AXIOMATISATION QUANTIQUE SUR LES FIBRES D'ETAT

Jean Louis Jonot

AXIOMATISATION QUANTIQUE SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT

JONOT JEAN LOUIS

Abstract. The quantum axomatisation or "∇^γ-quantification " is a process of quantification of the real or complex vector bundle. We want to represent the states of a physical system as the sections of a hermitian vector bundle. The principle of quantification is made by defining on every fiber an observable which varies in a smooth way in the Banach sense.

1. Introduction

L'axomatisation quantique ou "∇^γ-quantification" est un procédé de quantification des fibrés vectoriels réels ou complexes. On veut réprésenter les états d'un système physique comme les sections d'un fibré hermitien. On est ainsi amené à adapter les postulats de la physique quantique à la théorie des fibrés vectoriels. Le principe de quantification se fait en définissant sur chaque fibre une observable qui varie de façon C^∞. En dimension finie, on construit un opérateur, équivalent à l'opérateur hamiltonien, à partir d'une connexion ∇ sur le fibré et d'une section de Dirac γ. L'équation d'état ou équation de Dirac-Einstein est décrite par une équation des sections propres du fibré considéré. Les équations d'évolution du système se font le long d'un champ chronologique, c'est une généralisation de l'équation d'évolution de Schrödinger aux fibrés. L'espace de base du fibré est, en général, une carte W de l'univers $\mathbf{W}$ ou l'univers lui-même. L'espace total est une variété qui peut être de dimension infinie si la fibre est un espace de banach ou de hilbert de dimension infinie. On peut encore définir la notion d'application C^∞ étendue aux variétés banachiques ou hilbertiennes [5].

2. La mesure spectrale

Sur une carte de l'univers $\mathbf{W}$, les systèmes physiques sont décrits par des fibrés. Ces fibrés sont des fibrés vectoriels réels ou complexes, ou des fibrés dont la fibre est un groupe de Lie. Les fibrés d'état de l'univers définis sur $\mathbf{W}$ sont notés

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, F) \text{ ou } \zeta = (E, \pi, \mathbf{W})$$

s'il n'y a pas de confusion sur la fibre $F = \mathcal{B}$ dans le cas réel et $F = \mathcal{H}$ dans le cas complexe, on parlera du fibré d'état E. L'ensemble des sections du fibré E est noté $\Gamma(E)$. Les exemples les plus utilisés en physique sont le fibré trivial $\mathbf{W} \times \mathbb{C}$ dont les sections sont les applications C^∞ de $\mathbf{W}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, le fibré tangent $T\mathbf{W}$ et son complexifié $T_{\mathbb{C}}\mathbf{W} = T\mathbf{W} \otimes \mathbb{C}$ qui ont pour sections, respectivement, les champs réels et complexes. En dimension infinie, les fibrés vectoriels sont simples.

Date: 1/04/2016.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 81Q10-81Q35-47A70-51P05-55R10-81P05.

Key words and phrases. Section de Dirac, Fibré d'état, Equation d'évolution, Feuilletage, Champ chronologique, Equation de Dirac, Equation de Schrödinger, Dérivée de Lie, Section de Dirac, Connexion.

Si l'univers $\mathbf{W}$ est compact et suffisamment régulier, par exemple si $\mathbf{W}$ est un CW-complexe alors tous les fibrés de dimension infinie sur $\mathbf{W}$ sont triviaux. Dans la suite $\mathbf{W}$ n'est pas supposé compact, mais on peut se restreindre à des cartes d'adhérence compacte.

Une observable en w est un opérateur $\phi(w) : E_w \to E_w$ ayant une base de vecteurs propres pour chaque w et telle que l'application $w \to \phi(w)$ est C^∞ dans le sens suivant. Pour toute section $s \in \Gamma(E)$, l'application

$$w \to \phi(w)(s(w))$$

est C^∞. On remarque que cette définition a un sens si la fibre F du fibré est de dimension finie, on peut étendre cette notion à un fibré de dimension infinie, hilbertien ou banachique [5]. Dans le cas hilbertien $\phi(w)$ est un opérateur self-adjoint pour tout $w \in \mathbf{W}$. L'observable ϕ est donc une section du fibré de $\mathcal{A}(E)$ qui est le sous fibré de $\mathrm{End}(E)$ des endomorphismes self-adjoints. Les fonctions $\lambda : W \subset \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une section s, non nulle sur W, vérifiant

$$\phi(w)(s(w)) = \lambda(w)\, s(w)\,, \; \forall w \in W$$

est une fonction propre de ϕ sur W et la section s est une section propre de ϕ sur W. Si la fibre est hilbertienne, le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\phi(w)$, une mesure spectrale [2] et [7]

$$P_{\phi(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(E_w)\,,$$

qui à chaque borélien B de $\mathbb{R}$ associe un projecteur $P_{\phi(w)}(B)$ de l'espace de Hilbert E_w. Pour chaque couple $(s,t) \in \Gamma(E)^2$ et chaque $w \in \mathbf{W}$, on définit la mesure complexe $\nu_{(s(w),t(w))}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$

$$\nu_{(s(w),t(w))}(B) = \left\langle P_{\phi(w)}(B)(s(w)) \mid t(w) \right\rangle_w .$$

On en déduit, pour chaque $w \in \mathbf{W}$ et chaque $s \in \Gamma(E)$, une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ définie par

$$\nu_{s(w)}(B) = \left\langle P_{\phi(w)}(B)(s(w)) \mid s(w) \right\rangle_w .$$

En particulier, pour $s \in \Gamma(E)$ et si la fibre de E est $\mathcal{H}$, on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}(\mathbf{W})$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$. Si la section s est normalisée pour tout w, c'est-à-dire si $\|s(w)\|_w = 1$ pour le produit hilbertien induit sur chaque fibre par $\mathcal{H}$, $\nu_{s(w)}$ est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée $P_{s,\phi}$ avec $P_{s,\phi}(w) = \nu_{s(w)}$, $w \in \mathbf{W}$. En utilisant la décomposition de Paul Levy [8], ν_s s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^{p} + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^p est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue ce qui signifie que la fonction de répartition est une fonction continue et que la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si $\nu_s = \nu_s^p$, on dit que s a un spectre discret et si $\nu_s = \nu_s^{ac}$, on dit que s a un spectre continu. Dans le cas où $\nu_s = \nu_s^{sc}$, le spectre est dit singulier.

3. La section des opérateurs d'état

On se donne une connexion ∇ sur le fibré des états E, c'est-à-dire, la donnée d'une application $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E\right)$$

qui vérifie la relation de Leibnitz

$$\nabla(\lambda s) = d\lambda \otimes s + \lambda \nabla s,\ \forall \lambda \in C^{\infty}(\mathbf{W}),$$

la représentation de la connexion ∇ sous forme de dérivée covariante s'écrit,

$$\nabla : \Gamma(T\mathbf{W}) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),\ (X, s) \to \nabla_X s,$$

$\nabla_X s$ est la dérivée covariante de s le long du champ X. On se fixe ensuite une section de Dirac γ de E, c'est-à-dire, une section du fibré

$$\mathrm{Hom}\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E, E\right) \approx \mathrm{Hom}\left(\Lambda^1 \mathbf{W}, \mathrm{End}(E)\right)$$

cet isomorphisme est réalisé si la fibre est de dimension finie. En dimension finie, les fibres sont

$$\mathrm{Hom}\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E, E\right)_w = \mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^1 \mathbf{W}\right)_w \otimes E_w, E_w\right) \approx \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^4 \otimes F, F\right),$$

ainsi pour toute section de formes linéaires $d \in \Gamma\left(\Lambda^1 \mathbf{W}\right)$, l'application

$$\gamma^d(w) : E_w \to E_w,\ \gamma^d(w)(u) = \gamma(w)(d(w) \otimes u),\ u \in E_w$$

est un endomorphisme de E_w pour tout $w \in \mathbf{W}$ et l'endomorphisme de Dirac associé à $d \in \Gamma\left(\Lambda^1 \mathbf{W}\right)$ est défini par

$$\gamma^d : \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$
$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s),\ \gamma^d(s)(w) = \gamma^d(w)(s(w)).$$

Cette définition a un sens si la fibre de ζ est de dimension infinie. Si la structure de la fibre est un espace de banach on impose la continuité de $\gamma^d(w)$ sur chaque fibre E_w pour la structure induite et pour toute section locale s qui est C^{∞} au sens de Banach, l'application

$$w \to \gamma^d(w)(s(w)) = \gamma^d \otimes s(w)$$

est C^{∞} au sens de Banach. Dans le cas d'une fibre hilbertienne, on fera l'hypothèse, en général, que $\gamma^d(w)$ est self-adjoint pour la structure hilbertienne sur E_w induite par la fibre.

Remark 1. *$d \otimes s$ s'identifie à la section locale de* $\mathrm{Hom}(\mathrm{End}(TW, E))$*,*

$$u \to (d \otimes s)(w)(u) = d(w)(u)\, s(w),\ u \in E_w.$$

Si la fibre est de dimension finie, sur une carte W de $\mathbf{W}$ où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé à la carte W et une base $\{e_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ de sections du fibré d'état resteint à W. Soit $\{d^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual défini par $d^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ où μ,$\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés. Ces endomorphismes sont représentés par des matrices carrées d'ordre n dans la base $\{e_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ dont les coefficients sont dans $C^{\infty}(W)$. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \mathrm{Trace}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right),$$

il est indépendant du choix de la base $\{s_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, cette notion s'étend en dimension infinie lorsque l'on impose à la section de Dirac γ d'être bornée et à trace.

Definition 1. *Une section de Dirac est bornée et à trace si pour tout $d \in \Lambda^1\mathbf{W}$ et pour tout $w \in W$, $\gamma^d(w)$ est un endomorphisme borné et à trace pour la structure induite sur E_w.*

Si l'univers $\mathbf{W}$ est muni d'une métrique de Lorentz g, dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est $(g_{\mu\nu})$, on fait l'hypothèse que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et

$$(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})^{-1}. \tag{3.1}$$

On définit la section H, des opérateurs d'état de $\Gamma(E)$, par

$$H(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)),\ w \in \mathbf{W}$$

notée $H = \gamma \otimes \nabla$, l'équation d'état est donnée par

$$H(s) = \lambda s, \tag{3.2}$$

où λ est une fonction C^∞ définie sur une carte W de $\mathbf{W}$, l'état de la section s est la fonction λ. La section H vérifie

$$H(\lambda s) = \gamma(d\lambda \otimes s) + \lambda H(s) = \gamma^{d\lambda}(s) + \lambda H(s),$$

cet opérateur est $\mathbb{K}$-linéaire, mais pas $C^\infty(\mathbf{W},\mathbb{K})$-linéaire. Le défaut de linéarité est donné par

$$[H, \mathbf{I}_\lambda](s) = \gamma^{d\lambda}(s),\ \mathbf{I}_\lambda = \lambda\,\mathrm{Id}.$$

Theorem 1. *Pour un fibré à fibre de dimension finie, la section des opérateurs d'état vérifie*

$$H = \gamma^\nu D_\nu, \tag{3.3}$$

où D_ν est la section locale de $\mathrm{End}(E)$ définie par $D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu$, Γ_ν est la section locale de Christoffel de $\mathrm{End}(E)$ dont la matrice dans la base de sections locales $\{e_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ est $(\Gamma_\nu)^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ ∂_ν dans la base $\{e_\alpha\}$, défini par $\mathrm{L}_\nu s = (\partial_\nu s^\alpha) e_\alpha$ avec $s = s^\alpha e_\alpha$.

Proof. Soit W un ouvert de trivialisation de E et de $T\mathbf{W}$, $\{\partial_\mu,\ \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé et $\{d^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual. Sur W il existe une base de sections locales, notée $\{e_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ avec $n = \dim E$. Soit $s = s^\alpha e_\alpha$ alors $\nabla s = \nabla(s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \nabla e_\alpha = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha j} d^j \otimes e_\beta$. Sur W la connexion peut s'écrire

$$\nabla e_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\nu} d^\nu \otimes e_\beta,$$

avec des C^∞ fonctions $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ définies sur W à valeurs complexes ou réelles, $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^\alpha = \partial_\nu s^\alpha d^\nu$,

$$\nabla s = \partial_\nu s^\alpha d^\nu \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu} d^\nu \otimes e_\beta = \left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu \otimes e_\beta.$$

La section de Dirac γ de E a pour représentation

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma^{\nu\sigma}_\beta e_\sigma,$$

et si $\gamma^{\nu} = \gamma^{d^{\nu}}$ alors $(\gamma^{\nu})^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\nu\alpha}_{\beta}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} Hs &= \gamma\left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right) \\ &= \left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)\gamma\left(d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right) \\ &= \gamma^{\nu\sigma}_{\beta}\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)e_{\sigma}. \end{aligned}$$

Les matrices de Dirac γ^{μ}, $\mu = 0, 1, 2, 3$, sont des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des applications C^{∞} sur W, à valeurs réelles ou complexes. On note

$$(D_{\nu}s)^{\beta} = \partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu},$$

D_{ν} est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ définie par, $D_{\nu} = \mathrm{L}_{\nu} + \Gamma_{\nu}$, où Γ_{ν} est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le local frame, est $(\Gamma_{\nu})^{\beta}_{\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}$ et L_{ν} est l'endomorphisme de Lie le long du champ ∂_{ν} défini par, $\mathrm{L}_{\nu}\, s = (\partial_{\nu}s^{\alpha})\, e_{\alpha}$.

$$Hs = \gamma^{\nu\sigma}_{\beta}\left(D_{\nu}s\right)^{\beta}e_{\sigma},$$

et

$$Hs = \gamma^{\nu}D_{\nu}\left(s\right).$$

La section des opérateurs d'état s'écrit,

$$H = \gamma^{\nu}D_{\nu}.$$

□

Corollary 1. *L'équation d'état des sections du fibré $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{H})$ s'écrit*

$$\gamma^{\nu}D_{\nu}s = \lambda s, \tag{3.4}$$

où λ est une fonction C^{∞} sur W et s est une section locale définie sur W.

L'équation d'état est donnée par le système d'équations différentielles locales

$$\gamma^{\nu\sigma}_{\beta}\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right) = \lambda s^{\sigma},\ \forall\sigma = 0, 1, \cdots, n-1$$

où λ est une fonction C^{∞} sur W qui représente l'état de la section locale $s = s^{\tau}e_{\tau}$.

Theorem 2. *Avec les hypothèses précédentes, les sections locales $s = s^{\tau}e_{\tau}$ qui sont solutions de l'équation d'état, pour la fonction d'état λ, vérifient le système d'équations différentielles*

$$\gamma^{\nu\sigma}_{\beta}\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right) = \lambda s^{\sigma},\ \forall\sigma = 0, 1, \cdots, n-1.$$

4. La section des opérateurs d'évolution

On se place sur une carte W de l'univers $\mathbf{W}$ sur laquelle le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ définit une métrique g. On suppose que cette métrique est Lorentzienne. Il existe au moins un champ $T : \mathbf{W} \to T\mathbf{W}$ de genre temps $\forall w \in W$, $g\left(w\right)\left(T\left(w\right), T\left(w\right)\right) < 0$. Pour l'espace-temps de Minkowski $\left(\mathbb{R}^{4}, \eta\right)$, $ds^{2} = -dt^{2} + dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}$ et le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps. Soit $T_{w} = \mathbb{R}T\left(w\right)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T\left(w\right) \in T_{w}\mathbf{W}$. Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire $g\left(w\right)$ sur $T_{w}\mathbf{W}$ et scinde $T_{w}\mathbf{W}$ en une somme orthogonale unique $T_{w}\mathbf{W} = T_{w} \oplus E_{w}$, où $E_{w} = T_{w}^{\perp}$. Les restrictions $g\left(w\right)|_{E_{w}}$ et $-g\left(w\right)|_{T_{w}}$sont définies positives. Tout champ $X : \mathbf{W} \to T\mathbf{W}$ se décompose en $X = X_{E} - tT$, où $t : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ est une C^{∞}-application, X_{E} est un champ espace, c'est-à-dire, $X_{E}\left(w\right) \in E_{w}$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. En particulier, $\left|X_{E}\left(w\right)\right|^{2}_{g(w)} = g\left(w\right)\left(X_{E}\left(w\right), X_{E}\left(w\right)\right) > 0$ si $X_{E}\left(w\right) \neq o_{T_{w}(\mathbf{W})}$.

Definition 2. *Un champ T est stable sur une carte W de $\mathbf{W}$, si T s'écrit $T = T^{\nu}\partial_{\nu}$, dans le local frame associé, alors T vérifie*

$$\partial_k \left(T^j g_{ij}\right) = \partial_i \left(T^j g_{kj}\right), \forall i, k. \tag{4.1}$$

Si T est stable sur W, on peut feuilleter en espace-temps la carte W de l'univers $\mathbf{W}$ où vit ce champ chronologique T. Les parties espace-temps de l'univers $\mathbf{W}$ sont des variétés de dimension 4 connexes, muni d'une métrique de Lorentz g et d'une chronologie définie par un champ local normalisé T vérifiant $g(T,T) = -1$. Ces champs chronologiques stables permettent de feuilleter localement $\mathbf{W}$ en deux feuilletages orthogonaux pour la métrique g [3]. L'un est le feuilletage espace, noté $\mathcal{E}$, dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 3 de $\mathbf{W}$, dites feuilles d'espace et l'autre est le feuilletage chronologique noté $\mathcal{T}$, dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 1 de $\mathbf{W}$, dites feuilles chronologiques. Ces feuilles chronologiques ne peuvent être que $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}$. Chaque champ X se décompose de façon unique, sous la forme $X = X_{\mathbf{E}} - tT$, où $X_{\mathbf{E}}(w) \in T_w(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_w$, $t \in C^{\infty}(\mathbf{W})$ et $\mathbf{E}$ est l'unique feuille du feuilletage de $\mathcal{E}$ contenant l'événement w de $\mathbf{W}$.

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques T et S est la donnée d'une section θ, définie sur un ouvert connexe $W \subseteq \mathbf{W}$ du fibré $\mathrm{Hom}(T\mathbf{W}) = \Lambda^1\mathbf{W} \otimes T\mathbf{W}$ telle que $\theta \otimes T = S$ et $g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X,Y)$ sur $W \subseteq \mathbf{W}$ pour tout champ X, Y de $\mathbf{W}$. On rappelle que pour un champ X de $\mathbf{W}$ défini sur W, $\theta \otimes X(w) = \theta(w)(X(w))$ et l'application $w \to \theta(w) : T_w\mathbf{W} \to T_w\mathbf{W}$ vérifie $\theta(w)$ est une $g(w)$-isométrie. On dit que θ conserve la métrique de Lorentz. Pour tous les champs chronologiques T et S, il existe un changement local de coordonnées.

Une section d'opérateurs d'évolution de l'état le long d'un champ chronologique T, non nécessairement stable, est une section d'opérateurs qui ne dépend que de la connexion, la section de Dirac et le champ chronologique T, on la note

$$H_T = \mathbf{\Sigma}(\gamma, \nabla, T). \tag{4.2}$$

Definition 3. *Une équation d'évolution de l'état d'une section locale s, le long d'un champ chronologique T, est une équation de la forme*

$$H_T(s) = \lambda s.$$

Dans l'axiomatisation des systèmes physiques, on utilise la section d'opérateurs d'évolution γ^T, $\gamma^T = \gamma^{d_T}$ avec

$$d_T(w)(u) = g(w)(u, T(w)), w \in W,$$

cette section locale d'opérateurs d'évolution est $C^{\infty}(W)$-linéaire, dans le sens suivant

$$\gamma^T(\lambda s) = \lambda s, \forall \lambda \in C^{\infty}(W),$$

elle est indépendante du choix de la connexion ∇ choisie. L'équation d'évolution pour cette section est donnée par une fonction propre C^{∞} sur W.

Remark 2. *L'équation d'état attachée à la section $\nabla_T s$ joue un rôle important. Si s et $\nabla_T s$ sont solutions de la même équation d'état alors s est une section propre de $[\nabla_T, H]$ associée à la fonction $\partial_T \lambda$ où λ est la fonction associée à l'équation d'état des sections de s et $\nabla_T s$.*

Definition 4. *L'équation d'évolution généralisée de l'état d'une section, le long d'un champ chronologique T, est une équation de la forme*

$$[\nabla_T, H]\, s = \kappa s, \tag{4.3}$$

où κ est une fonction C^{∞} sur une carte W de $\mathbf{W}$ où le champ chronologique existe.

Proposition 1. *Si s et $\nabla_T s$ sont solutions de la même équation d'état alors $\kappa = \partial_T \lambda$.*

5. L'équation d'évolution des champs complexes

L'équation d'état d'un champ complexe Z est donnée par

$$H\,(Z) = -i\frac{mc}{\hbar} Z, \tag{5.1}$$

où H est la section des opérateurs d'état. On peut définir une équation d'évolution de l'état sur les champs complexes, les ondes deviennent des champs Z de l'univers $\mathbf{W}$ et l'équation d'évolution est l'équation définie par

$$\mathbf{H}\,(Z) = -i\mathcal{L}_T\,(Z) = -i\,[T, Z]\,, \tag{5.2}$$

où $\mathcal{L}_T$ est l'extension de la dérivée de Lie, le long du champ chronologique T, aux champs complexes sur $\mathbf{W}$. La section $\mathbf{H}$ des opérateurs d'évolution est un opérateur sur les champs complexes, c'est-à-dire, une section de $\Lambda^1_{\mathbb{C}}\mathbf{W} \otimes T_{\mathbb{C}}\mathbf{W}$ qui dépend de 5.1.

Remark 3. *L'opérateur $i\mathbf{H}$ mesure le défaut de commutativité d'un champ Z par rapport au champ chronologique T.*

Theorem 3. *La section $\mathbf{H}$ des opérateurs d'évolution associé à l'équation d'état 5.1, s'écrit*

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ H + i\partial_T\,(\log(m))\,\mathrm{Id}_{\Gamma(\zeta_{\mathbf{W}}\otimes\mathbb{C})}\,,$$

où $H = \gamma^{\nu} D_{\nu}$ est la section locales des opérateurs d'état. En particulier, si la masse ne varie pas le long du champ chronologique T, l'opérateur $\mathbf{H}$ s'écrit,

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ H.$$

Proof. On calcule

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T \circ H\,(Z) = [T, H\,(Z)] &= \left[T, -i\frac{mc}{\hbar}Z\right] \\ &= -i\frac{mc}{\hbar}\,[T, Z] + \partial_T\left(-i\frac{mc}{\hbar}\right) Z = \frac{mc}{\hbar}\mathbf{H}\,(Z) - i\frac{c}{\hbar}\partial_T\,(m)\,Z,\end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\,(Z) &= \frac{\hbar}{mc}\left(\mathcal{L}_T \circ H\,(Z) + i\frac{c}{\hbar}\partial_T\,(m)\,Z\right) \\ &= \left(\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ H + i\partial_T\,(\log(m))\,\mathrm{Id}_{\Gamma(\zeta_{\mathbf{W}}\otimes\mathbb{C})}\right)(Z)\,.\end{aligned}$$

□

La section $\mathbf{H}$ des opérateurs d'évolution dépend du choix du champ chronologique T, donc du local frame contrairement à la section des opérateurs d'état $H = \gamma \otimes \nabla$ qui ne dépend que de la section de Dirac du fibré complexifié des champs et de la connexion ∇ choisie sur ce fibré.

6. L'équation de Schrödinger et la section de Dirac

On fait l'hypothèse que le tenseur de Poisson est métrique. Pour définir l'équation de Schrödinger le long d'un champ chronologique T, on fait appel au théorème de redressement d'un champ. Il existe une carte W de $\mathbf{W}$ pour laquelle le local frame $\{\partial_\nu, \nu = 0,1,2,3\}$ vérifie $\partial_T = \partial_0$. Soit $g_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}$ le tenseur métrique défini par le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu} = \mathrm{Trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)$, la métrique associée est notée g_γ.

Definition 5. *L'opérateur de Laplace associé à la section de Dirac γ est définie par*

$$\triangle_\gamma = \frac{4}{\sqrt{\left|\det\left(\gamma_{\mu\nu}\right)\right|}}\partial_\mu\left(\sqrt{\left|\det\left(\gamma_{\mu\nu}\right)\right|}\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu\right). \tag{6.1}$$

L'équation de Schrödinger généralisée est définie par

$$i\hbar\partial_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_\gamma\,\psi + \mathcal{V}\psi,$$

où $\mathcal{V}$ est la fonction énergie potentielle définie sur la carte considérée. Supposons que le champ chronologique T soit stable sur la carte W (4.1), alors on peut feuilleter la carte en feuille espace $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ et en feuille chronologique $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$. On se fixe une base locale de champs sur W, $\{X_\nu : \nu = 0,1,2,3\}$ telle que

$$X_0(w) = T(w) \text{ et } T_w\mathbf{E} = \mathrm{Vect}\left\{X_1(w), X_2(w), X_3\right\}, \forall w \in W \cap \mathbf{E},$$

on définit le laplacien espace par

$$\triangle_{\gamma,\mathcal{E}} = \frac{4}{\sqrt{\det\left(\mathbf{g}_{\mu\nu}\right)}}\partial_{X_\mu}\left(\sqrt{\det\left(\mathbf{g}_{\mu\nu}\right)(w)}\mathbf{g}^{\mu\nu}\partial_{X_\nu}\right)$$

avec $\mathbf{g}_{\mu\nu} = g_\gamma\left(X_\mu, X_\nu\right)$ et $\mu,\nu = 1,2,3$. On définit l'équation de Schrödinger sous l'hypothèse de stabilité du champ chronologique par

$$i\hbar\partial_T\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_{\gamma,\mathcal{E}}\,\psi + \mathcal{V}\psi,\ \psi \in C^\infty\left(W,\mathbb{C}\right). \tag{6.2}$$

Definition 6. *L'équation 6.2 est l'équation de Schrödinger et 6.1 est l'équation généralisée.*

7. Les axiomes de quantification

Axiom 1. *L'état d'un système physique est défini, par une section s d'un fibré hermitien E, dit fibré d'état.*

Axiom 2. *A toute observable $\mathcal{O}$ est associée une section locale ϕ de $\mathcal{O}(E)$, formée des éléments de* $\mathrm{End}(E)$*, self-adjoints. On dit que ϕ est l'observable quantique locale de la grandeur physique $\mathcal{O}$.*

Axiom 3. *Quelque soit la section s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur $\mathcal{O}$, les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de ϕ.*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure de $\mathcal{O}$ dans Δ est*

$$P_{s,\phi}(\lambda) = P_{s,\phi}(\Delta)$$

où

$$P_{s,\phi}(\Delta)(\omega) = P_{s(w),\phi(w)}\left(\Delta(w)\right)$$

avec $\Delta(w) =]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$ *si le spectre de* s *est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est*

$$P_{s,\phi}(\lambda)(w) = P_{s(w),\phi(w)}(\lambda(w)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction* λ *est*

$$\widetilde{s} = \frac{P_{E_\lambda}(s)}{\|P_{E_\lambda}(s)\|},$$

où $\widetilde{s}(w) = P_{E_{\lambda(w)}}(s(w))$ *et* $P_{E_{\lambda(w)}}$ *est le projecteur sur le sous-espace propre* $E_{\lambda(w)}$ *associé à la valeur propre* $\lambda(w)$ *de* $\phi(w)$*.*

Axiom 6. *L'équation d'évolution d'une section* s *sur une carte* W*, où aucune observation n'est faite, est une équation de la forme*

$$H_T(s) = \lambda s, \tag{7.1}$$

λ *est une application* C^∞ *sur* W *et* H_T *est un opérateur d'évolution de la forme 4.2. Si on prend pour opérateur d'évolution* γ^T*, où* T *est le champ chronologique, la section* s *est solution d'une équation d'évolution*

$$\gamma^T s = \lambda s, \tag{7.2}$$

pour une fonction λ *définie sur* W*. Sous cette hypothèse, on identifie* ϕ *et* γ^T*.*

Proposition 2. *Si le fibré* ζ *est de dimension finie, alors dans une base de sections locales* $\{e_\alpha\}$ *l'équation 7.2 s'écrit*

$$\delta_{\mu\nu} t^\mu \gamma_\tau^{\nu\sigma} s^\tau = \lambda s^\sigma, \ \forall \sigma$$

où $s = s^\alpha e_\alpha$ *et* $T = t^\mu \partial_\mu$*.*

Sous l'hypothèse 7.2, un système physique est définie par une section de Dirac γ et un champ T qui est chronologique, pas nécessairement stable. L'observable quantique de la grandeur physique est $\phi = \gamma^T$. L'état du système est décrit par une section locale s du fibré d'état.

Sur le fibré des tenseurs p fois covariant et q fois contravariant, on étend la section de Dirac γ définie sur le fibré tangent, on la note Γ. On peut définir une équation d'évolution de l'état sur les fibrés tensoriels complexifiés sous la forme

$$\Gamma^T(\mathcal{T}) = \lambda \mathcal{T},$$

où $\mathcal{T}$ est un (p,q)-tenseur et λ est une fonction propre locale de la section Γ^T. L'extension Γ est unique, les états des (p,q)-tenseurs sont donnés par les fonctions propres locales de Γ^T.

Remark 4. *Le choix de l'équation d'évolution dépend du système physique étudié. L'opérateur d'évolution est toujours de la forme 4.2 et l'équation d'évolution est définie par 7.1.*

8. Les opérateurs de rang supérieur

Sauf mention contraire, $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, F)$ est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie et de fibre F, dont la base est l'univers de Dirac-Einstein $\mathbf{W}$, de dimension 4 et $\zeta_\mathbf{W}$ est le fibré tangent. On note $\Lambda^n\mathbf{W}$, le fibré des n-formes différentielles sur $\mathbf{W}$ et l'espace des (p,q)-tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\mathbf{W} = \left(\otimes^p \Lambda^1 \mathbf{W}\right) \otimes \left(\otimes^q T\mathbf{W}\right).$$

Les sections d'endomorphismes de Dirac [6], [1] sont définies par,

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), d \in \Lambda^1 \mathbf{W} \text{ et } s \in \Gamma(E),$$

le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac noté $\{\gamma^{d^\mu}\}$ est défini par

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right] = \sum_{s \in \mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}} \varepsilon(s) \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \cdots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par

$$\left\{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right\} = \sum_{s \in \mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}} \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \cdots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}}.$$

Le commutateur définit une section de $\mathrm{Hom}(\Lambda^n \mathbf{W} \otimes E, E)$. Les extensions de rang n d'une section γ sont les sections $\gamma_n \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes E, E))$

$$\gamma_n\left(\left(d^1 \wedge d^2 \wedge \cdots \wedge d^n\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right](s),\ s \in \Gamma(E)$$

et on prolonge γ_n par $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{R})$-linéarité sur $\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes E) \to \Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W}) \otimes E\right)$$

avec

$$d_0^\nabla = \nabla, \Lambda^0(\mathbf{W}) \otimes E = E$$

et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \psi \in \Lambda^n(\mathbf{W}).$$

Definition 7. *Une équation de Dirac-Einstein au rang n ou équation d'état de rang n est définie par*

$$H_n(s) = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}(s) = \gamma_n(\nabla_{n-1} s) = \lambda s,\ \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \cdots \circ d_0^\nabla,$$

où λ est une C^∞-application définie sur une carte W de $\mathbf{W}$.

Dans une carte de trivialisation W de ζ et $\zeta_{\mathbf{W}}$, l'opérateur $H_1 = H$ s'écrit sous la forme 3.3 dans le local frame $\{\partial_\mu,\ \mu = 0,1,2,3\}$, $\{d^\nu, \nu = 0,1,2,3\}$ le local frame dual et une base de sections locales $\{s_\alpha, \alpha = 0,1,2,\cdots,n-1\}$ sur $W \subset \mathbf{W}$. On présente le développement de l'opérateur d'état de rang 2, noté H_2. Sur le fibré ζ, avec les notations précédentes, on définit l'opérateur H_2 comme suit,

$$\gamma_2\left(\left(d^1 \wedge d^2\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}\right](s) = \gamma^{d^1}\gamma^{d^2}(s) - \gamma^{d^2}\gamma^{d^1}(s)$$

et

$$\nabla_1 = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla = R^\nabla$$

représente la courbure de la connexion ∇. Sur un ouvert de trivialisation W de $\zeta_{\mathbf{W}}$ et ζ, si $s = s^{\alpha}e_{\alpha}$,

$$\begin{aligned} R^{\nabla}(s) &= d_1^{\nabla}(\nabla s) = d_1^{\nabla}\left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right) \\ &= d\left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\right)\otimes e_{\beta} - \left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\right)\wedge\nabla e_{\beta} \\ &= \left(d\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)\wedge d^{\nu}\right)\otimes e_{\beta} - \left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\wedge\Gamma^{\tau}_{\beta\sigma}d^{\sigma}\right)\otimes e_{\tau} \\ &= \left(d\left(\partial_{\nu}s^{j} + s^{\alpha}\Gamma^{j}_{\alpha\nu}\right)\wedge d^{\nu}\right)\otimes e_{j} - \Big(\left(\partial_{\nu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)d^{\nu}\wedge\Gamma^{j}_{\beta\sigma}d^{\sigma}\Big)\otimes e_{j} \\ &= \Big(\partial_{\mu}\left(\partial_{\nu}s^{j} + s^{\alpha}\Gamma^{j}_{\alpha\nu}\right) - \left(\partial_{\mu}s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\right)\Gamma^{j}_{\beta\nu}\Big)\left(d^{\mu}\wedge d^{\nu}\right)\otimes e_{j} \\ &= \Big(\partial_{\mu}\partial_{\nu}s^{j} + \Big(\partial_{\mu}\Gamma^{j}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{j}_{\beta\nu}\Big)s^{\alpha}\Big)\left(d^{\mu}\wedge d^{\nu}\right)\otimes e_{j}. \end{aligned}$$

La section de Dirac γ de $E(\zeta)$ a pour représentation locale

$$\gamma\left(d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right) = \gamma^{\nu\sigma}_{\beta}e_{\sigma},$$

et si $\gamma^{\nu} = \gamma^{d^{\nu}}$, on pose $(\gamma^{\nu})^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\nu\alpha}_{\beta}$, alors

$$\gamma_2\otimes R^{\nabla}(s) = \Big(\partial_{\mu}\partial_{\nu}s^{j} + \Big(\partial_{\mu}\Gamma^{j}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{j}_{\beta\nu}\Big)s^{\alpha}\Big)\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right](e_j),$$

$$\begin{aligned} \left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right](e_j) &= \gamma^{\mu}\left(\gamma^{\nu\sigma}_{j}e_{\sigma}\right) - \gamma^{\nu}\left(\gamma^{\mu\sigma}_{j}e_{\sigma}\right) \\ &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_{j}\gamma^{\mu k}_{\sigma} - \gamma^{\mu\sigma}_{j}\gamma^{\nu k}_{\sigma}\right)e_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2\otimes R^{\nabla}(s^{\alpha}e_{\alpha}) = \left(\gamma^{\nu\sigma}_{j}\gamma^{\mu k}_{\sigma} - \gamma^{\mu\sigma}_{j}\gamma^{\nu k}_{\sigma}\right)\Big(\partial_{\mu}\partial_{\nu}s^{j} + \Big(\partial_{\mu}\Gamma^{j}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{j}_{\beta\nu}\Big)s^{\alpha}\Big)e_k.$$

On pose $\triangle^{k}_{j}$ l'opérateur

$$\triangle^{k}_{j} = \left(\gamma^{\nu\sigma}_{j}\gamma^{\mu k}_{\sigma} - \gamma^{\mu\sigma}_{j}\gamma^{\nu k}_{\sigma}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu},$$

et

$$\Upsilon^{k}_{\alpha} = \left(\gamma^{\nu\sigma}_{j}\gamma^{\mu k}_{\sigma} - \gamma^{\mu\sigma}_{j}\gamma^{\nu k}_{\sigma}\right)\Big(\partial_{\mu}\Gamma^{j}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{j}_{\beta\nu}\Big)$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma_2\otimes R^{\nabla}(s^{\alpha}e_{\alpha}) &= \left(\triangle^{k}_{j}s^{j} + \Upsilon^{k}_{\alpha}s^{\alpha}\right)e_k \\ &= \left(\triangle^{k}_{\tau}s^{\tau} + \Upsilon^{k}_{\tau}s^{\tau}\right)e_k \\ &= \left(\triangle^{k}_{\tau} + \Upsilon^{k}_{\tau}\right)s^{\tau}e_k. \end{aligned}$$

Pour un champ chronologique $T = t^{\rho}\partial_{\rho}$, les équations d'évolution s'écrivent localement

$$\left(\triangle^{k}_{\tau} + \Upsilon^{k}_{\tau}\right)s^{\tau} = \chi\left(t^{\rho}\partial_{\rho}s^{k} + t^{\rho}s^{\alpha}\Gamma^{k}_{\rho\alpha}\right). \tag{8.1}$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_T s^{\alpha}e_{\alpha} &= t^{\rho}\nabla_{\partial_{\rho}}\left(s^{\alpha}e_{\alpha}\right) \\ &= t^{\rho}\left(\partial_{\rho}s^{\alpha}e_{\alpha} + s^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}e_{\beta}\right) \\ &= \left(t^{\rho}\partial_{\rho}s^{k} + t^{\rho}s^{\alpha}\Gamma^{k}_{\rho\alpha}\right)e_k, \end{aligned}$$

L'équation 8.1 est l'équation locale sur une carte de trivialisation de $\zeta_{\mathbf{W}}$ et ζ, cette équation est l'équation d'évolution de Dirac-Einstein de rang 2 développée dans le local frame associé à la carte avec la condition

$$\gamma_2\otimes R^{\nabla} = \chi\nabla_T \text{ avec } \chi = i\lambda \text{ ou } \chi = \lambda \text{ et } \lambda\in C^{\infty}(U,\mathbb{R}),$$

respectivement, complexe ou réelle.

Theorem 4. *L'opérateur $H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$ a pour représentation locale*

$$H_2 \left(s^\alpha e_\alpha\right) = \left(\triangle_\tau^k + \Upsilon_\tau^k\right) s^\tau e_k \tag{8.2}$$

avec

$$\triangle_j^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \partial_\mu \partial_\nu , \tag{8.3}$$

et

$$\Upsilon_\alpha^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j\right). \tag{8.4}$$

Remark 5. *Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale, ce système d'équations s'écrit*

$$t^\rho \partial_\rho s^\tau = 0, \, \forall \tau.$$

On donne la représentation matricielle de la section d'opérateurs H_2 dans la base de sections locales $\{e_\alpha\}$. De l'équation 8.4, on peut écrire en prenant pour tenseur de Christoffel

$$\Lambda_{\nu\mu\kappa}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda ,$$

$$\begin{aligned}
H_2 \left(s^\alpha e_\alpha\right) &= \left(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda_{\mu\alpha\nu}^j s^\alpha\right) e_k \\
&= \left(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda_{\mu\alpha\nu}^j s^\alpha\right) e_k \\
&= \left(\left(\gamma_\tau^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_\tau^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \partial_\mu \partial_\nu s^\tau + \left(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}\right) \Lambda_{\mu\tau\nu}^j s^\tau\right) e_k \\
&= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \partial_{\mu\nu}\right)_\tau^k s^\tau + \left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\right)_j^k \Lambda_{\mu\tau\nu}^j s^\tau\right) e_k \\
&= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \partial_{\mu\nu}\right)_\tau^k s^\tau + \left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \Lambda_{\mu\nu}\right)_\tau^k s^\tau\right) e_k \\
&= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \left(\partial_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\right)\right)_\tau^k s^\tau\right) e_k ,
\end{aligned}$$

où

$$\left(\Lambda_{\mu\nu}\right)_\tau^j = \Lambda_{\mu\tau\nu}^j \text{ et } \partial_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu .$$

Theorem 5. *L'équation d'état au rang 2 dans la base de sections locales $\{e_\alpha\}$ est définie par le système d'équations différentielles*

$$\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \left(\partial_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\right)\right)_\tau^k s^\tau = \lambda s^k, \, \forall k = 0, 1, \cdots, n$$

où λ est la fonction d'état définie sur la carte de trivialisation W des fibrés.

9. La connexion de Dirac

En général, les sections de Dirac considérées sont métriques, c'est-à-dire, que le tenseur de Poisson associé qui est indépendant du local frame, est inversible et son inverse définit une métrique locale sur **W**. Si on regarde l'équation d'évolution de Dirac, cette équation n'est pas une équation de Dirac-Einstein de rang 2 car l'équation développée est

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} \\ i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

où ψ est une section du fibré de

$$\xi_D = \left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4\right),$$

qui ne fait apparaître que des opérateurs de rang 1. Pour déterminier γ et ∇, on passe à une équation d'état de rang 1, d'opérateur $H = \gamma \otimes \nabla$ [6]. Pour cet opérateur, il n'existe pas d'équation d'évolution, à l'exception des particules de masse nulle. Seule l'équation d'état de rang 1, d'opérateur H peut décrire l'équation 9.1. On se restreint donc, à l'image d'une carte, où plus précisément à $\mathbb{R}^4$ et par un recouvrement localement fini, on définit la connexion de Dirac sur $\mathbf{W}$. Dans $\mathbb{R}^4$, soit

$$\left\{\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ linéairement indépendants associés et

$$\{d^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\},$$

la base duale. L'équation de Dirac-Einstein au rang 1 est

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\left(\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) = -i\lambda\psi^\sigma \text{ pour tout } \sigma = 0, 1, 2, 3. \tag{9.2}$$

Les matrices de Dirac γ^μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, sont des matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients sont des applications C^∞ sur $\mathbb{R}^4$, à valeurs complexes. On note $(D_\nu\psi)^\beta = \partial_\nu\psi^\beta + \psi^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$, D_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ définie par l'équation $D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu$ où Γ_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le local frame est $(\Gamma_\nu)^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par,

$$\mathrm{L}_\nu\,\psi = \left(\partial_\nu\psi^0, \partial_\nu\psi^1, \partial_\nu\psi^2, \partial_\nu\psi^3\right),\ \psi = \left(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\right)$$

alors

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\left(D_\nu\psi\right)^\beta = -i\lambda\psi^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu D_\nu\left(\psi\right) = -i\lambda\psi.$$

Utilisons l'équation 9.2 et comparons à 9.1,

$$\gamma_\beta^{\nu k}\left(\partial_\nu\psi^\beta + \psi^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) + i\lambda\psi^k = 0,\ k = 0, 1, 2, 3$$

$$\gamma_\beta^{\nu k}\partial_\nu\psi^\beta + \psi^\alpha\gamma_\beta^{\nu k}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} + i\lambda\psi^k = 0$$

$$\left(\gamma_j^{\nu k}\partial_\nu + \gamma_\beta^{\nu k}\Gamma^\beta_{j\nu}\right)\psi^j + i\lambda\psi^k = 0$$

si on prend pour $(\gamma^\nu)^k_j = \gamma_j^{\nu k}$, on retombe sur l'équation 9.1 pour des coefficients de Christoffel $\Gamma^\beta_{j\nu}$ qui sont calculables comme suit. La matrice associée s'écrit

$$\begin{pmatrix} i\gamma_0^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma^\beta_{0\nu} - \lambda & i\gamma_1^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma^\beta_{11} & i\gamma_2^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma^\beta_{2\nu} & i\gamma_3^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma^\beta_{3\nu} \\ i\gamma_0^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma^\beta_{0\nu} & i\gamma_1^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma^\beta_{1\nu} - \lambda & i\gamma_2^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma^\beta_{2\nu} & i\gamma_3^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma^\beta_{3\nu} \\ i\gamma_0^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma^\beta_{0\nu} & i\gamma_1^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma^\beta_{1\nu} & i\gamma_2^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma^\beta_{2\nu} - \lambda & i\gamma_3^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma^\beta_{3\nu} \\ i\gamma_0^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma^\beta_{0\nu} & i\gamma_1^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma^\beta_{1\nu} & i\gamma_2^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma^\beta_{2\nu} & i\gamma_3^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma^\beta_{3\nu} - \lambda \end{pmatrix},$$

on en déduit que $\lambda = m$, et que les matrices γ^ν définies par $(\gamma^\nu)^\alpha_\beta = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$ sont les matrices de Dirac. On a

$$\begin{pmatrix} i\partial_0 + i\Gamma^0_{00} - m & 0 & i\partial_3 - i\Gamma^2_{23} & i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{32} \\ 0 & i\partial_0 + i\Gamma^1_{10} - m & i\partial_1 - \partial_2 + i\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{22} & -i\partial_3 - i\Gamma^3_{33} \\ -i\partial_3 - i\Gamma^0_{03} & -i\partial_1 - \partial_2 - i\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{12} & -i\partial_0 - i\Gamma^2_{20} - m & 0 \\ -i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma^0_{01} - \Gamma^0_{02} & i\partial_3 + \Gamma^1_{13} & 0 & -i\partial_0 - i\Gamma^3_{30} - m \end{pmatrix},$$

les relations sur les coefficients de Christoffel de la connexion de Dirac sont

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^3_{33} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^3_{30} = 0 \tag{9.3}$$

et

$$\Gamma^3_{32} = i\Gamma^3_{31}, \Gamma^2_{22} = i\Gamma^2_{21}, \Gamma^1_{12} = -i\Gamma^1_{11}, \Gamma^0_{02} = -i\Gamma^0_{01}. \tag{9.4}$$

Theorem 6. *Les symboles de Christoffel de la connexion de Dirac sur $\mathbb{R}^4$ vérifient*

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^3_{33} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^3_{30} = 0,$$

$$\Gamma^3_{32} = i\Gamma^3_{31}, \Gamma^2_{22} = i\Gamma^2_{21}, \Gamma^1_{12} = -i\Gamma^1_{11}, \Gamma^0_{02} = -i\Gamma^0_{01},$$

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = \Gamma^\tau_{\nu\mu}.$$

On peut construire une connexion de Dirac sur l'univers $\mathbf{W}$, en prenant un recouvrement localement fini et une partition de l'unité $\left\{\lambda^U\right\}$ subordonnée à ce recouvrement. Si ∇_U est une connexion de Dirac induite par la carte alors

$$\nabla = \sum_U \lambda^U \nabla_U, \ \sum_U \lambda^U = 1$$

est une connexion définie sur l'univers $\mathbf{W}$. Cette connexion est définie sur le fibré tangent de l'univers $\mathbf{W}$.

Remark 6. *La connexion de Dirac est indépendante du choix de la particule de masse m, c'est donc, une connexion intrinsèque sur les champs complexes. Les équations 9.3 et 9.4 permettent de définir plusieurs choix possibles pour la connexion de Dirac.*

10. Conclusion

Sur un fibré d'état ζ de l'univers $\mathbf{W}$, muni d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ, on décrit les opérateurs de Dirac-Einstein de rang n à partir de la connexion et de la section de Dirac. L'opérateur de rang $n = 1$, permet de définir deux types d'équation, la première est l'équation d'état et la seconde est l'équation d'évolution de l'état le long d'un champ chronologique. On peut, à partir de l'équation d'évolution, axiomatiser la quantification du fibré ζ.

On donne une généralisation de l'équation de Schrödinger aux champs complexes et à partir de l'équation de Dirac on établit des connexions intrinsèques sur le fibré trivial $\mathbf{W} \times \mathbb{C}^4$. Cette approche permet de géométriser les équations physiques dans le cadre plus général de la théorie des fibrés et de quantifier la structure des fibrés hermitiens munis d'une connexion et d'une section de Dirac. Dans [4], on fait l'hypothèse que la connexion ∇ et la section de Dirac γ sont induites par une connexion d'une métrique fortement riemannienne et d'une section de Dirac d'un multivers de Banach-Schauder.

References

[1] Arminjon M. , Reifler F., "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.

[2] Nelson Dunford et Jacob T. Schwartz, Linear Operators, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space (Part 1-2), Wiley, 1988

[3] Haefliger A., "Feuilletages sur les variétés ouvertes", Topology 9 (1970), 183-194

[4] Jonot J.L.,"Géométrie et quantification de l'univers de Dirac-Einstein", hal.archives-ouvertes.fr/hal-01294150

[5] Tumpach A.B.,"Varietes kaehlériennes et hyperkaéleriennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)

[6] Séré E., Esteban M.J., "Les équations de Dirac-Fock." Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.

[7] Reed M.,Simon B. , "Methods of Mathematical Physics", vols I–IV, Academic Press 1972.

[8] Villani C., "Intégration et Analyse de Fourier" cedricvillani. org/wp-content/uploads/2013

E-mail address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`