



**HAL**  
open science

# Diagonalisation asymptotique d'opérateurs de Hilbert-Schmidt

Benjamin Boutin, Nicolas Raymond

► **To cite this version:**

Benjamin Boutin, Nicolas Raymond. Diagonalisation asymptotique d'opérateurs de Hilbert-Schmidt . 43e Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2016), May 2016, Obernai, France. hal-01310908

**HAL Id: hal-01310908**

**<https://hal.science/hal-01310908>**

Submitted on 3 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DIAGONALISATION ASYMPTOTIQUE D'OPÉRATEURS DE HILBERT-SCHMIDT

Benjamin BOUTIN & Nicolas RAYMOND

IRMAR Université de Rennes 1

**Problème de Cauchy d'inconnue  $H(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$  :** 
$$\begin{cases} H' = [H, G(H)], & t \in \mathbb{R} \\ H(0) = H_0 \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}) \end{cases}$$

## Résultats préliminaires

### Existence d'un flot global isospectral

Supposons que  $G : \mathcal{L}_2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$  est régulière et que  $G(\mathcal{S}_2(\mathcal{H})) \subset \mathcal{A}_2(\mathcal{H})$ .

Il existe une unique solution  $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}_2(\mathcal{H}))$ .

De plus, il existe  $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ , tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = U^*(t)H_0U(t)$ .

### Exemples de fonction $G$ :

**Brockett [3]**  $G_{\text{Bro}}(H) = [H, A]$  avec  $A = \text{diag}(a_i) \in \mathcal{D}_2(\mathcal{H})$

**Toda**  $G_{\text{Tod}}(H) = H^- - (H^-)^*$

**Wegner**  $G_{\text{Weg}}(H) = [H, \text{diag}(H)]$

### "Diagonalisation" de $G$ :

Soit  $G \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2(\mathcal{H}), \mathcal{A}_2(\mathcal{H}))$ . S'il existe une famille antisymétrique  $(g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  telle que  $G(E_{i,j}) = g_{i,j}F_{i,j}$ , alors  $G$  est dite diagonalisable de valeurs propres  $g_{i,j}$ .

- $G_{\text{Bro}}$  diagonalisable avec  $g_{i,j} = a_j - a_i$ .
- $G_{\text{Tod}}$  diagonalisable avec  $g_{i,j} = -1$  pour  $i < j$ .
- $G_{\text{Weg}}$  n'est pas linéaire.

### Diagonalisation de $dF_{H_\infty}$ avec $F(H) = [H, G(H)]$ :

$$dF_{H_\infty}(E_{i,j}) = g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j)E_{i,j}$$

### Solutions de $G(H_\infty) = 0$ :

Tous les opérateurs diagonaux  $H_\infty = \text{diag}(\alpha_\ell)$  sont des points d'équilibre. Sous certaines conditions la réciproque est vraie.

Notons  $(E_{i,j})$  et  $(F_{i,j})$  les bases respectives de  $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{A}_2(\mathcal{H})$ , canoniquement associées à  $(e_n)$ .

## Résultats de convergence

Une famille de fonctions  $(g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sera dite :

- **équilibrée** si :  $\forall i, j \in \mathbb{N}, \exists c_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+), \forall t \in \mathbb{R}, |g_{i,j}(t)| \leq c_{i,j}(t)|g_{j,i}(t)|$ ,
- **bornée ponctuellement** si :  $\forall t \in \mathbb{R}, \sup_{i,j} |g_{i,j}(t)| < +\infty$ .

### Intégrabilité et convergence

Soit  $H = (h_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}_2(\mathcal{H}))$  tel que

- $\|H(t)\|_{\text{HS}}$  est bornée indépendamment de  $t$
- la famille  $(h_{i,j})$  est équilibrée
- il existe une famille de fonctions mesurables  $(g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ , équilibrée et bornée ponctuellement, définie sur  $\mathbb{R}$ , telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, h'_{i,i}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} g_{i,j}(t)|h_{i,j}(t)|^2.$$

- i) Supposons qu'il existe  $T > 0$  et  $(\epsilon_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ , tels que  $\forall t \geq T, \forall k, \ell \in \mathbb{N}, k \geq \ell, \epsilon_\ell g_{\ell,k}(t) \geq 0$ . Alors on a la propriété d'intégrabilité

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{+\infty} \int_T^{+\infty} |g_{\ell,j}(t)||h_{\ell,j}(t)|^2 dt < +\infty,$$

et chacun des termes diagonaux  $h_{\ell,\ell}(t)$  admet une limite notée  $h_{\ell,\ell}(\infty)$ .

- ii) Sous l'hypothèse supplémentaire :  $\forall \ell \in \mathbb{N}, \exists c_\ell > 0, \forall j \neq \ell, \forall t \geq T, |g_{\ell,j}(t)| \geq c_\ell$ , on a

$$\sum_{j \neq \ell} \int_T^{+\infty} |h_{\ell,j}(t)|^2 dt = \int_T^{+\infty} \|H(t)e_\ell - h_{\ell,\ell}(t)e_\ell\|^2 dt < +\infty.$$

- iii) Si de plus pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto \|H'(t)e_\ell\|$  est bornée, alors pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $H(t)e_\ell$  converge vers  $h_{\ell,\ell}(\infty)e_\ell$ .

### Convergence – cas $\dim \mathcal{H} = d < \infty$

Sous les hypothèses précédentes,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_\infty = \text{diag}(\alpha_\ell)_{0 \leq \ell \leq d-1}$$

où les  $\alpha_\ell$  sont les valeurs propres avec multiplicité de  $H_0$ . Supposons, de plus, qu'elles sont valeurs propres simples.

Alors

$$\|H(t) - H_\infty\| \leq Ce^{-\gamma t},$$

où  $\gamma = \inf_{\mathcal{T}^-} |g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j)| > 0$  avec

$$\mathcal{T}^- = \{(i, j) \in \{0, \dots, d-1\}^2 : i < j \text{ et } g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j) < 0\}.$$

## Décomposition de Chu et Norris

Soit  $G : \mathcal{L}_2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}_2(\mathcal{H})$  et considérons le problème de Cauchy posé pour une donnée initiale quelconque  $H(0) = H_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ . Considérons les problèmes satellites suivants :

$$\begin{cases} g_1'(t) = g_1(t)G(H(t)), & g_1(0) = \text{Id}, \\ g_2'(t) = (H(t) - G(H(t)))g_2(t), & g_2(0) = \text{Id}. \end{cases}$$

### Résultat adapté de [2] :

Les solutions  $H, g_1$  et  $g_2$  sont globales et de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus

- $g_1$  est à valeurs dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$
- $H(t) = g_1(t)^{-1}H_0g_1(t) = g_2(t)H_0g_2^{-1}(t)$
- $e^{tH_0} = g_1(t)g_2(t)$  et  $e^{tH(t)} = g_2(t)g_1(t)$

### Algorithme QR [1] :

$e^{H(0)} = g_1(1)g_2(1)$  et  $e^{H(1)} = g_2(1)g_1(1)$ .

Dans le cas du flot de Toda,  $g_1(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  et  $g_2(t)$  est triangulaire supérieure : on reconnaît l'algorithme discret correspondant à la méthode traditionnelle QR.

### Vitesse de convergence de la méthode QR en dimension infinie

Soit  $H_0 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$  diagonalisable de valeurs propres  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ordonnées selon les parties réelles décroissantes.

Supposons qu'il existe  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que  $PH_0P^{-1} = \Lambda$  où  $\Lambda = \text{diag}(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_2(\mathcal{H})$  et tel que pour tout  $J \in \mathbb{N}$ , le mineur  $P_J = (\langle Pe_i, e_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq J}$  est inversible. Alors

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, H(t)e_\ell - \sum_{j=\ell+1}^{+\infty} \langle H(t)e_\ell, e_j \rangle e_j = \alpha_\ell e_\ell + \mathcal{O}(e^{-t\delta_\ell}), \quad \delta_\ell = \min_{0 \leq j \leq \ell} \Re(\alpha_j - \alpha_{j+1}).$$

## Notations

### Structure hilbertienne

$\mathcal{H}$  espace de Hilbert réel séparable, muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$   
 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $\mathcal{H}$

### Opérateurs particuliers

Étant donné  $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$H^-$  partie inférieure de  $H$  :  $\langle e_i, H^- e_j \rangle = \langle e_i, H e_j \rangle \delta_{i \geq j}$

Crochet :  $[A, B] = AB - BA$

### Norme Hilbert-Schmidt

$$\|H\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|He_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n(H)|^2$$

### Ensemble d'opérateurs sur $\mathcal{H}$

$\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$  opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $\mathcal{H}$

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$  opérateurs symétriques :  $H^* = H$

$\mathcal{S}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$

$\mathcal{A}(\mathcal{H})$  opérateurs antisymétriques :  $H^* = -H$

$\mathcal{A}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$

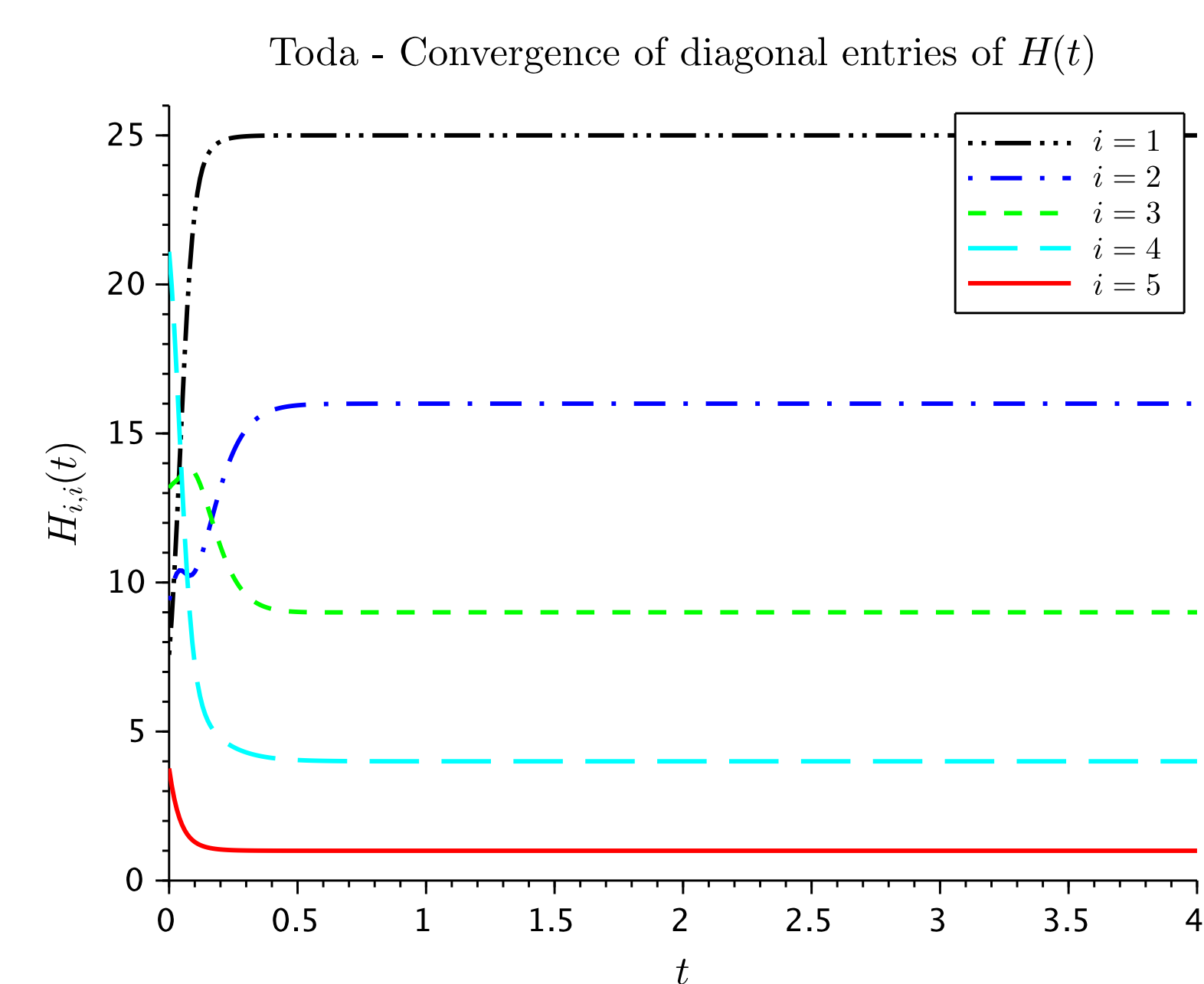
$\mathcal{D}(\mathcal{H})$  opérateurs diagonaux :  $\langle He_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$

$\mathcal{D}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{D}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$

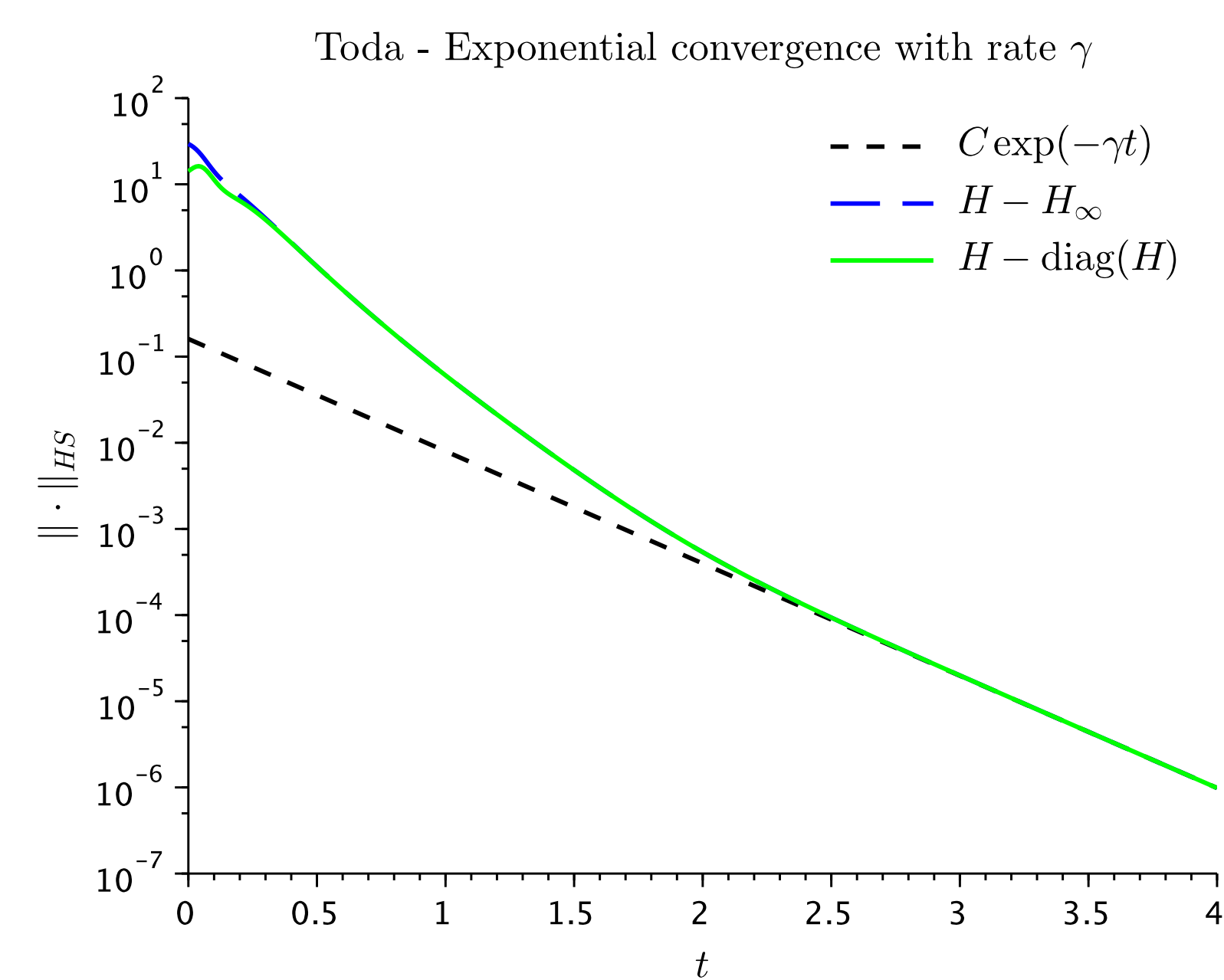
$\mathcal{U}(\mathcal{H})$  opérateurs unitaires :  $U^*U = \text{Id}$

## Illustrations numériques

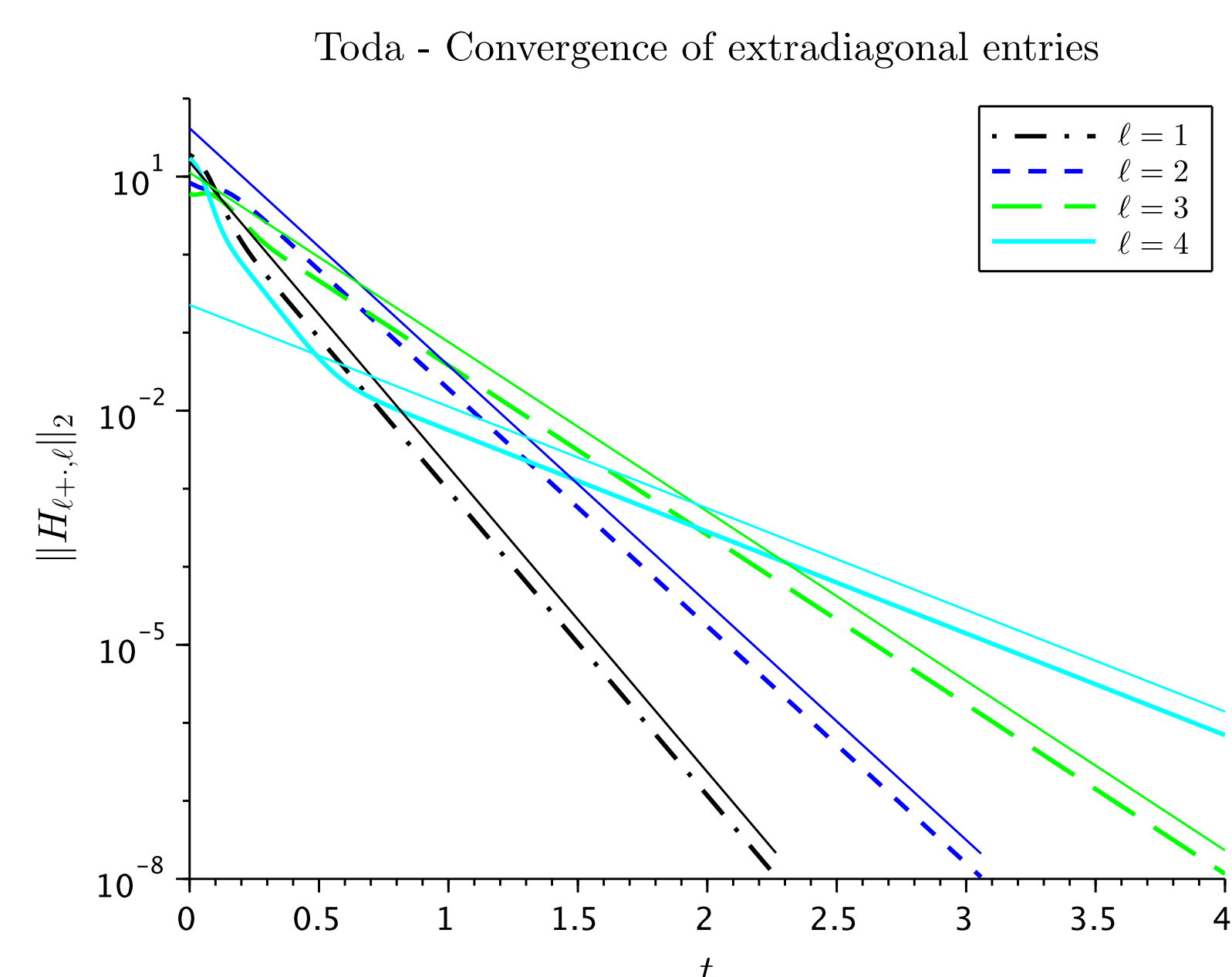
- $H_\infty = \text{diag}(\alpha_\ell)$  avec  $\alpha_\ell = \ell^2, 1 \leq \ell \leq 5$  :



$$\circ g_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j) : \begin{pmatrix} 0 & -9 & -16 & -21 & -24 \\ -9 & 0 & -7 & -12 & -15 \\ -16 & -7 & 0 & -5 & -8 \\ -21 & -12 & -5 & 0 & -3 \\ -24 & -15 & -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$



- $\Re(\alpha_\ell - \alpha_{\ell+1}) \in \{9, 7, 5, 3\}$



## Références

- [1] RUTISHAUSER, H., *Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Arch. Math. (Basel), 5, 1954.
- [2] CHU, M. T. AND NORRIS, L. K., *Isospectral flows and abstract matrix factorizations*, SIAM J. Numer. Anal., 25 (6), 1988.
- [3] BACH, V. AND BRU, J.-B., *Rigorous foundations of the Brockett-Wegner flow for operators*, J. Evol. Equ., 10 (2), 2010.
- [4] BOUTIN, B. AND RAYMOND, N., *Some remarks about flows of Hilbert-Schmidt operators*, JEE, to appear.