



Peut-on identifier les politiques économiques stabilisant une économie instable ?

Kirsten Ralf, Jean-Bernard Chatelain

► To cite this version:

Kirsten Ralf, Jean-Bernard Chatelain. Peut-on identifier les politiques économiques stabilisant une économie instable?. *Revue Française d'Economie*, 2014, 29 (2014/3), pp.143-178. 10.3917/rfe.143.0143 . hal-01305362

HAL Id: hal-01305362

<https://hal.science/hal-01305362>

Submitted on 10 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PEUT-ON IDENTIFIER LES POLITIQUES ÉCONOMIQUES STABILISANT UNE ÉCONOMIE INSTABLE ?

Jean-Bernard Chatelain, Kirsten Ralf

Revue française d'économie | « [Revue française d'économie](#) »

2014/3 Volume XXIX | pages 143 à 178

ISSN 0769-0479

Article disponible en ligne à l'adresse :

<https://www.cairn.info/revue-francaise-d-economie-2014-3-page-143.htm>

Pour citer cet article :

Jean-Bernard Chatelain, Kirsten Ralf « Peut-on identifier les politiques économiques stabilisant une économie instable ? », *Revue française d'économie* 2014/3 (Volume XXIX), p. 143-178.

DOI 10.3917/rfe.143.0143

Distribution électronique Cairn.info pour Revue française d'économie.

© Revue française d'économie. Tous droits réservés pour tous pays.

La reproduction ou représentation de cet article, notamment par photocopie, n'est autorisée que dans les limites des conditions générales d'utilisation du site ou, le cas échéant, des conditions générales de la licence souscrite par votre établissement. Toute autre reproduction ou représentation, en tout ou partie, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit, est interdite sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, en dehors des cas prévus par la législation en vigueur en France. Il est précisé que son stockage dans une base de données est également interdit.

**Jean-Bernard
CHATELAIN**

**Kirsten
RALF**

**Peut-on identifier
les politiques économiques
stabilisant une économie
instable ?**

L

es décideurs politiques peuvent-ils utiliser des règles de politique macroéconomique qui s'opposent aux croissances trop élevées (bulle) ou trop faibles (effondrement) des prix à la consommation, des prix d'actifs et du crédit par rapport à la tendance moyenne de croissance du PIB

d'une économie ? Cet article montre qu'il est possible, dans le cadre des anticipations rationnelles, d'avoir des règles de politique économique qui transforment des trajectoires instables de prix, de flux ou de stock de dettes en des trajectoires stables. Ces règles peuvent être associées à des variations raisonnables et plausibles des instruments de politique économique.

En revanche, la méthode de résolution habituelle des modèles d'équilibre général dynamiques et stochastiques (DSGE) contraint les règles de politique économique à maintenir un nombre de dimensions instables égal au nombre de variables d'anticipations du modèle. Ces variables d'anticipations sont les prix et les variations de stocks (investissement, consommation, etc.). Ces trajectoires divergentes ne seraient ensuite jamais suivies par le secteur privé et public dans le modèle. Elles devraient cependant être maintenues divergentes par les décideurs politiques, car elles garantiraient l'unicité (aussi appelée détermination) de la trajectoire stable de l'économie dans ces modèles. Ce point de vue sur la stabilisation macroéconomique des nouveaux keynésiens et des modélisateurs des DSGE est à l'opposé de la stabilisation des variables économiques telle qu'elle est comprise par les « vieux » keynésiens (Cochrane [2011]), par les décideurs politiques et dans le sens commun des agents économiques. Elle est aussi à l'opposé de la définition de la stabilisation retenue par les mathématiciens, les ingénieurs et les spécialistes des autres disciplines scientifiques.

Cet article établit ensuite des conditions pour identifier les paramètres de différents types de règles optimales de politique économique. Pourquoi l'identification des règles est-elle aussi importante pour les décideurs politiques ? Prenons l'exemple d'un chercheur d'une banque centrale qui a estimé un modèle DSGE. En s'appuyant sur la significativité statistique de ses estimations, il recommande au gouverneur de la banque centrale de suivre une règle de Taylor, où le taux d'intérêt directeur réagit avec un paramètre 0,5 à l'écart de production et avec un paramètre 1,5 à l'écart de l'inflation à sa cible. Mais ce chercheur n'a pas vérifié que son modèle prédit exactement le même comportement dynamique et engendre les mêmes observations

(ou s'y ajuste) avec une règle où le paramètre devant l'écart de production est égal à zéro et celui devant l'écart d'inflation est égal à deux. Contrairement à la croyance du chercheur de la banque centrale, son modèle ne lui permet pas d'informer le gouverneur sur la règle de politique économique qu'il devrait suivre, parce que les paramètres de la règle ne sont pas identifiés.

Comme expliqué par Canova et Sala [2009], les DSGE ont été construits et estimés avant de se poser la question préliminaire de l'identification de leurs paramètres. Plusieurs articles ont récemment montré que la règle de Taylor (non optimale) n'est pas identifiée dans les modèles DSGE des nouveaux keynésiens : Cochrane [2011], An et Schorfheide [2008], Canova et Sala [2009], Iskrev [2010], Komunjer et Ng [2011], Caglar, Chadha et Shibayama [2012], Koop, Pesaran et Smith [2013], Dufour, Khalaf et Kichian [2013], Le, Minford et Wickens [2013], Canova, Ferroni et Matthes [2014], etc.

Cet article montre notamment que la méthode usuelle de résolution des DSGE a un sous-produit contraignant en termes d'identification des paramètres des règles de politique économique. Elle suppose que les variables de prix et de flux, qui dépendent des anticipations rationnelles des agents économiques, sont calculées par une relation linéaire avec les variables de stocks, qui sont prédéterminées par leurs valeurs passées. Il suffit donc au décideur politique de contrôler les variables de stock, ce qui réduit le nombre de paramètres qui peuvent être identifiés dans les règles de politique économique.

Le plan de cet article est le suivant. La première section présente un exemple simple comparant trois règles de politiques optimales. Ensuite, les conditions d'identification des paramètres des règles sont présentées dans cet ordre. La deuxième section traite le cas des règles optimales avec engagement (Calvo [1978] et Ljungqvist et Sargent [2012]). La troisième section traite le cas des règles optimales cohérentes temporellement (Oudiz et Sachs [1985] et Miao [2014]). La quatrième section traite le cas des règles quasi optimales avec engagement (Schmitt-Grohé et Uribe [2007]). La conclusion présente les avantages et inconvénients des trois types de règles vis-à-vis de plusieurs critères.

Une comparaison des règles de politique économique avec le modèle néo-classique de l'investissement

Le secteur privé

Nous prenons comme exemple le modèle néo-classique d'investissement à coût d'ajustements sur la croissance du capital, où l'investissement dépend du taux d'intérêt. Ce taux d'intérêt peut être un instrument de politique monétaire, ce qui n'est pas le cas d'un taux de préférence pour le présent, dans d'autres modèles. L'entrepreneur choisit son flux d'investissement I_t à chaque date t , en maximisant la valeur actuelle de ses dividendes d_t dans un horizon infini et sous la contrainte d'accumulation du stock de capital k_t .

$$d(t) = a \left(k_{\max} k(t) - \frac{1}{2} k(t)^2 \right) - \frac{c}{2} \left(\frac{I_t}{k_t} - \delta \right)^2 k_t - I$$

Le prix du bien final et celui des biens capitaux sont supposés constants et identiques, normalisés à l'unité sur toutes les périodes. Les dividendes sont égaux à la somme d'une fonction de profit de l'entreprise diminué du coût de l'investissement et des coûts d'ajustements. La fonction de profit est quadratique du stock de capital, telle que $0 < k_t < k_{\max}$ avec un paramètre de productivité $a > 0$. La productivité marginale du capital est une fonction linéaire décroissante du capital $a(k_{\max} - k_t)$ qui vaut au plus $ak_{\max}$ lorsque le stock de capital est nul et qui vaut zéro lorsque le stock de capital atteint la valeur maximale $k_{\max}$. Le coût d'ajustement du capital mesure l'aversion à une trop forte volatilité de l'investissement et des coûts croissants de la croissance de l'entreprise. Ce coût est quadratique et homogène de degré un en fonction de l'investissement et du stock de capital. Il est

égal à zéro lorsque le taux d'investissement remplace exactement le capital déprécié. Un paramètre d'échelle noté $c > 0$ mesure l'ampleur des coûts d'ajustement. Lorsque le coût d'ajustement est nul ($c=0$), il y a un ajustement instantané de stock de capital à sa valeur de long terme à la suite d'un choc sur les valeurs de long terme des paramètres structurels.

La contrainte d'accumulation du capital est multipliée par un multiplicateur de Lagrange noté q_t dans le Lagrangien de ce programme d'optimisation noté L :

$$L = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\prod_{s=0}^{s=t-1} \left(\frac{1}{1+r_s} \right) \right) (d_t - q_t(k_{t+1} - I_t - (1-\delta)k_t))$$

Ce multiplicateur est habituellement interprété comme le ratio q marginal de Tobin, qui serait observé par la valeur boursière d'une entreprise rapportée à sa valeur comptable. Le taux d'actualisation de l'entrepreneur est $1/(1+r_t)$ où r_t est la rentabilité d'un placement financier alternatif. Les conditions d'optimisation du premier ordre sont les suivantes :

$$\frac{\delta L}{\delta I(t)} = 0 \Rightarrow q(t) = 1 + c \left(\frac{I_t}{k_t} - \delta \right) \Rightarrow k_{t+1} = \left(1 - \delta + \frac{q_t - 1}{c} \right) k_t$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta k_t} = 0 \Rightarrow (1-\delta)q_{t+1} &= (1+r_t)q_t - a(k_{\max} - k_t) \\ &+ \frac{c}{2} \left(\frac{I_{t+1}}{k_{t+1}} - \delta \right)^2 - c \left(\frac{I_{t+1}}{k_{t+1}} - \delta \right) \frac{I_{t+1}}{k_{t+1}} \end{aligned}$$

Les conditions d'équilibre pour un taux d'intérêt à long terme égal à r^* tel que $0 \leq r^* + \delta \leq a k_{\max}$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} I^*/k^* &= \delta \text{ et } q^* = 1 \\ 0 \leq a(k_{\max} - k^*) &= r^* + \delta \leq A k_{\max} \text{ qui implique : } ak^* = ak_{\max} - (r^* + \delta) \end{aligned}$$

Après log linéarisation au voisinage de cet équilibre, le système dynamique peut s'écrire en fonction du stock du capital

et du multiplicateur de Lagrange, qui est une fonction linéaire du ratio d'investissement I/k_t . Les notations k_t et q_t représentent désormais les écarts relatifs à leurs valeurs de long terme : $(k_t - k^*)/k^*$ et $(q_t - q^*)/q^*$ dans la suite de l'article. Le décideur politique peut décider du taux d'intérêt *via* le taux directeur de la banque centrale suivant une règle linéaire de rétroaction en fonction des écarts à leurs valeurs de long terme du capital et du ratio q de Tobin avec des paramètres stockés dans un vecteur $F = (F_k, F_q)$.

$$r_t - r^* = F_k k_t + F_q q_t$$

Le système dynamique avant l'intervention du décideur politique ($F_k = F_q = 0$) correspond à la matrice $A(\theta_1)$. Les éléments de la matrice $A(\theta_1)$ sont des fonctions en général non linéaires des paramètres structurels regroupés dans le vecteur : $\theta_1 = (ak_{\max}, r^*, \delta, c)$. Le système dynamique après l'intervention du décideur politique correspond à la matrice $A(\theta_1) + B(\theta_1)F$ (cf. équation (1)). La matrice $B(\theta_1)$ regroupe les effets marginaux des instruments de politique économiques à la date courante sur les variables qui sont les objectifs de politique économique à la date suivante.

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = (A(\theta_1) + B(\theta_1)F) \begin{pmatrix} k_{t-1} \\ q_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 - \delta & \frac{1}{c} \\ (1 - \delta)(ak_{\max} - r^* - \delta) & 1 + r^* + \frac{ak_{\max} - r^* - \delta}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k & F_q \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} k_{t-1} \\ q_{t-1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Le système dynamique inclut une variable prédéterminée (le stock de capital) et une variable anticipée (le multiplicateur

de Lagrange du programme microéconomique du secteur privé q_t). Les paramètres a et k_{max} ne peuvent pas être identifiés sans l'ajout d'une contrainte, par exemple en calibrant la valeur de a et en estimant la valeur de k_{max} .

Ce système peut être écrit en fonction des conditions initiales k_0 (la condition q_0 n'est pas donnée), des valeurs propres $\lambda_1(\theta_1, F)$ et $\lambda_2(\theta_1, F)$ et de leurs vecteurs propres respectifs caractérisés par leurs pentes $m_{21}(\theta_1, F)$ et $m_{22}(\theta_1, F)$. Pour alléger les notations, nous ne précisons plus par la suite que les valeurs propres et leurs vecteurs propres sont des fonctions des paramètres structurels du secteur privé et des paramètres de la règle de politique économique. Lorsque le décideur politique n'intervient pas, ($F_k = F_q = 0$) et ce système a sa plus petite valeur propre qui est stable : $-1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. Il y a une unique trajectoire stable suivant la pente m_{21} du vecteur propre de la valeur propre stable λ_1 . Selon Blanchard et Kahn [1980], ceci permet de définir de manière unique la valeur initiale du ratio q de Tobin : $q_0 = m_{21}k_0$.

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_{21} \end{pmatrix} \lambda_1^t \left(\frac{m_{22}k_0 - q_0}{m_{22} - m_{21}} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ m_{22} \end{pmatrix} \lambda_2^t \left(\frac{-m_{21}k_0 + q_0}{m_{22} - m_{21}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_{21} \end{pmatrix} \lambda_1^t k_0 \quad \text{pour } -1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 \text{ et } q_0 = m_{21}k_0, \text{ ou}$$

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_{22} \end{pmatrix} \lambda_2^t k_0 \quad \text{pour } \lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 1 \text{ et } q_0 = m_{22}k_0.$$

Pour des valeurs numériques du vecteur des paramètres structurels des choix du secteur privé, la première ligne du tableau n°1 donne les valeurs propres du système dynamique décrivant le secteur privé avant l'intervention du planificateur social ($F_k = F_q = 0$). La seconde valeur propre diverge à un taux de croissance de 7% par an, avec un vecteur propre de pente

définie par m_{22} . La valeur propre stable (0,84) de la matrice actualisée $(1/(1+r^*))^{1/2}A$ a un vecteur propre de pente égale à $m_{12} = -0,2$, qui donne la valeur du saut initial de la variable d'anticipation en fonction de la valeur initiale du stock de capital, permettant au secteur privé de rester sur la seule trajectoire convergente vers l'équilibre de long terme dans les périodes suivantes. Cette trajectoire est un exemple d'une solution unique de Blanchard et Kahn [1980]. Le nombre de valeurs propres stables (une) est exactement égal au nombre de variables prédéterminé (le capital).

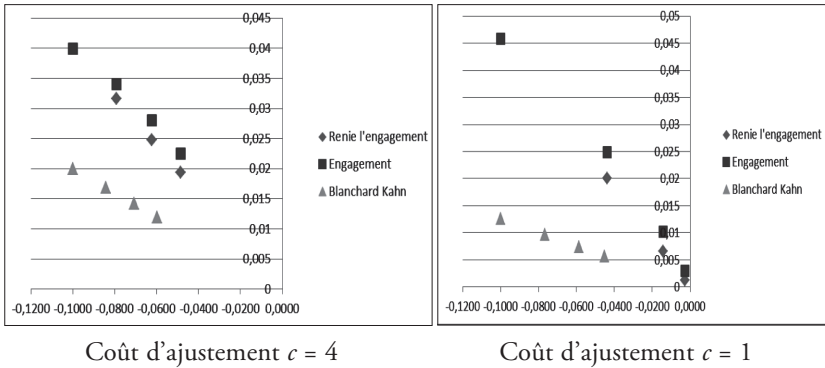
Sur les figures n^{os} 1 et 2, l'axe horizontal représente le stock de capital, avec un choc initial négatif de 10% par rapport à sa valeur de long terme. L'axe vertical représente le ratio q de Tobin (fonction linéaire de l'investissement) avec son saut à la date initiale. A la suite du choc de la première période, les trois périodes suivantes sont indiquées. Les triangles représentent la dynamique dans le cas de l'équilibre du secteur privé. Ces triangles sont alignés sur une droite dont la pente est donnée par la pente du vecteur propre $m_{21} = q_0/k_0 = -0,2$ (pour $c = 4$) et convergent vers l'équilibre de long terme représenté par l'origine du graphique. Les trajectoires correspondant aux carrés et aux losanges sont expliquées dans la section suivante.

Tableau 1
Dynamique avant et après des politiques optimales avec engagement pour $\theta_1 = (ak_{max} = 16 \%, r^* = 2 \%, \delta = 10 \%, c = 4$ ou $c = 1)$, $\theta_2 = (R)$

c	R	Q_k	Q_q	Q_{kq}	q_0/k_0	F_k	F_q	r_0-r^*	$ \lambda_1 $	$ \lambda_2 $
4	0	0	0	0	-0,2	0	0	0%	0,84	1,07
4	1	0	0	0	-0,2	-0,03	-0,14	0%	0,84	0,93=1/1,07
4	1	0,04	0,5	0,25	-0,4	-0,22	-0,62	-0,3%	0,52	0,76
1	0	0	0	0	-0,126	0	0	0%	0,77	1,17
1	1	0	0	0	-0,126	-0,04	-0,33	0%	0,77	0,85=1/1,17
1	1	0,04	0,5	1	-0,458	-0,36	-1,22	-1,98%	0,42	0,42

Figures 1 et 2

Ratio q de Tobin en fonction du stock de capital après un choc de -10% sur le stock de capital par rapport à sa valeur d'équilibre (centrée à zéro)



Règle optimale avec engagement

On fait l'hypothèse que le décideur politique est un planificateur social à qui les agents du secteur privé délèguent le choix de la règle de politique optimale. Il utilise un instrument de politique macroéconomique (le taux d'intérêt directeur) que les agents privés ne peuvent pas contrôler au niveau microéconomique. Leur instrument microéconomique est le flux d'investissement, pour lequel ils ont déjà calculé leurs trajectoires optimales à taux d'intérêt donné.

En position dominante à la Stackelberg, le décideur politique minimise une fonction de perte quadratique sous la contrainte du système dynamique du secteur privé au voisinage de son équilibre de long terme (équation 1). Ce faisant, il détermine son taux d'intérêt optimal, les paramètres optimaux (F_k , F_q) de sa règle de taux d'intérêt, et les éléments d'une matrice P permettant de calculer la valeur minimale de sa fonction de perte en fonction des valeurs initiales k_0 et q_0 .

Pour faciliter les calculs des règles optimales, on calcule une approximation quadratique de la perte d'utilité des agents

privés par rapport à leur valeur à l'équilibre de long terme. Cette approximation du bien-être social transmet les pondérations relatives au décideur politique en ce qui concerne l'aversion aux fluctuations de l'investissement (le coût d'ajustement) par rapport à l'écart du stock de capital à sa valeur de long terme. Dans cet exemple, les paramètres structurels spécifiques aux choix microéconomiques sont $\theta_1 = (Ak_{max}, r^*, c, \delta)$. Ils sont aussi transmis dans les préférences macroéconomiques définissant la matrice Q .

$$\begin{aligned} \min - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r^*} \right)^t & \left(Q_k k_t^2 + Q_q q_t^2 + 2Q_{kq} k_t q_t + R(r_t - r^*)^2 \right) \\ & = P_k k_0^2 + P_q q_0^2 + 2P_{kq} k_0 q_0 \\ \text{avec : } Q_k &= Ak_{max} - r^* - \delta, \quad Q_{kq} = 1/c, \quad Q_q = 1/2. \end{aligned}$$

Un nouveau paramètre $R > 0$ représente les préférences du secteur privé transmis au planificateur social concernant l'aversion aux fluctuations de l'instrument macroéconomique (le taux d'intérêt). Les paramètres spécifiques aux préférences des instruments de politique macroéconomiques sont stockés dans le vecteur $\theta_2 = (R)$. Ce paramètre joue un rôle équivalent à l'échelon macroéconomique à celui des coûts d'ajustement ($c > 0$) de l'instrument microéconomique (l'investissement).

Le taux d'intérêt a un effet sur le ratio q , qui lui-même a un effet sur le stock de capital (même si le taux d'intérêt n'a pas d'effet direct sur le stock de capital). Donc le décideur politique peut contrôler les deux variables du secteur privé en modifiant son taux d'intérêt. Si le coût d'ajustement du taux d'intérêt était nul ($R = 0$), il lui suffirait de deux périodes après la date du choc initial pour ramener à l'équilibre le ratio q de Tobin et le stock de capital k avec une variation suffisamment grande du taux d'intérêt. Ceci est confirmé par le rang égal à deux de la matrice de Kalman $((1/(1+r^*))^{1/2}B, (1/(1+r^*))AB)$. Le système est donc contrôlable au sens de Kalman [1960]. Cette condition est nécessaire pour calculer les solutions des règles optimales avec engagement (Ljungqvist et Sargent [2012]).

Le lagrangien du décideur politique inclut des multiplicateurs de Lagrange notés $\mu(k)$ et $\mu(q)$. Ljungqvist et Sargent proposent de résoudre le programme en deux étapes. La première étape consiste à trouver la solution optimale des paramètres de la fonction de perte (inclus dans la matrice notée P) et des paramètres de la règle (F_k, F_q) en oubliant temporairement qu'il y a une variable d'anticipation dont on ignore la condition initiale. La solution numérique du Lagrangien est programmée sur – par exemple – le logiciel gratuit SCILAB comme solution du modèle du régulateur linéaire quadratique de Kalman [1960]. En dimension 2, la solution explicite est déjà une expression trop compliquée (du fait du coût d'ajustement $R > 0$) pour pouvoir en tirer des résultats intéressants.

La deuxième étape consiste à déterminer la valeur initiale de la variable d'anticipations (ici le ratio q de Tobin, ou le flux d'investissement). Le multiplicateur de Lagrange $\mu(q)$ du décideur politique est associé au multiplicateur de Lagrange du secteur privé $q(t)$ qui est une variable d'anticipation dont la valeur initiale n'est pas donnée. Ce « multiplicateur sur un multiplicateur » $\mu(q)$ est alors dans ce second programme optimal une variable prédéterminée. Le décideur politique déterminera sa valeur initiale de manière optimale, ce qu'il peut faire si le système du secteur privé est contrôlable.

Les conditions du premier ordre impliquent que les multiplicateurs de Lagrange d'une variable sont toujours égaux à la valeur marginale de la fonction de perte minimale par rapport à cette variable. À la date initiale, il est optimal que cette valeur marginale soit égale à zéro et donc que le multiplicateur de Lagrange $\mu(q)$ soit prédéterminé à zéro (Bryson et Ho [1975], Calvo [1978], Xie [1997], Ljungqvist and Sargent [2012]). Cette condition permet ensuite au décideur politique d'ancrer la valeur initiale optimale de la variable d'anticipation $q(0)$ en fonction de la valeur initiale du stock de capital, qui est la variable prédéterminée $k(0)$:

$$L^* = P_k(\theta_1, \theta_2)k_0^2 + P_q(\theta_1, \theta_2)q_0^2 + 2P_{kq}(\theta_1, \theta_2)k_0q_0$$

$$\begin{aligned}\mu_{q,t=0} &= \frac{\delta L^*}{\delta q_0} = 2P_q(\theta_1, \theta_2)q_0 + 2P_{kq}(\theta_1, \theta_2)k_0 = 0 \\ \Rightarrow q_0 &= -\left(P_q(\theta_1, \theta_2)\right)^{-1} P_{kq}(\theta_1, \theta_2)k_0\end{aligned}$$

La deuxième ligne du tableau n°1 correspond à la politique optimale avec engagement où le coût d'ajustement R de l'instrument de politique économique est très grand ou infiniment grand par rapport aux paramètres Q_i pondérant les écarts relatifs du stock de capital et du ratio q de Tobin de leurs valeurs de long terme dans la fonction de perte du planificateur ($R \rightarrow +\infty$ ou $R \gg Q_i$ pour l'indice i valant q , k ou qk). Ceci correspond au cas $R = 1$ et $Q_i = 0$. Il s'agit de préférences ultra-libérales du secteur privé qui souhaitent la plus faible intervention possible de l'Etat, ce qui se traduit par la plus faible volatilité possible des instruments de politique économique.

Le taux d'intérêt dépend de l'écart du ratio de Tobin à sa valeur de long terme pour les règles optimales avec engagement. En conséquence, la fonction de perte du planificateur serait égale à moins l'infini en dehors de l'unique trajectoire stable. Le planificateur va donc choisir une règle de taux d'intérêt correspondant à l'intervention minimale (les plus faibles paramètres de la règle) qui permet néanmoins de transformer toutes les trajectoires instables en trajectoires stables. Le résultat de l'optimisation donne une valeur propre stable qui est égale à l'inverse de la valeur propre divergente avant l'intervention du planificateur : $0,93 = 1/1,07$ (Rojas [2011]).

En conformité avec une intervention minimale, la valeur propre stable et son vecteur propre restent inchangés. Le saut optimal de la variable prédéterminée retenu par la fonction de perte du décideur politique est exactement égal à celui fait par le secteur privé. La trajectoire retenue par le planificateur social va donc être identique à celle retenue par le secteur privé avant son intervention, représentée par des triangles sur les figures n°s 1 et 2. Elle va suivre la direction stable de la première valeur propre. Le taux d'intérêt, calculé à partir de

la règle à paramètres non nuls et prenant en compte le saut initial optimal de la variable d'état, est exactement égal à zéro à la date initiale et pour toutes les périodes suivantes. La fonction de perte optimale est donc égale à zéro sur cette trajectoire optimale. Avec ce saut initial, il n'y a pas non plus d'incitation à dévier de la trajectoire à la date suivante, car on reste à chaque date à la valeur minimisant aussi la valeur marginale de la fonction de perte (égale à zéro). La trajectoire est donc un cas particulier de cohérence temporelle, où il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des contraintes institutionnelles d'engagement du décideur politique (telles que l'indépendance de la banque centrale).

Le seul changement par rapport à l'équilibre du secteur privé est que la trajectoire stable de la première valeur propre est entourée de trajectoires infiniment proches et toutes stables. Le système dynamique est désormais déterminé par la matrice $A + BF$ et non la matrice A . La seule différence réside dans le calcul numérique. Les valeurs numériques des deux suites de la dynamique du système économique $(A + BF)^t (k_0, m_{12}k_0)'$ et $A^t (k_0, m_{12}k_0)'$ diffèrent très légèrement jusqu'à l'approche de l'équilibre. La première suite de valeurs du capital et du ratio q de Tobin converge indéfiniment vers l'équilibre. La seconde suite de valeurs du capital et du ratio q de Tobin change de signe après l'équilibre (à la période 50, pour $c = 1$, pour un arrondi à 10^{-8} du paramètre m_{12} déterminant le saut initial de q_0) puis elles divergent et explosent.

La raison de cette divergence est la suivante. Le saut sur la trajectoire stable est déterminé par la pente du vecteur propre m_{12} dont le calcul fait intervenir un ratio avec la racine carrée du discriminant d'une équation du second degré au numérateur. Cette équation annule le polynôme caractéristique qui permet de calculer les valeurs propres. Cette pente a presque partout (en mesure probabiliste) une suite infinie non périodique de chiffres après la virgule, car les nombres irrationnels (des racines de nombres qui ne sont pas des carrés) ont une mesure plus dense que les nombres à suite finie de nombres après la virgule. Les calculs numériques se font toujours avec des arrondis, par exemple à 10^{-8} , si bien que

la valeur initiale dévie presque toujours infinitésimalement de la valeur théorique correspondant à l'unique trajectoire stable dans un équilibre à la Blanchard et Kahn [1980].

La troisième ligne du tableau n°1 calcule la règle optimale avec engagement avec un paramètre relatif à l'aversion à la volatilité des instruments macroéconomique du même ordre de grandeur ($R = 1$) que les aversions à la volatilité des cibles de la politique macroéconomique. La trajectoire optimale avec politique publique va cette fois-ci diverger de la trajectoire optimale obtenue par le secteur privé avec son seul instrument microéconomique (l'investissement). La raison est que le planificateur dispose d'un second instrument (macroéconomique) qui lui permet de stabiliser l'investissement (*via* le ratio de Tobin) et d'accélérer la vitesse de convergence du capital. Ces deux actions ont des pondérations non négligeables dans la fonction de perte. Le planificateur social peut à la fois stabiliser la valeur propre instable du ratio q de Tobin et ancrer la condition initiale de l'investissement en dehors de l'unique trajectoire stable. Ceci augmente la variété de ses choix par rapport aux choix microéconomiques du secteur privé décentralisé.

La trajectoire de la règle optimale avec engagement est représentée par des carrés sur les figures n°s 1 et 2. Le choix optimal pour une aversion à la volatilité de l'investissement modérément élevée ($c = 4$) conduit à un saut plus grand que dans l'équilibre du secteur privé et à une convergence plus rapide du stock de capital. Si l'aversion à la volatilité de l'investissement diminue ($c = 1$), la convergence peut être quasiment atteinte en quatre périodes quand il en faut huit pour le seul secteur privé pour atteindre cette situation (figure n°1). Le taux d'intérêt à la suite du choc est proche de la borne zéro en déviant de -1,98% par rapport à la valeur de long terme égale à 2%.

Cette règle optimale nécessite des contraintes institutionnelles pour que le décideur politique s'engage à la respecter dans le futur. Car il fait face à un problème particulier d'incohérence temporelle (Calvo [1978]). Si le décideur politique décide à la date suivante d'optimiser de nouveau ses règles de politique

économique, il va encore trouver les mêmes paramètres pour la règle dans la première étape proposée par Sargent et Ljungqvist [2012]. En revanche, pour la deuxième étape qui détermine l'ancrage de la valeur initiale des anticipations des agents du secteur privé, il va décider que le multiplicateur de Lagrange soit égal de nouveau à zéro, ce qui n'était pas le plan prévu à la date antérieure notée zéro :

$$\mu_{q,t>0} = (\partial L^* / \partial q)_{t>0} = 0 \Rightarrow q_{t>0} = - (P_{qq})^{-1} P_{qk} k_{t>0} \neq q_{t=0}, \text{ décidé à } t=0$$

Sur les figures n^{os} 1 et 2, les losanges représentent le cas où, à chaque date future, le décideur public décide de recalculer les conditions initiales des variables d'anticipation et de renier ses engagements en termes de trajectoire optimale à la date zéro. On remarque que la dynamique reste convergente dans ce cas, car le système $A + BF$ est un système globalement stable.

C'est précisément parce qu'il y a unicité (détermination) des valeurs initiales des variables d'anticipation dans un système dynamique stabilisé par la règle optimale d'un décideur politique qu'apparaît un problème d'incohérence temporelle (Calvo [1978]). Ce système stabilisé a plus de valeurs propres stables que de variables prédéterminées. Il ne satisfait pas la condition d'unicité de Blanchard Kahn [1980]. Mais cette condition n'est valide que pour un système dynamique à matrice A fixée du secteur privé. Elle n'est plus valide pour une règle optimale sur une matrice $A + BF$ à choisir dans un équilibre de jeu dynamique à la Stackelberg entre un décideur politique et les agents privés.

Ce problème d'incohérence temporelle a donné lieu dans les années 1980 à une littérature abondante. Ses conséquences pratiques en termes de politique économique ont été importantes. Elles ont justifié l'indépendance des banques centrales, comme cadre institutionnel limitant l'incohérence temporelle. Cette indépendance devait permettre aux banquiers centraux de s'engager de manière durable sur des règles de politique économique permettant d'ancrer les anticipations rationnelles des agents privés.

Règle cohérente dans le temps

Le principe des règles cohérentes dans le temps (Oudiz et Sachs [1985], Miao [2014]) est le suivant. L'incohérence temporelle trouve son origine dans la prise en compte des variables d'anticipation dans le programme d'optimisation du décideur politique. Pour éliminer ce problème, il suffit d'éliminer ces variables d'anticipation du programme du décideur. On fait donc deux hypothèses similaires concernant les deux types d'agents. Les règles de décision des variables de flux des agents du secteur privé et des instruments de politique économique du planificateur social dépendent uniquement des variables prédéterminées à la même date, et ceci pour toutes les périodes.

La méthode de résolution est la suivante pour trouver une règle unique. Dans une première étape, le décideur politique recherche les conditions d'unicité de sa règle de politique économique pour que la matrice $A + BF$ satisfasse la condition de Blanchard et Kahn [1980]. Elle doit avoir un nombre de valeurs propres stables égal au nombre de variables prédéterminées. La recherche d'une solution unique implique le maintien des trajectoires instables au voisinage de l'unique trajectoire stable. Le planificateur social choisit donc de ne pas stabiliser l'économie afin d'avoir un seul équilibre, parce que, sinon, son ancrage des variables d'anticipation conduirait au problème d'incohérence temporelle.

Lorsqu'il fait varier le paramètre de sa règle de taux d'intérêt, le décideur politique a le choix entre deux solutions associées à des fonctions différentes des paramètres structurels. Pour un premier ensemble de valeurs de F_k , la valeur propre stable sera la plus petite des deux ($-1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$). Pour les valeurs numériques des paramètres structurels retenues dans le tableau n° 1, avec un paramètre du coût d'ajustement de l'investissement égal à un, cet ensemble de valeurs des coefficients de la règle est défini par : $-0.04 < F_k < 3.92$ et $F_q = 0$. La valeur propre λ_1 a un signe négatif devant le discriminant de l'équation caractéristique, lui-même fonction des paramètres structurels.

Pour un second ensemble de valeurs de F_k , la valeur propre stable sera la plus grande des deux ($\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 1$). Cette valeur propre a un signe positif devant le discriminant de l'équation

caractéristique, lui-même fonction des paramètres structurels. Dans chacun des deux types d'équilibre, l'effet d'un changement de certains des paramètres structurels sera différent sur la dynamique de l'économie. Pour les valeurs numériques des paramètres structurels retenues dans le tableau n° 1, avec un paramètre du coût d'ajustement de l'investissement égal à un, ce problème ne se pose pas. En effet, il n'y a pas de valeur du paramètre F_k qui permette ce choix de valeur propre stable lorsque $F_q = 0$.

Le planificateur social substitue ensuite dans le programme d'optimisation la variable d'anticipation par sa relation avec la variable prédéterminée. Le programme d'optimisation n'inclut plus que la variable prédéterminée. La solution optimale détermine de manière conjointe la valeur du paramètre de la règle F_k , la taille du saut initial m_{qk} de la variable d'anticipation et le paramètre de la matrice P_k donnant la valeur minimale de la fonction de perte selon les conditions initiales de la variable prédéterminée (Oudiz et Sachs [1985], Miao [2014]).

Le programme d'optimisation d'une règle cohérente dans le temps inclut des contraintes supplémentaires par rapport à celui d'une règle optimale avec engagement. Donc, la valeur minimale de la fonction de perte sociale d'une règle cohérente dans le temps sera inférieure ou égale à celle d'une règle optimale avec engagement, à préférences et technologie données. Éliminer le problème d'incohérence temporelle a donc un coût social. Ces contraintes supplémentaires imposent une relation linéaire entre la variable d'anticipation et la variable prédéterminée. Sur la figure 1, elles imposent de retenir une trajectoire sur un segment de droite passant par l'origine pour une règle cohérente dans le temps. En l'absence de ces contraintes, la trajectoire optimale avec engagement représentée par les carrés peut être incurvée.

Dans le cas de préférences pour une intervention minimale du planificateur social ($Q=0$ et $R=1$), la règle cohérente dans le temps correspond à une absence d'intervention du planificateur social. Pour $c=1$, on a : $-0.04 < F_k = 0 < 3.92$ et $F_q = 0$. Le planificateur social maintient donc l'instabilité potentielle de la trajectoire du secteur privé, s'il se produisait une déviation infinitésimale de la condition initiale choisie pour la variable

d'anticipation. Pour ces mêmes préférences, la règle optimale avec engagement est aussi cohérente dans le temps, mais sa trajectoire est entourée de trajectoires stables. Pour $c=1$, on a alors : $F_k = -0.04$ et $F_q = -0.33$ (tableau n° 1). Dans ce cas, les trajectoires prédites par la règle optimale avec engagement et par la règle cohérente dans le temps sont identiques pour deux valeurs distinctes de chaque paramètre dans la règle. Il y a donc un problème d'identification pour pouvoir tester le type de règle retenue par un décideur politique.

Il serait parfois possible de considérer un autre ensemble de valeurs du paramètre de la règle F_k où l'ensemble du système est stable : $(-1 < \lambda_1(F_k) \leq \lambda_2(F_k) < 1)$ après l'intervention du planificateur social. Le planificateur s'autorise cette fois-ci à stabiliser la trajectoire instable du ratio q de Tobin. Il y aura dans ce cas deux équilibres cohérents temporellement, l'un associé à la valeur propre $\lambda_1(F_k)$ et l'autre associé à la valeur propre $\lambda_2(F_k)$. Le choix entre ces deux équilibres pourrait être décidé en minimisant la fonction de perte du planificateur social.

Règle quasi optimale avec engagement

Il s'agit des règles les plus utilisées actuellement dans les modèles DSGE (Schmitt-Grohé et Uribe [2007]). A la différence des règles cohérentes temporellement, dans ces règles les instruments de politique économique (ici, le taux d'intérêt directeur) dépendent aussi des variables d'anticipation ($F_q \neq 0$) et pas seulement des variables prédéterminées ($F_k \neq 0$). Elles vont donc faire face au problème de cohérence temporelle, si un cadre institutionnel spécifique ne contraint pas le décideur public à tenir ses promesses.

La méthode de résolution est la même que dans le cas précédent pour trouver une politique unique respectant la condition de Blanchard et Kahn [1980], à la différence que le planificateur social doit désormais poser des conditions sur les deux paramètres de sa règle (F_k, F_q) plutôt que sur un seul (F_k) dans le cas des règles cohérentes temporellement.

Lorsqu'il fait varier le paramètre de sa règle de taux d'intérêt, le décideur politique a le choix entre deux solutions associées

à des fonctions différentes des paramètres structurels. Pour un premier ensemble I_1 de valeurs de $(F_k, F_q) \in I_1 \subset \mathbb{R}^2$, la valeur propre stable sera la plus petite des deux ($-1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$). Cette valeur propre a un signe négatif devant le discriminant de l'équation caractéristique, lui-même fonction des paramètres structurels. Pour les valeurs numériques des paramètres structurels retenues dans le tableau n° 1, avec un paramètre du coût d'ajustement de l'investissement égal à un, cet ensemble de valeurs des coefficients de la règle est défini par : $-0.04 - 0.11.F_q < F_k < 3.92 + 1.91.F_q$ et $F_q > -1.96$. Le cas des règles cohérentes dans le temps avec la restriction $F_q = 0$ fait partie de cet ensemble de valeurs.

Pour un second ensemble I_2 de valeurs de $(F_k, F_q) \in I_2 \subset \mathbb{R}^2$, la valeur propre stable sera la plus grande des deux ($\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 1$). Cette valeur propre a un signe positif devant le discriminant de l'équation caractéristique, lui-même fonction des paramètres structurels. Dans chacun des deux types d'équilibre, l'effet d'un changement de certains des paramètres structurels sera différent sur la dynamique de l'économie. Pour les valeurs numériques des paramètres structurels retenues dans le tableau n° 1, avec un paramètre du coût d'ajustement de l'investissement égal à un, cet ensemble de valeurs des coefficients de la règle est défini par : $3.92 + 1.91.F_q < F_k < -0.04 - 0.11.F_q$ et $F_q < -1.96$.

Dans une seconde étape, le modélisateur de DSGE impose que chaque paramètre des règles soit limité à un intervalle plausible. Ceci donnerait par exemple des valeurs possibles des paramètres de la règle égaux à : $(F_k, F_q) \in (I_1 \cup I_2) \cap [0, 3] \times [1, 3] = I_3 \subset \mathbb{R}^2$.

Dans une troisième étape, le modélisateur de DSGE ne résout pas le programme optimal avec des multiplicateurs de Lagrange. Il simule son modèle pour des valeurs numériques de (F_k, F_q) appartenant à l'ensemble I_3 . Il choisit le saut optimal de la variable d'anticipation (déterminé par le paramètre m_{gk} du vecteur propre normalisé de la seule valeur propre stable associée à la matrice $A + BF$). Il calcule numériquement la perte en bien-être du planificateur social après un choc donné sur la variable prédéterminée. Le modélisateur DSGE répète ensuite ces calculs en faisant varier les paramètres de sa règle (F_k, F_q) d'un incrément de 0,01 (par exemple) dans chacun des

intervalles de la paire $[0,3] \times [1,3]$ ayant une intersection avec la contrainte de solution unique $(I_1 \cup I_2)$. Il retient enfin comme valeur quasi optimale les valeurs de (F_k, F_q) qui minimisent la fonction de perte du planificateur social dans l'ensemble I_3 , ainsi que le saut quasi optimal de la variable d'anticipation (déterminé par le paramètre m_{qk} du vecteur propre normalisé de la seule valeur propre stable associée à la matrice $A + BF$).

La règle de politique économique retenue par ces calculs numériques des DSGE n'est pas optimale. Elle n'est pas cohérente temporellement. Elle ne stabilise pas les trajectoires instables de l'économie.

Identification des règles optimales avec engagement

Nous présentons ici les conditions d'identification des paramètres des règles optimales avec engagement de manière générale. Notre analyse reste dans le cadre déterministe sans perdre en généralité du fait de l'invariance du choix de règles optimales lorsqu'on ajoute des chocs (propriété d'équivalent certain d'Anderson *et al.* [1996]). Le décideur politique ou le planificateur social s'engage à une séquence infinie de décisions portant sur les instruments de politique économique en minimisant une fonction de perte sociale (Ljungqvist et Sargent [2012], chap. 19), (r' est une notation pour la matrice transposée de la matrice r) :

$$\begin{aligned} \min - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r^*} \right)^t & \left(\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} Q(\theta_1) \begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} + r_t R(\theta_2) r_t \right) \\ & = - \begin{pmatrix} k_0 \\ q_0 \end{pmatrix} P(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} k_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\beta = 1/(1+r^*)$ est le taux d'actualisation à long terme du décideur politique, k est un vecteur incluant n variables endogènes

prédéterminées dont les conditions initiales k_0 sont données (il s'agit des variables de stocks : capital, monnaie, dettes, richesse). q est un vecteur incluant m variables d'anticipation dont les conditions initiales ne sont pas données (il s'agit des prix et des flux tels que la production, la consommation, l'investissement), r est un vecteur incluant p instruments de politique macroéconomique, $Q(\theta_1)$ est une matrice symétrique définie positive qui représente les préférences du planificateur social de dimension $(n+m) \times (n+m)$ vis-à-vis de la volatilité (des écarts à leur valeur de long terme au carré) des variables du secteur privé, ses éléments sont des fonctions des $n(\theta_1)$ paramètres structurels utilisés dans les choix décentralisés du secteur privé et stockés dans un vecteur θ_1 appartenant à un ensemble Θ_1 , $R(\theta_1, \theta_2) > 0$ est une matrice symétrique strictement positive de dimension $p \times p$ dont les éléments définissent l'aversion à la volatilité des instruments de politique macroéconomique du planificateur social. Ils peuvent dépendre d'un vecteur θ_2 incluant $n(\theta_2)$ paramètres structurels décrivant les préférences concernant les instruments de politique macroéconomique. Enfin la matrice symétrique P est le résultat du calcul final d'optimisation dynamique du planificateur social. Elle donne la valeur minimale des paramètres de la fonction de perte. Elle est calculée en fonction des paramètres structurels θ_1 et θ_2 .

Nous retenons l'hypothèse que les préférences du planificateur social sont issues d'une agrégation des préférences des agents du secteur privé. Ces préférences font l'objet d'un développement limité à l'ordre deux pour des raisons de facilité de calcul d'optimisation de formes quadratiques sous contraintes linéaires. Cette agrégation peut, par exemple, correspondre à une simple somme des utilités pondérées par les proportions des différents agents du secteur privé. On a dans ce cas $Q(\theta_1)$. Une alternative possible est d'ajouter des préférences spécifiques θ_2 du décideur public pour les pondérations des préférences concernant les variables microéconomiques et les proportions des agents du secteur privé $Q(\theta_1, \theta_2)$.

A propos des préférences pour limiter la volatilité des instruments macroéconomiques, le planificateur social prend en compte des préférences spécifiques $R(\theta_2)$ qui n'apparaissent pas dans le calcul des décisions du secteur privé (matrices $A(\theta_1)$ et

$B(\theta_1)$). Il y a donc $n(\theta_2)-1$ paramètres à identifier décrivant les préférences macroéconomiques du décideur public. En effet, les préférences quadratiques du planificateur social sont définies à un facteur multiplicatif près. On peut donc fixer un des paramètres de la fonction de perte à une valeur égale à un.

La fonction de perte du planificateur social s'effectue sous la contrainte du système dynamique décrivant les choix décentralisés du secteur privé :

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} \\ q_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{nn}(\theta_1) & A_{nm}(\theta_1) \\ A_{mn}(\theta_1) & A_{mm}(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{np}(\theta_1) \\ B_{mp}(\theta_1) \end{pmatrix} r_t + \gamma(\theta_1) z_t$$

où $A(\theta_1)$ est une matrice de dimension $(n+m) \times (n+m)$ dont les éléments sont des fonctions des $n(\theta_1)$ paramètres structurels stockés dans un vecteur θ_1 appartenant à une ensemble Θ_1 ; $B(\theta_1)$ est une matrice de dimension $(n+m) \times p$ dont les éléments sont fonction des paramètres structurels θ_1 et correspondent aux effets marginaux des instruments de politiques macroéconomiques sur les variables qui constituent les objectifs de la politique macroéconomique, $\gamma(\theta_1)$ est une matrice de dimension $(n+m) \times k$ et z est un vecteur incluant k variables exogènes, y compris des chocs autorégressifs aléatoires.

Le choix optimal du planificateur social donne les valeurs optimales des paramètres pour les p règles :

$$r_t = \begin{pmatrix} F_{pn}(\theta_1, \theta_2) & F_{pm}(\theta_1, \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix}$$

où r est un vecteur incluant p instruments de politique macroéconomique associés à p règles de politique économique. Ces règles sont des fonctions linéaires regroupant $p \times (n+m)$ paramètres dans une matrice F . Elle est calculée en fonction des paramètres structurels θ_1 et θ_2 . Le système économique après intervention du planificateur social est déterminé par la matrice $A + BF$.

L'écriture du lagrangien du problème d'optimisation fait intervenir des multiplicateurs de Lagrange notés μ_k pour chacune des variables endogènes et prédéterminées et notés μ_q pour chacune des variables d'anticipations. Les conditions aux limites sont de trois types. Il y a les conditions initiales des variables prédéterminées k_0 . Il y a ensuite les conditions initiales de multiplicateurs de Lagrange des variables d'anticipation $\mu_{q,t=0} = 0$, qui sont eux aussi prédéterminés. Enfin, les conditions de transversalité imposent que soient bornées à l'horizon infini toutes les variables exogènes et toutes les variables endogènes prédéterminées et d'anticipation. Elles ne devraient pas croître plus qu'un taux de croissance de référence. Du fait du taux d'actualisation dans la fonction de perte du planificateur social, le critère de stabilité des valeurs propres est le suivant :

$$|\beta\lambda^2|^t < |\beta\lambda^2| < 1, \text{ si bien que } |\lambda| < 1/\beta^{1/2} = (1+r^*)^{1/2}$$

Pour les règles avec engagement, les conditions de transversalité contraignent les paramètres F de la règle à ce que la matrice $A + BF$ ait toutes ses valeurs propres stables.

La méthode pour résoudre le programme des règles optimales avec engagement est présentée dans le chapitre 19 de Ljungqvist et Sargent [2012]. Une condition pour calculer les règles optimales avec engagement est que toutes les variables d'anticipation soient contrôlables, qu'il y ait au moins une variable endogène prédéterminée qui soit contrôlable, et que les autres variables endogènes prédéterminées mais non contrôlables aient toutes des valeurs propres stables. La contrôlabilité de Kalman signifie que les instruments de politique économique ont des effets directs ou indirects sur les variables qui sont les objectifs de la politique économique. Elle vérifie aussi que les instruments de politique économique n'ont pas d'effets redondants : les effets marginaux de deux instruments différents ne doivent pas être proportionnels. La contrôlabilité est vérifiée si la matrice de Kalman [1960] est de rang plein :

$$\text{rang} (\beta^{1/2}B \quad \beta AB \quad \beta^{3/2}A^2B \quad \dots \quad \beta^{(n(c)+m)/2}A^{n(c)+m-1}B) = n(c)+m$$

Inclure des variables prédéterminées non contrôlables accroît la volatilité des instruments sans réduire la volatilité des variables qui sont les objectifs du planificateur social. Il n'est donc pas optimal d'inclure des variables non contrôlables dans les règles. Si la paire de matrice $(A_{n(c)+m} \ B_{n(c)+m,p})$ est contrôlable, il existe une unique matrice symétrique semi-définie positive P , qui donne les paramètres de la valeur de la fonction de perte minimale, elle-même solution d'une équation matricielle algébrique de Ricatti :

$$P(\theta_1, \theta_2) = Q + \beta A'PA - \beta A'PB(R + \beta B'PB)^{-1}\beta B'PA$$

On en déduit alors les valeurs de la matrice unique F des paramètres des p règles de politique économique :

$$F(\theta_1, \theta_2) = \beta(R + \beta B'PB)^{-1}\beta B'PA$$

Enfin, les valeurs initiales des variables d'anticipation sont données par :

$$\mu_{q,t=0} = (\partial L^* / \partial q)_{t=0} = 2P_{mm}q_0 - 2P_{mn}k_0 = 0 \Rightarrow q_0 = -(P_{mm})^{-1}P_{mn}.k_0$$

Le problème d'incohérence temporelle à la Calvo [1978] de ces règles optimales lorsque l'engagement initial n'est pas respecté est généralisable avec n variables prédéterminées, m variables d'anticipations et p instruments avec des formules matricielles semblables aux formules présentées dans l'exemple de la section précédente (où $n = 1$, $m = 1$, $p = 1$).

Proposition 1

Si toutes les m variables d'anticipation sont contrôlables, si le nombre de variables prédéterminées contrôlables est tel que : $1 \leq n(c) \leq n$, si toutes les autres $(n - n(c))$ variables prédéterminées non contrôlables ont des valeurs propres « stables » et si $n(\theta_2) - 1$ est le nombre de paramètres de préférences spécifiques au programme d'optimisation du planificateur social :

(i) si le nombre de paramètres de p règles associées aux p instruments de politique est tel que : $(n(c) + m)p \leq n(\theta_2) - 1$, les

paramètres de ces p règles optimales peuvent être identifiés et permettent d'identifier un sous-ensemble des paramètres spécifiques au planificateur social dans sa fonction de perte ;

(ii) si $(n(c)+m)p-n(\theta_2)-1=k>0$, vouloir identifier les paramètres des formes réduites des règles de politique optimale impose d'ajouter k restrictions d'identification sur les paramètres structurels du secteur privé parmi le vecteur (θ_p) , soit en les calibrant soit en ajoutant des restrictions sur des covariances des perturbations associées aux équations du modèle (Hausman, Newey et Taylor [1987] ; Backus, Chernov et Zin [2014]).

Preuve

Les conditions d'identification des paramètres de la règle sont obtenues en décomptant le nombre d'inconnues, qui sont les paramètres structurels des préférences macroéconomiques du planificateur social, par rapport au nombre de paramètres F qui peuvent être estimés par la forme réduite des règles.

Ljungqvist et Sargent [2012] ont proposé de réécrire la règle $F(k_p, q_p)$ sous la forme d'une autre règle $\Psi(k_p, r_{t-1}, k_{t-1})$ aux observations équivalentes qu'ils appellent une « représentation dépendante de l'histoire » de la règle. Ils substituent dans ces règles les variables d'anticipation à la date courante par les valeurs de la date précédente des instruments de politique économique et des variables prédéterminées. Woodford [2003] avait procédé de la même manière pour interpréter la présence d'un lissage des taux d'intérêt directeurs de la banque centrale américaine.

Proposition 2

Les paramètres de la règle « dépendante de l'histoire » $\Psi(k_p, r_{t-1}, k_{t-1})$ ne sont pas identifiés si leur nombre total $2n(c)p+p$ est plus grand que celui de la règle à observations équivalentes $F(k_p, q_p)$ qui est égal à $(n(c)+m)p$. Dans ce cas, leur nombre total de restrictions pour que la règle Ψ soit identifiée est égal à $2n(c)p+p - (n(c)+m)p$.

Le problème d'identification du terme autorégressif dans une règle optimale est simple à comprendre. Pour une volatilité identique des instruments de politique économique, à toute règle incluant un terme autorégressif calculé à la manière de Sargent et Ljungqvist [2014] correspond une autre règle aux observations équivalentes sans terme autorégressif mais avec des paramètres plus petits devant les écarts des variables d'objectifs de la politique économique à leur valeur de long terme.

A ce problème d'identification des règles de Taylor dans les DSGE avec un taux d'intérêt retardé, s'ajoute un second problème d'identification lorsque l'on inclut un choc autorégressif dans la règle de Taylor (Fève, Matheron et Poilly [2007]). Il s'agit d'un problème d'identification indépendant du précédent. En effet, les paramètres optimaux des règles sont déterminés indépendamment des chocs aléatoires et des variables exogènes qu'ils ne peuvent pas contrôler et qui peuvent être autorégressives. Ce coefficient autorégressif de l'aléa a un effet concurrent de l'effet autorégressif du taux d'intérêt pour expliquer l'observation des données prédites par la règle. Il existe deux estimations aux observations équivalentes donnant des valeurs contrastées pour chacun des deux paramètres d'autocorrélation (celui de l'instrument et celui de la règle). Enfin, si cet aléa correspond à des erreurs de politique monétaire, le fait qu'il soit autorégressif signifierait une persistance irrationnelle des erreurs ou des anticipations non rationnelles du banquier central.

Identification des règles cohérentes dans le temps

Les règles cohérentes dans le temps (Oudiz et Sachs [1985], Miao [2014]) éliminent les variables d'anticipation et leurs multiplicateurs de Lagrange du programme d'optimisation du planificateur social. Pour ce faire, elles supposent que les règles optimales du secteur privé et du secteur public ne dépendent que des variables

prédéterminées à la même date et ceci de manière linéaire. Les variables d'anticipation (dont les variables de choix du secteur privé) et les instruments de politique économique ont alors une dépendance au passé (une « dynamique ») qui est uniquement déterminée par la dépendance au passé des variables prédéterminées. La dynamique du système économique dépendant de la période précédente est réduite à celle des variables prédéterminées.

Comme dans la section précédente, il est nécessaire de faire l'hypothèse de contrôlabilité du système de toutes les variables d'anticipation et d'au moins une variable prédéterminée. Le planificateur social réduit son optimisation sur les variables prédéterminées : il en faut au moins une qu'il puisse contrôler. Même si les instruments de politique économique n'ont pas d'effet direct sur les variables prédéterminées, il faut qu'ils aient un effet indirect, *via* ceux des variables d'anticipation sur les variables prédéterminées.

L'hypothèse de contrôlabilité du système et le fait de réduire la dynamique du système économique à celle des variables prédéterminées rendent possibles des équilibres multiples ou des familles d'équilibres uniques qui sont des fonctions différentes des paramètres structurels (θ_1, θ_2) . Ces complications sont issues du théorème suivant.

Théorème de placement des valeurs propres (Wonham [1967])

Si la paire de matrices corrigées du facteur d'actualisation du planificateur social $(\beta^{1/2}A_{n(c)+m} \beta^{1/2}B_{n(c)+m,p})$ est contrôlable, les valeurs propres de la matrice après contrôle du planificateur social $\beta^{1/2}(A+BF)$ peuvent être arbitrairement situées dans le plan complexe (les valeurs propres complexes apparaissent seulement sous la forme de paires conjuguées) en choisissant des valeurs correspondantes des paramètres F de la règle de politique économique.

Le planificateur social recherche seulement des équilibres uniques (détermination) selon l'hypothèse de Blanchard Kahn [1980]. Le théorème de placement des valeurs propres associe un ensemble de valeurs des paramètres F des règles qui satisfont

la condition « le nombre de valeurs propres stables est égal au nombre de variables prédéterminées ». Néanmoins, il existera des groupes d'équilibres uniques (avec des fonctions différentes des paramètres structurels) pour des ensembles différents de valeurs des paramètres F des règles. Ces familles correspondent à des positions différentes des valeurs propres stables parmi la séquence ordonnée des valeurs propres (cf. l'exemple à deux dimensions).

Si le planificateur social s'autorise à calculer tous les équilibres multiples possibles et à retenir celui qui minimise sa fonction de perte, il étendra le choix possible des valeurs des paramètres de règles F à celles où il y a au moins un nombre n_c de valeurs propres stables égal au nombre de variables prédéterminées contrôlables.

Ce problème de calcul des équilibres multiples ne se pose pas dans le cas des règles avec engagement, car c'est le cas unique où toutes les valeurs propres sont stables. Pour ces règles, le planificateur social décide de stabiliser toutes les trajectoires instables.

Dans une étape suivante, le planificateur social détermine de manière conjointe les paramètres de la projection (ou des « sauts ») des variables d'anticipation sur les variables prédéterminées à la même date, les paramètres F des règles et ceux de la matrice P déterminant les valeurs minimales de la fonction de perte du planificateur social. Il pourrait déterminer dans l'ensemble des équilibres multiples celui qui minimise cette perte.

Proposition 3

Si le nombre de variables contrôlables et prédéterminées est tel que $1 \leq n_c \leq n$, et si $n(\theta_2) - 1$ définit le nombre de paramètres structurels spécifiques aux préférences du planificateur social :

(i) si $n_p \leq n(\theta_2) - 1$, au plus n_c paramètres de la forme réduite de chacune des p règles associées aux p instruments de politique économique peuvent estimer un sous-ensemble de paramètres structurels spécifiques aux instruments macroéconomiques ;

(ii) si $n p - n(\theta_2) + 1 = k > 0$, si le nombre de paramètres des formes réduites des règles est plus élevé que celui des paramètres structurels spécifiques aux instruments macroéconomiques, ces paramètres de forme réduite des règles seront identifiés seulement si on ajoute k contraintes d'identification sur les paramètres structurels du secteur privé (par exemple la calibration de k paramètres appartenant à l'ensemble θ_1) ou en posant des contraintes sur les covariances des perturbations des équations du système prenant en compte l'intervention du planificateur social.

En pratique, ces règles cohérentes temporellement incluent uniquement des variables prédéterminées et contrôlables, qui sont les variables de stock (richesse, obligations, actions, capital, monnaie). Elles excluent les variables d'anticipation telles que les écarts de production, l'inflation, les prix des actifs, ce qui est plutôt contradictoire avec la doctrine actuelle qui prévaut dans les banques centrales.

Identification des règles quasi optimales avec engagement

Les règles quasi optimales avec engagement sont les plus fréquemment utilisées dans les DSGE (Schmitt-Grohé et Uribe [2007]). Elles incluent des variables d'anticipation dans les règles de politique économique. Elles font donc face au problème d'incohérence temporelle. Leur principe est d'éviter les calculs théoriques d'optimisation et de faire des simulations numériques. Il a déjà été présenté dans le cadre de l'exemple en première section. Comme pour les règles cohérentes dans le temps, le théorème de placement des valeurs propres de Wonham [1967] crée des groupes d'équilibres uniques mais à fonctions différentes des paramètres structurels lorsque l'on fait varier la règle.

A la différence des règles cohérentes dans le temps, la condition de Blanchard Kahn [1980] peut autoriser des variables

d'anticipation à faire partie des variables qui engendrent le sous-espace vectoriel à valeurs propres convergentes. Dans ce cas, il existe des variables prédéterminées qui font partie du sous-espace vectoriel complémentaire à valeurs propres divergentes. En revanche, dans le cas des règles cohérentes dans le temps, il est impératif qu'il n'y ait aucune variable d'anticipation dans le sous-espace stable de dimension égale au nombre de variables prédéterminées.

Proposition 4

Pour toute règle de politique économique fonction linéaire des écarts à leur valeur de long terme des variables prédéterminées et des variables d'anticipation dans un modèle DSGE linéaire qui satisfait la condition d'unicité de Blanchard et Kahn [1980], le nombre maximal de paramètres de la règle qui peuvent être identifiés est égal au nombre de variables prédéterminées et contrôlables.

Preuve

Dans la résolution de Blanchard et Khan, les m variables potentiellement divergentes sont des fonctions linéaires des n variables convergentes, et sont déterminées par une matrice M_{mn} . Il existe donc une deuxième règle de politique économique aux observations équivalentes à la précédente, mais qui ne réagit qu'aux écarts des variables convergentes et contrôlables :

$$r_t = F_{pn} k_t + F_{pm} q_t = F_{pn} k_t + F_{pm} M_{mn} k_t = (F_{pn} + F_{pm} M_{mn}) k_t + 0 q_t$$

En pratique, les restrictions d'identification ($F_{pm} = 0$) sont une possibilité parmi d'autres contraintes d'identification.

Par exemple, dans le modèle de Schmitt-Grohé et Uribe [2007, p.1713], la version non monétaire de leur modèle inclut deux variables prédéterminées (le stock de capital et le stock de dette publique). Dans leur tableau n°2, lorsque la règle de Taylor inclut trois paramètres avec un paramètre associé au taux

d'intérêt directeur de la période précédente, ses paramètres ne sont pas identifiés. Il existe une deuxième règle de Taylor avec un des trois paramètres égal à zéro où le calcul de la fonction de perte du planificateur social est identique.

Proposition 5

Les contraintes d'identification des paramètres des formes réduites des règles et/ou des paramètres structurels spécifiques au planificateur social sont identiques à celles des règles optimales cohérentes temporellement (*cf.* proposition 3).

Par exemple, dans le modèle de Schmitt-Grohé et Uribe [2007], le nombre de paramètres spécifiques au planificateur social est zéro ($n(\theta_2) = 0$). Il n'y a pas de prise en compte des volatilités des deux instruments de politique économique dans la fonction de perte du planificateur social. Pour le premier instrument, le taux d'intérêt directeur, la règle de Taylor, inclut trois paramètres. Pour le second instrument, le budget de l'Etat, leur règle inclut un paramètre. Si on souhaite identifier ces quatre paramètres non structurels en estimant ces deux règles dans ce DSGE, il sera nécessaire de calibrer quatre paramètres structurels. On ne pourra donc estimer que dix paramètres structurels parmi les quatorze du secteur privé de ce modèle dans sa version non monétaire.

Proposition 6

Les règles quasi optimales avec engagement sont des règles sous optimales avec engagement.

Preuve

Les différentes caractéristiques qui conduisent à cette sous-optimalité sont les suivantes :

i) les sauts initiaux des variables d'anticipation (fondés sur Blanchard et Kahn) sont en général différents de ceux des règles optimales avec engagement (fondés sur la nullité des multiplicateurs

de Lagrange de ces variables d'anticipation), que ces variables d'anticipation soient dans le sous-espace stable ou dans le sous-espace instable du cas d'unicité des solutions selon Blanchard Kahn (1980) ;

ii) L'ensemble de détermination retenu dans les règles quasi optimales avec engagement exclut le cas où toutes les variables sont stabilisées, qui correspond à la solution optimale avec engagement.

iii) Les intervalles retenus pour les simulations des règles quasi optimales peuvent exclure les valeurs optimales des paramètres de règles.

Par exemple, dans l'article de Schmitt-Grohé et Uribe [2007, p.1713], le minimum de la fonction de perte du planificateur est obtenu pour des paramètres de la règle de Taylor tous nuls. L'introduction de la règle de Taylor augmente systématiquement la volatilité de l'inflation. D'après les résultats obtenus par ces règles en termes de bien-être social, il conviendrait de ne pas faire de politique monétaire. Ces résultats sont proches de préconisations relevant de l'idéologie ultra-libérale.

Un même modèle du secteur privé d'un DSGE aura des propriétés très différentes selon le choix du type de règle de politique économique. Nous présentons une liste de critères pour évaluer les points forts et les points faibles des trois types de règles de politiques économiques que nous avons étudiés.

- Les règles optimales avec engagement et les règles cohérentes dans le temps ne sont pas sujettes à la critique de Lucas. En revanche, les règles quasi optimales de politique économique estimées dans les DSGE sont sujettes à la critique de Lucas. Les paramètres $F(\theta_1, \theta_2)$ de ces règles ne sont pas structurels. Ce sont des fonctions des paramètres structurels des préférences et des technologies du secteur privé et du décideur politique

noté (θ_1, θ_2) . Un banquier central d'un pays donné à une période donnée aura une règle de taux d'intérêt avec un paramètre élevé par rapport aux écarts d'inflation si, dans le secteur privé, les prix sont plus sensibles à l'activité économique (en l'absence de l'intervention du banquier central) que dans un autre pays. Ceci est vérifié par l'instabilité des paramètres estimés des règles dans des modèles DSGE après des changements de politique économique (Hurtado [2014]).

- Les règles optimales avec engagement permettent de stabiliser les bulles et les krachs selon la conception de la stabilisation des « vieux » keynésiens (Cochrane [2011]), ce qui n'est pas le cas des deux autres types de règles.
- Les règles optimales avec engagement impliquent des trajectoires dont la convergence reste robuste à des petites erreurs de spécification. En revanche, les règles quasi optimales des DSGE et les règles cohérentes dans le temps ne sont pas robustes à des erreurs de spécification par une constante infiniment petite et divergent de l'équilibre de long terme (Hansen et Sargent [2007]).
- Les trois règles proposent un ancrage unique de valeurs initiales des variables d'anticipation. Cependant, les règles cohérentes temporellement et les règles quasi optimales s'appuient sur l'hypothèse d'unicité de Blanchard et Kahn [1980]. Cochrane [2011] a établi que, jusqu'à présent, la modélisation théorique n'a pas démontré cette hypothèse qui pose que les trajectoires divergentes seraient incompatibles avec les anticipations rationnelles des agents.
- Les règles optimales avec engagement ont un équilibre unique. Pour les deux autres types de règles, en faisant varier leurs paramètres, on peut avoir des équilibres à fonctions différentes des paramètres structurels.
- Le nombre de paramètres des règles optimales avec engagement qui peuvent être identifiés est au plus égal au nombre de variables prédéterminées et d'anticipations qui sont contrôlables. Le nombre de paramètres des règles quasi optimales et cohérentes intertemporellement qui peuvent être identifiés est au plus égal au nombre de variables prédéterminées et contrôlables.

- Le calcul numérique des règles optimales avec engagement ou cohérentes dans le temps est immédiat. Les calculs numériques des règles quasi optimales peuvent être d'autant plus longs que le nombre de paramètres dans les règles est grand et le calcul de chaque simulation est long.

En dépit de leur supériorité sur l'ensemble des sept critères précédents, l'usage des règles optimales avec engagement stabilisant les bulles et les krachs est rare dans la littérature des DSGE. Woodford [2003] est une exception. Le seul inconvénient théorique de ces règles est que « la technologie d'engagement » n'est pas modélisée explicitement avec des coûts et des bénéfices.

Les auteurs remercient, pour leurs commentaires détaillés sur une version préliminaire de cet article, Christian Aubin, Yvan Jaccard, Jean-Christophe Poutineau, Valeria Miceli, Margarita Rubio, Patrick Villieu et Henning Weber, ainsi qu'Antoine d'Autume, Robert Chirinko, Vitor Gaspar, Peter Sinclair, Michel de Vroey et Bertrand Wigniolle et les participants aux sessions des conférences : Macroeconomics in Perspective at Louvain la Neuve, Deutsche Bundesbank « Common challenges in Asia and Europe » Eltville, Brunel University London, Las Palmas, Niort, AFSE Lyon, GDRE Lyon, FEBS Guildford, Manchester, SAET Tokyo, MMF Durham, SIE Trento, Rennes et les séminaires « Dynamique de la macroéconomie » à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne et à l'université d'Orléans. Ils restent responsables des erreurs et omissions qui pourraient subsister.

Jean-Bernard Chatelain est professeur des universités à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, membre sénior de l'institut universitaire de France et membre associé à la Paris School of Economics.

Adresse : Paris School of Economics - Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, CES Centre d'économie de la Sorbonne, MSE, 106-112 Boulevard de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13. Email : jean-bernard.chatelain@univ-paris1.fr

Kirsten Ralf est professeur d'économie et de finance à l'Ecole supérieure du commerce extérieur. Adresse : Ecole supérieure du commerce extérieur, 10 rue Sextius Michel, 75015 Paris. Email : kirsten.ralf@esce.fr

Références

- E.W. Anderson, L.P. Hansen, E.R. McGrattan et T.J. Sargent [1996] : *Mechanics of Forming and Estimating Dynamic Linear Economies*, in H.M. Amman, D.A. Kendrick et J. Rust (éd.), **Handbook of Computational Economics**, Elsevier, Amsterdam, pp. 171-252.
- D. Backus, M. Chernov et S. Zin [2014] : *Identifying Taylor Rules in Macro-Finance Models*, working paper, Stern School of Business.
- O.J. Blanchard et C. Kahn [1980] : *The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations*, **Econometrica**, 48, pp. 1305-1311.
- A.E. Bryson et Y.C. Ho [1975] : **Applied Optimal Control**, John Wiley and Sons, New York.
- E. Caglar, J.S. Chadha et K. Shibayama [2012] : *Bayesian Estimation of DSGE models: Is the Workhorse Model Identified?* Working paper, EEA-ESEM conference.
- G.A. Calvo [1978] : *On the Time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economy*, **Econometrica**, 46(6), pp. 1411-1428.
- F. Canova et L. Sala [2009] : *Back to Square One: Identification Issue in DSGE Models*, **Journal of Monetary Economics**, 56, pp. 431-449.
- F. Canova, F. Ferroni et C. Matthes [2014] : *Choosing the Variables to Estimate Singular DSGE Models*, **Journal of Applied Econometrics**, 29(7), pp. 1099-1117.
- J.H. Cochrane [2011] : *Determinacy and Identification with Taylor Rules*, **Journal of Political Economy**, 119(3), pp. 565-615.
- J.M. Dufour, L. Khalaf et M. Kichian [2013] : *Identification-Robust Analysis of DSGE and Structural Macroeconomic Models*, **Journal of Monetary Economics**, 3, pp. 340-350.
- P. Fève, J. Matheron et C. Poilly [2007] : *Monetary Policy Dynamics in the Euro Area*, **Economics Letters**, 96(1), pp. 97-102.
- L.P. Hansen et T.J. Sargent [2007] : **Robustness**, Princeton University Press, Princeton.
- J.A. Hausman, W.K. Newey W.K. et W.E. Taylor [1987] : *Efficient Estimation and Identification of Simultaneous Equation Models with Covariance Restrictions*, **Econometrica**, pp.849-874.
- S. Hurtado [2014] : *DSGE Models and the Lucas Critique*, **Economic Modelling**, 44(S1), S12-S19.
- N. Iskrev [2010] : *Local Identification in DSGE Models*, **Journal of Monetary Economics**, 57(2), pp. 189-202.
- R.E. Kalman [1960] : *Contributions to the Theory of Optimal Control*. **Boletín de la Sociedad matematica mexicana**, 5, pp.102-109.
- I. Komunjer et S. Ng [2011] : *Dynamic Identification of Dynamic Stochastic General Equilibrium Models*, **Econometrica**, 79(6), pp. 1995-2032.
- G. Koop, M.H. Pesaran et R.P. Smith [2013] : *On identification of Bayesian DSGE Models*, **Journal of Business and Economics Statistics**, 31(3), pp. 300-314.
- V.P.M. Le, P. Minford et M. Wickens [2013] : *A Monte Carlo Procedure for Checking Identification in DSGE Models*,

Cardiff Economics Working Papers E2013/4, Cardiff Business School.

L. Ljungqvist et T.J. Sargent [2012] : **Recursive Macroeconomic Theory**, 3^{ème} ed., The MIT Press, Cambridge, Massachussets.

J. Maio [2014] : **Economic Dynamics in Discrete Time**, The MIT Press. Cambridge, Massachussets.

G. Oudiz et J.D. Sachs [1985] : *International Policy Coordination in Dynamic Macroeconomic Models*, in W.H. Buiter et R.C. Marston (éd.), **International Economic Policy Coordination**, Cambridge U.K., Cambridge University, pp. 275-319.

A.J. Rojas [2011] : *On the Discrete-Time Algebraic Riccati Equation and its Solution*

in Closed-Form, Proceedings of the 18th IFAC World congress, pp. 162-167.

S. Schmitt-Grohé et M. Uribe [2007] : *Optimal Simple and Implementable Monetary and Fiscal Rules*, **Journal of Monetary Economics**, pp. 1702-1723.

W.N. Wonham [1967] : *On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear System*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 12(6), pp 660-665.

M. Woodford [2003] : *Optimal Interest-Rate Smoothing*, **Review of Economic Studies**, 70, pp. 861-886.

D. Xie [1997] : *On Time Consistency: a Technical Issue in Stackelberg Differential Games*, **Journal of Economic Theory**, 76, pp. 412-430.