



**HAL**  
open science

## Exploration des solutions périodiques d'un modèle simple de corde frottée

Pierre Vigué, Bruno Cochelin, Sami Karkar, Christophe Vergez

► **To cite this version:**

Pierre Vigué, Bruno Cochelin, Sami Karkar, Christophe Vergez. Exploration des solutions périodiques d'un modèle simple de corde frottée. Congrès Français de Mécanique, Association Française de Mécanique, Aug 2015, Lyon, France. hal-01310058

**HAL Id: hal-01310058**

**<https://hal.science/hal-01310058>**

Submitted on 1 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# Investigation of periodic solutions of a bowed string toy model

P. VIGUÉ<sup>a</sup>, B. COCHELIN<sup>a</sup>, S. KARKAR<sup>b</sup>, C. VERGEZ<sup>a</sup>

a. LMA, Aix-Marseille Univ, CNRS, UPR 7051  
Centrale Marseille, F-13402 Marseille Cedex 20, France

{ vigue, cochelin, vergez }@lma.cnrs-mrs.fr

b. Laboratoire de Traitement des Signaux 2  
EPFL STI IEL LTS2, ELD 241 (Bâtiment ELD)

Station 11, CH-1015 Lausanne

sami.karkar@epfl.ch

## Résumé :

*La continuation des solutions périodiques par couplage MAN-HBM [2] est appliquée à un modèle réduit de corde frottée avec une loi de friction régularisée. L'intérêt de la continuation est souligné même avec un nombre restreint de modes, donnant accès à plusieurs solutions stables pour les mêmes paramètres de jeu. L'étude plus complète avec un nombre de modes élevé nécessite une optimisation des méthodes, par exemple une sélection du nombre d'harmoniques différenciée selon les variables.*

## Abstract :

*The HBM-ANM continuation of periodic solutions [2] is applied to a bowed string toy model with a regularized friction law. Several stable solutions can be found for the same parameters, which underlines the usefulness of continuation even with few modes. An investigation with a large number of modes requires optimization, such as harmonic selection with respect to the variables.*

**Mots clefs : friction, continuation, équilibrage harmonique.**

## 1 Introduction : modèle, continuation, régimes périodiques, équilibrage harmonique

On s'intéresse aux solutions périodiques de la corde frottée, modélisée par une corde tendue (tension  $T$ ) fixée aux deux extrémités, dotée d'une raideur propre  $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$  ( $E$  module d'Young du matériau,  $I$  le moment d'inertie) et d'un amortissement visqueux de coefficient de viscosité  $\eta$ . On note  $y(x, t)$  le déplacement latéral (supposé plan) à l'instant  $t$ , à la position  $x$ . L'archet exerce une force normale  $F_N$  localisée en  $x = x_f$ , et il se déplace perpendiculairement à la corde à la vitesse  $V_a$ . La force de frottement qui entraîne la corde dans son plan est supposée de type Coulomb  $F_N \mu_n(V_r)$ , où le coefficient de frottement  $\mu_n$  ne dépend que de la vitesse relative  $V_r$  entre l'archet et la corde.

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F_N \delta(x - x_f) \mu_n(V_r) \quad (1)$$

La loi de frottement choisie ici est une loi régularisée, définie à l'aide d'une fonction mère  $\mu$  et d'un coefficient de régularisation  $n$  :

$$\mu_n(V_r) = \mu(nV_r), \quad \mu(V_r) = \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \varepsilon} - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1}, \quad \alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \quad (2)$$

Le graphe de la fonction  $\mu_n$  pour quelques valeurs de  $n$  est donné en figure 1 (gauche). Quand  $n$  est grand la courbe se rapproche de la loi de Coulomb avec coefficient dynamique  $\mu_d$  et statique  $\mu_s$ .

On projette l'équation continue (1) sur la base modale des  $\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , pour  $N$  modes,

$$\forall 1 \leq k \leq N, \quad q_k''(t) + 2\omega_k \zeta_k q_k'(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{1}{m_k} F_N \mu_n(V_r) \sin\left(\frac{k\pi x_f}{L}\right) \quad (3)$$

avec les fréquences propres  $\omega_k$  tenant compte de la raideur :

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2 T}{L^2 m_0} \left(1 + \frac{EI}{T} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}\right) \quad (4)$$

La troncature à un seul mode ( $N = 1$ ) du système (3) donne le modèle de Rayleigh de la corde : un système masse-ressort-amortisseur dont la masse est entraînée par un tapis roulant. Une étude plus complète de ce cas est menée dans un article en préparation [4], et établit les similitudes avec la loi de Coulomb de mêmes paramètres  $\mu_d, \mu_s$ . La figure 1 (droite) présente des diagrammes de phase associés à différentes valeurs de  $n$ , et à la loi de Coulomb sans régularisation.

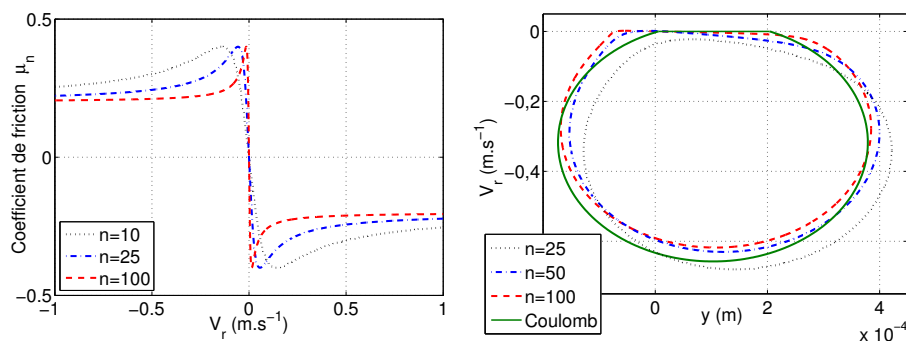


FIGURE 1 – À gauche : fonction  $\mu_n$  pour  $n = 10$  (pointillés, noir), 25 (trait mixte, bleu), 100 (tirets, rouge). À droite : pour  $N = 1$  mode, exemples de cycles pour la loi  $\mu_n$  et les mêmes valeurs de  $n$  ; pour la loi de Coulomb (trait plein, vert).

Les solutions périodiques du système (3) sont recherchées par équilibrage harmonique (Harmonic Balance Method, HBM). Par introduction de variables auxiliaires, les non-linéarités sont reformulées quadratiquement, ce qui permet d'utiliser un nombre élevé d'harmoniques grâce à une procédure d'automatisation des calculs [2]. Le système d'équations polynomiales issu de la HBM et relatif aux coefficients de Fourier est analysé par une méthode de continuation à base de séries de Taylor, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). La continuation d'une solution décrit son évolution lorsqu'un des paramètres varie continument. Contrairement aux méthodes prédicteur-correcteur, la MAN donne une description

continue de la branche de solution. Enfin, la méthode de Hill, couplée aux méthodes précédentes, décrit la stabilité des solutions obtenues [3].

## 2 Résultats pour deux modes

Pour la friction régularisée  $\mu_n$ , nous définissons le type de mouvement ainsi : soit  $V_n$  tel que  $\mu_n(V_n) = \max_v \mu_n(v) = \mu_s$ , alors

$$|V_r(t)| \leq |V_n| \Rightarrow \text{ADHÉRENCE}, \quad |V_r(t)| > |V_n| \Rightarrow \text{GLISSEMENT} \quad (5)$$

Une solution est classée selon le nombre d'intervalles d'adhérence par période : zéro (solution en glissement), un (régime de Helmholtz, ou *stick-slip*), deux et plus (double *stick-slip*, ou *stick-slip* multiple.)

Le cas à un mode déjà évoqué donne un diagramme de bifurcation (amplitude de l'oscillation en fonction de la vitesse d'archet) résumé ainsi : une branche instable en glissement, une branche stable en régime de Helmholtz, connectées par une bifurcation de type fold. La figure 2 présente le diagramme de bifurcation selon la vitesse d'archet pour  $N = 2$  modes ( $F_N$  est fixée à 5 N). Le premier registre (pulsation autour de  $\omega_1$ ) comporte deux branches à petites vitesses d'archet, et une à grande vitesse. À petites  $V_a$ , une branche est issue du régime stationnaire, par des bifurcations de Hopf. Elle est majoritairement instable. La deuxième branche, majoritairement stable, est celle d'amplitude maximale. Le mouvement y évolue d'un régime de Helmholtz stable vers un double *stick-slip* instable.

La branche du second registre est issue du stationnaire par deux bifurcations de Hopf. À  $V_a = 2.67 \text{ m.s}^{-1}$ , elle comporte une bifurcation de doublement de période, menant à la branche de premier registre majoritairement stable déjà évoquée. Puis à  $V_a = 10.04 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_a = 25.72 \text{ m.s}^{-1}$ , deux bifurcations de doublement de période mènent à la troisième branche de premier registre.

Des exemples de régimes observés sont donnés en figure 3. Les points 1, 2 et 3 sont situés sur trois portions à  $V_a = 2.9 \text{ m.s}^{-1}$ . Les points 1 et 2 sont sur la branche de premier registre majoritairement stable, et illustrent un régime de Helmholtz (stable) et un double *stick-slip* (instable). Le point 3 est un régime de Helmholtz au second registre (stable). L'observation pour les mêmes paramètres de jeu de deux régimes de Helmholtz stables, au premier et au second registre (points 1 et 3), n'est pas aberrante, c'est un phénomène présent sur le violon. Cette coexistence se reproduit pour  $V_a$  entre 12 et 20  $\text{m.s}^{-1}$ , où les régimes de Helmholtz de premier et second registre sont tous les deux stables.

Le point 4 est un exemple de glissement, instable, et non stationnaire. Les points 5 et 6 sont situés sur la branche de premier registre issue des bifurcation de doublement de période aux grandes vitesses d'archet. Le point 5 est stable, le point 6 est instable. Ils sont tous deux obtenus à  $V_a = 18 \text{ m.s}^{-1}$ , et ce sont des régimes de Helmholtz selon la définition 5. Cependant, leurs diagrammes diffèrent dans le plan de phase, le point 6 formant quasiment un double *stick-slip* ; ce qui se reflète à l'écoute (superposition des deux pulsations  $\omega_1, \omega_2$  pour le point 5,  $\omega_2$  nettement prépondérante pour le point 6). Au voisinage de la bifurcation de doublement de période à  $V_a \simeq 25.72 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui est un cas plus extrême que le point 6 ( $V_a = 18 \text{ m.s}^{-1}$ ), les coefficients de Fourier pairs deviennent nettement prépondérants sur les impairs.

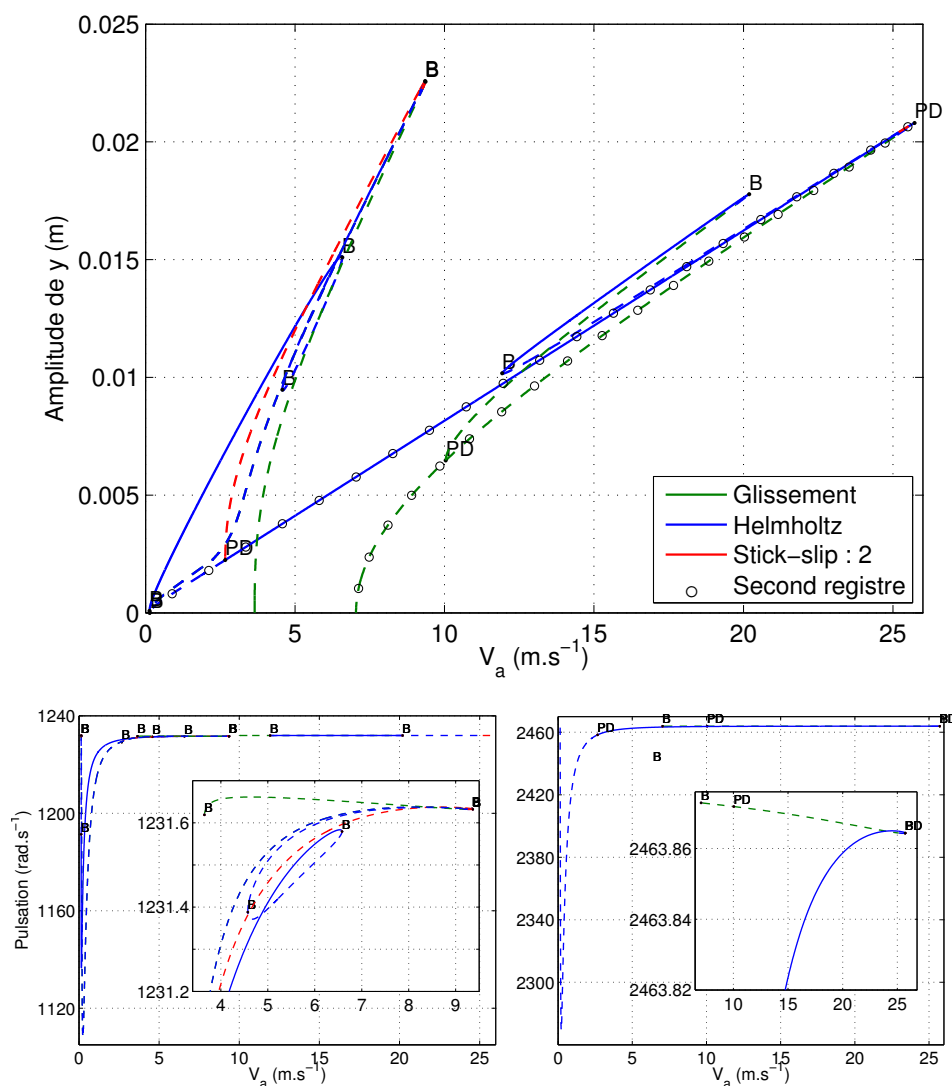


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation pour  $N = 2$  modes. En haut, amplitude (crête-à-crête) de  $y$  (m) en fonction de  $V_a$  (m.s<sup>-1</sup>) ; en bas, pulsation (rad.s<sup>-1</sup>) en fonction de  $V_a$ , pour le premier registre à gauche, pour le second registre à droite. Trait plein : solution stable, tirets : solution instable. Glissement en vert, régime de Helmholtz en bleu, double stick-slip en rouge. B : bifurcation simple (un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en +1), PD : period-doubling bifurcation. Dans le diagramme du haut, le symbole  $\circ$  désigne le second registre.

### 3 Perspectives

L'intérêt de la continuation est souligné ici, donnant accès à plusieurs solutions stables pour les mêmes paramètres de jeu, et ce plus directement que des méthodes telles que l'intégration temporelle où la convergence vers une solution stable dépend des conditions initiales sur choisies par l'utilisateur.

Une étude similaire peut être menée avec plus de modes. Cependant le temps de calcul des pas de continuation est déterminé par le nombre d'inconnues  $N_{inc}$  dans le système mis en forme pour la continuation selon la procédure décrite dans [2] :

$$N_{inc} = N_{eq}(2H + 1) + 2, \quad N_{eq} = 4N + 7 \quad (6)$$

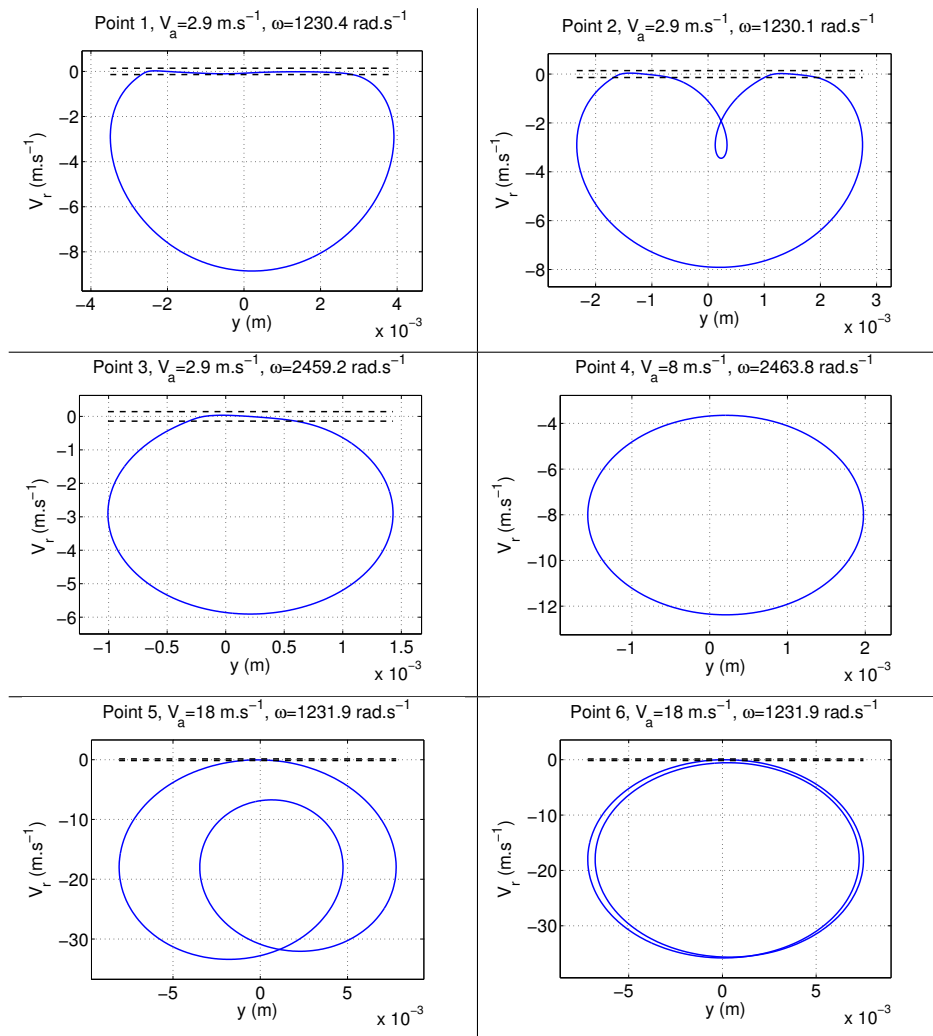


FIGURE 3 – Diagrammes  $(y, V_r)$  (trait plein, bleu), avec les limites d'adhérence  $\pm V_n$  de la définition 5 (tirets, noir).

1. Régime de Helmholtz, premier registre.	2. Stick-slip double, premier registre.
3. Régime de Helmholtz, second registre.	4. Glissement, second registre.

5, 6. Régimes de Helmholtz, premier registre, branche issue des bifurcations de doublement de période du second registre.

où  $H$  est le nombre d'harmoniques par variable,  $N_{eq}$  le nombre de variables. Ceci peut être amélioré, comme nous l'illustrons à présent ; soit une variable  $X$ , représentée par la série de Fourier tronquée à  $H$  harmoniques :

$$X(t) = X_0 + \sum_{k=1}^H X_{c,k} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^H X_{s,k} \sin(k\omega t) \quad (7)$$

Nous calculons les sommes

$$S_2 = \sum_{k=0}^H X_{c,k}^2 + X_{s,k}^2, \quad S_1 = \sum_{k=0}^H |X_{c,k}| + |X_{s,k}| \quad (8)$$

puis le rang  $H_{X,2}$  (resp.  $H_{X,1}$ ) où 99.5 % de la somme  $\mathcal{S}_2$  (resp.  $\mathcal{S}_1$ ) est atteint. Ces deux entiers donnent, au sens de deux normes, le nombre d'harmoniques nécessaires pour approcher  $X$ . La figure 4 montre qu'en certains points de la branche (comme le point 4, en glissement), toutes les variables nécessitent peu d'harmoniques ; tandis qu'en d'autres points (comme le point 1, régime de Helmholtz), quelques unes nécessitent un nombre d'harmoniques nettement plus grand que la majorité des variables (pour les deux normes).

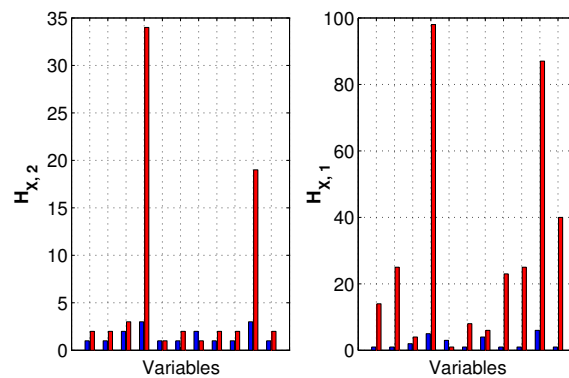


FIGURE 4 – Pour les points 4 (en bleu) et 1 (en rouge) de la figure 3, seuils  $H_{X,2}$  (à gauche) et  $H_{X,1}$  (à droite).

Nous envisageons par conséquent l'implémentation d'une sélection du nombre d'harmoniques différenciée selon les variables, éventuellement auto-adaptative le long de la branche, avant une étude avec un nombre de modes  $N$  élevé. À titre d'exemple, Inácio et Antunes [1] ont considéré  $N = 50$  modes.

## Annexe. Constantes

Signification	Symbole	Valeur numérique
Masse linéique de la corde	$m_0$	$3.1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}$
Tension de la corde	$T$	51.8 N
Longueur de la corde	$L$	0.33 m
Module d'Young	$E$	5 GPa
Moment d'inertie	$I$	$2.01 \times 10^{-14} \text{ m}^4$
Coefficient d'amortissement	$\eta$	$0.01 \text{ kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$
Fréquence fondamentale	$f_0$	196 Hz
Force normale	$F_N$	5 N
Coefficient de friction statique	$\mu_s$	0.4
Coefficient de friction dynamique	$\mu_d$	0.2
Coefficient de régularisation	$n$	10
Paramètre de régularisation	$\varepsilon$	$10^{-4}$

## Références

- [1] O. Inácio, J. Antunes, *A linearized modal analysis of the bowed string*, 19<sup>th</sup> International Congress on Acoustics, 2007.
- [2] B. Cochelin, C. Vergez, *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*. Journal of Sound and Vibration, **324**, p. 243-262, 2009.
- [3] A. Lazarus, O. Thomas, *A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems*. Comptes Rendus Mecanique **338**, p. 510-517, 2010.
- [4] P. Vigué, B. Cochelin, S. Karkar, C. Vergez. Regularized friction and continuation (Part 1) : comparison with Coulomb's law, *pre-print*.