

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i)),$$

où  $\mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i))$  est défini comme en 6.8 en remplaçant  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  par  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i)$ . On munit  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; i)$  d'une structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module comme en loc. cit. Pour  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , on définit de la même manière la catégorie abélienne  $\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega; i)$  et le  $\mathfrak{Z}(G)$ -module — en fait un  $\mathfrak{Z}_J(G)$ -module —  $\mathcal{C}_J(G^{\natural}, \omega; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega; i))$ . Comme en loc. cit., on a l'égalité

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; i) = \varinjlim_J \mathcal{C}_J(G^{\natural}, \omega; i),$$

où la limite inductive est prise sur les  $J \in \mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ . Soit  $\text{F}^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  défini par

$$\text{F}^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \text{Im}(\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; i) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)),$$

où  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; i) \rightarrow \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$  est l'application naturelle, c'est-à-dire le morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules induit par l'application identique  $(\Pi, u) \mapsto (\Pi, u)$ . Pour  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , on définit de la même manière le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $F^i \mathcal{C}_J(G^\natural, \omega)$  de  $\mathcal{C}_J(G^\natural, \omega)$ . On a donc l'égalité

$$F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \varinjlim_J F^i \mathcal{C}_J(G^\natural, \omega),$$

où la limite inductive est prise sur les  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ .

On obtient une filtration croissante  $\{F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega)\}_{i \geq 0}$  de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Pour  $i \geq 0$ , on pose

$$\bar{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega) = F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega) / F^{i-1} \mathcal{C}(G^\natural, \omega), \quad F^{-1}(G^\natural, \omega) = \{0\}.$$

Les  $\bar{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$  sont encore munis (par passage au quotient) d'une structure de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules. Pour  $i \geq 0$  et  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ , on définit de la même manière le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\bar{F}^i \mathcal{C}_J(G^\natural, \omega)$  de  $\bar{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . On a aussi l'égalité

$$\bar{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \varinjlim_J \bar{F}^i \mathcal{C}_J(G^\natural, \omega),$$

où la limite inductive est prise sur les  $J \in \mathbf{J}_{G^\natural, \omega}(G)$ .

**LEMME.** — *Pour  $i < d(G^\natural)$ , on a  $F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega) = 0$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer  $i \geq 0$  (sinon il n'y a rien à démontrer). En particulier on a  $d(G^\natural) > 0$ . On procède comme dans la démonstration de [D, lemma 4.10]. Rappelons qu'on a noté  $A_G$  le plus grand sous-tore déployé du centre  $Z(G)$  de  $G$ , et  $A_{G^\natural}$  le plus grand sous-tore déployé du centre  $Z(G^\natural)$  de  $G^\natural$  (cf. 4.3). On a donc l'inclusion  $A_{G^\natural} \subset A_G$ . Posons  $A_G^\natural = A_G \cdot \delta_1$ , et notons  $\mathfrak{P}^0(A_G^\natural)$  la composante neutre du groupe  $\mathfrak{P}(A_G^\natural) = \mathfrak{P}(A_G)^\theta$  des caractères non ramifiés  $\theta$ -stables de  $A_G$ , où (rappel)  $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$ . La restriction des caractères donne une suite de morphismes

$$\mathfrak{P}^0(G^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}^0(A_G^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{G^\natural}).$$

D'après la remarque 3 de 4.2, chacun de ces deux morphismes (et donc aussi leur composée) est surjectif de noyau fini, i.e. fini et étale.

Soit  $\mathcal{H}(A_G)$  l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur  $A_G$ , muni du produit de convolution défini par la mesure de Haar sur  $A_G$  donnant le volume 1 au sous-groupe compact maximal  $A_G^1$  de  $A_G$ . Tout élément de  $\mathcal{H}(A_G)$  définit (par convolution) un  $\mathbb{Z}$ -endomorphisme de  $\mathcal{H}(G)$  qui commute aux multiplications à droite et à gauche, c'est-à-dire un élément de  $\mathfrak{Z}(G)$  (cf. 2.17). On en déduit un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\mathbb{C}[A_G/A_G^1] \hookrightarrow \mathcal{H}(A_G) \rightarrow \mathfrak{Z}(G),$$

qui fournit un morphisme (algébrique)

$$\eta_G : \Theta(G) \rightarrow \mathfrak{P}(A_G).$$

On note  $\eta_{G^\natural} : \Theta(G) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$  la composée de ce morphisme et de la projection canonique  $\mathfrak{P}(A_G) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ ,  $\psi \mapsto \psi|_{A_{G^\natural}}$ .

Soit  $(\Pi, u)$  une paire formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$  tel que  $\Pi^\circ$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , et d'un élément  $u \in \text{End}_G(\Pi^\circ)$ . Posons  $Y = \text{Supp}(\Pi^\circ)$ . Supposons  $\dim(Y) < d(G^\natural)$ , et montrons que  $[\Pi, u] = 0$  dans  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . L'image  $S^\natural \subset \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$  de  $Y$  par le morphisme  $\eta_{G^\natural}$  est une sous-variété (en général non fermée) de  $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ , de dimension strictement inférieure à  $d(G^\natural)$ . Puisque le morphisme  $\mathfrak{P}^0(A_G^\natural) \rightarrow \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$  est fini et étale, il existe un sous-groupe à un paramètre  $\mu : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{P}^0(A_G^\natural)$  tel que, notant  $C_\mu^\natural \subset \mathfrak{P}(A_{G^\natural})$  la projection de l'image de  $\mu$  sur  $\mathfrak{P}(A_{G^\natural})$ , on a

$$\dim(C_\mu^\natural \cap S^\natural) = 0.$$

Soit  $\mu^\sharp : A_G/A'_G \rightarrow \mathbb{Z}$  le morphisme de groupes correspondant à  $\mu : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathfrak{P}^0(A_G^\natural) \subset \mathfrak{P}(A_G)$ . Posons  $A'_G = \ker(\mu^\sharp)$ . C'est un sous-groupe  $\theta$ -stable de  $A_G$  (on a  $\mu^\sharp \circ \theta = \mu^\sharp$ ), et  $\theta$  induit par passage au quotient l'action triviale sur  $A_G/A'_G \simeq \mathbb{Z}$ . Posons  $S = \eta_G(Y)$  et  $C_\mu = \text{Im}(\mu)$ . Par construction, on a

$$\dim(C_\mu \cap S) = 0.$$

Cela entraîne que seul un nombre fini de caractères du groupe  $A_G/A'_G$  apparaît dans l'action de  $\mathbb{C}[A_G/A'_G]$  sur l'espace  $V$  de  $\Pi$  via le morphisme

$$\mathbb{C}[A_G/A'_G] \hookrightarrow \mathbb{C}[A_G/A'_G] \rightarrow \mathfrak{Z}(G).$$

Comme  $G^1 A_G$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$ , et que  $V$  est de type fini comme  $G$ -module, on en déduit que  $V$  est de type fini comme  $G^1 A'_G$ -module. L'inclusion  $A_G \subset G$  identifie  $A_G/A'_G$  à un sous-groupe d'indice fini de  $G/G^1 A'_G$ . Puisque  $A_G/A'_G \simeq \mathbb{Z}$ , on obtient que  $G/G^1 A'_G \simeq \mathbb{Z} \times \mathfrak{F}$  pour un groupe fini  $\mathfrak{F}$  (le sous-groupe de torsion de  $G/G^1 A'_G$ ). Notons  $G' \subset G$  le noyau de la projection de  $G$  sur le facteur  $\mathbb{Z}$  de la décomposition  $G/G^1 A'_G \simeq \mathbb{Z} \times \mathfrak{F}$ , c'est-à-dire le noyau de l'application composée

$$G \rightarrow G/G^1 A'_G \rightarrow \mathbb{Z}.$$

L'inclusion  $A_G \subset G$  identifie  $A_G/A'_G$  à un sous-groupe d'indice fini, disons  $m$ , de  $G/G' \simeq \mathbb{Z}$ . L'automorphisme  $\theta$  de  $G$  induit par passage au quotient un automorphisme de  $G/G^1 A'_G$  qui stabilise la décomposition  $G/G^1 A'_G \simeq \mathbb{Z} \times \mathfrak{F}$ . Le groupe  $G'$  est  $\theta$ -stable, et  $\theta$  induit par passage au quotient un automorphisme de  $G/G'$  trivial sur  $A_G/A'_G$ . Comme le seul automorphisme de  $\mathbb{Z}$  trivial sur  $m\mathbb{Z}$  est l'identité,  $\theta$  agit trivialement sur  $G/G'$ .

Posons  $\mathfrak{X} = \text{Hom}(G/G', \mathbb{C}^\times)$ . C'est un tore complexe de dimension 1, et un sous-groupe de  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ . Notons  $B$  l'algèbre affine  $\mathbb{C}[\mathfrak{X}] = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  de  $\mathfrak{X}$ . Soit  $\Pi_B$  le  $(G^\natural, \omega)$ -module d'espace  $V_B = V \otimes_{\mathbb{C}} B$  donné par

$$\Pi_B(\delta)(v \otimes b) = \Pi(\delta)(v) \otimes \varphi_B(g)b, \quad \delta = g \cdot \delta_1,$$

où  $\varphi_B : G \rightarrow B$  est le "caractère universel" donné par l'évaluation. Le fait que  $\theta$  opère trivialement sur  $G/G'$  assure que  $\Pi_B$  est bien une  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$ . Puisque  $V$  est de type fini comme  $G'$ -module, le  $G$ -module  $\Pi_B$  est encore de type fini. Soit  $u_B$  le  $G$ -endomorphisme de  $\Pi_B$  donné par  $u_B = u \otimes \text{id}_B$ . Soit  $f : V_B \rightarrow V_B$  et  $h : V_B \rightarrow V$  les morphismes de  $(G^\natural, \omega)$ -modules donnés par  $f(v \otimes b) = v \otimes (t-1)b$  et  $h(v \otimes b) = b(t \mapsto 1)v$ , où  $b(t \mapsto 1) \in \mathbb{C}$  désigne l'évaluation de  $b \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  en  $t = 1$ . La suite de  $(G^\natural, \omega)$ -modules

$$0 \rightarrow \Pi_B \xrightarrow{f} \Pi_B \xrightarrow{h} V \rightarrow 0$$

est exacte, et vérifie  $u_B \circ f = f \circ u_B$  et  $u \circ h = h \circ u_B$ . Par conséquent on a (dans  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ )

$$[\Pi, u] = [\Pi_B, u_B] - [\Pi_B, u_B] = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

**REMARQUE 2.** — On a une action naturelle de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^\natural)$  sur  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ , qui stabilise  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ , donnée par

$$\Psi \cdot [\Pi, u] = [\Psi \cdot \Pi, u].$$

Rappelons que le point-base  $\delta_1 \in M_{\circ}^{\natural}$  a été choisi de telle manière que le  $F$ -automorphisme  $\theta = \text{int}_{G^{\natural}}(\delta_1)$  de  $\mathbf{G}$  normalise un sous-groupe d'Iwahori  $I$  de  $G$  en bonne position par rapport à  $(P_{\circ}, M_{\circ})$ , et que l'ensemble  $\mathcal{J} = \{I^n : n \geq n_0\}$  est contenu dans  $\mathbf{J}_{G^{\natural}, \omega}(G)$  — cf. 2.20 et 2.21. Pour tout élément  $[\Pi, u]'$  de  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ , l'image  $\bar{\phi}_{[\Pi, u]'}$  de  $[\Pi, u]'$  par l'isomorphisme  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{F}(G^\natural, \omega)$  de 6.7 est donnée par

$$\bar{\phi}_{[\Pi, u]}' = \text{tr}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{\natural}, \omega} (u \circ \Pi(\delta_1)^{-1}; V^J) \in \bar{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^{\natural}, \omega$$

pour tout groupe  $J \in \mathcal{J}$  tel que  $\Pi_J = \Pi$ . On en déduit que pour tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ , on a

$$\Psi \cdot [\Pi, u]' = [\Psi \cdot \Pi, u]' = [\Pi, \Psi(\delta_1)^{-1}u]' = \Psi(\delta_1)^{-1} \cdot [\Pi, u]'$$

En particulier, le sous-groupe  $\Psi(G^{\natural})^{\delta_1} = \{\psi^{\delta_1} : \psi \in \mathfrak{P}(G^{\natural})\}$  de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$  opère trivialement sur  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ . D'autre part pour  $\psi \in \mathfrak{P}(G^{\natural})$ , on a

$$\text{Supp}((\psi^{\delta_1} \cdot \Pi)^{\circ}) = \psi \cdot \text{Supp}(\Pi^{\circ}).$$

On en déduit que si  $[\Pi, u]' \neq 0$  dans  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , alors  $\text{Supp}(\Pi^{\circ})$  est une sous-variété (fermée)  $\mathfrak{P}(G^{\natural})$ -stable de  $\Theta(G)$ . Pour  $y \in \Theta(G)$ , le morphisme  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) \rightarrow \Theta(G)$ ,  $\psi \mapsto \psi \cdot y$  est à fibres finies, par conséquent (toujours si  $[\Pi, u]' \neq 0$ ) la dimension de  $\text{Supp}(\Pi^{\circ})$  est supérieure ou égale à  $\dim(\mathfrak{P}^0(G^{\natural})) = d(G^{\natural})$ . Cela démontre le lemme dans le cas où  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , cf. la remarque 1 de 6.8. ■

**REMARQUE 3.** — Soit  $\Pi$  un objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i)$  pour un entier  $i \geq 0$ , et soit  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ . Posons  $\Sigma = {}^{\omega}r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}(\Pi)$ . Rappelons (4.6) que le morphisme d'anneaux  $\iota_{G, P}^* : \mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathfrak{Z}(M_P)$  fait de  $\mathfrak{Z}(M_P)$  un  $\mathfrak{Z}(G)$ -module de type fini, et que pour  $z \in \mathfrak{Z}(G)$ , le  $M_P$ -endomorphisme  $r_G^P(z)$  de  $\Sigma^{\circ} = r_G^P(\Pi^{\circ})$  coïncide avec  $\iota_{G, P}^*(z)$ . Par suite la représentation (de type fini)  $\Sigma^{\circ}$  de  $M_P$  vérifie  $\dim(\text{Supp}(\Sigma^{\circ})) \leq i$ . Si  $d(M_P^{\natural}) > i$ , alors d'après le lemme, pour tout  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ , l'élément  ${}^{\omega}r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}([\Pi, u])$  de  $\mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)$  est nul. D'où l'inclusion

$$F^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \subset \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^i, \quad i \geq 0.$$

Dans le cas non tordu ( $\theta = \text{id}$  et  $\omega = 1$ ), Dat a montré — pour  $F$  de caractéristique nulle mais sa démonstration est valable en caractéristique quelconque — que cette inclusion est une égalité [D, theorem 5.7]. On verra en 6.23 (corollaire) qu'il en est de même ici. ■

**6.13. L'isomorphisme  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0) \simeq \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ .** — Pour  $i = 0$ ,  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; 0)$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  formée des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G$  telles que la représentation sous-jacente  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  est de longueur finie. Pour une paire  $(\Pi, u)$  formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; 0)$  et d'un élément  $u$  de  $\text{End}_G(\Pi^{\circ})$ , on note  $[\Pi, u; 0]$  son image dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$ . Si  $\Pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; 0)$ , on note  $\pi_{\text{soc}}$  le *socle* de  $\pi = \Pi^{\circ}$ , c'est-à-dire la somme (directe) des sous-représentations irréductibles de  $\pi$ . Puisque l'espace de  $\pi_{\text{soc}}$  est  $G^{\natural}$ -stable, il définit une sous- $\omega$ -représentation  $\Pi_{\text{soc}}$  de  $\Pi$ , qui coïncide avec la somme des sous- $\omega$ -représentations irréductibles de  $\Pi$  (cf. 2.6). De plus, tout  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\Pi$  définit par restriction un  $G$ -endomorphisme  $u_{\text{soc}}$  de  $\Pi_{\text{soc}}$  et par passage au quotient un  $G$ -endomorphisme  $u^{\text{soc}}$  de  $\Pi^{\text{soc}} = \Pi/\Pi_{\text{soc}}$ . D'après la relation sur les suites exactes, on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$

$$[\Pi, u; 0] = [\Pi_{\text{soc}}, u_{\text{soc}}; 0] + [\Pi^{\text{soc}}, u^{\text{soc}}; 0].$$

Par récurrence sur la longueur de  $\Pi^{\circ}$ , on en déduit que le groupe abélien  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$  est engendré (sur  $\mathbb{Z}$ ) par les paires  $[\Pi, u; 0]$  telles que  $\Pi^{\circ}$  est une représentation semisimple de longueur finie de  $G$ . Pour un tel  $\Pi$ , on a la décomposition en somme directe

$$\Pi = \bigoplus_{\mathfrak{X}} \Pi_{\mathfrak{X}}$$

où  $\mathfrak{X}$  parcourt les éléments de  $\text{Irr}_{<+\infty}(G^{\natural}, \omega)/\mathbb{C}^{\times}$ , et  $\Pi_{\mathfrak{X}}$  désigne la composante  $\mathfrak{X}$ -isotypique de  $\Pi$ ; en d'autres termes,  $\Pi_{\mathfrak{X}}^{\circ}$  est la somme (directe) des sous-représentations irréductibles  $\rho$  de  $\Pi^{\circ}$  telles que la  $\mathbb{Z}$ -orbite  $\{\rho(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  est dans l'image de  $\mathfrak{X}$  par l'application injective (2.7)  $\text{Irr}_{<+\infty}(G^{\natural}, \omega)/\mathbb{C}^{\times} \rightarrow \text{Irr}(G)/\mathbb{Z}$ . Pour  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$

$$[\Pi, u] = \sum_{\mathfrak{X}} [\Pi_{\mathfrak{X}}, u_{\mathfrak{X}}], \quad u_{\mathfrak{X}} = u|_{V_{\Pi_{\mathfrak{X}}}} \in \text{End}_G(\Pi_{\mathfrak{X}}^{\circ}).$$

Soit  $\Pi$  un objet de  $\mathfrak{A}(G^{\natural}, \omega; 0)$  tel que  $\Pi = \Pi_{\mathfrak{X}}$  pour un  $\mathfrak{X} \in \text{Irr}_{<+\infty}(G^{\natural}, \omega)/\mathbb{C}^{\times}$ . Choisissons une sous- $\omega$ -représentation irréductible  $\Pi_0$  de  $\Pi$ . La  $\omega$ -représentation  $\Pi$  est isomorphe à un produit de la forme

$$\Pi' = \Pi_0 \times (\lambda_1 \cdot \Pi_0) \times \cdots \times (\lambda_{n-1} \cdot \Pi_0), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Choisissons un tel isomorphisme (de  $(G^{\natural}, \omega)$ -modules)  $\zeta : \Pi \rightarrow \Pi'$ . D'où un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\text{End}_G(\Pi^{\circ}) \rightarrow M_n(\text{End}_G(\Pi_0^{\circ})), \quad u \mapsto \zeta \circ u \circ \zeta^{-1} = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

vérifiant

$$\tilde{u}_{i,j} = \Pi_0(\delta) \circ u_{i,j} \circ \Pi_0(\delta)^{-1} (= \widetilde{u_{i,j}}), \quad \tilde{u} = \Pi(\delta) \circ u \circ \Pi(\delta)^{-1},$$

pour un (i.e. pour tout)  $\delta \in G^{\natural}$ . Notons  $\overline{\text{End}}_G(\Pi)$  l'espace vectoriel quotient de  $\text{End}_G(\Pi^{\circ})$  par le sous-espace engendré par les  $\tilde{u} \circ u' - u' \circ u$  pour  $u, u' \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ . On définit l'espace  $\overline{\text{End}}_G(\Pi_0)$  de la même manière. L'application trace

$$\text{End}_G(\Pi) \rightarrow \text{End}_G(\Pi_0), \quad u \mapsto \sum_{i=1}^n u_{i,i}$$

induit par passage au quotient une application

$$\overline{\text{tr}}_{\Pi, \Pi_0} : \overline{\text{End}}_G(\Pi) \rightarrow \overline{\text{End}}_G(\Pi_0)$$

qui ne dépend pas du choix de  $\zeta$ , et qui, d'après la proposition de 6.2, est un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. On en déduit que pour  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$

$$[\Pi, u; 0] = \sum_{i=1}^n [\lambda_{i-1} \cdot \Pi_0, u_{i,i}; 0], \quad \lambda_0 = 1.$$

D'après la remarque 1 de 6.7 (et la remarque 2 de 6.8), si la  $\omega$ -représentation irréductible  $\Pi_0$  de  $G^{\natural}$  n'est pas  $G$ -irréductible, pour  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$

$$[\Pi, u; 0] = 0.$$

En définitive, on a montré que le groupe abélien  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$  est engendré (sur  $\mathbb{Z}$ ) par les paires  $[\Pi, u]$  telles que  $\Pi$  est une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^{\natural}$ . Ainsi  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$  coïncide "presque" avec  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , à ceci près que la multiplication par  $\mathbb{C}^{\times}$  est inversée: pour une paire  $(\Pi, u)$  comme ci-dessus et un élément  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , on a

$$\lambda \cdot [\Pi, u; 0] = [\Pi, \lambda u; 0] = [\lambda^{-1} \cdot \Pi, u; 0].$$

Tout comme pour l'application d'Euler-Poincaré (6.9), on corrige ce défaut en passant à la contragrédiente: l'application qui à un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{A}(G^{\natural}, \omega^{-1}; 0)$  associe la paire  $(\tilde{\Pi}, \text{id}_{V_{\tilde{\Pi}}})$  induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0).$$

**REMARQUE.** — Si  $d(G^{\natural}) > 0$ , d'après le lemme de 6.12, l'image  $F^0 \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$  dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  par l'application naturelle, est nulle. ■

**6.14. Gradu e de la filtration topologique.** — Pour une sous-variété fermée irr educ-  
tible  $Y$  de  $\Theta(G)$ , on note  $\mathfrak{R}(G; Y)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G)$  formée des représenta-  
tions de type fini  $\pi$  de  $G$  telles que l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur l'espace de  $\pi$  se factorise à travers  
le morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[Y]$ ; notons que cette condition implique l'inclusion  
 $\text{Supp}(\pi) \subset Y$ , mais la réciproque est fautive en général. D'après [BD, prop. 3.3], tout objet de  
 $\mathfrak{R}(G; Y)$  est un  $(G, \mathbb{C}[Y])$ -module admissible. D'ailleurs puisque  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$  pour un unique  
 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , d'après [BD, cor. 3.10], tout  $(G, \mathbb{C}[Y])$ -module admissible  $\pi$  tel que l'action de  
 $\mathbb{C}[Y]$  sur  $V_\pi$  provient de l'action naturelle de  $\mathfrak{Z}(G)$  via le morphisme  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[Y]$ , est un  
objet de  $\mathfrak{R}(G; Y)$ .

**REMARQUE 1.** — Si  $Y = \{y\}$  pour un point  $y \in \Theta(G)$ , alors  $\mathfrak{R}(G; y)$  est la sous-catégorie  
pleine de  $\mathfrak{R}(G)$  formée des représentations de longueur finie  $\pi$  de  $G$  telle que l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$   
sur l'espace de  $\pi$  se factorise à travers le morphisme de spécialisation  $\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[\{y\}] \simeq \mathbb{C}$ .  
Si  $\pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G; y)$ , alors pour toute représentation irr educible  $\pi'$  de  $G$  isomorphe  
à un sous-quotient de  $\pi$ , on a  $\theta_G(\pi') = y$ . Mais même dans ce cas, la réciproque est fautive  
en général: une représentation de longueur finie  $\pi$  de  $G$  telle que  $\theta_G(\pi') = y$  pour tout sous-  
quotient irr educible  $\pi'$  de  $\pi$ , n'est pas forcément un objet de  $\mathfrak{R}(G; y)$ . Prenons par exemple  
pour  $G$  le groupe  $GL(1)$ , et limitons-nous aux représentations non ramifiées de  $G = F^\times$ .  
On a  $\mathfrak{Z}(G) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ . Soit un entier  $k \geq 2$ . Pour  $t = 1$ , l'espace  $\mathfrak{Z}(G)/(t-1)^k \mathfrak{Z}(G)$  définit  
une représentation de longueur finie  $\pi$  de  $G$  telle que  $\theta_G(\pi') = 1$  pour tout sous-quotient  
irr educible  $\pi'$  de  $\pi$ . Mais  $\mathfrak{Z}(G)$  n'agit pas sur  $\pi$  via son quotient  $\mathfrak{Z}(G)/(t-1)\mathfrak{Z}(G)$ . ■

Si de plus  $Y$  est  $\mathbb{Z}$ -stable, on note  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega)$   
formée des  $\omega$ -représentations  $\Pi$  de  $G^\natural$  telles que  $\Pi^\circ$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G; Y)$ . Puisque  $Y$   
est  $\mathbb{Z}$ -stable, l'élément  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{B}(G)$  tel que  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$  appartient à  $\mathfrak{B}_1(G)$ , mais les actions  
de  $\mathbb{C}[Y]$  et  $G^\natural$  sur  $V_\Pi = V_{\Pi^\circ}$  ne commutent pas nécessairement entre elles. En d'autres  
termes,  $\Pi$  n'est en général pas un  $(G^\natural, \omega, \mathbb{C}[Y])$ -module; c'en est un si  $Y \subset \Theta_1(G)$ . Posons  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y))$ . C'est un  $\mathbb{C}[Y]$ -module — donc aussi un  $\mathfrak{Z}(G)$ -module — pour  
l'action de  $\mathbb{C}[Y]$  définie comme en 6.8. Pour chaque entier  $i \geq 0$ , on peut comme en 6.12  
définir la sous-catégorie pleine  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y; i)$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y)$ , et poser

$$\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y; i)).$$

On peut aussi définir la filtration  $\{F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)\}_{i \geq 0}$ , où

$$F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = \text{Im}(\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y; i) \rightarrow \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)),$$

et pour  $i \geq 0$ , poser

$$\overline{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) / F^{i-1} \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y), \quad F^{-1} \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = 0.$$

Les  $F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$  et les  $\overline{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$  sont des  $\mathbb{C}[Y]$ -modules, et pour  $i > \dim(Y)$ , on a  
 $\overline{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = 0$ . Notons

$$\iota^Y : \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$$

l'application naturelle. D'après le lemme de 6.12, si  $\dim(Y) < d(G^\natural)$  alors  $\iota^Y \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = 0$   
dans  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . De plus,  $\iota^Y$  est un morphisme filtré de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules: pour chaque  $i \geq 0$ ,  
 $\iota^Y$  induit un morphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) \rightarrow F^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ , et un morphisme de  
 $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\overline{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) \rightarrow \overline{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . En particulier, on a l'inclusion

$$\iota^Y \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = \iota^Y F^{\dim(Y)} \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) \subset F^{\dim(Y)} \mathcal{C}(G^\natural, \omega).$$

Le lemme suivant est la version tordue du lemma 4.3 de [D].

**LEMME.** — Soit un entier  $d \geq d(G^{\natural})$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$

$$\overline{F}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \sum_{Y, \dim(Y)=d} \iota^Y \overline{F}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y),$$

où  $Y$  parcourt les sous-variétés fermées irréductibles  $\mathbb{Z}$ -stables (de dimension  $d$ ) de  $\Theta(G)$ .

*Démonstration.* — L'expression à droite de l'égalité est (par définition) contenue dans celle à gauche. Pour l'inclusion inverse, on prouve tout d'abord l'analogie suivant du lemme 17 de [BS]: l'espace  $F^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est engendré (sur  $\mathbb{C}$ ) par les images des paires  $(\Pi, u)$  où  $\Pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; d)$  tel que  $\text{Supp}(\Pi^{\circ})$  est irréductible, et  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ . On peut par récurrence supposer que cela est vrai pour  $F^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $i = 0, \dots, d-1$  (pour  $i = 0$ , cf. la description de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; 0)$  donnée en 6.13). Soit donc  $(\Pi, u)$  une paire formée d'un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; d)$  et d'un élément  $u \in \text{End}_G(\Pi^{\circ})$ ,  $\pi = \Pi^{\circ}$ . Posons  $X = \text{Supp}(\pi)$ . Si  $\dim(X) < d$ , alors  $[\Pi, u]$  est dans  $F^{d-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  et il n'y a rien à démontrer. On suppose donc  $\dim(X) = d$ . Puisque  $X$  est une sous-variété  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\Theta(G)$ , l'ensemble des  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$  tels que  $X \cap \Theta(\mathfrak{s}) \neq \emptyset$  est une partie finie  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\mathfrak{B}(G)$ . D'après la remarque 1 de 6.7 (et la remarque 2 de 6.8), on peut supposer que  $X \subset \Theta(\mathfrak{s})$  pour un  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$ .

Soit  $Y_1, \dots, Y_n$  les composantes irréductibles de  $X$ . On peut supposer  $n \geq 2$  sinon il n'y a rien à démontrer. Pour  $i = 1, \dots, n$ , soit  $\mathfrak{J}_i = \text{Ann}_{\mathfrak{Z}_s}(Y_i)$  l'idéal de  $\mathfrak{Z}_s$  définissant  $Y_i$ . Puisque  $\pi(1) \simeq \pi$ , il existe une permutation  $i \mapsto \sigma(i)$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $Y_i(1) = Y_{\sigma(i)}$ , et puisque  $\pi$  est de type fini, il existe des entiers  $k_1, \dots, k_n \geq 1$  tel que l'idéal  $\prod_{i=1}^n \mathfrak{J}_i^{k_i}$  de  $\mathfrak{Z}_s$  annule  $\pi$ . On peut supposer que pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $k_{\sigma(i)} = k_i$ . Soit  $\mathcal{O}$  une  $\sigma$ -orbite dans  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $\dim Y_i = n$  pour un (i.e. pour tout)  $i \in \mathcal{O}$ . Posons  $\mathfrak{J}_{\mathcal{O}} = \prod_{i \in \mathcal{O}} \mathfrak{J}_i$  et  $k_{\mathcal{O}} = k_i$ ,  $i \in \mathcal{O}$ . L'idéal  $\mathfrak{J}_{\mathcal{O}}^{k_{\mathcal{O}}}$  de  $\mathfrak{Z}_s$  est  $\mathbb{Z}$ -stable, et la sous-représentation  $\pi_{\mathcal{O}} = \mathfrak{J}_{\mathcal{O}}^{k_{\mathcal{O}}} \cdot \pi$  de  $\pi$  définit une sous- $\omega$ -représentation  $\Pi_{\mathcal{O}}$  de  $\Pi$  (i.e. telle que  $\Pi_{\mathcal{O}}^{\circ} = \pi_{\mathcal{O}}$ ). Le  $G$ -endomorphisme  $u$  de  $\pi$  induit par restriction un  $G$ -endomorphisme  $u_{\mathcal{O}}$  de  $\Pi_{\mathcal{O}}^{\circ}$ , et par passage au quotient un  $G$ -endomorphisme  $\overline{u}_{\mathcal{O}}$  de  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}} = (\Pi/\Pi_{\mathcal{O}})^{\circ}$ . On a l'égalité dans  $F^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ :

$$[\Pi, u] = [\Pi_{\mathcal{O}}, u_{\mathcal{O}}] + [\overline{\Pi}_{\mathcal{O}}, \overline{u}_{\mathcal{O}}], \quad \overline{\Pi}_{\mathcal{O}} = \Pi/\Pi_{\mathcal{O}}.$$

La représentation  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}$  de  $G$  est annulée par  $\mathfrak{J}_{\mathcal{O}}^{k_{\mathcal{O}}}$ , par conséquent son support est contenu dans  $Y_{\mathcal{O}}$ . Si  $s = |\mathcal{O}| > 1$ , alors d'après la remarque 1 de 6.7 (et la remarque 2 6.8), l'élément  $[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}}, \overline{u}_{\mathcal{O}}]$  est dans  $F^{d-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . En effet, pour  $i = 1, \dots, n$ , notons  $\pi_i$  la sous-représentation  $\mathfrak{J}_i^{k_i} \cdot \pi$  de  $\pi$ , et pour  $i \in \mathcal{O}$ , posons  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^i = \pi_i/\pi_{\mathcal{O}} \subset \overline{\pi}_{\mathcal{O}}$  et notons  $\overline{u}_{\mathcal{O}}^i \in \text{End}_G(\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^i)$  la restriction de  $\overline{u}_{\mathcal{O}}$  à l'espace de  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^i$ . L'opérateur  $A = \overline{\Pi}_{\mathcal{O}}(\delta_1)$  envoie  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^i$  sur  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^{\sigma(i)}$ . Soit  $i_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ . L'opérateur  $A^s$  envoie  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^{i_{\mathcal{O}}}$  sur  $\overline{\pi}_{\mathcal{O}}^{i_{\mathcal{O}}}(s)$ , donc définit une  $\omega_s$ -représentation  $\Sigma$  de  $G^{\natural}$ . Posons  $\tilde{\Pi}_{\mathcal{O}} = \iota_s(\Sigma)$ , et notons  $\tilde{u}_{\mathcal{O}}$  le  $G$ -endomorphisme  $\overline{u}_{\mathcal{O}}^{i_{\mathcal{O}}} \times \overline{u}_{\mathcal{O}}^{\sigma(i_{\mathcal{O}})} \times \dots \times \overline{u}_{\mathcal{O}}^{\sigma^{s-1}(i_{\mathcal{O}})}$ . L'application

$$\varphi : \tilde{\Pi}_{\mathcal{O}} \rightarrow \overline{\Pi}_{\mathcal{O}}, (v_0, \dots, v_{s-1}) \mapsto v_0 + \dots + v_{s-1}$$

est un  $G^{\natural}$ -morphisme vérifiant  $\varphi^{\circ} \circ \tilde{u}_{\mathcal{O}} = \overline{u}_{\mathcal{O}} \circ \varphi^{\circ}$ . Son noyau définit une sous- $\omega$ -représentation  $\tilde{\Pi}'_{\mathcal{O}}$  de  $\tilde{\Pi}_{\mathcal{O}}$  qui, par construction, est un objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; d-1)$ . Notant  $\tilde{u}'_{\mathcal{O}} \in \text{End}_G(\tilde{\Pi}'_{\mathcal{O}})$  la restriction de  $\tilde{u}_{\mathcal{O}}$  à l'espace de  $\tilde{\Pi}'_{\mathcal{O}}$ , on a l'égalité dans  $F^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ :

$$[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}}, \overline{u}_{\mathcal{O}}] = [\tilde{\Pi}_{\mathcal{O}}, \tilde{u}_{\mathcal{O}}] - [\tilde{\Pi}'_{\mathcal{O}}, \tilde{u}'_{\mathcal{O}}] \equiv 0 \pmod{F^{d-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)}.$$

Si  $s = 1$ , on distingue deux cas: ou bien  $\text{Supp}(\overline{\pi}_{\mathcal{O}}) = Y_{\mathcal{O}}$ ; ou bien  $\text{Supp}(\overline{\pi}_{\mathcal{O}}) \neq Y_{\mathcal{O}}$ , auquel cas  $[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}}, \overline{u}_{\mathcal{O}}]$  appartient à  $F^{d-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Quant à la représentation  $\pi_{\mathcal{O}}$  de  $G$ , puisqu'elle est annulée par l'idéal  $\prod_{i \notin \mathcal{O}} \mathfrak{J}_i^{k_i}$  de  $\mathfrak{Z}_s$ , son support est contenu dans la sous-variété  $X' = \bigcup_{i \notin \mathcal{O}} Y_i$  de  $X$ . Si  $\dim(X') < d$ , l'élément  $[\Pi_{\mathcal{O}}, u_{\mathcal{O}}]$  appartient à  $F^{d-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  et il n'y a plus rien à démontrer; sinon, il existe une  $\sigma$ -orbite  $\mathcal{O}'$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$ , telle que  $Y_{\mathcal{O}'} \subset X'$ , et

l'on peut remplacer  $(X, \mathcal{O})$  par  $(X', \mathcal{O}')$  dans la construction précédente. Le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes ( $n$  est fini!), d'où le résultat.

On est donc ramené à montrer que pour une paire  $(\Pi, u)$  comme ci-dessus, telle que  $Y = \text{Supp}(\Pi^\circ)$  est une sous-variété *irréductible* de dimension  $d$  de  $\Theta(G)$ , l'élément  $[\Pi, u]$  est dans le sous-espace  $\iota^Y \mathcal{F}^d \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$  de  $\mathcal{F}^d \mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Soit  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$  tel que  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ , et soit  $\mathfrak{J}_Y = \text{Ann}_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}}(Y)$  l'idéal de  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  définissant  $Y$ . Puisque  $\Pi^\circ$  est un objet de type fini de  $\mathfrak{R}(G)$ , il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $\mathfrak{J}_Y^k \cdot V_\Pi = 0$ . Pour  $i = 0, \dots, k-1$ , le sous-espace  $V_i = \mathfrak{J}_Y^i \cdot V_\Pi$  de  $V_\Pi$  est  $G^\natural$ -stable, par conséquent la paire  $(\Pi, u)$  définit par restriction et passage au quotient une paire  $(\Pi_i, u_i)$ ,  $V_{\Pi_i} = V_i/V_{i+1}$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$

$$[\Pi, u] = \sum_{i=0}^{k-1} [\Pi_i, u_i],$$

et chaque  $[\Pi_i, u_i]$  est dans  $\iota^Y \mathcal{F}^d \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$ .  $\square$

**REMARQUE 2.** — L'involution  $\pi \mapsto \tilde{\pi}$  de  $\text{Irr}(G)$  induit une involution de  $\Theta(G)$ , notée  $y \mapsto \tilde{y}$ , qui envoie  $\Theta_{G^\natural, \omega}(G)$  sur  $\Theta_{G^\natural, \omega^{-1}}(G)$ . Concrètement, si  $y = [M_P, \rho]$  pour une paire cuspidale  $(M, \rho)$  de  $G$ , alors  $\tilde{y} = [M, \tilde{\rho}]$ . De manière équivalente, si  $y = \theta_G(\pi)$  pour un élément  $\pi$  de  $\text{Irr}(G)$ , alors  $\tilde{y} = \theta_G(\tilde{\pi})$ . D'après 6.13, si  $Y = \{y\}$  pour un point  $y \in \Theta_{G^\natural, \omega}(G)$ , alors l'application qui a un objet  $\Pi$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega^{-1}; \tilde{y})$  associe la paire  $(\tilde{\Pi}, \text{id}_{V_{\tilde{\Pi}}})$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}; \tilde{y}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(G^\natural, \omega; y). \quad \blacksquare$$

**REMARQUE 3.** — On verra en 6.20 (cf. aussi la remarque de 6.17) que seules les sous-variétés fermées irréductibles  $Y$  de  $\Theta_1(G)$  contribuent non trivialement à la somme à droite de l'égalité du lemme.  $\blacksquare$

**6.15. Sur les générateurs projectifs à la Bernstein.** — Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$  est équivalente à une catégorie de modules sur une algèbre à unité  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ . Concrètement, choisissons une paire cuspidale standard  $(M_P, \rho)$  de  $G$  de classe d'équivalence inertielle  $\mathfrak{s}$ , notons  $B$  l'algèbre affine  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(M_P)] = \mathbb{C}[M_P/M_P^1]$  du tore complexe  $\mathfrak{P}(M_P)$ , et formons la représentation  $\pi_\mathfrak{s} = i_P^G(\rho \otimes \varphi_P)$  de  $G$  d'espace  $i_P^G(V_\rho \otimes_{\mathbb{C}} B)$ , où  $\varphi_P : M_P \rightarrow B$  est le "caractère universel" donné par l'évaluation (cf. 2.22); c'est un  $(G, B)$ -module admissible. D'après [B2, 4.1],  $\pi_\mathfrak{s}$  est un générateur projectif de type fini de la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ , et cette dernière est équivalente à la catégorie  $\text{Mod}(\mathcal{H}_\mathfrak{s})$  des modules (à gauche) sur la  $\mathbb{C}$ -algèbre

$$\mathcal{H}_\mathfrak{s} = \text{End}_G(\pi_\mathfrak{s})^{\text{op}};$$

où  $\text{End}_G(\pi_\mathfrak{s})^{\text{op}}$  désigne l'algèbre opposée à  $\text{End}_G(\pi_\mathfrak{s})$ . Cette  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  est en fait une  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ -algèbre, de centre  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  et de type fini comme  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ -module. De plus (loc. cit.), la classe d'isomorphisme de  $\pi_\mathfrak{s}$  ne dépend pas du choix de  $(M_P, \rho)$  — d'où la notation.

**REMARQUE 1.** — La  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ -algèbre  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  est munie d'une structure de  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(M_P)]$ -module de type fini, et d'après le "lemme géométrique" [BZ2, 2.12] (cf. 4.1), ce  $\mathbb{C}[\mathfrak{P}(M_P)]$ -module est libre (cf. [D, 6.9]).

On peut décrire explicitement l'équivalence de catégories  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G) \approx \text{Mod}(\mathcal{H}_\mathfrak{s})$  — nous en aurons besoin plus loin. Soit  $r_{\pi_\mathfrak{s}} : \mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{H}_\mathfrak{s})$  le foncteur donné par

$$\sigma \mapsto r_{\pi_\mathfrak{s}}(\sigma) = \text{Hom}_G(\pi_\mathfrak{s}, \sigma),$$

où l'action de  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  sur  $r_{\pi_\mathfrak{s}}(\sigma)$  est donnée par

$$u \cdot v = v \circ u, \quad u \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}, v \in r_{\pi_\mathfrak{s}}(\sigma).$$

Puisque  $\pi_s$  est un générateur projectif de type fini de  $\mathfrak{R}_s(G)$ , le foncteur  $r_{\pi_s}$  est exact, fidèle, et commute aux sommes directes arbitraires. Soit aussi  $i_{\pi_s} : \text{Mod}(\mathcal{H}_s) \rightarrow \mathfrak{R}_s(G)$  le foncteur donné par

$$W \mapsto i_{\pi_s}(W) = V_{\pi_s} \otimes_{\mathcal{H}_s} W,$$

où la structure de  $\mathcal{H}_s$ -module à droite sur l'espace  $V_{\pi_s}$  de  $\pi_s$  est donnée par

$$v \cdot u = u(v), \quad v \in V_{\pi_s}, u \in \mathcal{H}_s,$$

et où l'action de  $G$  sur  $i_{\pi_s}(W)$  est donnée par

$$g \cdot (v \otimes w) = \pi_s(g)(v) \otimes w, \quad g \in G, v \in V_{\pi_s}, w \in W.$$

Le résultat suivant est bien connu (cf. [B1, B2]).

**LEMME 1.** — *Le foncteur  $r_{\pi_s}$  est adjoint à droite du foncteur  $i_{\pi_s}$ , et les foncteurs  $r_{\pi_s}$  et  $i_{\pi_s}$  sont quasi-inverses l'un de l'autre.*

*Démonstration.* — On la rappelle brièvement. Posons  $\pi = \pi_s$ . Pour un  $\mathcal{H}_s$ -module  $W$  et un  $G$ -module  $\sigma$  dans  $\mathfrak{R}_s(G)$ , soit

$$\Phi = \Phi_{W,\sigma} : \text{Hom}_{\mathcal{H}_s}(W, r_{\pi}(\sigma)) \rightarrow \text{Hom}_G(i_{\pi}(W), \sigma)$$

l'application linéaire définie par

$$\Phi(a)(v \otimes w) = a(w)(v)$$

pour  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_s}(W, r_{\pi}(\sigma))$ ,  $v \in V_{\pi}$  et  $w \in W$ . C'est un isomorphisme, d'inverse l'application linéaire

$$\Psi = \Psi_{W,\sigma} : \text{Hom}_G(i_{\pi}(W), \sigma) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_s}(W, r_{\pi}(\sigma))$$

définie par

$$\Psi(b)(w)(v) = b(v \otimes w)$$

pour  $b \in \text{Hom}_G(i_{\pi}(W), \sigma)$ ,  $w \in W$  et  $v \in V_{\pi}$ . En d'autres termes, le foncteur  $r_{\pi}$  est adjoint à droite du foncteur  $i_{\pi}$ .

Soit  $\alpha = \alpha_{\pi} : i_{\pi} \circ r_{\pi} \rightarrow 1_{\mathfrak{R}_s(G)}$  et  $\beta = \beta_{\pi} : 1_{\text{Mod}(\mathcal{H}_s)} \rightarrow r_{\pi} \circ i_{\pi}$  les morphismes adjoints, i.e. les transformations naturelles données par

$$\sigma \mapsto \alpha(\sigma) \in \text{Hom}_G(i_{\pi} \circ r_{\pi}(\sigma), \sigma),$$

$$W \mapsto \beta(W) \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_s}(W, r_{\pi} \circ i_{\pi}(W)).$$

où le morphisme  $\alpha(\sigma)$  est l'image par  $\Phi_{r_{\pi}(\sigma), \sigma}$  de l'identité dans  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_s}(r_{\pi}(\sigma), r_{\pi}(\sigma))$ , et le morphisme  $\beta(W)$  est l'image par  $\Psi_{W, i_{\pi}(W)}$  de l'identité dans  $\text{Hom}_G(i_{\pi}(W), i_{\pi}(W))$ . On a  $r_{\pi}(\pi) = \mathcal{H}_s$  et  $i_{\pi}(\mathcal{H}_s) = V_{\pi} \otimes_{\mathcal{H}_s} \mathcal{H}_s$ , et via l'isomorphisme canonique  $i_{\pi}(\mathcal{H}_s) \simeq \pi$ , le morphisme  $\alpha(\pi) \in \text{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathcal{H}_s$  est l'identité de  $\mathcal{H}_s$ . Pour un  $G$ -module  $\sigma$  dans  $\mathfrak{R}_s(G)$ , choisissons une suite exacte dans  $\mathfrak{R}_s(G)$

$$\pi^{(J)} \rightarrow \pi^{(I)} \rightarrow \sigma \rightarrow 0.$$

Puisque le foncteur  $i_{\pi} \circ r_{\pi}$  est exact à droite, on obtient une suite exacte dans  $\mathfrak{R}_s(G)$

$$i_{\pi} \circ r_{\pi}(\pi^{(J)}) \rightarrow i_{\pi} \circ r_{\pi}(\pi^{(I)}) \rightarrow i_{\pi} \circ r_{\pi}(\sigma) \rightarrow 0.$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} i_{\pi} \circ r_{\pi}(\pi^{(J)}) & \longrightarrow & i_{\pi} \circ r_{\pi}(\pi^{(I)}) & \longrightarrow & i_{\pi} \circ r_{\pi}(\sigma) & \longrightarrow & 0 \\ \alpha(\pi^{(J)}) \downarrow & & \alpha(\pi^{(I)}) \downarrow & & \alpha(\sigma) \downarrow & & \\ \pi^{(J)} & \longrightarrow & \pi^{(I)} & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif. Comme le foncteur  $i_\pi \circ r_\pi$  commute aux sommes directes, les flèches  $\alpha(\pi^{(J)})$  et  $\alpha(\pi^{(I)})$  sont des isomorphismes, par suite  $\alpha(\sigma)$  est un isomorphisme de  $G$ -modules, et  $\alpha$  est un isomorphisme de foncteurs. On montre de la même manière (en remplaçant  $\pi$  par  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ ) que  $\beta$  est un isomorphisme de foncteurs.  $\square$

Soit maintenant  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}_1(G)$ , et soit  $(M_P, \rho)$  une paire cuspidale standard de  $G$  de classe d'équivalence inertielle  $\mathfrak{s}$ . Puisque  $\mathfrak{s}(1) = \mathfrak{s}$ , il existe des éléments  $w \in W_G$  et  $\psi \in \mathfrak{P}(M_P)$  tels que  $w(M_P) = \theta^{-1}(M_P)$  et  $\rho(1) \simeq {}^{nw}(\psi\rho)$ . Posons  $M = M_P$ ,  $\theta' = \theta \circ \text{Int}_G(n_w)$  et  $\rho' = \psi\rho$ . On a  $\theta'(M) = M$  et  $\omega^{-1}\rho'^{\theta'} \simeq \rho'$ . Soit  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{P}(M)]$  et  $\rho = \rho' \otimes \varphi_P$ . Choisissons un isomorphisme  $u'$  de  $\rho'$  sur  $\omega^{-1}\rho'^{\theta'}$ . Alors  $\mathbf{u} = u' \otimes \theta'$  est un isomorphisme de  $\rho$  sur

$$\omega^{-1}\rho^{\theta'} = \rho(1)^{nw} (= \rho(1) \circ \text{Int}_G(n_w)).$$

Notons  $\pi = \pi_\mathfrak{s}$  et  $\pi' = \pi'_\mathfrak{s}$  les représentations  $i_P^G(\rho)$  et  $i_P^G(\omega^{-1}\rho^{\theta'})$  de  $G$  — ce sont deux générateurs projectifs de type fini de la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ . Soit  $U = i_P^G(\mathbf{u})$  l'isomorphisme de  $\pi$  sur  $\pi'$  donné par

$$U(f)(g) = \mathbf{u}(f(g)), \quad f \in V_\pi = i_P^G(V_{\psi\rho} \otimes B).$$

Pour  $f' \in V_{\pi'}$ , on pose  $U'(f') = (\omega f')^{\theta'}$ . C'est un élément de  $V_\pi$ , et l'application  $f' \mapsto U'(f')$  est un isomorphisme de  $\pi'$  sur  $\omega^{-1}\pi'^{\theta'}$ . Enfin l'application  $f \mapsto U''(f) = \pi(n_w^{-1})(f)$  est un isomorphisme de  $\pi^{nw}$  sur  $\pi$ . C'est donc aussi un isomorphisme de  $\pi(1)^{nw} = \omega^{-1}\pi^{\theta'}$  sur  $\pi(1)$ . Posons

$$A = U'' \circ U' \circ U \in \text{Isom}_G(\pi, \pi(1)).$$

Soit  $\Pi = \Pi_\mathfrak{s}$  la  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$  telle que  $\Pi^\circ = \pi$  et  $\Pi(\delta_1) = A$ .

Soit  $\gamma = \gamma_\mathfrak{s}$  le  $\mathbb{C}$ -automorphisme de  $\mathcal{H}_\mathfrak{s} = \text{End}_G(\pi)^{\text{op}}$  défini par  $\gamma(u) = A \circ u \circ A^{-1}$ ,  $u \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}$ . On note  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural = \mathcal{H}_\mathfrak{s} \cdot \gamma$  le  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ -bimodule, libre de rang comme  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ -module à gauche (resp. à droite), défini par la paire  $(\mathcal{H}_\mathfrak{s}, \gamma)$ : pour  $u, u', u'' \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}$ , on pose

$$u \cdot (u' \cdot \gamma) \cdot u'' = u \circ u' \circ \gamma(u'') \cdot \gamma.$$

On a aussi une action naturelle de  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  sur  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$ , donnée par

$$z \cdot u = z_\pi \circ u, \quad z \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}, u \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}.$$

Elle vérifie

$$\gamma(z \cdot u) = z_{\pi(1)} \circ \gamma(u) = z(1) \cdot \gamma(u).$$

**REMARQUE 2.** — Soit  $\Pi'$  une autre  $\omega$ -représentation de  $G^\natural$  telle que  $\Pi'^\circ = \pi$ . Posons  $A' = \Pi'(\delta_1)$ . Alors  $u = A^{-1} \circ A'$  appartient à  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}^\times = \text{Aut}_G(\pi)$ , et remplacer  $\Pi$  par  $\Pi'$  revient à remplacer  $\gamma$  par  $\gamma' = \gamma(u) \cdot \gamma \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural$ , c'est-à-dire à changer de point-base dans  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural$ .  $\blacksquare$

Pour un objet  $\Sigma$  de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ , l'espace  $V = r_\pi(\Sigma^\circ)$  est muni d'une structure de  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural$ -module non dégénéré: pour  $v \in V$ , on pose  $\gamma_V(v) = \Sigma(\delta_1) \circ v \circ A^{-1}$ ; on a donc

$$\gamma_V(v) = \Sigma(\delta) \circ v \circ \Pi(\delta)^{-1}, \quad \delta \in G^\natural,$$

et

$$\gamma_V(u \cdot v) = \gamma_V(v) \circ (A \circ u \circ A^{-1}) = \gamma(u) \cdot \gamma_V(v), \quad u \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}.$$

L'espace  $r_\pi(\Sigma^\circ)$ , muni de cette structure de  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural$ -module non dégénéré, est noté  $r_\Pi(\Sigma)$ . D'où un foncteur

$$r_\Pi = r_{\Pi_\mathfrak{s}} : \mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural).$$

Soit aussi  $i_\Pi = i_{\Pi_\mathfrak{s}} : \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^\natural) \rightarrow \mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$  le foncteur donné par

$$W \mapsto i_{\pi_\mathfrak{s}}(W) = V \otimes_{\mathcal{H}_\mathfrak{s}} W,$$

où l'action de  $G^\natural$  sur  $i_\Pi(W)$  est donnée par

$$\delta \cdot (v \otimes w) = \Pi(\delta)(v) \otimes \gamma \cdot w, \quad \delta \in G^\natural, v \in V_{\pi_\mathfrak{s}}, w \in W.$$

On a donc  $i_\Pi(W)^\circ = i_\pi(W)$ .

**LEMME 2.** — *Le foncteur  $r_{\Pi_\mathfrak{s}}$  est une équivalence de catégories. Précisément, le foncteur  $r_{\Pi_\mathfrak{s}}$  est adjoint à droite du foncteur  $i_{\Pi_\mathfrak{s}}$ , et les foncteurs  $r_{\Pi_\mathfrak{s}}$  et  $i_{\Pi_\mathfrak{s}}$  sont quasi-inverses l'un de l'autre.*

*Démonstration.* — Pour un objet  $W$  de  $\text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s},\omega}^\natural)$  et un objet  $\Sigma$  de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)$ , posant  $\sigma = \Sigma^\circ$ , les isomorphismes  $\Phi_{W,\sigma}$  et  $\Psi_{W,\sigma}$  de la démonstration du lemme 1 donnent par restriction des isomorphismes

$$\Phi_{W,\Sigma} : \text{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{s},\omega}^\natural}(W, r_\Pi(\Sigma)) \rightarrow \text{Hom}_{G^\natural}(i_\Pi(W), \Sigma)$$

et

$$\Psi_{W,\Sigma} : \text{Hom}_{G^\natural}(i_\Pi(W), \Sigma) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{s},\omega}^\natural}(W, r_\Pi(\Sigma)),$$

qui sont inverses l'un de l'autre. En d'autres termes, le foncteur  $r_\Pi$  est adjoint à droite du foncteur  $i_\Pi$ .

Soit  $\alpha_\Pi : i_\Pi \circ r_\Pi \rightarrow 1_{\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G^\natural, \omega)}$  et  $\beta_\Pi : 1_{\text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s},\omega}^\natural)} \rightarrow r_\Pi \circ i_\Pi$  les morphismes adjoints, définis comme dans la démonstration du lemme 1. Le morphisme  $\alpha_\Pi(\Sigma) \in \text{Hom}_{G^\natural}(i_\Pi \circ r_\Pi(\Sigma), \Sigma)$  est la restriction du morphisme  $\alpha_\pi(\Sigma^\circ) \in \text{Hom}_G(i_\pi \circ r_\pi(\Sigma^\circ), \Sigma^\circ)$ . Comme  $\alpha_\pi(\Sigma^\circ)$  est un isomorphisme,  $\alpha_\Pi(\Sigma)$  l'est aussi, et  $\alpha_\Pi$  est un isomorphisme de foncteur. On montre de la même manière que  $\beta_\Pi$  est un isomorphisme de foncteurs.  $\square$

**6.16. Représentations à coefficients dans une extension  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$ .** — Soit  $B$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative à unité. On note  $\mathfrak{R}(G, B)$  la catégorie abélienne des  $(G, B)$ -modules (lisses) — c'est-à-dire des représentations  $\pi$  de  $G$  munies d'une action de  $B$  sur  $V_\pi$  qui commute à l'action de  $G$  —, et  $\mathfrak{Z}(G, B)$  son centre. Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , on note  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G, B)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G, B)$  formée des  $(G, B)$ -modules  $\Pi$  tels que  $\Pi$  est un objet de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ . D'après la décomposition de Bernstein pour  $G$ , on a la décomposition en produit de catégories abéliennes

$$\mathfrak{R}(G, B) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G, B).$$

Notant  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G, B)$  le centre de  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G, B)$ , on a la décomposition en produit d'anneaux

$$\mathfrak{Z}(G, B) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G, B).$$

Soit  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ . D'après 6.15, la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$  est équivalente à une catégorie de modules sur une algèbre à unité:

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G) \approx \text{Mod}(\mathcal{H}_\mathfrak{s}), \quad \mathcal{H}_\mathfrak{s} = \text{End}_G(\pi_\mathfrak{s})^{\text{op}}.$$

On en déduit que la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$  est équivalente à la catégorie  $\text{Mod}(\mathcal{H}_\mathfrak{s} \otimes_{\mathbb{C}} B)$ , et que  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G, B) = \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G) \otimes_{\mathbb{C}} B$ . Si de plus  $B$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre noethérienne, alors  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G) \otimes_{\mathbb{C}} B$  l'est aussi (puisque  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}(G)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini), et la catégorie  $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G, B)$  est localement noethérienne [G, II, 4]. En ce cas la catégorie  $\mathfrak{R}(G, B)$  est elle aussi localement noethérienne, et tout  $(G, B)$ -module irréductible est  $(B)$ -admissible (cf. [B1, §4.2]).

Prenons pour  $B$  une extension arbitraire  $\mathbb{K}$  du corps  $\mathbb{C}$ . Fixons une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{K}}$  de  $\mathbb{K}$ , et notons  $\Gamma_{\mathbb{K}}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ . Considérons  $\Theta(G) = \prod_{\mathfrak{s}} \Theta(\mathfrak{s})$  comme un

schéma réduit sur  $\mathbb{C}$ , et notons  $\Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$  l'ensemble de ses points  $\overline{\mathbb{K}}$ -rationnels. Comme dans le cas complexe (cf. 2.15) on définit une application “caractère  $\overline{\mathbb{K}}$ -infinésimal”

$$\theta_{G, \overline{\mathbb{K}}} : \text{Irr}(G, \overline{\mathbb{K}}) \rightarrow \Theta(G, \overline{\mathbb{K}});$$

où  $\text{Irr}(G, \overline{\mathbb{K}})$  désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $(G, \overline{\mathbb{K}})$ -modules irréductibles.

Puisque  $\Theta(G)$  est l'union (disjointe) de variétés algébriques, chaque point  $\overline{\mathbb{K}}$ -rationnel de  $\Theta(G)$  est un point  $\mathbb{K}'$ -rationnel pour une sous-extension finie  $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$  de  $\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ . Comme dans [D, 6.1], on note  $\Theta(G, \mathbb{K})$  l'ensemble des  $\Gamma_{\mathbb{K}}$ -orbites dans  $\Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$ , c'est-à-dire l'ensemble des points fermés de l'espace topologique  $\Theta(G) \times_{\text{Spec}(\mathbb{C})} \text{Spec}(\mathbb{K})$  — il contient l'ensemble des points  $\mathbb{K}$ -rationnels de  $\Theta(G)$ . Pour un  $(G, \mathbb{K})$ -module  $\pi$ , on note  $\overline{\pi} = \pi \otimes_{\mathbb{K}} \text{id}_{\overline{\mathbb{K}}}$  le  $(G, \overline{\mathbb{K}})$ -module d'espace  $V_{\pi} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$ . Si  $\pi$  est irréductible comme  $(G, \mathbb{K})$ -module, la propriété de  $\mathbb{K}$ -admissibilité entraîne que le  $(G, \overline{\mathbb{K}})$ -module  $\overline{\pi}$  est  $(\overline{\mathbb{K}})$ -de longueur finie, et (d'après loc. cit.) que les sous-quotients  $\overline{\mathbb{K}}$ -irréductibles de  $\overline{\pi}$  sont dans une même  $\Gamma_{\mathbb{K}}$ -orbite de  $\Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$ . Cela définit une application “caractère  $\mathbb{K}$ -infinésimal”

$$\theta_{G, \mathbb{K}} : \text{Irr}(G, \mathbb{K}) \rightarrow \Theta(G, \mathbb{K});$$

où  $\text{Irr}(G, \mathbb{K})$  désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $(G, \mathbb{K})$ -modules irréductibles.

Soit  $\mathfrak{G}(G, \mathbb{K})$  le groupe de Grothendieck des  $(G, \mathbb{K})$ -modules  $(\mathbb{K})$ -de longueur finie, c'est-à-dire le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}(G, \mathbb{K})$ . On a la décomposition

$$\mathfrak{G}(G, \mathbb{K}) = \bigoplus_{y \in \Theta(G, \mathbb{K})} \mathfrak{G}(G, \mathbb{K}; y)$$

où  $\mathfrak{G}(G, \mathbb{K}; y)$  désigne le sous-groupe de  $\mathfrak{G}(G, \mathbb{K})$  engendré par  $\theta_{G, \mathbb{K}}^{-1}(y)$ .

**REMARQUE.** — Puisque les représentations irréductibles de  $G$  sont absolument irréductibles, pour  $y \in \Theta(G) \subset \Theta(G, \mathbb{K})$ , l'application  $\pi \mapsto \pi \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\mathfrak{G}(G; y) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{G}(G, \mathbb{K}; y). \quad \blacksquare$$

**6.17. Spécialisation au point générique.** — Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible de  $\Theta(G)$ . Posons  $d = \dim(Y)$ . Notons  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(Y)$  le corps des fractions de l'algèbre affine  $\mathbb{C}[Y]$  de  $Y$ , et  $\iota_Y : \mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{K}$  le morphisme composé

$$\mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}[Y] \hookrightarrow \mathbb{K}.$$

Le morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres

$$\iota_Y \otimes_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{K}} : \mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

définit un point  $\mathbb{K}$ -rationnel de  $\Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$ , que l'on note  $y_Y$ . C'est en particulier un élément de  $\Theta(G, \mathbb{K})$ . Soit  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K})$  formée des  $(G, \mathbb{K})$ -modules de type fini — c'est-à-dire  $\mathbb{K}$ -de type fini au sens de [BD, 3.1] —  $\pi$  tels que l'action de  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}) = \mathfrak{Z}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$  sur  $V_{\pi}$  se factorise à travers  $\iota_Y \otimes_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{K}}$ . Puisque tout  $(G, \mathbb{K})$ -module de type fini est  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K})$ -admissible [BD, 3.3.1], tout objet de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$  est  $\mathbb{K}$ -admissible. On en déduit qu'un objet  $\pi$  de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$  est un  $(G, \mathbb{K})$ -module de longueur finie, et que pour tout  $(G, \mathbb{K})$ -module irréductible  $\pi'$  isomorphe à un sous-quotient de  $\pi$ , on a  $\theta_{G, \mathbb{K}}(\pi') = y_Y$ . On a le foncteur “fibre générique” suivant:

$$\mathfrak{R}(G; Y) \rightarrow \mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y), \pi \mapsto \pi_{\mathbb{K}} = \pi \otimes_{\mathfrak{Z}(G), \iota_Y} \mathbb{K}$$

Supposons de plus que  $Y$  est stable sous l'action de  $\mathbb{Z}$ , et soit  $\mathfrak{s}$  l'élément de  $\mathfrak{B}_1(G)$  tel que  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ . L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G)$  induit par passage au quotient une action sur  $\mathbb{C}[Y]$  qui se prolonge naturellement en une action sur  $\mathbb{K}$ . D'où une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G, \mathbb{K}) = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ , et sur l'ensemble des points  $\mathbb{K}$ -rationnels de  $\Theta(\mathfrak{s}, \overline{\mathbb{K}})$ . Puisque le morphisme  $\iota_Y : \mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{K}$

est (par construction)  $\mathbb{Z}$ -équivariant, le point  $y_Y$  est  $\mathbb{Z}$ -stable — i.e. il vérifie  $y_Y(1) = y_Y$  — si et seulement si  $\mathbb{Z}$  opère trivialement sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  la catégorie abélienne définie comme suit. Les objets de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  sont les  $\omega$ -représentations  $\mathbf{\Pi}$  de  $G^{\natural}$  telles que :

- $\mathbf{\Pi}^{\circ}$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$ ;
- il existe un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -module  $G^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  de  $V_{\mathbf{\Pi}}$ , qui est  $\mathbb{C}[Y]$ -admissible — i.e. qui est un  $(G, \mathbb{C}[Y])$ -module admissible — et engendre  $V_{\mathbf{\Pi}}$  sur  $\mathbb{K}$ .

Un tel  $\mathcal{V}$  est un  $G$ -module de type fini [BD, cor. 3.10] et définit un objet  $\mathbf{\Pi}$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$  tel que  $\mathbf{\Pi} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} = \mathbf{\Pi}^{\circ}$  : on a  $\mathbf{\Pi}^{\circ} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} = \mathbf{\Pi}^{\circ}$  et l'action de  $G^{\natural}$  sur  $V_{\mathbf{\Pi}}$  est donnée par

$$\mathbf{\Pi}(\delta)(v \otimes z) = \mathbf{\Pi}(\delta)(v) \otimes z(1), \quad \delta \in G^{\natural}, v \in \mathcal{V}, z \in \mathbb{K}.$$

Les flèches dans  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  sont des flèches dans  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  qui sont aussi des flèches dans  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K})$ , c'est-à-dire des morphismes de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Notons que si  $\mathbf{\Pi}$  est un objet de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , pour tout  $v \in V_{\mathbf{\Pi}}$ , tout  $z \in \mathbb{K}$  et tout  $\delta \in G^{\natural}$ , on a l'égalité

$$\mathbf{\Pi}(\delta)(z \cdot v) = z(1) \cdot \mathbf{\Pi}(\delta)(v).$$

Les objets de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  ne sont donc en général pas des  $(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K})$ -modules; ils le sont si l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $Y$  est triviale, c'est-à-dire si  $Y \subset \Theta_1(\mathfrak{s})$ .

On a aussi le foncteur “fibre générique” suivant :

$$\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y), \mathbf{\Pi} \mapsto \mathbf{\Pi}_{\mathbb{K}} = \mathbf{\Pi} \otimes_{\mathfrak{Z}(G), \iota_Y} \mathbb{K}.$$

Notons que si  $\mathbf{\Pi}_1 \xrightarrow{\mathfrak{u}} \mathbf{\Pi}_2$  est une flèche dans  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , et si (pour  $i = 1, 2$ )  $\mathcal{V}_i$  est un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -module  $G^{\natural}$ -stable de  $V_{\mathbf{\Pi}_i}$ , admissible comme  $(G, \mathbb{C}[Y])$ -module et qui engendre  $V_{\mathbf{\Pi}_i}$  sur  $\mathbb{K}$ , on n'a en général pas l'inclusion  $\mathbf{u}(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_2$ . En d'autres termes, pour deux objets  $\mathbf{\Pi}_1$  et  $\mathbf{\Pi}_2$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)}(\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)}(\mathbf{\Pi}_1 \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}, \mathbf{\Pi}_2 \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K})$$

n'est en général pas surjective (i.e. le foncteur “fibre générique” n'est pas plein).

Soit  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = \mathcal{C}(\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y))$  le groupe abélien libre de base les paires  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{\Pi}$  est un objet de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , et  $\mathbf{u}$  est un  $(G, \mathbb{K})$ -endomorphisme de  $\mathbf{\Pi}$ , quotienté par les relations définies comme en 6.8. On munit  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  d'une structure de  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K})$ -module comme en 6.12. Puisque  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}) = \mathfrak{Z}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ , cela munit en particulier  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Le foncteur “fibre générique” ci-dessus induit un morphisme de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

La proposition suivante généralise celle de [D, 5.5] :

**PROPOSITION.** — *Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\Theta(G)$ , et soit  $d = \dim(Y)$ . Le foncteur “fibre générique”*

$$\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$$

*induit un morphisme injectif de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules*

$$\overline{\mathbb{F}}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$$

*et un isomorphisme de  $\mathbb{C}(Y)$ -espaces vectoriels*

$$\overline{\mathbb{F}}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{C}(Y) \xrightarrow{\simeq} \tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{s}$  l'élément de  $\mathfrak{B}_1(G)$  tel que  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ . Choisissons un générateur projectif de type fini  $\pi_{\mathfrak{s}}$  de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$  et une  $\omega$ -représentation  $\Pi$  de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi^{\circ} = \pi_{\mathfrak{s}}$  comme en 6.15. Posons  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} = \text{End}_G(\pi_{\mathfrak{s}})^{\text{op}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s},\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \cdot \gamma$ , où  $\gamma$  est le  $\mathbb{C}$ -automorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$  donné par  $u \mapsto A \circ u \circ A^{-1}$ ,  $A = \Pi(\delta_1)$ . Posons aussi

$$\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}} \mathbb{C}[Y].$$

C'est une  $\mathbb{C}[Y]$ -algèbre, de type fini comme  $\mathbb{C}[Y]$ -module. L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $Y$  induit une action sur  $\mathbb{C}[Y]$ , qui coïncide avec celle déduite de l'action sur  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}$  par passage au quotient. On en déduit (cf. 6.15) que le  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_{\mathfrak{s}}$  de  $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$  induit un  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_Y$  de  $\mathcal{H}_Y$  vérifiant

$$\gamma_Y(u \otimes z) = \gamma_{\mathfrak{s}}(u) \otimes z(1), \quad u \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}}, z \in \mathbb{C}[Y].$$

Posons  $\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_Y \cdot \gamma_Y$ . Pour tout objet  $\sigma$  de  $\mathfrak{R}(G; Y)$ , on a

$$\text{Hom}_G(\pi_{\mathfrak{s}}, \sigma) = \text{Hom}_G(\pi_{\mathfrak{s}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}} \mathbb{C}[Y], \sigma),$$

par suite la représentation  $\pi_Y = \pi_{\mathfrak{s}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}} \mathbb{C}[Y]$  de  $G$  est un générateur projectif de la catégorie  $\mathfrak{R}(G; Y)$ , et  $\mathcal{H}_Y = \text{End}_G(\pi_Y)^{\text{op}}$ . L'espace  $r_{\pi_Y}(\sigma) = \text{Hom}_G(\pi_Y, \sigma)$  est muni d'une structure de  $\mathcal{H}_Y$ -module (à gauche) comme en 6.15, et puisque les  $G$ -modules  $\pi_Y$  et  $\sigma$  sont de type fini, ce  $\mathcal{H}_Y$ -module  $r_{\pi_Y}(\sigma)$  est lui aussi de type fini. L'isomorphisme  $A$  de  $\pi_{\mathfrak{s}}$  sur  $\pi_{\mathfrak{s}}(1)$  définit par passage aux quotients un isomorphisme  $A_Y$  de  $\pi_Y$  sur  $\pi_Y(1)$ , donc une  $\omega$ -représentation  $\Pi_Y$  de  $G^{\natural}$  telle que  $\Pi_Y^{\circ} = \pi_Y$  et  $\Pi_Y(\delta_1) = A_Y$ . Pour  $u \in \mathcal{H}_Y$ , on a  $\gamma_Y(u) = A_Y \circ u \circ A_Y^{-1}$ . Pour tout objet  $\Sigma$  de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , on note  $r_{\Pi_Y}(\Sigma)$  l'espace  $r_{\pi_Y}(\Sigma^{\circ})$  muni de la structure de  $\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}$ -module non dégénéré définie comme en 6.15. D'où un foncteur

$$r_{\Pi_Y} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}),$$

où  $\text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$  formée des  $\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}$ -modules qui sont de type fini comme  $\mathcal{H}_Y$ -modules (i.e. comme  $\mathbb{C}[Y]$ -modules). Notons que pour  $Y = \Theta(\mathfrak{s})$ , la catégorie  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega)$  formée des objets qui sont de type fini comme  $G$ -modules, et le foncteur  $r_{\Pi_Y}$  défini ci-dessus — qu'il conviendrait de noter  $r_{\Pi_Y}^*$  pour éviter toute confusion — n'est autre que la restriction du foncteur  $r_{\Pi_{\mathfrak{s}}}$  défini en 6.15. Revenons au cas général ( $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ ). D'après 6.15, le foncteur  $r_{\Pi_Y}$  est une équivalence de catégories. En effet, pour un objet  $W$  de  $\text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$ , notons  $i_{\Pi_Y}(W)$  l'objet de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$  défini par

$$i_{\Pi_Y}(W) = V_{\Pi_Y} \otimes_{\mathcal{H}_Y} W,$$

où l'action de  $G^{\natural}$  sur  $i_{\Pi_Y}(W)$  est donnée par

$$\delta \cdot (v \otimes w) = \Pi_Y(\delta)(v) \otimes \gamma_Y \cdot w, \quad \delta \in G^{\natural}, v \in V_{\Pi_Y}, w \in W.$$

D'où un foncteur

$$i_{\Pi_Y} : \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

Comme dans loc. cit., on montre que le foncteur  $r_{\Pi_Y}$  est adjoint à droite du foncteur  $i_{\Pi_Y}$ , et que les foncteurs  $r_{\Pi_Y}$  et  $i_{\Pi_Y}$  sont quasi-inverses l'un de l'autre. En particulier, le foncteur  $r_{\Pi_Y}$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}).$$

Pour chaque entier  $i \geq 0$ , on définit comme en 6.12 la sous-catégorie pleine  $\text{Mod}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}; i)$  de  $\text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$ . Cela fait de  $r_{\Pi_Y}$  un foncteur filtré. Il induit, pour  $i \geq 0$ , une équivalence de catégories

$$r_{\Pi_Y, i} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y; i) \xrightarrow{\simeq} \text{Mod}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}; i)$$

et un isomorphisme de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$\bar{F}^i \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) \xrightarrow{\cong} \bar{F}^i \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural).$$

Soit  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  — une  $\mathbb{K}$ -algèbre, de dimension finie comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Le  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_Y$  de  $\mathcal{H}_Y$  se prolonge en un  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_{\mathbb{K}}$  de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ , vérifiant

$$\gamma_{\mathbb{K}}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{z}) = \gamma_Y(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{z}(1), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{H}_Y, \mathbf{z} \in \mathbb{K}.$$

Posons  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural = \mathcal{H}_{\mathbb{K}} \cdot \gamma_{\mathbb{K}}$ . Pour tout objet  $\sigma$  de  $\mathfrak{R}(G; Y)$ , on a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi_Y, \sigma) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} = \mathrm{Hom}_G(\pi_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}, \sigma \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}).$$

On en déduit que la représentation  $\pi_{Y, \mathbb{K}} = \pi_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  de  $G$  est un générateur projectif de la catégorie  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$ , et que  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \mathrm{End}_G(\pi_{Y, \mathbb{K}})^{\mathrm{op}}$ . Pour un objet  $\Sigma$  de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^\natural, \omega; Y)$ , l'espace  $\mathbf{W} = \mathrm{Hom}_G(\pi_{Y, \mathbb{K}}, \Sigma^\circ)$  est muni de la structure de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural$ -module non dégénéré définie comme suit: on choisit un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -module  $G^\natural$ -stable  $\mathcal{X}$  de  $V_\Sigma$ , de type fini comme  $G$ -module et qui engendre  $V_\Sigma$  sur  $\mathbb{K}$ . Cet espace  $\mathcal{X}$  définit un objet  $\Sigma$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y)$ , et un objet  $W = r_{\Pi_Y}(\Sigma)$  de  $\mathrm{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural)$ . Notant  $W^\circ = r_{\pi_Y}(\Sigma^\circ)$  le  $\mathcal{H}_Y$ -module sous-jacent à  $W$ , on a (par construction)  $\mathbf{W} = W^\circ \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ . Pour  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$  de la forme  $\mathbf{w} = w \otimes \mathbf{z}$ ,  $w \in W$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{K}$ , on pose (cf. 6.15)

$$\gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{w}) = \gamma_W(w) \otimes \mathbf{z}(1);$$

pour  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}$  de la forme  $\mathbf{u} = u \otimes \mathbf{z}'$ ,  $u \in \mathcal{H}_Y$ ,  $\mathbf{z}' \in \mathbb{K}$ , on a bien

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \gamma_W(u \cdot w) \otimes (\mathbf{z}' \mathbf{z})(1) \\ &= \gamma_Y(u) \cdot \gamma_W(w) \otimes \mathbf{z}'(1) \mathbf{z}(1) = \gamma_{\mathbb{K}}(\mathbf{u}) \cdot \gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

On définit  $\gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{w})$  pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$  par linéarité, et l'égalité

$$\gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \gamma_{\mathbb{K}}(\mathbf{u}) \cdot \gamma_{\mathbb{K}, \mathbf{w}}(\mathbf{w})$$

est vraie pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}}$  et tout  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ . La structure de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural$ -module sur  $\mathbf{W}$  ainsi définie ne dépend pas du choix de l'espace  $\mathcal{X} \subset V_\Sigma$ . L'espace  $\mathbf{W}$  muni de cette structure de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural$ -module (non dégénéré), est noté  $\tilde{r}_{\Pi_Y}(\Sigma)$ . D'où un foncteur

$$\tilde{r}_{\Pi_Y} : \tilde{\mathfrak{R}}(G^\natural, \omega; Y) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural),$$

où  $\widetilde{\mathrm{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural)$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural)$  formé des  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural$ -modules qui sont de type fini comme  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ -modules (i.e. de dimension finie comme  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels) et qui contiennent un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau<sup>(4)</sup>  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural$ -stable. Les objets de  $\widetilde{\mathrm{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural)$  sont en particulier des  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ -modules de longueur finie. Ce foncteur  $\tilde{r}_{\Pi_Y}$  est une équivalence de catégorie. En effet, pour un objet  $\mathbf{W}$  de  $\widetilde{\mathrm{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural)$ , l'espace  $\mathbf{V} = V_{\Pi_Y} \otimes_{\mathcal{H}_Y} \mathbf{W}$  est muni d'une structure de  $(G^\natural, \omega)$ -module définie comme suit. On choisit un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural$ -stable  $W$  dans  $\mathbf{W}$ . Ce réseau  $W$  est un objet de  $\mathrm{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural)$ . Il définit donc un objet  $\Sigma = i_{\Pi_Y}(W)$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y)$ . L'espace  $V_\Sigma = V_{\Pi_Y} \otimes_{\mathcal{H}_Y} W$  de  $\Sigma$  est un sous-espace de  $\mathbf{V}$  qui engendre  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbb{K}$ : on a (par construction)  $\mathbf{V} = V_\Sigma \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ . On munit  $\mathbf{V}$  de l'action de  $G^\natural$  donnée par

$$\delta \cdot (v \otimes \mathbf{z}) = \Sigma(\delta)(v) \otimes \mathbf{z}(1), \quad \delta \in G^\natural, v \in V_\Sigma, \mathbf{z} \in \mathbb{K}.$$

4. Rappelons que si  $A$  est un anneau commutatif noethérien intègre de corps des fractions  $K$ , et si  $V$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on appelle  $A$ -réseau dans  $V$  un sous- $A$ -module de  $V$  contenant une  $K$ -base de  $V$  et contenu dans un sous- $A$ -module de type fini de  $V$ . Un sous- $A$ -module  $\mathcal{V}$  de  $V$  est un  $A$ -réseau dans  $V$  si et seulement s'il existe deux sous- $A$ -modules libres  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  de  $V$  de rang  $n$  tels que  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_2$ .

Cela définit une  $\omega$ -représentation de  $G^{\natural}$  d'espace  $\mathbf{V}$  — en fait un objet de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  —, qui ne dépend pas du choix du  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}$ -stable  $W$  dans  $\mathbf{W}$ ; on la note  $\tilde{i}_{\Pi_Y}(\mathbf{W})$ . D'où un foncteur

$$\tilde{i}_{\Pi_Y} : \widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}) \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

Notons que l'on a implicitement défini des foncteurs

$$\begin{aligned} r_{\pi_{Y, \mathbb{K}}} : \mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y) &\rightarrow \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}), \\ i_{\pi_{Y, \mathbb{K}}} : \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}) &\rightarrow \mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y). \end{aligned}$$

Comme dans loc. cit., on montre que le foncteur  $\tilde{r}_{\Pi_Y}$  est adjoint à droite du foncteur  $\tilde{i}_{\Pi_Y}$ , et que les foncteurs  $\tilde{r}_{\Pi_Y}$  et  $\tilde{i}_{\Pi_Y}$  sont quasi-inverses l'un de l'autre — on commence par vérifier que le foncteur  $r_{\pi_{Y, \mathbb{K}}}$  est adjoint à droite du foncteur  $r_{\pi_{Y, \mathbb{K}}}$ , et que les foncteurs  $r_{\pi_{Y, \mathbb{K}}}$  et  $i_{\pi_{Y, \mathbb{K}}}$  sont quasi-inverses l'un de l'autre (lemme 1 de 6.15), puis on en déduit par restriction le résultat pour  $\tilde{r}_{\Pi_Y}$  et  $\tilde{i}_{\Pi_Y}$  (lemme 2 de 6.15).

Posons  $\mathcal{A} = \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural})$  — rappelons que puisque la  $\mathbb{C}[Y]$ -algèbre  $\mathcal{H}_Y$  est un  $\mathbb{C}[Y]$ -module de type fini, les objets de  $\mathcal{A}$  sont en particulier des  $\mathbb{C}[Y]$ -modules de type fini — et notons  $\mathcal{A}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets qui sont des  $\mathbb{C}[Y]$ -modules de torsion. On a donc

$$\mathcal{A} = \text{Mod}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}; d), \quad \mathcal{A}' = \text{Mod}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}; d-1).$$

Posons  $\tilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural})$ . Via les équivalences de catégories

$$r_{\Pi_Y} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, \quad \tilde{r}_{\Pi_Y} : \tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{A}},$$

le foncteur “fibre générique” de l'énoncé est donné par

$$- \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}.$$

On note  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$  et  $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}})$  les groupes définis comme en 6.4. Les deux premiers sont munis d'une structure de  $\mathbb{C}[Y]$ -module, et le troisième est muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**LEMME.** — *Le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  induit la suite exacte de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules*

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}}).$$

Ce lemme — qui sera démontré en 6.18 et 6.19 — implique la première assertion de l'énoncé de la proposition et l'injectivité dans la seconde assertion. Quant à la surjectivité dans la seconde assertion, soit  $\mathbf{V}$  un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , et soit  $V$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}$ -stable dans  $\mathbf{V}$ . Alors  $V$  est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathbf{V} = V \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ , et l'on a

$$\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}}(\mathbf{V}) = \text{End}_{\mathcal{H}_Y}(V) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}.$$

D'où la surjectivité dans la seconde assertion de l'énoncé. Cela achève la démonstration de la proposition.  $\square$

**REMARQUE.** — Supposons que la variété  $Y$  n'est pas contenue dans  $\Theta_1(G)$ . Supposons aussi que tout  $\mathcal{H}_Y$ -module de type fini possède une résolution projective bornée de type fini, et que  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}$  vérifie la propriété  $\mathbf{P}_2$  de 6.4. Alors on a  $\overline{\mathbf{F}}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) = 0$ ,  $d = \dim(Y)$ . En effet, posons  $A = \mathcal{H}_Y$ ,  $A^{\natural} = \mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}$  et  $\gamma = \gamma_Y$ . Rappelons que  $\mathfrak{J}_Z$  est l'idéal ( $\gamma$ -stable) de  $Z(A) = \mathbb{C}[Y]$  engendré par les  $\gamma^{-1}(z) - z$ ,  $z \in Z(A)$ , et que  $\overline{Z}_{A^{\natural}}$  est l'anneau quotient  $Z(A)/\mathfrak{J}_Z$ . D'après le lemme 2 de 6.4, l'application

$$\mathcal{C}(A^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}'(A^{\natural}), [\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]'$$

est un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules. D'après 6.5, on en déduit que pour toute paire  $(V, u)$  formée d'un  $A^\natural$ -module non dégénéré  $V$ , de type fini comme  $A$ -module, on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(A^\natural) (= \mathcal{C}(A))$

$$[V, u] = [V \otimes_{Z(A)} \overline{Z}_{A^\natural}, u \otimes_{Z(A)} \text{id}].$$

Soit  $(V, u)$  une telle paire, et posons  $(V_1, u_1) = (V \otimes_{Z(A)} \overline{Z}_{A^\natural}, u \otimes_{Z(A)} \text{id})$ . Puisque  $Y$  n'est pas contenu dans  $\Theta_1(G)$ , l'action de  $\gamma$  sur  $\mathbb{C}[Y]$  est non triviale, et  $\mathcal{J}_Z \neq 0$ . Comme  $\mathcal{J}_Z$  est contenu dans l'annulateur de  $V_1$  dans  $\mathbb{C}[Y]$ , le support du faisceau cohérent associé au  $\mathbb{C}[Y]$ -module (de type fini)  $V_1$  est contenu dans la sous-variété fermée de  $Y$  associée au radical  $\sqrt{\mathcal{J}_Z}$  de  $\mathcal{J}_Z$  dans  $\mathbb{C}[Y]$ , c'est-à-dire  $Y_1 = Y \cap \Theta_1(G)$ . Or puisque  $\dim(Y_1) < d$ , l'image de  $[V_1, u_1]$  dans  $\overline{\mathbb{F}}^d \mathcal{C}(A^\natural) = \mathcal{C}(A)/\text{Im}(\mathcal{C}(A') \rightarrow \mathcal{C}(A))$  est nulle. D'où le résultat.

En général (c'est-à-dire sans la propriété  $\mathbf{P}_2$ ) on sait d'après [D, Lemma 6.4] qu'il existe un morphisme étale de variétés algébriques affines  $\phi : Y' \rightarrow Y$  tel que  $Y'$  est lisse et l'algèbre  $\mathcal{H}_{Y'} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y], \phi^\sharp} \mathbb{C}[Y']$  est localement libre comme  $\mathbb{C}[Y']$ -module. En choisissant  $\phi$  de manière à ce que  $\gamma_Y$  se relève en un automorphisme  $\gamma_{Y'}$  de  $\mathcal{H}_{Y'}$ , si  $Y \not\subset \Theta_1(G)$ , on doit pouvoir obtenir l'égalité  $\overline{\mathbb{F}}^d \mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = 0$  par descente. On doit pouvoir aussi l'obtenir directement, sans hypothèse supplémentaire sur  $\mathcal{H}_Y$  ou  $\mathcal{H}_{Y', \omega}$ . Nous n'essaierons pas de le faire ici, puisque nous verrons en 6.20 que c'est une conséquence de la proposition: si  $Y \not\subset \Theta_1(G)$ , alors on a l'égalité  $\tilde{\mathcal{C}}(G^\natural, \omega; Y) = 0$ . ■

**6.18. Démonstration du lemme de 6.17.** — On reprend, en l'adaptant à notre propos, la méthode de [D, appendix A]. Posons  $A = \mathcal{H}_Y$ ,  $A^\natural = \mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural$  et  $\gamma = \gamma_Y$ . On a  $Z(A) = \mathbb{C}[Y]$ . Soit  $\mathcal{B}$  la catégorie abélienne définie comme suit (les notations sont celles de 6.1–6.4):

- $\text{Ob}(\mathcal{B})$  est l'ensemble des paires  $(V, u)$  telles que  $V$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , i.e. un  $A^\natural$ -module de type fini comme  $A$ -module, et  $u$  est un élément de  $\text{End}_A(V)$ ;
- pour  $(V, u), (V', u') \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}((V, u), (V', u'))$  est l'ensemble des morphismes de  $A^\natural$ -modules  $f : V \rightarrow V'$  tels que  $f \circ u = u' \circ f$ .

Pour  $V \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , on note  $\overline{\text{End}}_A(V)$  le  $Z(A)$ -module (en fait un  $\overline{Z}_{A^\natural}$ -module) quotient de  $\text{End}_A(V)$  par le sous-groupe engendré par les  $\tilde{u} \circ u' - u' \circ u$ ,  $u, u' \in \text{End}_A(V)$ ,  $\tilde{u} = \gamma_V \circ u \circ \gamma_V^{-1}$ . Notons que l'application  $u \mapsto u \circ \gamma_V^{-1}$  induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\overline{\text{End}}_A(V) \xrightarrow{\simeq} \overline{\text{Hom}}_A(V, V^\natural), \quad V^\natural = A^\natural \otimes_A V (\simeq V_{\gamma_Y}).$$

Pour  $V, V' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  et  $f \in \text{Isom}_{\mathcal{A}}(V, V') = \text{Isom}_{A^\natural}(V, V')$ , l'application

$$\text{End}_A(V) \rightarrow \text{End}_A(V'), \quad u \mapsto f(u) = f \circ u \circ f^{-1}$$

induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $\overline{\text{End}}_A(V)$  sur  $\overline{\text{End}}_A(V')$ . On peut donc poser

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \bigoplus_V \overline{\text{End}}_A(V)$$

où  $V$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  le groupe abélien libre de base l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{B}$ , et  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  le groupe de Grothendieck de  $\mathcal{B}$  (i.e. le groupe abélien libre de base l'ensemble  $\text{Ob}(\mathcal{B})$  quotienté par les relations données par les suites exactes dans  $\mathcal{B}$ ). On a des applications naturelles

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B}), \quad \mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}),$$

(la première est induite par l'identité  $(V, u) \mapsto (V, u)$ , la seconde est induite par l'application qui à  $(V, u)$  associe l'image  $\bar{u}$  de  $u$  dans  $\overline{\text{End}}_A(V)$  en l'indice  $V$ ) et

$$\mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}), \quad \mathcal{E}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

(la première est induite par l'identité  $(V, u) \mapsto (V, u)$ , la seconde est induite par linéarité par l'application qui à  $u \in \text{End}_A(V)$  associe  $(V, u)$ ). Ces applications sont bien définies (i.e. elles passent aux quotients), en particulier la troisième  $\mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ , puisque la relation sur les suites exactes dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  est plus forte que celle dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ . D'où une application

$$\eta : \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$$

donnée par la propriété universelle du coproduit fibré:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B}) \\ & \searrow & \downarrow \eta \\ & & \mathcal{C}(\mathcal{A}) \end{array}$$

Notons que  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B})$  n'est autre que le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{B})/\mathcal{F}(\mathcal{B})$  où  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  est plongé diagonalement dans  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{B})$ , et que  $\eta$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules.

Pour  $(V, u) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  et  $z \in Z(\mathcal{A})$ , on a posé  $z \cdot (V, u) = (V, z_V \circ u)$ . Cela munit les  $\mathbb{Z}$ -modules  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  d'une structure de  $Z(\mathcal{A})$ -module. Les quatre applications naturelles ci-dessus sont des morphismes de  $Z(\mathcal{A})$ -modules, par conséquent le coproduit fibré est muni d'une structure de  $Z(\mathcal{A})$ -module, et  $\eta$  est un morphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules.

**LEMME 1.** — *L'application  $\eta$  est un isomorphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules.*

*Démonstration.* — Le morphisme  $\eta$  est par définition surjectif. Montrons qu'il est injectif. Soit  $\overline{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$  le groupe abélien libre de base l'ensemble  $\text{Ob}(\mathcal{B})$  quotienté par les relations:

$$- (V, u) = (V_1, u_1) + (V_2, u_2) \text{ pour toute suite exacte courte dans } \mathcal{B}$$

$$0 \rightarrow (V_1, u_1) \rightarrow (V, u) \rightarrow (V_2, u_2) \rightarrow 0;$$

$$- (V, u) + (V, u') = (V, u + u') \text{ pour tout } V \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \text{ et tous } u, u' \in \text{End}_A(V).$$

C'est un quotient de  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  et il s'agit de montrer que dans  $\overline{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ , le sous-groupe engendré par les  $(V, u' \circ u) - (V', \tilde{u} \circ u')$ ,  $V, V' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $u \in \text{Hom}_A(V, V')$ ,  $u' \in \text{Hom}_A(V', V)$ , coïncide avec celui engendré par les  $(V, u' \circ u) - (V, \tilde{u} \circ u')$ ,  $V \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $u, u' \in \text{End}_A(V)$ . Le second est clairement contenu dans le premier. Montrons l'inclusion inverse. Soit  $V, V' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $u \in \text{Hom}_A(V, V')$  et  $u' \in \text{Hom}_A(V', V)$ . Notons  $W \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  le  $A^{\natural}$ -module  $V \times V'$ , et notons  $\varphi, \varphi' \in \text{End}_A(V)$  les morphismes donnés par  $(v \in V, v' \in V')$

$$\varphi(v, v') = (0, u(v)), \quad \varphi'(v, v') = (u'(v'), 0).$$

On a donc  $\varphi' \circ \varphi = (u' \circ u) \times 0_{V'}$  et  $\tilde{\varphi} \circ \varphi' = 0_V \times (\tilde{u} \circ u)$ . Dans  $\overline{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ , on a

$$(W, \varphi' \circ \varphi) = (V, u' \circ u) + (V', 0_{V'}) = (V, u' \circ u)$$

et

$$(W, \tilde{\varphi} \circ \varphi') = (V, 0_V) + (V', \tilde{u} \circ u') = (V', \tilde{u} \circ u'),$$

d'où l'inclusion cherchée.  $\square$

Soit  $\mathcal{B}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  formée des paires  $(V, u)$  telles que  $V$  est un objet de  $\mathcal{A}'$ , c'est-à-dire un  $A^{\natural}$ -module de  $\mathbb{C}[Y]$ -torsion — rappelons que  $Z(A) = \mathbb{C}[Y]$ . C'est une sous-catégorie épaisse [G, ch. III]: pour toute suite exacte courte dans  $\mathcal{B}$

$$0 \rightarrow (V_1, u_1) \rightarrow (V, u) \rightarrow (V_2, u_2) \rightarrow 0,$$

$(V, u)$  est un objet de  $\mathcal{B}'$  si et seulement si  $(V_1, u_1)$  et  $(V_2, u_2)$  sont des objets de  $\mathcal{B}'$ . On peut donc former la catégorie quotient  $\mathcal{B}/\mathcal{B}'$  (loc. cit.). C'est une catégorie abélienne, et le foncteur canonique  $q : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{B}'$  est exact (loc. cit., prop. 1). En remplaçant  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}'$  dans la construction précédente, on obtient comme dans le lemme 1 un isomorphisme de  $Z(A)$ -modules

$$\eta' : \mathcal{E}(\mathcal{A}') \prod_{\mathcal{F}(\mathcal{B}')} \mathcal{K}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}'), \quad \mathcal{E}(\mathcal{A}') = \bigoplus_{V'} \overline{\text{End}}_A(V'),$$

où  $V'$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{A}'$ . Notons que  $\mathcal{E}(\mathcal{A}')$  est un sous- $Z(A)$ -module de  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ .

Posons  $\tilde{A} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ ,  $\tilde{A}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}$  et  $\tilde{\gamma} = \gamma_{\mathbb{K}}$ . On a  $Z(\tilde{A}) = \mathbb{K}$ . En remplaçant  $A$ ,  $A^{\natural}$ ,  $\gamma$ ,  $\mathcal{A}$  par  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}^{\natural}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$ , on définit comme plus haut une catégorie abélienne  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Les objets de  $\tilde{\mathcal{B}}$  sont les paires  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{V}$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$  — c'est-à-dire un  $\tilde{A}^{\natural}$ -module non dégénéré, de type fini comme  $\tilde{A}$ -module, tel qu'il existe un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $\tilde{\gamma}$ -stable dans  $\mathbf{V}$  — et  $\mathbf{u}$  est un élément de  $\text{End}_{\tilde{A}}(\mathbf{V})$ ; on ne demande pas que le  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau dans  $\mathbf{V}$  soit stable par  $\mathbf{u}$ . On obtient comme dans le lemme 1 un isomorphisme de  $Z(\tilde{A})$ -modules

$$\tilde{\eta} : \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \prod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}}), \quad \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{\mathbf{V}} \overline{\text{End}}_{\tilde{A}}(\mathbf{V}),$$

où  $\mathbf{V}$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**LEMME 2.** — *Le foncteur “fibre générique”  $t = - \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  induit par passage au quotient un foncteur pleinement fidèle*

$$t : \mathcal{B}/\mathcal{B}' \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$$

*d'image essentielle la sous-catégorie pleine de  $\tilde{\mathcal{B}}$ , disons  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , formée des paires  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  — où  $\mathbf{V}$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $\mathbf{u}$  est un  $\tilde{A}$ -endomorphisme de  $\mathbf{V}$  — telles qu'il existe un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $\tilde{A}^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  vérifiant  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .*

*Démonstration.* — D'après [G, ch. III, cor. 2], la catégorie  $\mathcal{B}/\mathcal{B}'$  est solution d'un problème universel: si  $t$  est un foncteur exact de  $\mathcal{B}$  dans une catégorie abélienne  $\mathcal{D}$  tel que  $t$  est nul sur tous les objets de  $\mathcal{B}'$ , alors il existe un unique foncteur  $\bar{t} : \mathcal{B}/\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $t = \bar{t} \circ q$ . En appliquant cela à la catégorie  $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{B}}$  et au foncteur  $t = - \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ , on obtient le foncteur  $t = \bar{t} : \mathcal{B}/\mathcal{B}' \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  de l'énoncé.

Rappelons que  $\text{Ob}(\mathcal{B}/\mathcal{B}') = \text{Ob}(\mathcal{B})$  et que pour deux objets  $X_1 = (V_1, u_1)$ ,  $X_2 = (V_2, u_2)$  de  $\mathcal{B}$ , on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}/\mathcal{B}'}(X_1, X_2) = \varinjlim_{Y_1, Y_2} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, X_2/Y_2)$$

où  $Y_1$  et  $Y_2$  parcourent les sous-objets respectivement de  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $X/Y_1$  et  $Y_2$  sont des objets de  $\mathcal{B}'$ . Pour  $Y_1 \subset Z_1 \subset X_1$  et  $Z_2 \subset Y_2 \subset X_2$ , les objets  $X_1/Y_1'$  et  $Y_2'$  sont dans  $\mathcal{B}'$  et le morphisme de transition

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(Z_1, X_2/Z_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, X_2/Y_2)$$

est l'application naturelle (restriction et passage au quotient) — un morphisme de  $Z(A)$ -modules. Pour  $Y_1$  et  $Y_2$  comme ci-dessus, on a  $t(Y_1) = t(X_1)$  et  $t(X_2/Y_2) = t(X_2)$ , par suite le foncteur  $t$  induit un morphisme

$$t_{Y_1}^{X_2/Y_2} : \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, X_2/Y_2) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(t(X_1), t(X_2)).$$

Pour  $Z_1$  et  $Z_2$  comme ci-dessus, les morphismes  $t_{Z_1}^{X_2/Z_2}$  et  $t_{Y_1}^{X_2/Y_2}$  commutent au morphisme de transition  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(Z_1, X_2/Z_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, X_2/Y_2)$ . La propriété universelle de la limite inductive donne donc une application

$$t_{X_1}^{X_2} : \text{Hom}_{\mathcal{B}/\mathcal{B}'}(X_1, X_2) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(t(X_1), t(X_2)),$$

qui est un morphisme de  $Z(A)$ -modules.

Montrons que le morphisme  $t_{X_1}^{X_2}$  est un isomorphisme. Pour  $i = 1, 2$ , le sous-module de  $\mathbb{C}[Y]$ -torsion  $V_i'$  de  $V_i$  est  $A^{\natural}$ -stable, et l'on identifie  $\mathcal{V}_i = V_i/V_i'$  à un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable dans  $V_{i,\mathbb{K}} = V_i \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ . Soit  $\mathbf{f} \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(t(X_1), t(X_2))$ . Par définition,  $\mathbf{f}$  est un morphisme de  $\tilde{A}^{\natural}$ -modules  $V_{1,\mathbb{K}} \rightarrow V_{2,\mathbb{K}}$  tel que  $\mathbf{f}^{\circ} \circ u_{1,\mathbb{K}} = u_{2,\mathbb{K}} \circ \mathbf{f}^{\circ}$ , où l'on a posé  $u_{i,\mathbb{K}} = u_i \otimes \text{id}_{\mathbb{K}}$  — on a donc  $t(X_i) = (V_{i,\mathbb{K}}, u_{i,\mathbb{K}})$ . L'image réciproque

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_2) = \{\mathbf{v}_1 \in V_{1,\mathbb{K}} : \mathbf{f}(\mathbf{v}_1) \in \mathcal{V}_2\}$$

est un sous- $A^{\natural}$ -module de  $t(V_1)$ , et

$$W_1 = \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_1$$

est un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable de  $\mathcal{V}_1$  dans  $V_{1,\mathbb{K}}$ , tel que  $\mathbf{f}(W_1) \subset \mathcal{V}_2$ . Notons  $W_1$  l'image réciproque de  $W_1$  par la projection canonique  $V_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ . C'est un sous- $A^{\natural}$ -module de  $V_1$  tel que le  $A^{\natural}$ -module quotient  $V_1/W_1$  est de  $\mathbb{C}[Y]$ -torsion. De plus, puisque  $\mathbf{f}^{\circ}$  commute aux  $u_{i,\mathbb{K}}$ , on a  $u_1(W_1) \subset W_1$ . Par conséquent  $Y_1 = (W_1, u_1|_{W_1})$  est un sous-objet de  $X_1$  tel que  $X_1/Y_1$  appartient à  $\text{Ob}(\mathcal{B}')$ . D'autre part, on a  $u_2(V_2') \subset V_2'$ , et  $Y_2 = (V_2', u_2|_{V_2'})$  est un sous-objet de  $X_2$  qui appartient à  $\text{Ob}(\mathcal{B}')$ . La composition des morphismes

$$W_1 \rightarrow W_1 \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathcal{V}_2 = V_2/V_2'$$

est un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y_1, X_2/Y_2)$ . On note  $\mathbf{s}_{X_1}^{X_2}(\mathbf{f})$  son image dans  $\text{Hom}_{\mathcal{B}/\mathcal{B}'}(X_1, X_2)$ . L'application

$$\mathbf{s}_{X_1}^{X_2} : \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(t(X_1), t(X_2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}/\mathcal{B}'}(X_1, X_2)$$

ainsi définie est l'inverse de  $t_{X_1}^{X_2}$ .

On a montré que le foncteur  $\mathbf{t}$  est pleinement fidèle. Quant à la description de son image essentielle  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , pour  $X = (V, u) \in \text{Ob}(\mathcal{B}/\mathcal{B}') (= \text{Ob}(\mathcal{B}))$ , on a  $\mathbf{t}(X) = (V_{\mathbb{K}}, u_{\mathbb{K}})$  et l'image  $\mathcal{V}$  de  $V$  dans  $V_{\mathbb{K}}$  est un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable dans  $V_{\mathbb{K}}$  tel que  $u_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .  $\square$

**REMARQUE 1.** — D'après [G, ch. III, prop. 4],  $\mathcal{B}'$  est une sous-catégorie *localisante* de  $\mathcal{B}$ : pour tout objet  $(V, u)$  de  $\mathcal{B}$ , le sous-module de  $\mathbb{C}[Y]$ -torsion  $V'$  de  $V$  est  $A^{\natural}$ -stable, et  $(V', u|_{V'})$  est maximal parmi les sous-objets de  $(V, u)$  appartenant à  $\text{Ob}(\mathcal{B}')$ .  $\blacksquare$

**REMARQUE 2.** — La catégorie  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  est *épaisse* dans  $\tilde{\mathcal{B}}$ . En effet soit

$$0 \longrightarrow (\mathbf{V}_1, \mathbf{u}_1) \xrightarrow{\mathbf{f}} (\mathbf{V}, \mathbf{u}) \xrightarrow{\mathbf{h}} (\mathbf{V}_2, \mathbf{u}_2) \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Si  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , alors il en est de même de  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{u}_1)$  et  $(\mathbf{V}_2, \mathbf{u}_2)$ . Réciproquement, supposons que  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{u}_1)$  et  $(\mathbf{V}_2, \mathbf{u}_2)$  sont des objets de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ . Pour  $i = 1, 2$ , soit  $\mathcal{V}_i$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable dans  $V_i$  tel que  $\mathbf{u}_i(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i$ . Posons

$$\mathcal{V} = \bigcap_{\mathcal{V}' \supset \mathbf{f}(\mathcal{V}_1), \mathbf{h}(\mathcal{V}') \supset \mathcal{V}_2} \mathcal{V}'$$

où  $\mathcal{V}'$  parcourt les  $\mathbb{C}[Y]$ –réseaux  $A$ –stables dans  $\mathbf{V}$ . Notons  $\mathcal{E}$  l’ensemble des  $\mathcal{V}'$  contribuant à l’intersection ci-dessus. Puisque chaque  $\mathcal{V}' \in \mathcal{E}$  est un  $A$ –module de type fini,  $\mathcal{V}$  est encore un  $A$ –module de type fini, et comme  $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  contient  $\mathbf{f}(\mathbf{V}_1)$  et  $\mathbf{h}(\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K})$  contient  $\mathbf{V}_2$ , le  $A$ –module  $\mathcal{V}$  engendre  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbb{K}$ . C’est donc un  $\mathbb{C}[Y]$ –réseau dans  $\mathbf{V}$ . Pour chaque  $\mathcal{V}' \in \mathcal{E}$ , on a  $\gamma_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}') \in \mathcal{E}$  et  $\mathbf{u}(\mathcal{V}') \in \mathcal{E}$ . Par conséquent  $\gamma_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$  — i.e.  $\mathcal{V}$  est  $A^{\natural}$ –stable — et  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ . Donc  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ . ■

Le lemme suivant est la “suite exacte de localisation” standard (implicitement contenue dans [G, ch. III]):

**LEMME 3.** — *Le foncteur “fibre générique”  $t = - \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  induit la suite exacte longue de  $Z(A)$ –modules*

$$\mathcal{K}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Comme le foncteur  $t : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  est exact d’image essentielle  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , il induit un morphisme de groupes surjectif  $\lambda : \mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$ . C’est un morphisme de  $Z(A)$ –modules, et l’image de  $\mathcal{K}(\mathcal{B}')$  dans  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  par l’application naturelle est contenue dans  $\ker \lambda$ . Posons

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B}) = \mathcal{K}(\mathcal{B}) / \text{Im}(\mathcal{K}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})).$$

Pour un objet  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , on choisit un  $\mathbb{C}[Y]$ –réseau  $A^{\natural}$ –stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ , et l’on note  $\mu(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  l’image de  $(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}})$  dans  $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ . Elle est bien définie: si  $\mathcal{V}'$  est un autre  $\mathbb{C}[Y]$ –réseau  $A^{\natural}$ –stable dans  $\mathbf{V}$ , alors  $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$  est encore un  $\mathbb{C}[Y]$ –réseau  $A^{\natural}$ –stable dans  $\mathbf{V}$ , et l’on a la suite exacte courte dans  $\mathcal{B}$

$$0 \rightarrow (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}', \mathbf{u}|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'}) \rightarrow (\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}) \rightarrow (\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{V}', \bar{\mathbf{u}}) \rightarrow 0;$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  est le  $A$ –endomorphisme de  $\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$  déduit de  $\mathbf{u}$  par restriction et passage au quotient. Puisque le  $A^{\natural}$ –module  $\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$  est de  $\mathbb{C}[Y]$ –torsion, on a  $t(\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{V}', \bar{\mathbf{u}}) = 0$ . Comme le foncteur  $t$  est exact, on en déduit l’égalité

$$t(\mathcal{V} \cap \mathcal{V}', \mathbf{u}|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'}) = t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}).$$

En remplaçant  $\mathcal{V}$  par  $\mathcal{V}'$  dans le raisonnement ci-dessus, on obtient l’égalité

$$t(\mathcal{V}', \mathbf{u}|_{\mathcal{V}'}) = t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}).$$

Soit maintenant une suite exacte courte dans  $\tilde{\mathcal{B}}^*$

$$0 \rightarrow (\mathbf{V}_1, \mathbf{u}_1) \rightarrow (\mathbf{V}_2, \mathbf{u}_2) \rightarrow (\mathbf{V}_3, \mathbf{u}_3) \rightarrow 0.$$

D’après [G, ch. III, cor. 1], il existe une suite exacte courte dans  $\mathcal{B}$

$$0 \rightarrow (V_1, u_1) \rightarrow (V_2, u_2) \rightarrow (V_3, u_3) \rightarrow 0$$

et des isomorphismes  $(\mathbf{V}_i, \mathbf{u}_i) \rightarrow t(V_i, u_i) = (V_{i, \mathbb{K}}, u_{i, \mathbb{K}})$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  pour  $i = 1, 2, 3$ , tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (\mathbf{V}_1, \mathbf{u}_1) & \rightarrow & (\mathbf{V}_2, \mathbf{u}_2) & \rightarrow & (\mathbf{V}_3, \mathbf{u}_3) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & t(V_1, u_1) & \rightarrow & t(V_2, u_2) & \rightarrow & t(V_3, u_3) & \rightarrow & 0 \end{array}.$$

On en déduit que l’application  $(\mathbf{V}, \mathbf{u}) \mapsto \mu(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  se factorise en un morphisme de groupes (en fait de  $Z(A)$ –modules)  $\mu : \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$  qui par construction vérifie

$$\lambda \circ \mu = \text{id}_{\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)}.$$

D'autre part, pour tout objet  $(V, u)$  de  $\mathcal{B}$ , le sous-module de  $\mathbb{C}[Y]$ -torsion  $V'$  de  $V$  est un objet de  $\mathcal{A}'$  tel que  $u(V') \subset V'$ , et l'on a la suite exacte courte dans  $\mathcal{B}$

$$0 \rightarrow (V', u|_{V'}) \rightarrow (V, u) \rightarrow (V/V', \bar{u}) \rightarrow 0;$$

où  $\bar{u}$  est le  $A$ -endomorphisme de  $V/V'$  déduit de  $u$  par passage au quotient. Comme  $V/V'$  s'identifie à un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable de  $V \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ , on voit que  $\mu(t(V, u))$  coïncide avec la projection de  $(V, u)$  sur  $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ . Cela achève la démonstration du lemme.  $\square$

Pour  $\mathbf{V} \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$ , il existe un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  (par définition de  $\tilde{\mathcal{A}}$ ). Ce réseau est un objet de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathbf{V} = \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ , et l'on a

$$\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) = \text{End}_A(\mathcal{V}) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}.$$

D'autre part pour  $u, u' \in \text{End}_A(\mathcal{V})$ , posant  $u_{\mathbb{K}} = u \otimes \text{id}_{\mathbb{K}} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$ , on a

$$\widetilde{u}_{\mathbb{K}} \circ u'_{\mathbb{K}} - u'_{\mathbb{K}} \circ u_{\mathbb{K}} = (\widetilde{u} \circ u' - u' \circ u)_{\mathbb{K}},$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) = \overline{\text{End}}_A(\mathcal{V}) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}.$$

Le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  induit donc un morphisme surjectif de  $Z(A)$ -modules

$$\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}(\mathcal{A})/\mathcal{E}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}).$$

D'autre part le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  induit aussi un morphisme surjectif de  $Z(A)$ -modules

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}(\mathcal{B})/\mathcal{F}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \subset \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}}).$$

On a

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) = \overline{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \coprod_{\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$$

et la propriété universelle du coproduit fibré donne une application

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \end{array}$$

qui est un morphisme surjectif de  $Z(A)$ -modules, de noyau l'image de l'application naturelle  $\mathcal{K}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B})$ , laquelle se factorise à travers  $\mathcal{E}(\mathcal{A}') \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B}')} \mathcal{K}(\mathcal{B}')$ . D'où une suite exacte longue de  $Z(A)$ -modules

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{A})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \rightarrow 0.$$

D'autre part, la propriété universelle du coproduit fibré donne aussi une application

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}}) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 \mathcal{E}(\mathcal{A}) \amalg_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) & \xrightarrow{\quad \alpha \quad} & \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \amalg_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) & & 
 \end{array}$$

qui est un morphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules. On est donc ramené à montrer que ce morphisme  $\alpha$  est injectif.

**6.19. Démonstration du lemme de 6.17 (suite).** — Rappelons qu'un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une paire  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{V}$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , c'est-à-dire un  $\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}$ -module de type fini comme  $\tilde{\mathcal{A}}$ -module tel qu'il existe un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$ , et  $\mathbf{u}$  est un  $\tilde{\mathcal{A}}$ -endomorphisme de  $\mathbf{V}$ . De plus, une telle paire  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  si et seulement si on peut choisir  $\mathcal{V}$  de telle manière que  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ , auquel cas la paire  $(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}})$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose  $A_k = A \cdot \gamma^k$  et  $\tilde{A}_k = \tilde{A} \cdot \tilde{\gamma}^k$  — on a donc  $A^{\natural} = A_1$  et  $\tilde{A}^{\natural} = \tilde{A}_1$ . Soit  $\mathbf{V}$  un  $\tilde{A}^{\natural}$ -module non dégénéré *simple* — c'est-à-dire tel que le seul sous-espace non nul  $\tilde{A}^{\natural}$ -stable de  $\mathbf{V}$  est  $\mathbf{V}$  lui-même —, de type fini comme  $\tilde{A}$ -module. On définit comme en 2.6 l'invariant  $s = s(\mathbf{V})$ : c'est le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $\mathbf{W} \simeq \mathbf{W}_{\tilde{\gamma}^k}$  pour un (resp. pour tout) sous- $\tilde{A}$ -module simple  $\mathbf{W}$  de  $\mathbf{V}$ . Il ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $\mathbf{V}$ . De plus (voir loc. cit.), si l'on choisit un tel  $\mathbf{W}$ , alors on a la décomposition en somme directe  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}) \oplus \dots \oplus \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}}^{s-1}(\mathbf{W})$ , et puisque les  $\tilde{A}$ -module  $\tilde{\gamma}_{\mathbf{V}}^k(\mathbf{W}) \simeq \mathbf{W}_{\tilde{\gamma}^{-k}}$  pour  $k = 0, \dots, s-1$ , sont deux-à-deux non isomorphes, on a  $\gamma_{\mathbf{V}}^s(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$ . La restriction de  $\tilde{\gamma}_{\mathbf{V}}^s$  à  $\mathbf{W}$ , disons  $\tilde{\gamma}_{\mathbf{W}}^s$ , est un isomorphisme de  $\mathbf{W}_{\tilde{\gamma}^s}$  sur  $\mathbf{W}$ , et  $\mathbf{V} (= (\mathbf{V}, \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}}))$  est isomorphe au  $\tilde{A}^{\natural}$ -module non dégénéré  $\iota_s(\mathbf{W}, \tilde{\gamma}_{\mathbf{W}}^s)$  défini en 6.3. L'élément  $\tilde{\gamma}_{\mathbf{W}}^s$  munit  $\mathbf{W}$  d'une structure de  $\tilde{A}_s$ -module non dégénéré, et si de plus il existe un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  — i.e. si  $\mathbf{V}$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$  — alors  $\mathbf{W} \cap \mathcal{V}$  est un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A_s$ -stable dans  $\mathbf{W}$ . Notons que si  $s > 1$ , alors d'après le lemme de 6.3 (et la remarque 1 de 6.4), on a  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) = 0$ .

Soit  $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{A}})$  l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de  $\tilde{\mathcal{A}}$  — c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\tilde{A}^{\natural}$ -modules non dégénérés simples ayant un sous- $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable —, et  $\text{Irr}_0(\tilde{\mathcal{A}})$  le sous-ensemble de  $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{A}})$  formé des (classes de)  $\tilde{A}^{\natural}$ -modules  $\tilde{\mathcal{A}}$ -simples. Le groupe  $\mathbb{C}^{\times}$  opère naturellement sur les objets de  $\tilde{\mathcal{A}}$ : pour  $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , on note  $\lambda \cdot \mathbf{X}$  le  $\tilde{A}$ -module  $\mathbf{X}$  muni de la structure de  $\tilde{A}^{\natural}$ -module déduite de celle de  $\mathbf{X}$  par multiplication par  $\lambda$ , i.e.  $\tilde{\gamma}_{\lambda \cdot \mathbf{X}} = \lambda \cdot \tilde{\gamma}_{\mathbf{X}}$ . D'où une action de  $\mathbb{C}^{\times}$  sur  $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{A}})$ , qui stabilise  $\text{Irr}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ . On note  $\overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}}) = \text{Irr}(\tilde{\mathcal{A}})/\mathbb{C}^{\times}$  l'ensemble des  $\mathbb{C}^{\times}$ -orbites dans  $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{A}})$ , et  $\overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) = \text{Irr}_0(\tilde{\mathcal{A}})/\mathbb{C}^{\times}$  le sous-ensemble de  $\overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}})$  formé des  $\mathbb{C}^{\times}$ -orbites dans  $\text{Irr}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ . Soit  $\mathbf{V}$  un objet *semisimple* de  $\tilde{\mathcal{A}}$  — i.e. somme directe (finie) de  $A^{\natural}$ -modules simples. Pour tout élément  $\mathfrak{X}$  de  $\overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}})$ , la *composante  $\mathfrak{X}$ -isotypique* (cf. 6.13)  $\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}$  de  $\mathbf{V}$  est encore un objet de

$\tilde{\mathcal{A}}$ , et la restriction  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}|_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}}$  induit par passage aux quotients une application

$$q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}_{\mathfrak{X}}} : \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}).$$

Pour  $\mathfrak{X} \in \overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}})$  tel que  $\mathbf{V}_{\mathfrak{X}} \neq 0$  et  $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$  dans la classe  $\mathfrak{X}$ , le  $\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}$ -module  $\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}$  est isomorphe à un produit de la forme  $\mathbf{X}' = \lambda_1 \cdot \mathbf{X} \times \cdots \times \lambda_n \cdot \mathbf{X}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}^{\times}$ ,  $n \geq 1$ . On procède alors comme dans 6.13: choisissons un tel isomorphisme  $\zeta : \mathbf{V}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathbf{X}'$ , c'est-à-dire un isomorphisme de  $\tilde{\mathcal{A}}$ -modules tel que

$$\zeta \circ \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}} = \tilde{\gamma}_{\mathbf{X}'} \circ \zeta, \quad \tilde{\gamma}_{\mathbf{X}'} = \tilde{\gamma}_{\lambda_1 \cdot \mathbf{X}} \times \cdots \times \tilde{\gamma}_{\lambda_n \cdot \mathbf{X}}.$$

D'où un isomorphisme de  $\tilde{\mathcal{A}}$ -modules

$$\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \text{M}_n(\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{X})), \quad \mathbf{u} \mapsto \zeta \circ \mathbf{u} \circ \zeta^{-1} = (\mathbf{u}_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

tel que

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j} = \tilde{\gamma}_{\mathbf{X}} \circ \mathbf{u}_{i,j} \circ \tilde{\gamma}_{\mathbf{X}}^{-1} (= \widetilde{\mathbf{u}}_{i,j}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}} \circ \mathbf{u} \circ \tilde{\gamma}_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}}^{-1}.$$

L'application trace

$$\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{u} \mapsto \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_{i,i}$$

induit par passage aux quotients une application

$$\overline{\text{tr}}_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{X}} : \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{X})$$

qui ne dépend pas du choix de  $\zeta$ , et qui, d'après la proposition de 6.2, est un isomorphisme de  $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -modules. Notons que si  $\mathfrak{X} \in \overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ , on a  $\overline{\text{tr}}_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{X}} = 0$ .

Soit  $\mathbf{V}$  un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Comme  $\mathbf{V}$  est en particulier un  $\tilde{\mathcal{A}}$ -module de longueur finie, le socle  $\mathbf{V}_{\text{soc}}$  du  $\tilde{\mathcal{A}}$ -module  $\mathbf{V}$  — c'est-à-dire la somme de tous les sous- $\tilde{\mathcal{A}}$ -module simples de  $\mathbf{V}$  — est bien défini, et il est  $\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}$ -stable. C'est donc un objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Tout  $\tilde{\mathcal{A}}$ -endomorphisme  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{V}$  induit par restriction un  $\tilde{\mathcal{A}}$ -endomorphisme  $\mathbf{u}_{\text{soc}}$  de  $\mathbf{V}_{\text{soc}}$  et par passage au quotient un  $\tilde{\mathcal{A}}$ -endomorphisme  $\mathbf{u}^{\text{soc}}$  de  $\mathbf{V}^{\text{soc}} = \mathbf{V}/\mathbf{V}_{\text{soc}}$ . D'où la suite exacte courte dans  $\tilde{\mathcal{B}}$

$$(*) \quad 0 \rightarrow (\mathbf{V}_{\text{soc}}, \mathbf{u}_{\text{soc}}) \rightarrow (\mathbf{V}, \mathbf{u}) \rightarrow (\mathbf{V}^{\text{soc}}, \mathbf{u}^{\text{soc}}) \rightarrow 0.$$

On note

$$q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}_{\text{soc}}} : \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}_{\text{soc}}), \quad q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}^{\text{soc}}} : \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}^{\text{soc}})$$

les applications déduites de  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_{\text{soc}}$ ,  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^{\text{soc}}$  par passage aux quotients.

Pour  $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$ ,  $\mathbf{f} \in \text{Isom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \text{Isom}_{\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , l'application

$$\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\lambda \cdot \mathbf{V}'), \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{f}^{-1}$$

induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$  sur  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\lambda \cdot \mathbf{V}')$ . On peut donc poser

$$\overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{\mathbf{V} \in \overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})} \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}).$$

Via le choix d'un système de représentants de  $\overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$  dans  $\text{Irr}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ , on identifie  $\overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$  à un sous-groupe — en fait un sous- $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -module — de  $\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}})$ .

Puisque tout objet de  $\tilde{\mathcal{A}}$  est en particulier un  $\tilde{\mathcal{A}}$ -module de longueur finie, il existe une unique application

$$\xi = \sum_{\mathbf{V}} \xi_{\mathbf{V}} : \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}), \quad \xi_{\mathbf{V}} : \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}),$$

où  $\mathbf{V}$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , vérifiant les conditions (pour tout objet  $\mathbf{V}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$ ):

- $\xi_{\mathbf{V}} = \xi_{\mathbf{V}_{\text{soc}}} \circ q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}_{\text{soc}}} + \xi_{\mathbf{V}^{\text{soc}}} \circ q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}^{\text{soc}}}$ ;
- si  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{soc}}$ , alors  $\xi_{\mathbf{V}} = \sum_{\mathfrak{X}} \xi_{\mathbf{V}_{\mathfrak{X}}} \circ q_{\mathbf{V}, \mathbf{V}_{\mathfrak{X}}}$  où  $\mathfrak{X}$  parcourt les éléments de  $\overline{\text{Irr}}(\tilde{\mathcal{A}})$  tels que  $\mathbf{V}_{\mathfrak{X}} \neq 0$ ;
- si  $\mathbf{V}$  est  $\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}$ -isomorphe à  $\lambda_1 \cdot \mathbf{X} \times \cdots \times \lambda_n \cdot \mathbf{X}$  pour un objet simple  $\mathbf{X}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  et des  $\lambda_i \in \mathbb{C}^{\times}$ , alors  $\xi_{\mathbf{V}} = \overline{\text{tr}}_{\mathbf{V}, \mathbf{X}}$ .

Par passage aux classes d'isomorphisme d'objets de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , les conditions ci-dessus définissent bien une application  $\xi : \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ , qui est un morphisme de  $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -modules. D'autre part l'application qui à un élément  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  de  $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})$  — i.e. une classe d'isomorphisme d'objets de  $\tilde{\mathcal{B}}$  — associe l'élément  $\xi_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) \in \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ , se factorise à travers  $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}})$ , et la propriété universelle du coproduit fibré donne une application

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \coprod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) \\
 & \searrow \xi & \swarrow \delta \\
 & & \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}})
 \end{array}$$

qui est un morphisme de  $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -modules.

**LEMME 1.** — *Le morphisme  $\delta$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Puisque le morphisme  $\xi$  est (par définition) surjectif, le morphisme  $\delta$  est lui aussi surjectif. D'autre part l'inclusion  $\overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}})$  induit un morphisme de  $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -modules  $\overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \coprod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}})$  qui est une section de  $\delta$ . Cette section est surjective: il suffit pour cela de remarquer que pour tout objet simple  $\mathbf{V}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , tout entier  $n \geq 1$  et tout  $\mathbf{u} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}^n)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}})$

$$[\mathbf{V}^n, \mathbf{u}] = [\mathbf{V}, \overline{\text{tr}}_{\mathbf{V}^n, \mathbf{V}}(\mathbf{u})].$$

D'où le lemme. □

Pour  $\mathbf{V} \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$ , on note  $\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V})$  le sous-groupe de  $\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$  engendré par les images des morphismes

$$\text{End}_A(\mathcal{V}) \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}), u \mapsto u_{\mathbb{K}}$$

pour  $\mathcal{V}$  parcourant les  $\mathbb{C}[Y]$ -réseaux  $A^{\natural}$ -stables dans  $\mathbf{V}$ . C'est un sous- $Z(A)$ -module de  $\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$ , et son image dans  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$ , que l'on note  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V})$ , est un sous- $Z(A)$ -module de  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V})$ . Pour  $\mathbf{V}, \mathbf{V}' \in \text{Ob}(\tilde{\mathcal{A}})$ ,  $\mathbf{f} \in \text{Isom}_{\tilde{\mathcal{A}}^{\natural}}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ , l'application

$$\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathbf{V}) \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\lambda \cdot \mathbf{V}'), \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{f}^{-1}$$

induit par restriction et passage aux quotients un isomorphisme  $\overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V}) \simeq \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\lambda \cdot \mathbf{V}')$ . On peut donc poser

$$\mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{\mathbf{V}} \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V}) \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}})$$

où  $\mathbf{V}$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , et

$$\overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigoplus_{\mathbf{V} \in \overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})} \overline{\text{End}}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V}) = \mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{A}}) \cap \overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}).$$

On définit comme suit une application

$$\xi^* = \sum_V \xi_V^* : \mathcal{E}(\mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}), \quad \xi_V^* : \overline{\text{End}}_A(V) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}),$$

où  $V$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{A}$ : pour  $V \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  et  $u \in \overline{\text{End}}_A(V)$ , on pose  $\xi_V^*(u) = \xi_{V_{\mathbb{K}}}(u_{\mathbb{K}}) \in \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}})$  — où (rappel)  $(V_{\mathbb{K}}, u_{\mathbb{K}}) = t(V, u)$ . Puisque la catégorie  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  est épaisse dans  $\tilde{\mathcal{B}}$  (remarque 2 de 6.18), d'après (\*) et la définition de  $\xi_{V_{\mathbb{K}}}$ , l'élément  $\xi_{V_{\mathbb{K}}}(u_{\mathbb{K}})$  appartient à  $\overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}})$ . Par passage aux classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{A}$ , on obtient bien une application  $\xi^* : \mathcal{E}(\mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}})$ , qui est un morphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules.

Par ailleurs l'application qui à un élément  $(V, u)$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  associe l'élément  $\xi_V^*(u)$  de  $\overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}})$ , se factorise à travers  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$ , et la propriété universelle du coproduit fibré donne alors une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \\ & \searrow \xi^* & \nearrow \delta^* \\ & & \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}) \end{array}$$

qui est un morphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules.

**LEMME 2.** — *Le morphisme  $\delta^*$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Puisque le morphisme  $\xi^*$  est surjectif, le morphisme  $\delta^*$  l'est aussi. Soit  $\mathfrak{X} \in \overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ ,  $\mathbf{V}$  un objet simple de  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans la classe  $\mathfrak{X}$ , et  $\mathbf{u}$  un élément de  $\text{End}_{\tilde{\mathcal{A}}}^*(\mathbf{V})$ . Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ . La paire  $(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}})$  est un objet de  $\mathcal{B}$ , et  $t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}})$  est un objet de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  qui, d'après la démonstration du lemme 3 de 6.18, ne dépend pas du choix de  $\mathcal{V}$ : si  $\mathcal{V}'$  est un autre  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable dans  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{u}(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}'$ , on a l'égalité  $t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}) = t(\mathcal{V}', \mathbf{u}|_{\mathcal{V}'})$ . Par suite  $t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}})$  définit un objet de  $\mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$  qui ne dépend pas du choix de  $\mathcal{V}$ . On note  $s^*(\mathbf{u})$  l'image de cet objet dans  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$ . Cela définit par linéarité une application  $s^* : \overline{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$  qui par construction est un morphisme de  $Z(\mathcal{A})$ -modules et une section de  $\delta^*$ . Il s'agit de prouver que ce morphisme  $s^*$  est surjectif.

D'après 6.18 (cf. l'avant-dernier diagramme), le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*) \end{array}$$

est commutatif, les flèches horizontales sont surjectives, et le noyau de celle du bas coïncide avec l'image de l'application naturelle  $\mathcal{K}(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\mathcal{B})$ . Fixons comme plus haut un élément  $\mathfrak{X} \in \overline{\text{Irr}}_0(\tilde{\mathcal{A}})$ . Il suffit de vérifier que tout objet  $(\mathbf{V}, \mathbf{u})$  de  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  tel que  $\mathbf{V}_{\mathfrak{X}} = \mathbf{V}$  définit un élément de  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathcal{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}^*)$  qui appartient à l'image de  $s^*$ . On peut supposer que  $\mathbf{V} = \mathbf{X}^n$  pour un objet simple  $\mathbf{X}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans la classe  $\mathfrak{X}$ , et un entier  $n \geq 2$  (si  $n = 1$ ,

il n'y a rien à démontrer). Écrivons  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times \cdots \times \mathbf{V}_n$ ,  $\mathbf{V}_i = \mathbf{X}$ , et identifions  $\text{End}_{\tilde{A}}(\mathbf{V})$  à  $M_n(\text{End}_{\tilde{A}}(\mathbf{X}))$ . Écrivons  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $\mathbf{u}_{i,j} \in \text{Hom}_{\tilde{A}}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)$ . Soit  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{u}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , posons  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V} \cap \mathbf{V}_i$ ; c'est un  $\mathbb{C}[Y]$ -réseau  $A^{\natural}$ -stable dans  $\mathbf{V}_i$  tel que  $\mathbf{u}_{i,j}(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_j$ . Posons  $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$ , et pour  $1 \leq i, j \leq n$ , posons  $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j}|_{\mathcal{V}_i} \in \text{Hom}_A(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$ . La matrice  $u = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est un élément de  $\text{End}_A(\mathcal{V}')$ , qui coïncide avec la restriction de  $\mathbf{u}$  à  $\mathcal{V}'$ . Puisque  $t(\mathcal{V}, \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}) = t(\mathcal{V}', u)$ , on peut supposer que  $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$  et  $u = \mathbf{u}|_{\mathcal{V}}$ . Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , notons  $p_i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_i$  la projection canonique, et posons  $a_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j} \circ p_i \in \text{Hom}_A(\mathcal{V}, \mathcal{V}_j)$ ; on voit  $p_i$  et  $a_{i,j}$  comme des éléments de  $\text{End}_A(\mathcal{V})$ . Puisque  $\gamma_{\mathcal{V}} = \gamma_{\mathcal{V}_1} \times \cdots \times \gamma_{\mathcal{V}_n}$  stabilise la décomposition  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ , l'élément  $\tilde{p}_i = \gamma_{\mathcal{V}} \circ p_i \circ \gamma_{\mathcal{V}}^{-1}$  appartient encore à  $\text{Hom}_A(\mathcal{V}, \mathcal{V}_i)$ . Par suite pour  $i \neq j$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

$$[\mathcal{V}, a_{i,j}] = [\mathcal{V}, a_{i,j} \circ p_i] = [\mathcal{V}, \tilde{p}_i \circ a_{i,j}] = 0.$$

D'où l'on déduit l'égalité dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

$$[\mathcal{V}, u] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} [\mathcal{V}, a_{i,j}] = \sum_{i=1}^n [\mathcal{V}_i, u_{i,i}].$$

On obtient que l'image dans  $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathbb{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}^*)$  de l'élément de  $\mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}^*)$  défini par l'objet  $t(\mathcal{V}, u) = (\mathbf{V}, \mathbf{u})$  de  $\tilde{\mathbb{B}}^*$ , coïncide avec la somme des images des éléments de  $\mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}^*)$  définis par  $t(\mathcal{V}_i, u_{i,i}) \in \text{Ob}(\tilde{\mathbb{B}}^*)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Comme cette somme est dans l'image de  $s^*$ , le lemme est démontré.  $\square$

**LEMME 3.** — *Le morphisme  $\alpha : \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathbb{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}^*) \rightarrow \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \coprod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathbb{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}})$  est injectif.*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que par construction, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathcal{A}) \coprod_{\mathcal{F}(\mathbb{B})} \mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}^*) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \coprod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathbb{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathbb{B}}) \\ \delta^* \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bar{\mathcal{E}}_0^*(\tilde{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) \end{array}$$

où la flèche horizontale du bas est l'inclusion canonique.  $\square$

Cela achève la démonstration du lemme de 6.17.  $\square$

**6.20. Une conséquence de la proposition de 6.17.** — Continuons avec les notations des numéros 6.17–6.19. En particulier on a  $\tilde{A} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ ,  $\tilde{A}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}$  et  $\tilde{\gamma} = \gamma_{\mathbb{K}}$ . Si la variété  $Y$  n'est pas contenue dans  $\Theta_1(G)$ , alors l'automorphisme  $\tilde{\gamma}$  de  $Z(\tilde{A}) = \mathbb{K}$  est non trivial, et pour tout  $\tilde{A}^{\natural}$ -module non dégénéré  $\mathbf{V}$ , de type fini comme  $\tilde{A}$ -module, on a  $\overline{\text{End}}_{\tilde{A}}(\mathbf{V}) = 0$ . En ce cas on a  $\bar{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) = 0 = \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}})$ . D'où le corollaire suivant de la proposition de 6.17.

**COROLLAIRE 1.** — *Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable de  $\Theta(G)$ , et soit  $d = \dim(Y)$ . Si  $Y \not\subset \Theta_1(G)$ , i.e. s'il existe un  $y \in Y$  tel que  $y(1) \neq y$ , alors on a*

$$\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = 0 = \bar{\mathbb{F}}^d \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

**COROLLAIRE 2.** — *Seules les sous-variétés fermées irréductibles  $Y$  (de dimension  $d$ ) de  $\Theta_1(G)$  contribuent non trivialement à la somme dans le lemme de 6.14.*

Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible de  $\Theta_1(G)$ . Alors  $y_Y(1) = y_Y$  et  $\tilde{\gamma}$  est un  $\mathbb{K}$ -automorphisme de  $\tilde{A}$ . Soit  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y)$  la catégorie abélienne formée des  $(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K})$ -modules admissibles  $\Pi$  tels que  $\Pi^{\circ}$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$ ; i.e. (rappel) tels que  $\Pi^{\circ}$  est un  $(G, \mathbb{K})$ -module de longueur finie tel que l'action de  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}) = \mathfrak{Z}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$  sur  $V_{\Pi^{\circ}}$  se factorise à travers  $\iota_Y \otimes \text{id}_{\mathbb{K}} : \mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ . Les flèches dans  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y)$  sont des flèches dans  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$  qui sont aussi des flèches dans  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K})$ , c'est-à-dire des morphismes de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Cela fait de  $\tilde{\mathfrak{R}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  une sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y)$ . Soit  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y))$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel défini comme en 6.17. On a une application naturelle

$$\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y).$$

**LEMME.** — *Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible de  $\Theta_1(G)$ . L'application naturelle*

$$\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y)$$

*est un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.*

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\tilde{A}^{\natural})$  formé des  $\tilde{A}^{\natural}$ -modules non dégénérés qui sont de type fini comme  $\tilde{A}$ -modules. Elle est équivalente à  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y)$ , et il s'agit de vérifier que l'application naturelle

$$\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})$$

est un morphisme injectif de  $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ -modules, où l'on a posé  $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) = \mathcal{C}(\tilde{A}^{\natural}) (= \mathcal{C}(\text{Mod}(\tilde{A}^{\natural})))$ .

Soit  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$  la catégorie abélienne obtenue en remplaçant  $\tilde{\mathcal{A}}$  par  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$  dans la définition de  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Ainsi  $\tilde{\mathcal{A}}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ , et  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ . En remplaçant  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ , on obtient comme dans le lemme 1 de 6.18 un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\eta_{\mathbb{K}} : \mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) \prod_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})} \mathcal{K}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}), \quad \mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) = \bigoplus_{\mathbf{V}} \overline{\text{End}}_{\tilde{A}}(\mathbf{V}),$$

où  $\mathbf{V}$  parcourt les classes d'isomorphisme d'objet de  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ . Soit  $\text{Irr}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\tilde{A}^{\natural}$ -modules non dégénérés  $\tilde{A}$ -simples, et soit  $\overline{\text{Irr}}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) = \text{Irr}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})/\mathbb{C}^{\times}$ . Posons

$$\overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) = \bigoplus_{\mathfrak{x} \in \overline{\text{Irr}}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})} \overline{\text{End}}_{\tilde{A}}(\mathfrak{x}).$$

En remplaçant  $\tilde{\mathcal{A}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}$  par  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ , on obtient comme dans le lemme 1 de 6.19 un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\delta_{\mathbb{K}} : \mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) \prod_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})} \mathcal{K}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}).$$

En remplaçant  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}^*$  par  $\tilde{\mathcal{A}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$  dans la définition de  $\alpha$  (cf. 6.18), on obtient aussi (d'après la propriété universelle du coproduit) un morphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\alpha_{\mathbb{K}} : \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \prod_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) \prod_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})} \mathcal{K}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}).$$

Comme dans le lemme 3 de 6.19, on en déduit que ce morphisme  $\alpha_{\mathbb{K}}$  est injectif: le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{A}}) \amalg_{\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})} \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{K}}} & \mathcal{E}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) \amalg_{\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})} \mathcal{K}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta_{\mathbb{K}} \\ \bar{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}}_0(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}) \end{array}$$

où la flèche du bas est l'inclusion canonique. Puisque

$$\eta_{\mathbb{K}}^{-1} \circ (\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})) = \alpha_{\mathbb{K}} \circ \tilde{\eta}^{-1},$$

l'application naturelle  $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}})$  est injective.  $\square$

**6.21. Un résultat de densité.** — Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  on peut définir comme en 6.11 et 6.12 des filtrations combinatoires  $\{\mathcal{C}_i(M_P^{\natural}, \omega)\}_{i \geq -1}$ ,  $\{\mathcal{C}^i(M_P^{\natural}, \omega)\}_{i \geq -1}$  et une filtration topologique  $\{F^i \mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)\}_{i \geq -1}$ , de  $\mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)$ . Les morphismes de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules (cf. 6.11)  $\omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}} : \mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\omega_{r_{G^{\natural}}}^{P^{\natural}} : \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)$  sont des morphismes filtrés pour ces trois filtrations: pour les filtrations combinatoires, cela résulte de la transitivité des foncteurs induction parabolique  $\omega_{i_{Q^{\natural}}}^{P^{\natural}}$  et restriction de Jacquet  $\omega_{r_{Q^{\natural}}}$ , ainsi que de la filtration du foncteur  $\omega_{r_{G^{\natural}}}^{Q^{\natural}} \circ \omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}}$  utilisée dans la démonstration de la proposition de 4.1; pour la filtration topologique, cela résulte du lemme 1 de 4.5. Notons aussi que d'après ce même lemme, pour  $P \in \mathcal{P}(G)$ , le foncteur  $T_P = i_P^G \circ r_G^P$  commute à l'action de  $\mathfrak{Z}(G)$  sur les objets de  $\mathfrak{R}(G)$ : pour toute représentation  $\pi$  de  $G$  et tout élément  $z$  de  $\mathfrak{Z}(G)$ , l'endomorphisme  $T_P(z)$  de  $T_P(\pi)$  coïncide avec  $z$ . On en déduit que pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , le foncteur  $\omega_{T_{P^{\natural}}} = \omega_{i_{P^{\natural}}}^{G^{\natural}} \circ \omega_{r_{G^{\natural}}}^{P^{\natural}}$  induit un endomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module

$$\omega_{T_{P^{\natural}}} : \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$$

qui est un morphisme filtré pour les trois filtrations  $(\mathcal{C}_{\bullet}, \mathcal{C}^{\bullet}$  et  $F^{\bullet} \mathcal{C})$ . Il induit en particulier, pour toute sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable  $Y$  de  $\Theta(G)$ , un endomorphisme de  $\mathbb{C}[Y]$ -module

$$\omega_{T_{P^{\natural}; Y}} : \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$$

et un endomorphisme de  $\mathbb{C}(Y)$ -espace vectoriel

$$\omega_{\tilde{T}_{P^{\natural}; Y}} : \tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y).$$

Bien sûr,  $\omega_{T_{P^{\natural}; Y}}$  est encore un morphisme filtré pour la filtration topologique  $\{F^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)\}$ . De plus on a

$$\iota^Y \circ \omega_{T_{P^{\natural}; Y}} = \omega_{T_{P^{\natural}}} \circ \iota^Y,$$

et les endomorphismes  $\omega_{T_{P^{\natural}; Y}} \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \text{id}_{\mathbb{C}(Y)}$  de  $\bar{F}^{\dim(Y)} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{C}(Y)$  et  $\omega_{\tilde{T}_{P^{\natural}; Y}}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  commutent au  $\mathbb{C}(Y)$ -isomorphisme de la proposition de 6.17.

Pour tout entier  $d$  tel que  $d(G) \leq d < d(M_{\circ})$  et toute sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable  $Y$  de  $\Theta(G)$ , le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_{\lambda_d}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  de la proposition de 4.4 définit:

- un  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_d^{\mathcal{C}} = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_d(P^{\natural}) \omega_{T_{P^{\natural}}}$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ ;
- un  $\mathbb{C}[Y]$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_{d; Y}^{\mathcal{C}} = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_d(P^{\natural}) \omega_{T_{P^{\natural}; Y}}$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$ ;
- un  $\mathbb{C}(Y)$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_{d; Y}^{\tilde{\mathcal{C}}} = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_d(P^{\natural}) \omega_{\tilde{T}_{P^{\natural}; Y}}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$ .

**PROPOSITION.** — Soit  $Y$  une sous-variété fermée irréductible de  $\Theta_1(G)$ , et  $d$  un entier tel que  $d(G) \leq d < d(M_\circ)$ . Si  $\mathbf{A}_{d;y}^{\mathbb{C}} = 0$  pour  $y$  dans un ouvert dense de  $Y$ , alors  $\mathbf{A}_{d;Y}^{\mathbb{C}} = 0$ .

*Démonstration.* — On reprend ici, en l’adaptant, la démonstration de la proposition 4.13 de [D]. Soit  $\mathfrak{s}$  l’élément de  $\mathfrak{B}_1(G)$  tel que  $Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ . On commence par choisir une extension de type fini  $E/\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant les conditions:

- le morphisme  $Y \hookrightarrow \Theta(\mathfrak{s})$  est défini sur  $E$ , i.e. provient par le changement de base  $E \rightarrow \mathbb{C}$  d’un morphisme de  $E$ -schémas réduits géométriquement irréductibles  $Y^E \rightarrow \Theta^E(\mathfrak{s})$ ;
- la  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ -algèbre  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  provient d’une  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E$ -algèbre  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}^E$ , i.e. on a  $\mathcal{H}_\mathfrak{s} = \mathcal{H}_\mathfrak{s}^E \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E} \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ , où  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E = E[\Theta^E(\mathfrak{s})]$  est l’algèbre affine de  $\Theta^E(\mathfrak{s})$ ;
- le  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $z \mapsto z(1)$  de l’anneau  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$  provient d’un  $E$ -automorphisme de l’anneau  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E$ ;
- le  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_\mathfrak{s}$  de  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  provient d’un  $E$ -automorphisme  $\gamma_\mathfrak{s}^E$  de  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}^E$ , semilinéaire en  $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E$ , vérifiant  $\gamma_\mathfrak{s}(u \otimes z) = \gamma_\mathfrak{s}^E(u) \otimes z(1)$ ,  $u \in \mathcal{H}_\mathfrak{s}^E$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ .

Puisque le corps des fractions  $E(Y^E)$  de  $E[Y^E]$  est encore une extension de type fini de  $\mathbb{Q}$ , on peut choisir un  $E$ -plongement de corps  $\eta : E(Y^E) \rightarrow \mathbb{C}$ . Ce dernier, ou plutôt sa restriction à  $E[Y^E]$ , induit un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$E[Y^E] \otimes_E \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

qui correspond à un point  $\mathbb{C}$ -rationnel de  $Y^E$ , i.e. un point de  $Y^E(\mathbb{C}) = Y$ , disons  $y_\eta$ . D’après loc. cit., l’ensemble des points  $y_\eta$  obtenus de cette manière est Zariski-dense dans  $Y$ . On peut donc choisir un tel  $y = y_\eta$  tel que  $\mathbf{A}_{d;y}^{\mathbb{C}} = 0$ . Puisque  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos et de degré de transcendance infini sur  $\mathbb{Q}$ , on peut aussi étendre  $\eta$  en un  $E$ -plongement de corps  $\tilde{\eta} : \mathbb{C}(Y) \rightarrow \mathbb{C}$  (cf. loc. cit.). Notons  $\alpha$  le morphisme composé

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s} = \mathbb{C}[\Theta(\mathfrak{s})] \rightarrow \mathbb{C}[Y] = E[Y^E] \otimes_E \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

correspondant au point  $y \in Y \subset \Theta(\mathfrak{s})$ , et  $\tilde{\alpha}$  le morphisme composé

$$\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E = E[\Theta^E(\mathfrak{s})] \rightarrow E[Y^E] \hookrightarrow E(Y^E) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y).$$

Alors on a l’identification

$$\mathcal{H}_\mathfrak{s} \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}, \alpha} \mathbb{C} = (\mathcal{H}_\mathfrak{s}^E \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E, \tilde{\alpha}} \mathbb{C}(Y)) \otimes_{\mathbb{C}(Y), \tilde{\eta}} \mathbb{C}.$$

Posons  $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_\mathfrak{s} \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}, \alpha} \mathbb{C}$ . Puisque les morphismes  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  sont  $\mathbb{Z}$ -équivariants pour l’action de  $\mathbb{Z}$  triviale sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{C}(Y)$ , l’automorphisme  $\gamma_\mathfrak{s}$  de  $\mathcal{H}_\mathfrak{s}$  induit un automorphisme  $\gamma_y = \gamma_\mathfrak{s} \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}, \alpha} \mathbb{C}$  de  $\mathcal{H}_y$  qui correspond à  $(\gamma_\mathfrak{s}^E \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E, \tilde{\alpha}} \mathbb{C}(Y)) \otimes_{\mathbb{C}(Y), \tilde{\eta}} \mathbb{C}$  via l’identification ci-dessus. On pose  $\mathcal{H}_{y,\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_y \cdot \gamma_y$ .

Comme dans la démonstration de la proposition de 6.17, on pose  $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_\mathfrak{s} \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}} \mathbb{C}[Y]$  et  $\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_Y \cdot \gamma_Y$  où  $\gamma_Y$  est le  $\mathbb{C}[Y]$ -automorphisme  $\gamma_\mathfrak{s} \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}} \mathbb{C}[Y]$  de  $\mathcal{H}_Y$ . On pose aussi  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(Y)$ ,  $\mathcal{H}_\mathbb{K} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  et  $\mathcal{H}_{\mathbb{K},\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_\mathbb{K} \cdot \gamma_\mathbb{K}$  où  $\gamma_\mathbb{K}$  est le  $\mathbb{K}$ -automorphisme  $\gamma_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$  de l’anneau  $\mathcal{H}_\mathbb{K}$ . On a les identifications

$$\mathcal{H}_\mathbb{K} = \mathcal{H}_\mathfrak{s}^E \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E, \tilde{\alpha}} \mathbb{K}, \quad \gamma_\mathbb{K} = \gamma_\mathfrak{s}^E \otimes_{\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}^E, \tilde{\alpha}} \mathbb{K}.$$

D’après loc. cit. on a une identification  $\tilde{\mathcal{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = \mathcal{C}(\widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}))$ , et d’après le lemme de 6.20, l’application naturelle  $\mathcal{C}(\widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K},\omega}^{\natural})$  est un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Notons  $\overline{\mathbb{K}}$  la clôture algébrique de  $\tilde{\eta}(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{C}$ , et pour toute extension

$\mathbb{K}'$  de  $\tilde{\eta}(\mathbb{K})$  dans  $\overline{\mathbb{K}}$ , posons  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{K}'$  et  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}'} \cdot \gamma_{\mathbb{K}'}$  où  $\gamma_{\mathbb{K}'} = \gamma_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{K}'$ . Soit  $\mathbb{K}'$  une telle extension, de degré fini sur  $\tilde{\eta}(\mathbb{K})$ . L'application

$$(\mathbf{V}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{V}_{\mathbb{K}'}, \mathbf{u}_{\mathbb{K}'}) = (\mathbf{V} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{K}', \mathbf{u} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{K}')$$

induit un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural}).$$

En effet, on a une identification

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural}) = \bigoplus_{\mathbf{V}'} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}')$$

où  $\mathbf{V}'$  parcourt l'ensemble, disons  $\overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$ , des  $\mathbb{C}^{\times}$ -orbites de classes d'isomorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural}$ -modules non dégénérés  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -simples. Pour  $\mathfrak{X} \in \overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural})$ , choisissons un  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}$ -module non dégénéré  $\mathbf{X}$  dans la classe  $\mathfrak{X}$ , et pour  $\mathfrak{X}' \in \overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$ , notons  $\mathbf{X}_{\mathfrak{X}'}$  la composante  $\mathfrak{X}'$ -isotypique de  $\mathbf{X}_{\mathbb{K}'}$  — ce dernier est un  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -module semisimple, d'après [CR, theorem 7.9]. Pour  $\mathfrak{X}' \in \overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$  et  $\mathbf{X}'$  un  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural}$ -module non dégénéré dans la classe  $\mathfrak{X}'$ , on définit comme en 6.19 une application trace

$$\overline{\text{tr}}_{\mathbf{X}_{\mathfrak{X}'}, \mathbf{X}'} : \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}_{\mathfrak{X}'}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}')$$

qui, d'après la proposition de 6.2, est un isomorphisme de  $\mathbb{K}'$ -espaces vectoriels. D'autre part l'application  $\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}}(\mathbf{X}) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}_{\mathbb{K}'})$ ,  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_{\mathbb{K}'}$  induit par passage aux quotients un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\delta_{\mathbf{X}} : \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}}(\mathbf{X}) \rightarrow \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}_{\mathbb{K}'}) = \bigoplus_{\mathfrak{X}'} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}_{\mathfrak{X}'}),$$

où  $\mathfrak{X}'$  parcourt les éléments de  $\overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$ . D'après [CR, loc. cit.], le morphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\sum_{\mathbf{X}} \left( \sum_{\mathfrak{X}'} \overline{\text{tr}}_{\mathbf{X}_{\mathfrak{X}'}, \mathbf{X}'} \right) \circ \delta_{\mathbf{X}} : \bigoplus_{\mathbf{X}} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}}}(\mathbf{X}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{X}'} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{X}')$$

est injectif, où  $\mathbf{X}$  parcourt un système de représentants des éléments de  $\overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural})$  et  $\mathbf{X}'$  parcourt un système de représentants des éléments de  $\overline{\mathcal{E}}_0(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$ . D'où le résultat cherché: le morphisme  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural})$  est injectif. Par passage à la limite inductive, on obtient un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) = \varinjlim_{\mathbb{K}'} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}', \omega}^{\natural}),$$

où  $\mathbb{K}'$  parcourt les sous-extensions de degré fini de  $\overline{\mathbb{K}}/\tilde{\eta}(\mathbb{K})$ .

Rappelons que  $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{C}$  et  $\mathcal{H}_{y, \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_y \cdot \gamma_y$  où  $\gamma_y$  est le  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\gamma_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{C}$  de l'anneau  $\mathcal{H}_y$ . On a aussi  $\mathcal{H}_{y, \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C}$  et  $\gamma_y = \gamma_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C}$ , et comme tout  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ -module simple reste simple après tensorisation par  $\mathbb{C}$  (sur  $\overline{\mathbb{K}}$ ), l'application  $(\mathbf{V}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C}, \mathbf{u} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C})$  induit un morphisme injectif de  $\overline{\mathbb{K}}$ -espaces vectoriels  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{y, \omega}^{\natural})$ . En définitive, on a montré que le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{K}, \tilde{\eta}} \mathbb{C}$  induit un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{y, \omega}^{\natural}).$$

On a aussi une identification  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; y) = \mathcal{C}(\mathcal{H}_{y, \omega}^\natural)$ . D'où un morphisme injectif de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $\beta$  rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{C}}(G^\natural, \omega; Y) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{C}(G^\natural, \omega; y) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^\natural) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^\natural) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{y, \omega}^\natural) \end{array}$$

(puisque les flèches horizontales du bas sont injectives). Par construction  $\beta$  commute aux endomorphismes  ${}^\omega T_{P^\natural}$  pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , i.e. on a  $\beta \circ {}^\omega \tilde{T}_{P^\natural; Y} = {}^\omega T_{P^\natural; y} \circ \beta$ . Par suite on a

$$\beta \circ \mathbf{A}_{d; Y}^{\tilde{\mathcal{C}}} = \mathbf{A}_{d; y}^{\mathcal{C}} \circ \beta,$$

d'où le résultat.  $\square$

**REMARQUE.** — Pour chaque entier  $d'$  tel que  $d(G^\natural) \leq d' < d(M_\circ^\natural)$ , on a défini en 4.4 un opérateur  $\mathbf{B}_{d'}$ . Le même raisonnement entraîne que si  $Y$  est une sous-variété fermée irréductible de  $\Theta_1(G)$  telle que  $\mathbf{B}_{d'; y}^{\mathcal{C}} = 0$  pour  $y$  dans un ouvert dense de  $Y$ , alors  $\mathbf{B}_{d'; Y}^{\tilde{\mathcal{C}}} = 0$ ; où  $\mathbf{B}_{d'; y}^{\mathcal{C}}$  et  $\mathbf{B}_{d'; Y}^{\tilde{\mathcal{C}}}$  désignent, respectivement, le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; y)$  et le  $\mathbb{C}(Y)$ -endomorphisme de  $\tilde{\mathcal{C}}(G^\natural, \omega; Y)$  définis par  $\mathbf{B}_{d'}$  (en remplaçant  $\mathbf{A}_d$  par  $\mathbf{B}_{d'}$ ). On utilisera ce résultat dans le complément 6.23.  $\blacksquare$

**6.22. Le cran  $d(G^\natural)$  de la filtration topologique.** — Rappelons (proposition de 4.4) que  $\mathbf{A}_{d(G)}$  est un  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$  de la forme  $\text{id} + \sum_{P^\natural \neq G^\natural} \lambda(P^\natural) {}^\omega T_{P^\natural, \mathbb{C}}$  pour des nombres rationnels  $\lambda(P^\natural) = \lambda_{d(G)}(P^\natural)$  vérifiant

$$\ker \mathbf{A}_{d(G)} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^\natural, \omega), \quad \mathbf{A}_{d(G)} \circ \mathbf{A}_{d(G)} = \mathbf{A}_{d(G)}.$$

D'après 6.21, il induit un  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$  noté  $\mathbf{A}_{d(G)}^{\mathcal{C}}$ .

Pour  $y \in \Theta_{G^\natural, \omega}(G)$ , les conditions suivantes sont équivalentes:

- $y = \theta_G(\Pi^\circ)$  pour un  $\Pi \in \text{Irr}_0^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$ ;
- $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega; y) \not\subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^\natural, \omega)$ ;
- $\mathbf{A}_{d(G)}|_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega; y)} \neq 0$ .

Un élément de  $\Theta_{G^\natural, \omega}(G)$  qui vérifie ces trois conditions est dit  $(G^\natural, \omega)$ -discret, et (cf. 5.6) le sous-ensemble de  $\Theta_{G^\natural, \omega}(G)$  formé des éléments  $(G^\natural, \omega)$ -discrets est noté  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

Pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on note  ${}^{\omega^{-1}} \bar{T}_{P^\natural}$  le foncteur

$${}^{\omega^{-1}} \bar{i}_{P^\natural}^{G^\natural} \circ {}^{\omega^{-1}} \bar{r}_{P^\natural}^{G^\natural} : \mathfrak{R}(G^\natural, \omega^{-1}) \rightarrow \mathfrak{R}(G^\natural, \omega^{-1}).$$

Il induit un morphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$${}^{\omega^{-1}} \bar{T}_{P^\natural, \mathbb{C}} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}).$$

D'après la proposition de 2.11, pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$

$$({}^{\omega^{-1}} \bar{T}_{P^\natural}(\Pi))^\vee = {}^\omega \bar{i}_{P^\natural}^{G^\natural} \circ {}^\omega r_{P^\natural}^{G^\natural}(\Pi^\vee).$$

Soit  $w_0 \in W_G$  l'élément de longueur maximale. Il appartient à  $W_{G^\natural}$  (i.e. on a  $\theta(w_0) = w_0$ ), et  $w_0(\bar{P}^\natural) = n_{w_0} \cdot \bar{P}^\natural \cdot n_{w_0}^{-1}$  est un élément de  $\mathcal{P}(G^\natural)$ , disons  $Q^\natural$ . On a  $w_0(M_P^\natural) = M_Q^\natural$ , et pour  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega)$ , d'après le lemme 1 de 4.4, on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$

$${}^\omega i_{Q^\natural}^{G^\natural}(w_0 \Sigma) = {}^\omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma).$$

D'autre part on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$${}^{\omega}i_{Q^{\natural}}(w_0 \Sigma) = {}^{\omega}i_{w_0^{-1}(Q^{\natural})}(w_0 \Sigma) = {}^{\omega}i_{P^{\natural}}(\Sigma).$$

D'où l'on déduit l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$(*) \quad ({}^{\omega^{-1}}\overline{T}_{P^{\natural}}(\Pi))^{\vee} = {}^{\omega}T_{P^{\natural}}(\Pi^{\vee}).$$

Notons  $\overline{\mathbf{A}}_{d(G)}$  le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$  défini par

$$\overline{\mathbf{A}}_{d(G)} = \text{id} + \sum_{P^{\natural} \neq G^{\natural}} \lambda(P^{\natural}) {}^{\omega^{-1}}\overline{T}_{P^{\natural}, \mathbb{C}},$$

où les constantes  $\lambda(P^{\natural})$  sont celles qui apparaissent dans la décomposition de  $\mathbf{A}_{d(G)}$ . Pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$(**) \quad (\overline{\mathbf{A}}_{d(G)}(\Pi))^{\vee} = \mathbf{A}_{d(G)}(\Pi^{\vee}).$$

Le foncteur (contravariant)  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\Pi \mapsto \check{\Pi}$  induit un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  qui, d'après la proposition de 2.11 (point (1)), donne par restriction un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ . D'après (\*\*), le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\overline{\mathbf{A}}_{d(G)}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$  vérifie

$$\ker \overline{\mathbf{A}}_{d(G)} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega^{-1}), \quad \overline{\mathbf{A}}_{d(G)} \circ \overline{\mathbf{A}}_{d(G)} = \overline{\mathbf{A}}_{d(G)}.$$

L'involution  $y \mapsto \check{y}$  de  $\Theta(G)$  envoie  $\Theta_{G^{\natural}, \omega^{-1}}^{\text{dis}}(G)$  sur  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ . D'où le lemme suivant, d'après la remarque 2 de 6.14:

**LEMME.** — *Pour  $y \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- $y \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ ;
- $\overline{\mathbf{A}}_{d(G)}|_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y})} \neq 0$ ;
- $\mathbf{A}_{d(G); y}^{\mathbb{C}} \neq 0$ .

Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on définit comme ci-dessus le sous-ensemble  $\Theta_{M_P^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(M_P)$  de  $\Theta_{M_P^{\natural}, \omega}(M_P)$ .

Pour chaque paire d'entiers  $(d, d')$  telle que  $d \geq d(G)$  et  $d' \geq d(G^{\natural})$ , posons

$$\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d, d'}(G) = \bigcup_{P^{\natural}, d(M_P, M_P^{\natural}) = (d, d')} i_{G, P}(\Theta_{M_P^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(M_P))$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ , et

$$d(M_P, M_P^{\natural}) = (d(M_P), d(M_P^{\natural})).$$

On a donc

$$\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G) = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d(G), d(G^{\natural})}(G).$$

Pour chaque entier  $d' \geq d(G^{\natural})$ , on pose

$$\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G) = \bigcup_{d \geq d'} \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d, d'}(G) = \bigcup_{P^{\natural}, d(M_P^{\natural}) = d'} i_{G, P}(\Theta_{M_P^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(M_P))$$

où  $P^{\natural}$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ . Pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , l'ensemble

$$\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(\mathfrak{s}) = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G) \cap \Theta(\mathfrak{s})$$

est une sous-variété fermée de  $\Theta(\mathfrak{s})$ , et si elle est non vide, ses composantes irréductibles — il n'y en a qu'un nombre fini — sont aussi ses composantes connexes, et elles sont toutes

de dimension  $d'$ . Cela résulte du fait que pour chaque  $P \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tel que  $d(M_P^\natural) = d'$ , le morphisme  $\iota_{G,P} : \Theta(M_P) \rightarrow \Theta(G)$  est fini, et de la proposition de 5.2 pour  $M_P^\natural$ .

On s'intéresse au cran  $d' = d(G^\natural)$  de la filtration  $\Theta_{G^\natural, \omega}^\bullet(G)$  de  $\Theta_{G^\natural, \omega}(G)$ . Commençons par remarquer que pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ , on a

$$P^\natural \neq G^\natural \Leftrightarrow d(M_{P^\natural}^\natural) > d(G^\natural).$$

On a donc aussi

$$\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G) = \Theta_{G^\natural, \omega}^{d(G^\natural)}(G).$$

Rappelons que d'après la proposition de 5.2, pour  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ , l'ensemble

$$\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s}) = \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G) \cap \Theta(\mathfrak{s}),$$

s'il est non vide, est union finie de  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbites.

**PROPOSITION.** — *On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$*

$$\mathbb{F}^{d(G^\natural)}\mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \bigoplus_Y \iota^Y \overline{\mathbb{F}}^{d(G^\natural)}\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbites dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

*Démonstration.* — Posons  $d = d(G)$  et  $d' = d(G^\natural)$ . La somme à droite de l'égalité est bien une somme directe (car les  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbites dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$  sont disjointes), et d'après le lemme de 4.4, elle est contenue dans  $\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathbb{F}}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Il s'agit donc de montrer que pour qu'une sous-variété fermée irréductible  $\mathbb{Z}$ -stable  $Y$  de  $\Theta(G)$  de dimension  $d'$  contribue non trivialement à la somme dans le lemme de 4.4, il faut qu'elle soit contenue dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ . D'après le corollaire 2 de 6.20, il faut qu'elle soit contenue dans  $\Theta_1(G)$ . Supposons qu'elle est contenue dans  $\Theta_1(G) \setminus \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ . Alors d'après la proposition de 6.21 et le lemme ci-dessus, on a  $\mathbf{A}_{d; Y}^{\mathbb{C}} = 0$ . On en déduit (d'après la proposition de 6.17) que le  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_d^{\mathbb{C}}$  de  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$  est nul sur le sous-espace  $\iota^Y \overline{\mathbb{F}}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = \iota^Y \mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$  de  $\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ . Par suite  $\iota^Y \mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$  est contenu dans le sous-espace

$$\sum_{P^\natural \neq G^\natural} \omega_{i_{P^\natural}^{G^\natural}}(\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)) \subset \mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega).$$

Puisque pour  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$  tel que  $d(M_{P^\natural}^\natural) > d'$ , on a  $\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega) = 0$  (lemme de 6.12), et que pour  $P^\natural \neq G^\natural$ , on a  $d(M_{P^\natural}^\natural) > d'$  (remarque 4 de 4.3), la somme ci-dessus est nulle. D'où la proposition.  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — *On a l'égalité*

$$\mathbb{F}^{d(G^\natural)}\mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) (= \mathcal{C}(G^\natural, \omega)^{d(G^\natural)}).$$

*Démonstration.* — On pose toujours  $d = d(G)$  et  $d' = d(G^\natural)$ . Soit  $Y$  une  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbite dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$  et  $[\Pi, u]$  un élément de  $\iota^Y \overline{\mathbb{F}}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y)$ . Pour tout  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural) \setminus \{G^\natural\}$ , puisque  $\omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural}}([\Pi, u])$  appartient à  $\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$  et  $d(M_{P^\natural}^\natural) > d'$  (remarque 4 de 4.3), d'après le lemme de 6.12, on a  $\omega_{r_{G^\natural}^{P^\natural}}([\Pi, u]) = 0$  dans  $\mathcal{C}(M_{P^\natural}^\natural, \omega)$ . D'où l'inclusion

$$\mathbb{F}^{d'}\mathcal{C}(G^\natural, \omega) \subset \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega).$$

Réciproquement, soit  $[\Pi, u]$  un élément de  $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , et soit  $k$  le plus petit entier  $\geq d'$  tel que  $[\Pi, u] \in F^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Supposons (par l'absurde)  $k > d'$ . D'après le lemme de 6.14 et le corollaire 2 de 6.20, on a

$$[\Pi, u] \equiv \sum_{i=1}^n [\Pi_i, u_i] \pmod{F^{k-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)},$$

où  $[\Pi_i, u_i]$  est un élément de  $\iota^{Y_i} F^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y_i)$  pour une sous-variété fermée irréductible  $Y_i$  de  $\Theta_1(G)$  de dimension  $k$ . Puisque toutes les sous-variétés fermées irréductibles de  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$  sont de dimension  $d'$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $Y_i \cap \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G) \neq Y_i$ . On en déduit (comme dans la démonstration de la proposition) que  $\mathbf{A}_d^{\mathbb{C}}$  est nul sur le sous-espace  $\iota^{Y_i} \overline{F}^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y_i)$  de  $\overline{F}^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Comme  $\mathbf{A}_d^{\mathbb{C}}([\Pi, u]) = [\Pi, u]$ , cela entraîne que  $[\Pi, u]$  appartient à  $F^{k-1}(G^{\natural}, \omega)$ ; contradiction. D'où l'inclusion

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \subset F^{d'}(G^{\natural}, \omega),$$

ce qui achève la démonstration du corollaire.  $\square$

**NOTATION.** — Pour toute sous-variété fermée irréductible  $Y$  de  $\Theta_1(G)$  de dimension  $d(G^{\natural})$  — en particulier pour toute  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbite dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$  —, on note  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  le sous- $\mathfrak{J}(G)$ -module

$$\iota^Y \overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) = \iota^Y F^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) = \iota^Y \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$$

de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ .

**COROLLAIRE 2.** — On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$

$$\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_Y \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

**6.23. Complément: raffinement du lemme de 6.14.** — Ce numéro, qui justifie la remarque 3 de 6.12, est une variante du précédent (on remplace l'opérateur  $\mathbf{A}_{d(G)} = \mathbf{B}_{d(G^{\natural})}$  par un opérateur  $\mathbf{B}_{d'}$ ,  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\circ}^{\natural})$ ). Il n'est pas vraiment nécessaire à notre propos, mais pourra nous servir dans un travail ultérieur.

Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G)$ , on définit comme pour  $G$  l'involution  $x \mapsto \check{x}$  de  $\Theta(M_P)$ . Pour  $x \in \Theta(M_P)$  et  $y = \iota_{G, P}(x)$ , on a  $\check{y} = \iota_{G, P}(\check{x})$ . Par suite, pour chaque entier  $d'$  tel que  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\circ}^{\natural})$ , l'involution  $y \mapsto \check{y}$  envoie  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G)$  sur  $\Theta_{G^{\natural}, \omega^{-1}}^{d'}(G)$ . Rappelons que le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{B}_{d'}$  défini dans la variante de 4.4 vérifie

$$\ker \mathbf{B}_{d'} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{d'}, \quad \mathbf{B}_{d'} \circ \mathbf{B}_{d'} = \mathbf{B}_{d'}.$$

Pour  $y \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , on a

$$y \in \bigcup_{i \leq d'} \Theta_{G^{\natural}, \omega}^i(G) \Leftrightarrow \mathbf{B}_{d'}|_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; y)} \neq 0.$$

Rappelons que pour  $y \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{B}_{d'; y}$  de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; y)$  définit un  $\mathbb{C}$ -endomorphisme  $\mathbf{B}_{d'; y}^{\mathbb{C}}$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; y)$ .

**LEMME.** — Soit  $d'$  un entier tel  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\circ}^{\natural})$ . Pour  $y \in \Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , on a

$$y \in \bigcup_{i \leq d'} \Theta_{G^{\natural}, \omega}^i(G) \Leftrightarrow \mathbf{B}_{d'; y}^{\mathbb{C}} \neq 0.$$

*Démonstration.* — Notons  $\overline{B}_{d'}$  le  $\mathbb{C}$ -endomorphisme de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$  défini par

$$\overline{B}_{d'} = \text{id} + \sum_{P^{\natural} \neq G^{\natural}} \mu_{d'}(P^{\natural})^{\omega^{-1}} \overline{T}_{P^{\natural}, \mathbb{C}},$$

où les constantes  $\mu_{d'}(P^{\natural})$  sont celles qui apparaissent dans la décomposition de  $B_{d'}$  (cf. 4.4, variante). D'après l'égalité (\*) de 6.22, pour  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$(\overline{B}_{d'}(\Pi))^{\vee} = B_{d'}(\check{\Pi}).$$

On en déduit comme en 6.22 (lemme) que les conditions suivantes sont équivalentes:

- $y \in \bigcup_{i \leq d'} \Theta_{G^{\natural}, \omega}^i(G)$ ;
- $\overline{B}_{d'}|_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; \check{y})} \neq 0$ ;
- $B_{d'; y}^{\mathbb{C}} \neq 0$ ;

ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

**PROPOSITION.** — *Soit  $d'$  un entier tel  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\circ}^{\natural})$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$*

$$\overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_Y \iota^Y \overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$$

où  $Y$  parcourt les sous-variétés fermées irréductibles de  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G)$  de dimension  $d'$ .

*Démonstration.* — On raisonne comme dans la démonstration de la proposition de 6.22. Puisque les composantes irréductibles de  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G)$  sont disjointes et qu'elles sont toutes de dimension  $d'$ , la somme à droite de l'égalité est directe, et elle est contenue dans celle à gauche. On est donc ramené à prouver, comme dans la démonstration de la proposition de 6.22, que pour qu'une sous-variété fermée irréductible de dimension  $d'$  de  $\Theta_1(G)$  contribue non trivialement à la somme dans le lemme de 6.14, il faut qu'elle soit contenue dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G)$ . Supposons qu'elle ne l'est pas. Alors  $B_{d'; y}^{\mathbb{C}} = 0$  pour  $y$  dans un ouvert dense de  $Y$ , et donc  $B_{d'; Y}^{\mathbb{C}} = 0$  d'après la remarque de 6.21. On en déduit (d'après la proposition de 6.17) que le  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme  $B_{d'}$  de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$  est nul sur le sous-espace  $\iota^Y \overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$  de  $\overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Par suite  $\iota^Y \overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$  est contenu dans le sous-espace

$$\sum_{d(M_P^{\natural}) > d'} \omega \cdot i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}} (\overline{F}^{d'} \mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)) \subset \overline{F}^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega).$$

Puisque pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tel que  $d(M_P^{\natural}) > d'$ , on a  $F^{d'} \mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega) = 0$  (lemme de 6.12), la somme ci-dessus est nulle. D'où la proposition.  $\square$

**COROLLAIRE.** — *Soit  $d'$  un entier tel  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\circ}^{\natural})$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$*

$$F^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^{d'}.$$

*Démonstration.* — Soit  $[\Pi, u]$  est élément de  $F^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Puisque pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , on a

$$\dim \text{Supp}(\omega r_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Pi)^{\circ}) = \dim \text{Supp}(\Pi^{\circ}) \leq d',$$

si  $d(M_P^{\natural}) > d'$ , alors (lemme de 6.12)  $\omega r_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}([\Pi, u]) = 0$  dans  $\mathcal{C}(M_P^{\natural}, \omega)$ . D'où l'inclusion

$$F^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) \subset \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^{d'}.$$

Réciproquement, soit  $[\Pi, u]$  un élément de  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^{d'}$ , et soit  $k$  le plus petit entier  $\geq d'$  tel que  $[\Pi, u] \in F^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Supposons (par l'absurde)  $k > d'$ . D'après le lemme de 6.14 et le corollaire 2 de 6.20, on a

$$[\Pi, u] \equiv \sum_{i=1}^n [\Pi_i, u_i] \pmod{F^{k-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)},$$

où  $[\Pi_i, u_i]$  est un élément de  $\iota^{Y_i} F^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y_i)$  pour une sous-variété fermée irréductible  $Y_i$  de  $\Theta_1(G)$  de dimension  $k$ . Puisque pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $Y_i \cap \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{d'}(G) \neq Y_i$ , on obtient comme dans la démonstration de la proposition de 6.22 (grâce à la remarque de 6.21), que  $B_{d'}$  est nul sur le sous-espace  $\iota^{Y_i} \overline{F}^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y_i)$  de  $\overline{F}^k \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Comme  $B_{d'}([\Pi, u]) = [\Pi, u]$ , cela entraîne que  $[\Pi, u]$  appartient à  $F^{k-1} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ ; contradiction. D'où l'inclusion

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)^{d'} \subset F^{d'} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega),$$

et le corollaire.  $\square$

**6.24. L'application d'Euler–Poincaré sur la partie discrète.** — Rappelons (6.9) que l'application d'Euler–Poincaré est un morphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\text{EP} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^{\star} \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega),$$

où  $B^{\star}$  est le sous-espace vectoriel de  $B = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})]$  — l'algèbre affine du tore complexe  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$  — formé des  $b$  tels que  $b(\lambda\Psi) = \lambda b(\Psi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$  et tout  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ . L'image de EP est, par définition, contenue dans  $F^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . On rappelle aussi l'inclusion (lemme de 6.9)

$$\mathcal{K}_{\text{EP}} = \langle \Psi\Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \subset \ker \text{EP}.$$

**LEMME.** — *On a l'inclusion*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^{\star} \subset \ker \text{EP}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ . Écrivons

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \omega_{i_{P_i^{\natural}}}(\Sigma_i), \quad P_i^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}, \Sigma_i \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_{P_i^{\natural}}, \omega^{-1}).$$

Pour  $i = 1, \dots, n$  et  $b \in B^{\star}$ , on a

$$\text{EP}(\omega_{i_{P_i^{\natural}}}(\Sigma_i) \otimes b) = \omega_{i_{P_i^{\natural}}}([\check{\Sigma}_i]_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0})$$

où  $(\check{\Sigma}_i)_{\overline{B}, \delta_0}$  est la  $\omega$ -représentation de  $M_{P_i^{\natural}}$  d'espace  $V_{\check{\Sigma}_i} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{B}$  définie comme en 6.9. Comme

$$\dim \text{Supp}((\check{\Sigma}_i)_{\overline{B}, \delta_0}^{\circ}) = d(G^{\natural})$$

et (remarque 4 de 4.3)  $d(G^{\natural}) < d(M_{P_i^{\natural}})$ , d'après le lemme de 6.12 on a  $[(\check{\Sigma}_i)_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}] = 0$  dans  $\mathcal{C}(M_{P_i^{\natural}}, \omega)$ , et  $\omega_{i_{P_i^{\natural}}}([\check{\Sigma}_i]_{\overline{B}, \delta_0}, b_{\delta_0}) = 0$  dans  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Par suite  $\text{EP}(\Pi \otimes b) = 0$  pour tout  $b \in B^{\star}$ , et le lemme est démontré.  $\square$

Rappelons (6.22, notation) que pour toute sous-variété fermée irréductible  $Y$  de  $\Theta_1(G)$  de dimension  $d(G^{\natural})$ , on a noté  $\mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega)$  le sous- $\mathfrak{Z}(G)$ -module  $\iota^Y \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$  de  $F^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ . Rappelons aussi (5.6) que pour toute sous-ensemble  $Y$  de  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , on a noté  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  la projection de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; y)$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ .

D'après 6.22, pour toute sous-variété fermée irréductible  $Y$  de  $\Theta_1(G)$  de dimension  $d(G^{\natural})$ , les conditions suivantes sont équivalentes:

- $Y \subset \Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ ;
- $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega; Y) \neq 0$ ;
- $\mathcal{C}_Y(G^\natural, \omega) \subset \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$ .

**PROPOSITION.** — *Soit  $Y$  une  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbite dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ , et soit  $y \in Y$ . L'application d'Euler–Poincaré EP induit un morphisme surjectif*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* \rightarrow \mathcal{C}_Y(G^\natural, \omega).$$

*Démonstration.* — On procède comme dans la démonstration de la proposition 5.11 de [D]. Posons  $Y' = \mathfrak{P}^0(G^\natural)$ , et soit  $\phi : Y' \rightarrow Y$  le morphisme étale de variétés algébriques affines donné par  $\phi(\psi) = \psi \cdot y$ . Ce morphisme est un revêtement galoisien de groupe de Galois le stabilisateur de  $y$  dans  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ , disons  $S$ . Notons que  $S$  est un groupe fini qui ne dépend pas du choix de  $y$  dans  $Y$ . Posons  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(Y)$  et  $\mathbb{K}' = \mathbb{C}(Y')$ . Le comorphisme  $\phi^\sharp : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[Y']$  induit un morphisme injectif de corps  $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}'$  qui fait de  $\mathbb{K}'$  une extension galoisienne finie de  $\mathbb{K}$  de groupe de Galois  $S$ . Posons  $\iota_{Y'} = (\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}') \circ \iota_Y : \mathfrak{Z}(G) \rightarrow \mathbb{K}'$ . Comme en 6.17, le morphisme de  $\mathbb{K}'$ -algèbres

$$\iota_{Y'} \otimes_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{K}'} : \mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}') \rightarrow \mathbb{K}'$$

définit un point  $\mathbb{K}'$ -rationnel de  $\Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$ , que l'on note  $y_{Y'}$ .

Soit  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}'; y)$  la catégorie des  $(G, \mathbb{K}')$ -modules de longueur finie  $\pi'$  tels que l'action de  $\mathfrak{Z}(G, \mathbb{K}')$  sur  $\pi'$  se factorise à travers  $\iota_{Y'} \otimes_{\mathbb{C}} \text{id}_{\mathbb{K}'}$ . Soit aussi  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'})$  la catégorie des  $(G^\natural, \omega, \mathbb{K}')$ -modules  $\Pi'$  tels que  $\Pi'^{\circ}$  est un objet de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}'; y)$ . On a défini en 6.9 un “caractère universel”

$$\overline{\varphi} : G \rightarrow \overline{B} = \mathbb{C}[Y']$$

et une  $(\omega = 1)$ -représentation  $\varphi_{\delta_0} : G^\natural \rightarrow \overline{B}$  de  $G^\natural$  telle que  $\varphi_{\delta_0}^{\circ} = 1$ . Notons  $\overline{\varphi}_{\mathbb{K}'} : G \rightarrow \mathbb{K}'$  et  $\varphi_{\mathbb{K}', \delta_0} : G \rightarrow \mathbb{K}'$  les applications  $\overline{\varphi}$  et  $\varphi_{\delta_0}$  composées avec l'injection canonique  $\mathbb{C}[Y'] \hookrightarrow \mathbb{K}'$ . Pour tout caractère  $\xi$  de  $G$  et toute  $\xi$ -représentation  $\Pi$  de  $G^\natural$ , on définit comme en loc. cit. une  $\xi$ -représentation  $\Pi_{\mathbb{K}', \delta_0} = \Pi \otimes \varphi_{\mathbb{K}', \delta_0}$  de  $G^\natural$  d'espace  $V_{\Pi, \mathbb{K}'} = V_{\Pi} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}'$ . La représentation de  $G$  sous-jacente est  $\Pi_{\mathbb{K}', \delta_0}^{\circ} = \Pi^{\circ} \otimes \overline{\varphi}_{\mathbb{K}'}$  — un  $(G, \mathbb{K}')$ -module. Si la représentation  $\Pi^{\circ}$  de  $G$  est admissible, alors  $\Pi_{\mathbb{K}', \delta_0}$  est un  $(G^\natural, \xi, \mathbb{K}')$ -module admissible. Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$  de caractère infinitésimal  $\theta_G(\pi) = y$ , alors  $\pi \otimes \overline{\varphi}_{\mathbb{K}'}$  est un  $(G, \mathbb{K}')$ -module  $\mathbb{K}'$ -irréductible de caractère infinitésimal  $\theta_{G, \mathbb{K}'}(\pi \otimes \overline{\varphi}_{\mathbb{K}'}) = y_{Y'}$ . Par suite si  $\Pi$  est une  $\omega^{-1}$ -représentation  $G$ -irréductible de  $G^\natural$  de caractère infinitésimal  $\theta_G(\Pi^{\circ}) = \check{y}$ , alors  $\check{\Pi}_{\mathbb{K}', \delta_0}$  est un  $(G^\natural, \omega, \mathbb{K}')$ -module  $(G, \mathbb{K}')$ -irréductible de caractère infinitésimal  $\theta_{G, \mathbb{K}'}(\check{\Pi}_{\mathbb{K}', \delta_0}^{\circ}) = y_{Y'}$ . D'après la remarque de 6.16, on obtient (comme dans la démonstration de [D, prop. 4.18]) que l'application  $\pi \mapsto \check{\pi} \otimes \overline{\varphi}_{\mathbb{K}'}$  induit un isomorphisme de groupes [D, 4.19]

$$\mathcal{G}(G; \check{y}) \rightarrow \mathcal{G}(G, \mathbb{K}'; y_{Y'}).$$

On obtient aussi que l'application

$$\begin{array}{ccc} \xi_{\mathbb{K}'} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{y}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}' & \rightarrow & \mathcal{C}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'}) \\ \Pi \otimes z' & \mapsto & [\check{\Pi}_{\mathbb{K}', \delta_0}, z'] \end{array}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{K}'$ -espaces vectoriels; où  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'}) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'}))$  est le  $\mathbb{K}'$ -espace vectoriel défini comme en 6.20 (en remplaçant  $\mathbb{K}$  par  $\mathbb{K}'$ ). Cela implique en particulier que les propriétés suivantes sont vérifiées:

- tout objet irréductible de  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}'; y_{Y'})$  est absolument irréductible;
- pour tout objet  $(G, \mathbb{K}')$ -irréductible  $\Pi'$  de  $\mathfrak{R}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'})$ , il existe un sous- $\mathbb{C}[Y']$ -module  $G^\natural$ -stable  $\mathcal{V}'$  de  $V_{\Pi'}$  qui engendre  $V_{\Pi'}$  sur  $\mathbb{K}'$ .

On reprend maintenant les notations de la démonstration de la proposition de 6.17:  $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_s \otimes_{\mathbb{3}_s} \mathbb{C}[Y]$ ,  $\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_Y \cdot \gamma_Y$ ,  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{C}(Y)$  et  $\mathcal{H}_{\mathbb{K},\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}} \cdot \gamma_{\mathbb{K}}$ . Soit  $\mathcal{H}_{Y'} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y], \phi^{\sharp}} \mathbb{C}[Y']$ ,  $\gamma_{Y'} = \gamma_Y \otimes \text{id}$  et  $\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{Y'} \cdot \gamma_{Y'}$ . Soit aussi  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'} = \mathcal{H}_{Y'} \otimes_{\mathbb{C}[Y']} \mathbb{K}'$  et  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}'} \cdot \gamma_{\mathbb{K}'}$ , où  $\gamma_{\mathbb{K}'}$  désigne le  $\mathbb{K}'$ -automorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$  prolongeant  $\gamma_{Y'}$ . La catégorie  $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}'; y_{Y'})$  est équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}'})$  formée des  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -modules de type fini, et la catégorie  $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'})$  est équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural})$  formée des  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}$ -modules non dégénérés qui sont de type fini comme  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -modules. D'après ce qui précède on a:

- la  $\mathbb{K}'$ -algèbre  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$  est *scindée*, au sens où pour tout  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -module simple  $\mathbf{V}'$ , on a  $\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}') = \mathbb{K}'$ ;
- tout  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}$ -module non dégénéré  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -simple possède un  $\mathbb{C}[Y']$ -réseau  $\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}$ -stable.

D'où les identifications

$$\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}'; y_{Y'}) = \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}) = \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural});$$

où  $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}) = \mathcal{C}(\widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}))$  est défini comme en 6.17.

On peut décrire  $\overline{\mathbb{F}}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  comme dans la démonstration de la proposition de 6.17. D'après le lemme 2 de 6.19, on a une identification

$$\overline{\mathbb{F}}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}) = \bigoplus_{\mathbf{V}'} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}^*(\mathbf{V}')$$

où  $\mathbf{V}'$  parcourt l'ensemble, disons  $\overline{\mathcal{E}}'_0$ , des  $\mathbb{C}^{\times}$ -orbites de classes d'isomorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}$ -modules non dégénérés  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -simples, et  $\overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}^*(\mathbf{V}')$  est l'image dans  $\overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}')$  du sous-groupe  $\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}^*(\mathbf{V}')$  de  $\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}')$  engendré par les images des morphismes

$$\text{End}_{\mathcal{H}_{Y'}}(\mathcal{V}') \rightarrow \text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}'), u \mapsto u \otimes \text{id}_{\mathbb{K}'}$$

pour  $\mathcal{V}'$  parcourant les  $\mathbb{C}[Y']$ -réseaux  $\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}$ -stables dans  $\mathbf{V}'$ . On a aussi

$$\overline{\mathbb{F}}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}) \otimes_{\mathbb{C}[Y']} \mathbb{K}' = \mathcal{C}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}) = \bigoplus_{\mathbf{V}' \in \overline{\mathcal{E}}'_0} \overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}').$$

Puisque la  $\mathbb{K}'$ -algèbre  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$  est scindée, pour tout  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}',\omega}^{\natural}$ -module non dégénéré  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}$ -simple  $\mathbf{V}'$ , on a

$$\overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}') = \text{End}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}(\mathbf{V}') = \mathbb{K}'.$$

Comme  $\overline{\text{End}}_{\mathcal{H}_{\mathbb{K}'}}^*(\mathbf{V}')$  est entier sur  $\mathbb{C}[Y']$ , et que  $\mathbb{C}[Y']$  est intégralement clos dans  $\mathbb{K}'$ , on obtient, via l'identification  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y') = \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$ , que l'application

$$\begin{aligned} \xi_{Y'} : \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \tilde{y}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y'] &\rightarrow \overline{\mathbb{F}}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y') \\ \Pi \otimes \tilde{b} &\mapsto [\overline{\Pi}_{\mathbb{K}', \delta_0}, \tilde{b}] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{C}[Y']$ -modules.

Reste à déduire le résultat par descente à partir de  $\xi_{Y'}$ . Tout élément  $\sigma$  de  $S$  induit par restriction un  $\mathbb{C}[Y]$ -automorphisme de  $\mathbb{C}[Y']$ , et  $\sigma_{Y'} = \text{id} \otimes \sigma$  est un  $\mathbb{C}[Y]$ -automorphisme de  $\mathcal{H}_{Y'} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{C}[Y']$ . D'où une action de  $S$  sur  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  définie comme suit: pour  $[V', u'] \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  et  $\sigma \in S$ , on pose

$$\sigma[V', u'] = [V'_{\sigma}, u]$$

où  $V'_{\sigma} = V'_{\sigma_{Y'}}$  désigne le  $\mathcal{H}_{Y'}$ -module  $V'$  tordu par  $\sigma_{Y'}^{-1}$  comme en 6.1. Notons que puisque  $\gamma_{Y'} \circ \sigma_{Y'} = \sigma_{Y'} \circ \gamma_{Y'}$ , l'isomorphisme  $\gamma_{V'}$  de  $V'_{\sigma_{Y'}}$  sur  $V'$  est aussi un isomorphisme de

$(V'_\sigma)_{\gamma'_{Y'}}$  sur  $V'_\sigma$ . L'action de  $S$  sur  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  ainsi définie est semi-linéaire pour la structure de  $\mathbb{C}[Y']$ -module sur  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  donnée par  $z \cdot [V', u'] = [V', z_{V'} \circ u']$ ,  $z \in \mathbb{C}[Y']$ : on a

$$\sigma(z \cdot [V', u']) = \sigma(z) \cdot \sigma[V', u'], \quad z \in \mathbb{C}[Y'], \sigma \in S.$$

Le foncteur  $- \otimes_{\mathbb{C}[Y']} \mathbb{C}[Y']$  induit un morphisme de  $\mathbb{C}[Y']$ -module

$$\delta : \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}), [V, u] \mapsto [V \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{C}[Y'], u \otimes \text{id}]$$

qui, d'après la démonstration de [D, prop. 5.11] (page 206), est un isomorphisme de  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$  sur le sous- $\mathbb{C}[Y]$ -modules  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})^S$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  formé des éléments fixés par  $S$ . Le  $\mathbb{C}[Y']$ -module  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$  est, tout comme  $\mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$ , muni d'une filtration topologique  $F^\bullet \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$ , qui fait de  $\delta$  un morphisme filtré: pour chaque entier  $i \leq d(G^{\natural})$ , on a  $\delta(F^i \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})) \subset F^i \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural})$ . Comme dans la démonstration de [D, prop. 5.11] (page 206), on obtient que  $\delta$  induit par passage aux quotients un isomorphisme de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$\overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural}) \xrightarrow{\simeq} (\overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}))^S.$$

Via l'identification  $\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) = \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y,\omega}^{\natural})$ , cet isomorphisme composé avec la restriction de  $\xi_{Y'}^{-1}$  à  $(\overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(\mathcal{H}_{Y',\omega}^{\natural}))^S$ , donne un morphisme injectif de  $\mathbb{C}[Y]$ -modules

$$\mu : \overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y'].$$

Identifions  $B^*$  à  $\overline{B} = \mathbb{C}[Y']$  via l'application  $b \mapsto b_{\delta_0}$  (cf. 6.9). Puisque le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* & \xrightarrow{\text{EP}} & \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega) \\ \mu \uparrow & & \uparrow \iota^Y \\ \overline{F}^{d(G^{\natural})} \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) & \longleftarrow & \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \end{array}$$

est commutatif, la flèche du haut est surjective.  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — *Soit  $Y$  une  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbite dans  $\Theta_{G^{\natural},\omega}^{\text{dis}}(G)$ . L'application d'Euler–Poincaré EP induit un morphisme surjectif*

$$(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*) / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{C}_Y(G^{\natural}, \omega),$$

où  $\Pi, b, \Psi$  parcourt les éléments de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y})$ ,  $B^*$ ,  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ .

**COROLLAIRE 2.** — *L'application d'Euler–Poincaré EP induit un morphisme surjectif*

$$(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*) / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

où  $\Pi, b, \Psi$  parcourt les éléments de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1})$ ,  $B^*$ ,  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^{\natural})$ .

**REMARQUE.** — On verra plus loin (6.25) que le morphisme surjectif du corollaire 1, et donc aussi celui du corollaire 2, sont en fait des isomorphismes. En d'autres termes, on a

$$\text{EP}(\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) \otimes_{\mathbb{C}} B^*) = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

et

$$\ker \text{EP} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega) + \mathcal{K}_{\text{EP}}. \quad \blacksquare$$

**6.25. Injectivité dans le théorème de 4.8.** — Rappelons (4.8) que  $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  est le sous-espace de  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  formée par les images dans  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  des fonctions  $\phi \in \mathcal{H}(G^{\natural})$  qui sont  $\omega$ -cuspidales. Rappelons aussi qu'on a défini en 6.7 (corollaire) un isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $[\Pi, u]' \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]'}$ .

**LEMME 1.** — *Soit  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\phi$  un représentant de  $\bar{\phi}_{[\Pi, u]}' \in \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$  dans  $\mathcal{H}(G^{\natural})$ , et  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ . Posons  $[\Sigma, v]' = {}^{\omega}r_{G^{\natural}}^{P^{\natural}}([\Pi, u]') \in \mathcal{C}'(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega)$ . Si le théorème de densité spectrale (ie. l'injectivité dans le théorème de 3.1) est vrai pour  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ , alors  ${}^{\omega}\phi_{P^{\natural}, K_0}$  est un représentant de  $\bar{\phi}_{[\Sigma, v]}' \in \overline{\mathcal{H}}(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega)$  dans  $\mathcal{H}(M_{P^{\natural}}^{\natural})$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\bar{\varphi}$  l'image de la fonction  ${}^{\omega}\phi_{P^{\natural}, K_0}$  dans  $\overline{\mathcal{H}}(M_{P^{\natural}}^{\natural}, \omega)$ . Soit  $\Sigma'$  une  $\omega$ -représentation  $G$ -irréductible  $\Sigma'$  de  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ , et posons  $\Pi' = {}^{\omega}i_{P^{\natural}}^{G^{\natural}}(\Sigma')$ . D'après la proposition de 4.7, on a l'égalité

$$\Theta_{\Sigma'}(\bar{\varphi}) = \Theta_{\Pi'}(\bar{\phi}_{[\Pi, u]}' ),$$

et d'après l'isomorphisme de réciprocity de Frobenius (proposition de 2.10, (3)), on a

$$\begin{aligned} \Theta_{\Pi'}(\bar{\phi}_{[\Pi, u]}' ) &= \text{tr}(u_{\Pi'}^{\Pi'}, \text{Hom}_G(\Pi^{\circ}, \Pi'^{\circ})) \\ &= \text{tr}(v_{\Sigma'}^{\Sigma'}, \text{Hom}_{M_{P^{\natural}}}(\Sigma^{\circ}, \Sigma'^{\circ})) = \Theta_{\Sigma'}(\bar{\phi}_{[\Sigma, v]}' ). \end{aligned}$$

On a donc

$$\Theta_{\Sigma'}(\bar{\varphi} - \bar{\phi}_{[\Sigma, v]}' ) = 0.$$

On en déduit que si le théorème de densité spectrale est vrai pour  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ , alors  $\bar{\varphi} = \bar{\phi}_{[\Sigma, v]}'$ .  $\square$

**LEMME 2.** — *Si pour tout  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ , le théorème de densité spectrale est vrai pour  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ , alors l'isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels (6.7)*

$$\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \xrightarrow{\simeq} \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$$

*induit par restriction un isomorphisme*

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \xrightarrow{\simeq} \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega).$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence directe du lemme 1.  $\square$

On peut maintenant démontrer l'injectivité dans le théorème de 4.8. Par récurrence sur la dimension de  $G$ , on peut supposer ce résultat d'injectivité vrai pour tous les sous-espaces tordus  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$  — cf. la remarque de 4.8. Puisque la surjectivité dans le théorème de 4.8 a déjà été démontrée (5.7), d'après 4.9 le théorème de 3.1 est vrai pour tous les sous-espaces tordus  $M_{P^{\natural}}^{\natural}$ ,  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}) \setminus \{G^{\natural}\}$ . En particulier d'après le lemme 2, on a un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u]' \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]'}$$

Pour toute  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbite  $Y$  dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G^{\natural})$ , notons  $\overline{\mathcal{H}}_Y(G^{\natural}, \omega) \subset \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  l'image de  $\mathcal{C}'_Y(G^{\natural}, \omega)$  par la projection  $\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $[\Pi, u]' \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]'}$ . D'après le corollaire 2 de 6.22, on a la décomposition

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \sum_Y \overline{\mathcal{H}}_Y(G^{\natural}, \omega)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .

Rappelons (5.6) que pour toute partie  $Y$  de  $\Theta(G)$ , on a noté  $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$  le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)^*$  formé des restrictions à  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y)$  des éléments de  $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ . Soit

$Y$  une  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ -orbite dans  $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}(G)$ . D'après 5.7 et le corollaire 1 de 6.24, la composée de l'application d'Euler–Poincaré EP et de la transformée de Fourier  $\phi \mapsto \Phi_\phi$  induit un morphisme surjectif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* / \langle \Psi\Pi \otimes b - \Pi \otimes b_\Psi \rangle & \xrightarrow{\text{EP}} & \mathcal{C}_Y(G^\natural, \omega) \\ & & \downarrow \\ & & \overline{\mathcal{H}}_Y(G^\natural, \omega) \xrightarrow{\Phi_\cdot} \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^\natural, \omega), \end{array}$$

où  $\Pi, b, \Psi$  désignent des éléments de  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{Y})$ ,  $B^*$ ,  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  respectivement.

Posons  $\mathcal{G}_{\check{Y}} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{Y})$  et  $\mathcal{G}_Y = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega; Y)$ . L'action du tore complexe  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{G}_{\check{Y}}$  est algébrique: elle provient par passage au quotient de l'action (algébrique) de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega; \check{Y})$ . D'où une action algébrique de  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  sur  $\mathcal{G}_{\check{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*$ , donnée par

$$\Psi(\Pi \otimes b) = \Psi\Pi \otimes b_{\Psi^{-1}}$$

pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ ,  $\Pi \in \mathcal{G}_{\check{Y}}$  et  $b \in B^*$ . Par définition,  $\mathcal{G}_{\check{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^* / \langle \Psi\Pi \otimes b - \Pi \otimes b_\Psi \rangle$  est l'espace  $(\mathcal{G}_{\check{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)}$  des coinvariants pour cette action. D'autre part,  $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  est le sous-espace de  $\mathcal{G}_{\check{Y}} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, \mathbb{C})$  formé des formes linéaires  $\Phi$  telles que pour tout  $\Pi \in \theta_{G^\natural, \omega}^{-1}(Y)$ , la fonction  $\Psi \mapsto \Phi(\Psi\Pi)$  sur  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  est régulière; cette fonction est alors un élément de  $B^*$ , noté  $u_\Phi(\Pi)$ . D'où un morphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*), \quad \Phi \mapsto u_\Phi.$$

On a une action algébrique du tore  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$  sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*)$ , donnée par

$$(\Psi \cdot u)(\Pi) = u(\Psi^{-1}\Pi)_\Psi$$

pour  $\Psi \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)$ ,  $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*)$  et  $\Pi \in \mathcal{G}_Y$ . Par définition, l'application  $\Phi \mapsto u_\Phi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^\natural, \omega)$  sur le sous-espace  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)} \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*)$  des invariants pour cette action. Au bout du compte, on obtient un morphisme surjectif

$$(*) \quad u_\cdot \circ \Phi_\cdot \circ q \circ \text{EP} : (\mathcal{G}_{\check{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_Y, B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)},$$

où  $q$  désigne la projection  $\mathcal{C}(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ ,  $[\Pi, u] \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]}$ .

**LEMME 3.** — *Le morphisme (\*) est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Choisissons un point  $y \in Y$ , et — comme dans la démonstration de la proposition de 6.24 — notons  $S$  le stabilisateur de  $y$  dans  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)$ . Posons

$$\mathcal{G}_{\check{y}} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega^{-1}; \check{y}), \quad \mathcal{G}_y = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega; y).$$

On a

$$S(\check{y}) = S(y),$$

$$(\mathcal{G}_{\check{Y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)} = (\mathcal{G}_{\check{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S$$

et

$$\text{Hom}(\mathcal{G}_Y, B^*)_{\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S.$$

En particulier si  $\mathfrak{P}^0(G^\natural) = \{1\}$  — i.e. si  $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural) = \mathbb{C}^\times$  —, alors  $Y = \{y\}$  et les espaces à gauche et à droite de la flèche dans (\*) sont isomorphes respectivement à  $\mathcal{G}_{\check{y}}$  et à  $\mathcal{G}_y^*$ . Comme ces deux espaces ont même dimension (finie) sur  $\mathbb{C}$ , le morphisme surjectif (\*) est un isomorphisme. D'où le lemme dans ce cas. En général,  $\overline{B}_1 = \overline{B}^S$  est l'algèbre affine du groupe quotient  $\mathfrak{P}^0(G^\natural)/S$ . La structure de  $\overline{B}$ -module sur  $B^*$  induit sur les espaces

$(\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S$  une structure de  $\bar{B}_1$ -module. Puisque le morphisme quotient  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$  est fini, et que les  $\bar{B}$ -modules  $\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)$  sont de type fini, ils sont de type fini comme  $\bar{B}_1$ -modules. Par suite les  $\bar{B}_1$ -modules  $(\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S$  sont eux aussi de type fini. D'après la remarque 3 de 6.8, cela fait du morphisme (\*) un morphisme de  $\bar{B}_1$ -modules. Soit  $\psi \in \mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$  correspondant à  $u : \bar{B}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Le foncteur de spécialisation  $- \otimes_{\bar{B}_1, u} \mathbb{C}$  appliqué au morphisme (\*) donne un morphisme surjectif

$$\mathcal{G}_{\psi \cdot \bar{y}} \simeq (\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S \otimes_{\bar{B}_1, u} \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S \otimes_{\bar{B}_1, u} \mathbb{C} \simeq \mathcal{G}_{\psi^{-1} \cdot y}^*$$

Puisque  $\mathcal{G}_{\psi \cdot \bar{y}}$  et  $\mathcal{G}_{\psi^{-1} \cdot y}^*$  ont même dimension (finie) sur  $\mathbb{C}$ , ce dernier est un isomorphisme.

Notons  $\mathcal{K} \subset (\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S$  le noyau du morphisme (\*). C'est un  $\bar{B}_1$ -module de type fini. Pour  $\psi \in \mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$  correspondant à  $u : \bar{B}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ , le foncteur de spécialisation  $- \otimes_{\bar{B}_1, u} \mathbb{C}$  appliqué à la suite exacte courte de  $\bar{B}_1$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow (\mathcal{G}_{\bar{y}} \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_S \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S \rightarrow 0$$

donne un morphisme surjectif

$$\mathcal{X}(\psi) = \text{Tor}_1^{\bar{B}_1}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S, \bar{B}_1 / \ker u) \rightarrow \mathcal{K}_{\psi} = \mathcal{K} \otimes_{\bar{B}_1, u} \mathbb{C}.$$

Le  $\bar{B}_1$ -module  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}_y, B^*)^S$  est localement libre en presque tout point de  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$ , par suite il est localement libre en tout point de  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$  par  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -équivariance, donc plat. On a donc  $\mathcal{X}(\psi) = 0$  et  $\mathcal{K}_{\psi} = 0$ . Comme le  $\bar{B}_1$ -module  $\mathcal{K}$  est lui aussi localement libre en tout point de  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})/S$  par  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -équivariance, on a  $\mathcal{K} = 0$  (lemme de Nakayama), ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

On en déduit que les trois morphismes surjectifs

$$\text{EP} : (\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}; \check{Y}) \otimes_{\mathbb{C}} B^*)_{\mathfrak{P}^0(G^{\natural})} \rightarrow \mathcal{C}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

$$q : \mathcal{C}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]}$$

et

$$\Phi : \overline{\mathcal{H}}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

sont eux aussi des isomorphismes.

En définitive, on obtient que les morphismes

$$\text{EP} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} B^* / \langle \Psi \Pi \otimes b - \Pi \otimes b_{\Psi} : \Pi, b, \Psi \rangle \rightarrow \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

et

$$\Phi \circ q : \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega), [\Pi, u] \mapsto \bar{\phi}_{[\Pi, u]}$$

sont des isomorphismes. Par suite on a l'égalité

$$\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega),$$

et le morphisme

$$\Phi : \overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

est un isomorphisme. Cela achève la démonstration du théorème de 4.8.

**REMARQUE.** — Puisque  $\mathcal{C}'^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , d'après le corollaire 2 de 6.22, on a la décomposition en somme directe

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega) = \bigoplus_Y \overline{\mathcal{H}}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$$

où  $Y$  parcourt les  $\mathfrak{P}^0(G^{\natural})$ -orbites dans  $\Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(G)$ .  $\blacksquare$

**6.26. Une conséquence.** — Soit  $\overline{\mathcal{H}}^\bullet(G^\natural, \omega)$  et  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)^\bullet$  les filtrations combinatoires de  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  images de  $\mathcal{C}'^\bullet(G^\natural, \omega)$  et  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)^\bullet$  par l'isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules

$$\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega), [\Pi, u]' \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]'}$$

Puisque le théorème de densité spectrale est maintenant démontré, d'après le lemme 1 de 6.25, on peut les définir directement à l'aide des applications "terme constant" (cf. 4.7)

$$\mathcal{G}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{H}(M_P^\natural), \phi \mapsto \omega \phi_{P^\natural, K_0}, \quad P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural) \setminus \{G^\natural\}.$$

En particulier, on a les égalités

$$\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathcal{H}}^{d(G)}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)^{d(G)}.$$

On peut aussi définir une filtration topologique de  $F^\bullet \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  de  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  par projection à partir de  $F^\bullet \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ :

$$F^i \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = q(F^i \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)), \quad i \geq 0,$$

où (rappel)  $q : \mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  désigne la projection  $[\Pi, u] \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]}$ .

Soit  $d'$  un entier tel  $d(G^\natural) \leq d' < d(M_0^\natural)$ . D'après le corollaire de 6.23, on a l'égalité

$$F^{d'} \mathcal{C}'(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)^{d'},$$

et d'après 6.12, on a l'égalité

$$q(\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)^{d'}) = \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)^{d'}.$$

D'où la

**PROPOSITION.** — Soit  $d'$  un entier tel  $d(G^\natural) \leq d' < d(M_0^\natural)$ . On a l'égalité dans  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$

$$F^{d'} \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) = \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)^{d'}.$$

**6.27. Un résultat de dualité.** — Considérons maintenant l'accouplement

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) \times \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (\phi, \Pi) &\mapsto \langle \phi, \Pi \rangle = \Phi_\phi(\Pi) (= \Theta_\Pi(\phi)). \end{aligned}$$

D'après la propriété d'indépendance linéaire des caractères-distributions [L2, A.5, prop.] et le théorème de densité spectrale, il est non dégénéré à droite et à gauche. Identifions  $\overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$  à  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  via l'isomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -modules  $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega)$ ,  $[\Pi, u]' \mapsto \overline{\phi}_{[\Pi, u]'}$ .

Soit  $P^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ . D'après la proposition de 2.10 ((3) et (4)), on a les formules d'adjonction

$$(1) \quad \langle [\Pi, u]', \omega i_{P^\natural}^{G^\natural}(\Sigma) \rangle = \langle \omega r_{G^\natural}^{P^\natural}([\Pi, u]'), \Sigma \rangle$$

pour tout  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$  et tout  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural, \omega)$ , et

$$(2) \quad \langle \omega i_{P^\natural}^{G^\natural}([\Sigma, v]'), \Pi \rangle = \langle [\Sigma, v]', \omega \overline{r}_{G^\natural}^{P^\natural}(\Pi) \rangle$$

pour tout  $[\Sigma, v]' \in \mathcal{C}'(M_P^\natural, \omega)$  et tout  $\Pi \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ .

**LEMME 1.** — Soit  $P^\natural, Q^\natural \in \mathcal{P}(G^\natural)$ . Supposons que  $M_Q^\natural = w(M_P^\natural) (= n_w \cdot M_P^\natural \cdot n_w^{-1})$  pour une  $w \in W_{G^\natural}$ . Pour  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^\natural, \omega)$ , on a l'égalité dans  $\mathcal{C}'(M_Q^\natural, \omega)$

$$w^{-1}(\omega r_{G^\natural}^{P^\natural}([\Pi, u]')) = \omega r_{G^\natural}^{Q^\natural}([\Sigma, v]').$$

*Démonstration.* — D’après lemme 1 de 4.4, pour tout  $\Sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(M_P^{\natural}, \omega)$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$

$$\omega_{i_{Q^{\natural}}}(\omega \Sigma) = \omega_{i_{P^{\natural}}}(G^{\natural}(\Sigma)).$$

D’où le résultat, grâce à la formule d’adjonction (1).  $\square$

Comme en 6.21, Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , le foncteur  ${}^{\omega}T_{P^{\natural}} = \omega_{i_{P^{\natural}}} \circ \omega_{r_{G^{\natural}}}$  induit un endomorphisme de  $\mathfrak{Z}(G)$ -module

$${}^{\omega}T_{P^{\natural}}' : \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$$

qui est un morphisme filtré pour toutes les filtrations de  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  introduites jusqu’à présent (les filtrations combinatoires et la filtration topologique).

**PROPOSITION.** — *Soit  $d$  un entier tel que  $d(G) \leq d < d(M_{\circ})$ . Il existe une famille de nombres rationnels  $\lambda_{\mathcal{C}'}^d = \{\lambda_{\mathcal{C}'}^d(P^{\natural}) : P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural}), d(M_P) > d\}$  telle que le  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \mathbf{A}^{\lambda_{\mathcal{C}'}}_d$  de  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  défini par*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_{\mathcal{C}'}^d(P^{\natural}) {}^{\omega}T_{P^{\natural}}'$$

vérifie les propriétés:

$$\text{Im } \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \mathcal{C}'^d(G^{\natural}, \omega), \quad \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d \circ \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d.$$

*Démonstration.* — Elle est “duale” de celle de la démonstration de la proposition de 4.4. On la décrit brièvement. Le “lemme géométrique” (proposition de 4.1) reste vrai si l’on remplace  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$  par  $\mathcal{C}'$ , et en remplaçant le lemme 1 de 4.4 par le lemme 1 ci-dessus, on obtient la version suivante du lemme 2 de 4.4:

**LEMME 2.** — *Soit  $P^{\natural}, Q^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ .*

(1) *Pour  $[\Pi, u] \in \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$*

$${}^{\omega}r_{G^{\natural}}^{Q^{\natural}} \circ {}^{\omega}T_{P^{\natural}}'([\Pi, u]') = \sum_w {}^{\omega}i_{Q_w^{\natural}} \circ {}^{\omega}r_{G^{\natural}}^{Q_w^{\natural}}([\Pi, u]')$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^{\natural}}^{P, Q}$ .

(2) *Pour  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , on a l’égalité dans  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$*

$${}^{\omega}T_{Q^{\natural}}' \circ {}^{\omega}T_{P^{\natural}}'([\Pi, u]') = \sum_w {}^{\omega}T_{Q_w^{\natural}}'([\Pi, u]')$$

où  $w$  parcourt les éléments de  $W_{G^{\natural}}^{P, Q}$ .

Pour  $k > d$ , choisissons un ordre  $\{P_{k,1}^{\natural}, \dots, P_{k,n(k)}^{\natural}\}$  sur l’ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) = k$ , et notons  $U_k' : \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  le morphisme défini par

$$U_k' = (T'_{k,n(k)} - p_{k,n(k)}) \circ \dots \circ (T'_{k,1} - p_{k,1});$$

où l’on a posé

$$T'_{k,i} = {}^{\omega}T_{P_{k,i}^{\natural}}', \quad p_{k,i} = p_{P_{k,i}^{\natural}}.$$

L’opérateur  $U_k'$  préserve la filtration  $\{\mathcal{C}'^i\}$  et il envoie  $\mathcal{C}'^k(G^{\natural}, \omega)$  dans  $\mathcal{C}'^{k-1}(G^{\natural}, \omega)$ . Puisque  $\mathcal{C}'^{d(M_{\circ})}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$ , l’opérateur

$$U' = U'_{d+1} \circ \dots \circ U'_{d(M_{\circ})} : \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$$

vérifie  $U'(\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)) \subset \mathcal{C}'^d(G^{\natural}, \omega)$ , et d'après le point (2) du lemme 2, il est de la forme

$$U' = \eta(\text{id} + \sum_{P^{\natural}, d(M_P) > d} \lambda_{\mathcal{C}'}^d(P^{\natural}) \omega T'_{P^{\natural}})$$

pour des constantes  $\eta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et  $\lambda_{\mathcal{C}'}^d(P^{\natural}) \in \mathbb{Q}$ . Puisque l'opérateur  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \eta^{-1}U'$  est l'identité sur  $\mathcal{C}'^d(G^{\natural}, \omega)$ , il vérifie les conditions de l'énoncé.  $\square$

**REMARQUE.** — Tout comme l'opérateur  $\mathbf{A}_d : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  de la proposition de 4.4, l'opérateur  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d : \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  dépend du choix, pour chaque entier  $k > d$ , d'un ordre  $\mathfrak{o}_k = \{P_{k,1}^{\natural}, \dots, P_{k,n(k)}^{\natural}\}$  sur l'ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) = k$ . On les note donc aussi  $\mathbf{A}_d(\mathfrak{o})$  et  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d(\mathfrak{o})$ .  $\blacksquare$

**COROLLAIRE.** — Soit  $d$  un entier tel que  $d(G) \leq d < d(M_{\mathfrak{o}})$ .

- (1) On peut choisir, pour chaque entier  $k > d$ , des ordres  $\mathfrak{o}_k$  et  $\mathfrak{o}'_k$  sur l'ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) = k$ , de telle manière que les opérateurs  $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d(\mathfrak{o})$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d(\mathfrak{o}')$  sur  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  soient adjoints pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : pour tout  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  et tout  $\Pi' \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , on a l'égalité

$$\langle \mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d([\Pi, u]'), \Pi' \rangle = \langle [\Pi, u]', \mathbf{A}_d(\Pi') \rangle.$$

- (2) On a  $\mathcal{C}'^d(G^{\natural}, \omega)^{\perp} = \mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathcal{G}_{\mathbb{C},d}(G^{\natural}, \omega)^{\perp} = \mathcal{C}'^d(G^{\natural}, \omega)$

*Démonstration.* — Le point (2) est une conséquence du point (1).

Montrons (1). Comme en 6.22, notons  $w_0 \in W_{G^{\natural}}$  l'élément de longueur maximale de  $W_G$ . Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , rappelons que  $w_0(\overline{P}^{\natural})$  est un élément de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$ , et que c'est l'élément de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  défini par  $M_{w_0(\overline{P}^{\natural})}^{\natural} = w_0(M_P^{\natural})$ . Puisque  $w_0^{-1} = w_0$ , l'application  $P^{\natural} \mapsto w_0(\overline{P}^{\natural})$  est une permutation d'ordre de 2 de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  qui, pour chaque entier  $k$ , stabilise le sous-ensemble de  $\mathcal{P}(G^{\natural})$  formé des  $P^{\natural}$  tels que  $d(M_P) = k$ . Pour  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$ , notons  ${}^{\omega}\overline{T}_{P^{\natural}}$  le foncteur

$${}^{\omega}\overline{i}_{P^{\natural}}^{G^{\natural}} \circ {}^{\omega}\overline{r}_{G^{\natural}}^{P^{\natural}} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega).$$

Il induit un morphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$${}^{\omega}\overline{T}_{P^{\natural}, \mathbb{C}} : \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega).$$

On a

$${}^{\omega}\overline{T}_{P^{\natural}, \mathbb{C}} = ({}^{\omega}\overline{i}_{w_0(\overline{P}^{\natural}), \mathbb{C}}^{G^{\natural}} \circ \omega_0) \circ (w_0^{-1} \circ {}^{\omega}\overline{r}_{G^{\natural}, \mathbb{C}}^{w_0(\overline{P}^{\natural})}) = {}^{\omega}\overline{T}_{w_0(\overline{P}^{\natural}), \mathbb{C}}.$$

Comme d'après le lemme 1 de 4.4, on a  ${}^{\omega}\overline{i}_{w_0(\overline{P}^{\natural}), \mathbb{C}}^{G^{\natural}} \circ \omega_0 = {}^{\omega}\overline{i}_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^{G^{\natural}}$ , les formules d'adjonction (1) et (2) ci-dessus entraînent que les opérateurs  ${}^{\omega}\overline{T}_{w_0(\overline{P}^{\natural}), \mathbb{C}}$  et  ${}^{\omega}\overline{T}'_{P^{\natural}}$  sont adjoints pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : pour tout  $[\Pi, u]' \in \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  et tout  $\Pi' \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , on a l'égalité

$$\langle {}^{\omega}\overline{T}'_{P^{\natural}}([\Pi, u]'), \Pi' \rangle = \langle [\Pi, u]', {}^{\omega}\overline{T}_{w_0(\overline{P}^{\natural}), \mathbb{C}}(\Pi') \rangle.$$

Pour chaque entier  $k > d$ , choisissons un ordre  $\mathfrak{o}_k = \{P_{k,1}^{\natural}, \dots, P_{k,n(k)}^{\natural}\}$  sur l'ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_P) = k$ , et posons  $\mathfrak{o}'_k = \{w_0(\overline{P}_{k,n(k)}^{\natural}), \dots, w_0(\overline{P}_{k,1}^{\natural})\}$ . Les opérateurs  $\mathbf{A}_d(\mathfrak{o})$  et  $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d(\mathfrak{o}')$  sont (par construction) adjoints pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\square$

**VARIANTE.** — On peut bien sûr aussi reprendre ces résultats dans le cadre de la variante de 4.4, c'est-à-dire en remplaçant la condition  $d(M_P) > d$  par la condition  $d(M^{\natural}) > d'$  pour un entier  $d'$  tel que  $d(G^{\natural}) \leq d' < d(M_{\mathfrak{o}}^{\natural})$ . On obtient de la même manière un  $\mathfrak{Z}(G)$ -endomorphisme  $\mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'}$  de  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  vérifiant

$$\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'} = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)^{d'}, \quad \mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'} \circ \mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'} = \mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'}.$$

De plus, on peut choisir, pour chaque entier  $k > d'$ , des ordres  $\sigma_k$  et  $\sigma'_k$  sur l'ensemble des  $P^{\natural} \in \mathcal{P}(G^{\natural})$  tels que  $d(M_{P^{\natural}}^{\natural}) = k$ , de telle manière que les opérateurs  $\mathbf{B}_{d'}(\sigma.)$  sur  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$  et  $\mathbf{B}_{\mathcal{C}'}^{d'}(\sigma')$  sur  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)$  soient adjoints pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On en déduit les égalités  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{d'}^{\perp} = \mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)^{d'}$  et  $\mathcal{C}'(G^{\natural}, \omega)^{d', \perp} = \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)_{d'}$ . ■

## Index

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : \overline{\mathcal{H}}(G^\natural, \omega) \times \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathbb{C}$ , 144  
 $(\cdot, \cdot)_o, (\cdot, \cdot)_P, (\cdot, \cdot)_Q^P$ , 49  
 $\mathbf{A} = A \otimes_{Z(A)} \overline{Z}_{A^\natural} (= A/\mathcal{J})$ ,  $\mathbf{A}^\natural = A^\natural/\mathcal{J}^\natural$ , 86  
 $\overline{\mathbf{A}}_{d(G)}$ , 133  
 $\mathbf{A}_{\mathcal{C}'}^d = \mathbf{A}^{\lambda_{\mathcal{C}'}}$ , 145  
 $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_{\lambda_d}$ , 53  
 $\mathbf{A}_d^{\mathcal{C}}, \mathbf{A}_{d;Y}^{\mathcal{C}}, \mathbf{A}_{d;Y}^{\overline{\mathcal{C}}}$ , 129  
 $\mathfrak{a}_{P^*}^*, \mathfrak{a}_{P^*, \mathbb{C}}^*$ , 49  
 $\mathfrak{a}_o = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(A_o), \mathbb{R})$ , 50  
 $\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P,F}, \mathfrak{a}_{A_P,F}$ , 48  
 $\mathfrak{a}_{P^\natural}, \mathfrak{a}_{P^\natural}^{\mathcal{C}}, \tilde{\mathfrak{a}}_G^{\mathcal{C}}, 50$   
 $(\mathfrak{a}_{P^\natural}^{\mathcal{C}})^*$ , 51  
 $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_Q^P$ ,  $\mathfrak{a}_Q^* = \mathfrak{a}_P^* \oplus (\mathfrak{a}_Q^P)^*$ , 49  
 $\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{\mathcal{C}}, (\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{\mathcal{C}})^*$ , 51  
 $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \tilde{\mathcal{A}}$ , 116  
 $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}}, \tilde{\mathcal{A}}^\natural = \mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\mathcal{C}}$ , 119  
 $A = \mathcal{H}_Y, A^\natural = \mathcal{H}_{Y, \omega}^{\mathcal{C}}$ , 117  
 $A^\varpi$ , 28  
 $A_k = A \cdot \gamma^k, \tilde{A}_k = \tilde{A} \cdot \tilde{\gamma}^k$ , 123  
 $A_P$ , 48  
 $A_{P^\natural}$ , 50  
 $A_Y$ , 114  
 $A^\natural, A \cdot \eta$ , 72  
 $A^{\natural, \times}$ , 72  
 $A_P^\natural$ , 52  
 $\text{Ann}_{\mathbb{Z}_J(G)}(V_\pi^J)$ , 101  
 $\overline{B} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}^0(G^\natural)]$ , 95  
 $\overline{B}_\delta = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_\delta^0(G^\natural)]$ , 95  
 $\overline{B}_{d'}$ , 136  
 $\mathbf{B}_{\mathcal{C}'}$ , 146  
 $\mathbf{B}_{d'} = \mathbf{B}_{\mu_{d'}}$ , 57  
 $\mathbf{B}_{d'}^{\mathcal{C}}, \mathbf{B}_{d';Y}^{\mathcal{C}}, \mathbf{B}_{d';Y}^{\overline{\mathcal{C}}}$ , 132  
 $b \mapsto b_\Psi$ , 96  
 $\mathfrak{B}(G)$ , 33  
 $\mathfrak{B}_1(G)$ , 33  
 $\mathfrak{b}_{A_P^\natural, F}$ , 52  
 $\mathfrak{b}_{G^\natural}, \mathfrak{b}_{P^\natural}$ , 50  
 $\mathfrak{b}_{P^\natural, F}, \mathfrak{b}_{A_{P^\natural}, F}$ , 51  
 $\mathfrak{b}_{P^\natural}^*, \mathfrak{b}_{P^\natural, \mathbb{C}}^*$ , 51  
 $\mathfrak{b}_{Q^\natural} = \mathfrak{b}_{P^\natural} \oplus \mathfrak{a}_{Q^\natural}^{\mathcal{C}}, \mathfrak{b}_{Q^\natural}^* = \mathfrak{b}_{P^\natural}^* \oplus (\mathfrak{a}_{Q^\natural}^{\mathcal{C}})^*$ , 51  
 $\mathcal{B}$ , 117  
 $\tilde{\mathcal{B}}$ , 119  
 $\tilde{\mathcal{B}}^*$ , 119  
 $\mathcal{B}'$ , 119  
 $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ , 128  
 $\mathcal{B}^*$ , 95  
 $B_{G^\natural}^0 = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(G^\natural)]$ , 95  
 $B_P = \mathbb{C}[\Lambda_P]$ , 35  
 $B_{P^\natural} = \mathbb{C}[\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M_P^\natural)]$ , 41  
 $\beta_G, \mathfrak{B}_{G^\natural, \omega}(G)$ , 34  
 $\beta_{G^\natural, \omega}, \mathfrak{B}(G)/\mathbb{Z}$ , 34  
 $\overline{\mathcal{C}}(A^\natural)$ , 84  
 $\overline{\mathcal{C}}(G^\natural, \omega; Y) = \mathcal{C}(\tilde{\mathfrak{R}}(G^\natural, \omega; Y))$ , 113  
 $\mathcal{C}'(A^\natural)$ , 77  
 $\mathcal{C}'(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega))$ , 90  
 $\mathcal{C}'_i(G^\natural, \omega), \mathcal{C}'^i(G^\natural, \omega)$ , etc., 100  
 $\mathcal{C}'_J(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'(\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega))$ , 90, 93  
 $\mathcal{C}'_{J_1}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}'_{J_2}(G^\natural, \omega) \oplus \mathcal{C}'_{J_1}^{J_2}(G^\natural, \omega)$ , 91  
 $\mathcal{C}'_*(A^\natural)$ , 81  
 $\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A'), \mathcal{C}(\tilde{A})$ , 116  
 $\mathcal{C}(A_{\mathbb{K}}) = \mathcal{C}(\tilde{A}^\natural) = \mathcal{C}(\text{Mod}(\tilde{A}^\natural))$ , 128  
 $\mathcal{C}(A^\natural)$ , 84  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega))$ , 93  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega) \rightarrow \mathcal{C}'(G^\natural, \omega), [\Pi, u] \mapsto [\Pi, u]'$ , 94  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; i))$ , 101  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}; y_Y) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega, \mathbb{K}; y_Y))$ , 128  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y))$ , 106  
 $\mathcal{C}(G^\natural, \omega; Y; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(G^\natural, \omega; Y; i))$ , 106  
 $\mathcal{C}^{\text{dis}}(G^\natural, \omega) = \mathcal{C}^{d(G)}(G^\natural, \omega)$ , 100  
 $\mathcal{C}_i(G^\natural, \omega), \mathcal{C}^i(G^\natural, \omega)$ , etc., 100  
 $\mathcal{C}_J(G^\natural, \omega; i) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}_J(G^\natural, \omega; i))$ , 101  
 $\mathcal{C}_*(A^\natural)$ , 83  
 $\mathcal{C}_Y(G^\natural, \omega)$ , 135  
 $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ , 13  
 $d(M_P), d(M_P^\natural)$ , 52  
 $d(M_P, M_P^\natural) = (d(M_P), d(M_P^\natural))$ , 133  
 $\Delta_o^{\mathcal{C}}, \Delta_o^P, \Delta_Q^P$ , 50  
 $\delta_1$ , 13  
 $\delta_k = (\delta_1)^k$ , 15  
 $\Delta_{P^\natural}^{\mathcal{C}}$ , 52  
 $dg, d\delta$ , 19  
 $\overline{\mathcal{E}}_0(\tilde{A})$ , 124  
 $\mathcal{E}^*(\tilde{A}), \mathcal{E}_0^*(\tilde{A})$ , 125  
 $\mathcal{E}(\tilde{A})$ , 119  
 $\mathcal{E}(A)$ , 117  
 $\mathcal{E}(A_{\mathbb{K}})$ , 128  
 $\mathcal{E}(A')$ , 119  
 $e_K$  (unité de  $\mathcal{H}_K$ ), 20  
 $\overline{\text{End}}_A(V)$ , 117  
 $\text{EP}$ , 96  
 $F$  (corps de base), 12  
 $f(w) = {}^\omega f_{P^\natural}^{Q^\natural}(w), f_{\mathbb{C}}(w)$ , 46  
 $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{B}})$ , 119  
 $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ , 117  
 $\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ , 128

- $\mathcal{F}(\mathcal{B}')$ , 119  
 $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\text{tr}}(G^{\natural}, \omega)$ , 42  
 $\mathcal{F}(G^{\natural}, \omega) = \mathcal{F}_J(G^{\natural}, \omega) \oplus \mathcal{F}_J^{\perp}(G^{\natural}, \omega)$ , 45  
 $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 61  
 $\mathcal{F}_K(G^{\natural}, \omega)$ , 45  
 $\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$ , 70  
 $\mathcal{F}_{\text{tr}, Y}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\text{tr}, \mathfrak{S}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 70  
 $\mathcal{F}_Y(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$ , 69  
 $\mathcal{F}_Y^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 69  
 $\overline{F}^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , 102  
 $\overline{F}^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , 106  
 $F^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega) = \text{Im}(\mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; i) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega))$ , 101  
 $F^i \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , 106  
 $F^i \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ , 144  
 $G = \mathbf{G}(F)$ ,  $G^{\natural} = \mathbf{G}^{\natural}(F)$ ,  $\mathfrak{G}_k = \mathbf{G}_k(F)$ , 13  
 $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^{\natural}$ , 12  
 $G^1$ , 60  
 $\mathfrak{G}(G, \mathbb{K})$ ,  $\mathfrak{G}(G, \mathbb{K}; y)$ , 112  
 $\mathfrak{G}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathfrak{G}_0(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathfrak{G}_{>0}(G^{\natural}, \omega)$ , 18  
 $\mathfrak{G}_{0+}(G^{\natural}, \omega)$ , 18  
 $\mathfrak{G}_1(G)$ , 66  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , 17  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^*$ , 22  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)^i$ , 100  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \mathbb{C})^i$ , 57  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; Y) = \bigoplus_y \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega; y)$ , 69  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, \text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega)$ , 31  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, i}(G^{\natural}, \omega)$ , 53  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}, \text{ind}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 52  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , 69  
 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}^i(G^{\natural}, \omega)$ , 99  
 $\mathfrak{G}_{\text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\mathfrak{G}_{L\text{-ind}}(G^{\natural}, \omega)$ , 31  
 $\tilde{\gamma} = \gamma_{\mathbb{K}}$ , 119  
 $\gamma = \gamma_Y$ , 117  
 $\gamma_a^{\natural}$ , 72  
 $\gamma_{\mathfrak{S}}$ , 110  
 $\gamma_V : V^{\natural} \rightarrow V$ , 75  
 $\gamma_V^* : V^{*, \natural} \rightarrow \text{Hom}_A(V^{\natural}, A^{\natural})$ , 75  
 $\mathbf{h} = \omega \mathbf{h}_{P^{\natural}}^{\mathcal{Q}^{\natural}}$ ,  $\mathbf{h}_{\mathbb{C}}$ , 47  
 $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega) = \overline{\mathcal{H}}_J(G^{\natural}, \omega) \oplus \overline{\mathcal{H}}_J^{\perp}(G^{\natural}, \omega)$ , 45  
 $\overline{\mathcal{H}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 61  
 $\overline{\mathcal{H}}^i(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)^i$ , 144  
 $\overline{\mathcal{H}}_{J_1}(G^{\natural}, \omega) = \overline{\mathcal{H}}_{J_2}(G^{\natural}, \omega) \oplus \overline{\mathcal{H}}_{J_1}^{\perp}(G^{\natural}, \omega)$ , 91  
 $\overline{\mathcal{H}}_Y(G^{\natural}, \omega)$ , 141  
 $\mathcal{H}(X)$ , 19  
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ ,  $\mathcal{H}^{\natural} = \mathcal{H}(G^{\natural})$ , 19  
 $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K(G)$ , 20  
 $\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \mathcal{H}_Y \otimes_{\mathbb{C}[Y]} \mathbb{K}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathbb{K}} \cdot \gamma_{\mathbb{K}}$ , 115  
 $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}} = \text{End}_G(\pi_{\mathfrak{S}})^{\text{op}}$ , 108  
 $\mathcal{H}_Y = \mathcal{H}_{\mathfrak{S}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathbb{C}[Y]$ ,  $\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_Y \cdot \gamma_Y$ , 114  
 $\overline{\mathcal{H}}_{K, \omega}^{\natural} = \overline{\mathcal{H}}_K(G^{\natural}, \omega)$ , 45  
 $\overline{\mathcal{H}}_{\omega}^{\natural} = \overline{\mathcal{H}}(G^{\natural}, \omega)$ , 42  
 $[\mathcal{H}^{\natural}, \mathcal{H}]_{\omega}$ , 42  
 $\mathcal{H}_K^{\natural} = \mathcal{H}_K(G^{\natural})$ ,  $e_{K^{\natural}}$ , 20  
 $[\mathcal{H}_K^{\natural}, \mathcal{H}_K]_{\omega}$ , 45  
 $\mathcal{H}_{\omega}^{\natural} = \mathcal{H}(G^{\natural}, \omega)$ , 20  
 $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}, \omega}^{\natural} = \mathcal{H}_{\mathfrak{S}} \cdot \gamma$ , 110  
 $H_P : M_P \rightarrow \mathfrak{a}_P$ , 49  
 $(H^{\natural}, \omega, B)$ -module admissible, 41  
 $\text{Hom}_A(V, V^{\natural})$ , 76  
 $\tilde{i}_{\Pi_Y} : \text{Mod}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , 116  
 $I = I^0, I^n$ , 38  
 $i_{\Pi_{\mathfrak{S}}} : \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{S}, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega)$ , 110  
 $i_{\pi_{\mathfrak{S}}} : \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}) \rightarrow \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G)$ , 109  
 $i_{\Pi_Y} : \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}) \rightarrow \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y)$ , 114  
 $i_{\pi_{Y, \mathbb{K}}} : \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}) \rightarrow \mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y)$ , 116  
 $i_{P, Q}, i_{P, Q}^*$ , 57  
 $i_P^G$ , 22  
 $i_Q^P$ , 25  
 $\omega_i^{G^{\natural}}$ , 22  
 $\omega_i^{G^{\natural}} = \omega_i^{G^{\natural}}$ , 24  
 $\omega_i^{P^{\natural}}, \omega_i^{P^{\natural}, \mathbb{C}}$ , 23  
 $\omega_i^{P^{\natural}} = \omega_i^{P^{\natural}}, \omega_i^{P^{\natural}, \mathbb{C}}$ , 24  
 $(\omega_i^{P^{\natural}})^*$ , 58  
 $\iota^Y : \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \mathcal{C}(G^{\natural}, \omega)$ , 106  
 $\iota^k$ , 15  
 $\iota_k^k$ , 16  
 $\iota_Y : \mathfrak{J}(G) \rightarrow \mathbb{K}$ , 112  
 $\text{Irr}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\text{Irr}_0(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\text{Irr}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , 14  
 $\text{Irr}_{0, \text{e.t.}}(G^{\natural}, \omega)$ , 31  
 $\text{Irr}_{0, \text{t.}}(G^{\natural}, \omega_{\mathfrak{N}})$ , 30  
 $\text{Irr}_0^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\text{Irr}_{\mathbb{C}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ , 63  
 $\text{Irr}_1(G) = \text{Irr}_{G^{\natural}, \omega}(G)$ , 66  
 $\text{Irr}_{<+\infty}(G^{\natural}, \omega)$ , 18  
 $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G^{\natural}, \omega)$ , 19  
 $\text{Irr}_{k-1}(G^{\natural}, \omega)$ ,  $\text{Irr}'_0(\mathcal{G}_k, \omega_k)$ , 17  
 $\mathbf{J}(G^{\natural}, \omega)$ , 41  
 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(A^{\natural})$ ,  $\mathcal{J}^{\natural} = \mathcal{J} \cdot a_1^{\natural}$ , 86  
 $\mathcal{K}(\mathfrak{B})$ , 119  
 $\mathcal{K}(\mathfrak{B})$ , 117  
 $\mathcal{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}})$ , 128  
 $\mathcal{K}(\mathfrak{B}')$ , 119  
 $(k, z) \mapsto z(k)$ , 37  
 $K_{\circ}$ , 60  
 $\kappa$  (corps résiduel de  $F$ ), 12  
 $\mathcal{L}(G)$ , 25  
 $\mathcal{L}(G)^{\theta}$ , 25  
 $\mathcal{L}(G^{\natural})$ ,  $\mathcal{L}(G^{\natural}, \omega)$ , 24  
 $\Lambda \mapsto \Lambda^{\vee}$ , 49  
 $\Lambda_P = M_P/M_P^1$ , 35

$(M, \rho)(1), [M, \rho](1), 32$   
 $[M, \rho] = [M, \rho]_G, 32$   
 $M^1, 27$   
 $M_P, 23$   
 $M_{P, \bar{w}}, M_{Q, w}, 46$   
 $\widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}), 115$   
 $\text{Mod}(A), 12$   
 $\text{Mod}(A^{\natural}), \text{Mod}(A, A^{\natural}), 77$   
 $\text{Mod}(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}; i), 114$   
 $\text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}), 114$   
 $N_{\circ} = N_G(A_{\circ}), 39$   
 $\mathfrak{o}$  (anneau des entiers de  $F$ ), 12  
 $\omega, 13$   
 $\omega = \omega_{\mathbb{1}}|\omega|, 29$   
 $\omega_k, \mathcal{N}_{\theta, k}, \pi(k), 15$   
 $\Omega_{\star}, 88$   
 $\bar{\Omega} = \Omega_{\star} \cap \bar{\mathcal{C}}(A^{\natural}), 88$   
 $\mathfrak{p}$  (idéal maximal de  $\mathfrak{o}$ ), 12  
 $\mathfrak{P}(A) = \text{Hom}(A^{\sigma}, \mathbb{C}^{\times}), 28$   
 $\mathfrak{P}(M) = \text{Hom}(M/M^1, \mathbb{C}^{\times}), 27$   
 $\mathfrak{P}(M)(\rho), 33$   
 $\mathfrak{P}(M^{\natural}), 28$   
 $\mathfrak{P}(M^{\natural}, \xi), \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}, \xi), 29$   
 $\mathfrak{P}^0(M_P^{\natural}), \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^0(M_P^{\natural}), 28$   
 $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(M^{\natural}), 28$   
 $\mathcal{P}(G), 25$   
 $\mathcal{P}(G)^{\theta}, 25$   
 $\mathcal{P}(G^{\natural}), \mathcal{P}(G^{\natural}, \omega), 23$   
 $(P, \sigma, \xi), 29$   
 $P_{\bar{w}}, 46$   
 $\bar{\phi}_{(\Pi, u)}^J, 90$   
 $\phi \mapsto \Phi_{\phi}, 42$   
 $\omega \phi_{P^{\natural}, K_{\circ}}, 60$   
 $\bar{\varphi} : G \rightarrow \bar{B}, 95$   
 $\varphi = \varphi_{G^{\natural}}^0 : G^{\natural} \rightarrow B = B_{G^{\natural}}^0, 95$   
 $\varphi_{\delta_0} : G^{\natural} \rightarrow \bar{B}, 95$   
 $\varphi_P, \varphi_{B_P}, 35$   
 $\varphi_{P^{\natural}}, 41$   
 $(\bar{\Pi}, \bar{V})$  (conjuguée complexe), 30  
 $(\tilde{\Pi}, \tilde{V})$  (contragrédiente), 25  
 $\tilde{\Pi}_{\mu}, \Pi_{\mu}, 30$   
 $[\Pi, u], 93$   
 $[\Pi, u]', 90$   
 $\Pi = \Pi_J \oplus \Pi_J^{\perp}, 40$   
 $\pi = \pi_J \oplus \pi_J^{\perp}, 38$   
 $(\Pi_{\bar{B}, \delta_0}, V_{\Pi, \bar{B}}), 95$   
 $(\pi_{\psi}, V_{\psi}), 35$   
 $\Pi_{\mathfrak{s}}, 110$   
 $\pi_{\mathfrak{s}} = i_P^G(\rho \otimes \varphi_P), 108$   
 $\pi_Y, \Pi_Y, 114$   
 $\pi_P^{\natural} : \mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, 51$

$\pi_Q^P : \mathfrak{a}_Q \rightarrow \mathfrak{a}_P, 49$   
 $\pi_Q^{P^{\natural}} : \mathfrak{a}_Q \rightarrow \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, \pi_{Q^{\natural}}^{P^{\natural}} : \mathfrak{a}_{Q^{\natural}} \rightarrow \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, 51$   
 $\bar{P}^{\natural} = M_P^{\natural} \cdot U_{\bar{P}}, 23$   
 $(P^{\natural}, \Sigma, \Xi), 30$   
 $P^{\natural} = M_P^{\natural} \cdot U_P, 23$   
 $P^{\natural} = M^{\natural} \cdot U, 22$   
 $P_{\circ}^{\natural} = M_{\circ}^{\natural} \cdot U_{\circ}, 23$   
 $q : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{B}', 119$   
 $q\mathbf{v}, \mathbf{v}_{\text{ss}}, q\mathbf{v}, \mathbf{v}^{\text{soc}}, 124$   
 $q\mathbf{v}, \mathbf{v}_{\mathbb{X}}, 124$   
 $Q_w, 46$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y), 113$   
 $\mathfrak{R}(G, B), 111$   
 $\mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y), 112$   
 $\mathfrak{R}(G; Y), 106$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega), 14$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega) = \mathfrak{R}_J(G^{\natural}, \omega) \times \mathfrak{R}_J^{\perp}(G^{\natural}, \omega), 45$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; i), 101$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega, \mathbb{K}; y_Y), 128$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y), 106$   
 $\mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y; i), 106$   
 $\mathfrak{R}(H), \text{Irr}(H), 14$   
 $\mathfrak{R}_0(G^{\natural}, \omega), \mathfrak{I}_0(G^{\natural}, \omega), 36$   
 $\mathfrak{R}_J(G), 38$   
 $\mathfrak{R}_{J_1}(G^{\natural}, \omega) = \mathfrak{R}_{J_2}(G^{\natural}, \omega) \times \mathfrak{R}_{J_1}^{J_2}(G^{\natural}, \omega), 91$   
 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G), \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G), 35$   
 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G, B), 111$   
 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega), \mathfrak{I}_{\mathfrak{S}}(G^{\natural}, \omega), 36$   
 $\tilde{r}_{\Pi_Y} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}, \omega}^{\natural}), 115$   
 $r_{\Pi_{\mathfrak{s}}} : \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G^{\natural}, \omega) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}, \omega}^{\natural}), 110$   
 $r_{\pi_{\mathfrak{s}}} : \mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}), 108$   
 $r_{\Pi_Y} : \mathfrak{R}(G^{\natural}, \omega; Y) \rightarrow \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{Y, \omega}^{\natural}), 114$   
 $r_{\pi_{Y, \mathbb{K}}} : \mathfrak{R}(G, \mathbb{K}; y_Y) \rightarrow \text{Mod}^*(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}), 116$   
 $r_G^P, 22$   
 $r_P^Q, 25$   
 $\omega_{r_G^P}, 22$   
 $\omega_{r_G^P} = \omega_{r_{\bar{G}}^{\bar{P}}}, 24$   
 $\omega_{r_P^Q}, \omega_{r_{P^{\natural}, \mathbb{C}}^Q}, 23$   
 $\omega_{r_{P^{\natural}}^Q} = \omega_{r_{\bar{P}^{\natural}}^{\bar{Q}}}, 24$   
 $(\omega_{r_{P^{\natural}}^Q})^*, 58$   
 $s(k), 33$   
 $\mathcal{S}(A^{\natural}), 84$   
 $s(\pi) = s_{G^{\natural}, \omega}(\pi), s(\Pi), 16$   
 $s(\sigma) = s_{\mathfrak{G}_k, \omega_k}(\sigma), 17$   
 $S = \text{Gal}(\mathbb{C}(Y')/\mathbb{C}(Y)), 138$   
 $\text{Supp}(\pi), 101$   
 $\omega^T_{P^{\natural}}, \omega^T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}, 146$   
 $\omega^{-1}\bar{T}_{P^{\natural}}, \omega^{-1}\bar{T}_{P^{\natural}, \mathbb{C}}, 132$

- $\omega T_{P^\natural}^{\prime}$ , 145  
 $\omega T_{P^\natural}, \omega T_{P^\natural, \mathbb{C}}$ , 52  
 $\omega T_{P^\natural; Y}, \omega \tilde{T}_{P^\natural; Y}$ , 129  
 $\theta = \text{Int}_{G^\natural}(\delta_1)$ , 13  
 $\Theta(G), \Theta_1(G), \theta_G$ , 33  
 $\Theta(G)/\mathbb{Z}, \theta_{G^\natural, \omega}$ , 33  
 $\Theta(\mathfrak{s})$ , 33  
 $\Theta_{G^\natural, \omega}^{d, d'}(G)$ , 133  
 $\theta_{G, \mathbb{K}} : \text{Irr}(G, \mathbb{K}) \rightarrow \Theta(G, \mathbb{K})$ , 112  
 $\theta_{G, \overline{\mathbb{K}}} : \text{Irr}(G, \overline{\mathbb{K}}) \rightarrow \Theta(G, \overline{\mathbb{K}})$ , 112  
 $\Theta_{G^\natural, \omega}^{d'}$ ( $G$ ), 133  
 $\Theta_{G^\natural, \omega}^{d'}(\mathfrak{s}) = \Theta_{G^\natural, \omega}^{d'}(G) \cap \Theta(\mathfrak{s})$ , 133  
 $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}$ ( $\mathfrak{s}$ ), 63  
 $\Theta_{G^\natural, \omega}^{\text{dis}}$ ( $G$ ), 69  
 $\Theta_\Pi$ , 22  
 $\mathbf{t} : \mathcal{B}/\mathcal{B}' \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ , 119  
 $\overline{\text{tr}}_{A^\natural} : \overline{\text{Hom}}_A(V, V^\natural) \rightarrow \overline{A}^\natural$ , 76  
 $\text{tr}_{A^\natural} : \text{Hom}_A(V, V^\natural) \rightarrow \overline{A}^\natural$ , 74  
 $\overline{U}_o, \overline{U}$ , 39  
 $\{\{\overline{V}, \overline{u}\}\} = \{\{\overline{V}, \overline{u} \circ \gamma_V^{-1}\}\}_*$ , 88  
 $[\mathbf{V}, \mathbf{u}]', [\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}]'_*$ , etc., 86  
 $(\mathbf{V}_{\text{ss}}, \mathbf{u}_{\text{soc}}), (\mathbf{V}^{\text{soc}}, \mathbf{u}^{\text{soc}})$ , 124  
 $[V, \alpha]'_*$ , 81  
 $[V, \alpha]_*$ , 83  
 $[V, u]$ , 84  
 $[V, u]'$ , 78  
 $\{V, u\} = [V, u \circ \gamma_V^{-1}]_*$ , 84  
 $V_\gamma$ , 72  
 $V^\natural = A^\natural \otimes_A V$ , 73  
 $V^{*, \natural} = \text{Hom}_A(V, A^\natural)$ , 73  
 $w(M_P), n_w$ , 32  
 $W_{\mathfrak{s}}$ , 33  
 $W_G = N_G(A_o)/M_o$ , 32  
 $W_G(M) = N_G(M)/M$ , 33  
 $W_G(P, Q), W_G^{P, Q}$ , 46  
 $W_{M_P} = N_{M_P}(A_o)/M_o$ , 46  
 $W_{M_P}^\natural, W_{G^\natural}(P, Q), W_{G^\natural}^{P, Q}$ , 46  
 $X_F^*(M_P)$ , 48  
 $X^*(A)$ , 28  
 $X^*(A_P) = X_F^*(A_P)$ , 48  
 $\xi = \sum_V \xi_V : \mathcal{E}(\tilde{A}) \rightarrow \overline{e}_0(\tilde{A})$ , 124  
 $\xi^* = \sum_V \xi_V^* : \mathcal{E}(A) \rightarrow \overline{e}_0^*(\tilde{A})$ , 126  
 $y_Y$ , 112  
 $\overline{Z}_{A^\natural} = Z(A)_\gamma, \mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Z(A^\natural)$ , 78  
 $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ , 17  
 $z \mapsto fz$ , 36  
 $z \mapsto z_V$ , 74  
 $\overline{\mathfrak{Z}}_{G^\natural, \omega}$ , 101  
 $\mathfrak{Z}(A), \mathfrak{Z}(G) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{R}(G))$ , 35  
 $\mathfrak{Z}(G, B), \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G, B)$ , 111  
 $\mathfrak{Z}(G^\natural, \omega)$ , 36  
 $\mathfrak{Z}_1(G)$ , 37  
 $\mathfrak{Z}_J(G) = Z(e_J * \mathcal{H}(G) * e_J)$ , 90  
 $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}}(G), \mathfrak{Z}_{\mathfrak{S}}(G)$ , 35  
 $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}, 1} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{s}, 1}(G)$ , 37  
 $Z(A^\natural)$ , 79  
 $Z(\mathbf{G})$ , 13  
 $Z^\natural = Z(G^\natural)$ , 14

## Références

- [B1] BERNSTEIN J., *Second adjointness theorem for representations of  $p$ -adic groups* (1987, non publié), <http://www.math.tau.ac.il/~bernstei/>.
- [B2] BERNSTEIN J., *Lectures on representations of  $p$ -adic groups* (1992, notes non publiées), <http://www.math.tau.ac.il/~bernstei/>.
- [BD] BERNSTEIN J., DELIGNE P., *Le “centre” de Bernstein* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local (ed. Bernstein J., Deligne P., Kazhdan D., Vignéras M.-F.), Travaux en Cours, Hermann, 1984.
- [BDK] BERNSTEIN J., DELIGNE P., KAZHDAN D., *Trace Paley–Wiener theorem for reductive  $p$ -adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 180–192.
- [BS] BOREL A., SERRE J.P., *Le théorème de Riemann–Roch*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), pp. 97–138.
- [BT] BRUHAT F., TITS J., *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée*, Pub. Math. IHES **60** (1984), pp. 1–184.
- [BZ1] BERNSTEIN I.N., ZELEVINSKY A.V., *Representations of the group  $GL(n, F)$  where  $F$  is a local non-archimedean field*, Uspekhi Mat. Nauk **31** (1976), pp. 5–70.
- [BZ2] BERNSTEIN I.N., ZELEVINSKY A.V., *Induced representations of reductive  $p$ -adic groups I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), pp. 441–472.
- [BW] BOREL A., WALLACH N., *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. Math. Studies **94**, Princeton U. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [Bu] BUSHNELL C.J., *Representations of reductive  $p$ -adic groups: localization of Hecke algebras and applications*, J. London Math. Soc. **63** (2001), pp. 364–386.
- [C] CASSELMAN W., *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. **230** (1977), pp. 101–105.
- [CH] CIUBOTARU D., HE X., *the cocenter of graded affine Hecke algebras and the density theorem*, arXiv: 1208.0914v2 [mathRT], 13 aout 2012, to appear in J. Pure Applied Algebra.
- [CR] CURTIS C., REINER I., *Methods of representation theory. Vol. I*, New–York, John Wiley & Sons, 1981.
- [D] DAT J.-F., *On the  $K_0$  of a  $p$ -adic group*, Invent. Math. **140** (2000), pp. 171–226.
- [F] FLICKER Y., *Bernstein’s isomorphism and good forms*, Proc. Symp. Pure Math. **58** (1995), pp. 171–196.
- [G] GABRIEL P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), pp. 323–448.
- [HR] HAINES T., RAPOPORT M., *On parahoric subgroups*, appendice à l’article: PAPPAS G., RAPOPORT M., *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. **219** (2008), pp. 118–198.
- [HV] HENNIART G., VIGNÉRAS M.-F., *A Satake isomorphism for representations modulo  $p$  of reductive groups over local fields*, J. reine angew. Math. **701** (2015), pp. 33–75.
- [K1] KAZHDAN D., *Cuspidal geometry of  $p$ -adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 1–36.
- [K2] KAZHDAN D., *Representations of groups over close local fields*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 175–179.
- [L1] LEMAIRE B., *Représentations génériques de  $GL_N$  et corps locaux proches*, J. Algebra **236** (2001), pp. 549–574.

- [L2(2010)] LEMAIRE B. *Caractères tordus des représentations admissibles*, prépublication arXiv: 1007.3576v1 [math.RT], 21 juillet 2010.
- [L2] LEMAIRE B. *Caractères tordus des représentations admissibles*, version remaniée et complétée de [L2(2010)], arXiv: 1007.3576v2 [math.RT], 14 octobre 2013.
- [R] ROGAWSKI J., *Trace Paley–Wiener theorem in the twisted case*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1998), pp. 215–229.
- [W] WALDSPURGER J.–L., *La formule des traces locale tordue*, arXiv: 1205.1100v2 [math.RT], 13 septembre 2012.

---

6 novembre 2015

GUY HENNIART, Université Paris–Sud, Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, CNRS, F–91405 Orsay Cedex • *E-mail* : [Guy.Henniart@math.u-psud.fr](mailto:Guy.Henniart@math.u-psud.fr)

BERTRAND LEMAIRE, Institut de Mathématiques de Luminy et UMR 6206 du CNRS, Université Aix–Marseille II, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9  
*E-mail* : [Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr](mailto:Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr)