Groupes simples connexes minimaux non-algébriques de type impair

Adrien Deloro

Groupes simples connexes minimaux non-algébriques de type impair

Adrien Deloro

16 novembre 2007

Nous achevons ici la réécriture de [CJ04] commencée dans [Del07]. Notre résultat principal est le Théorème-Synthèse énoncé plus bas. La version ordinaire est le Fait, dû à Cherlin et Jaligot, qui le précède. L'introduction est celle de [Del07] dont nous reprenons les prérequis et certaines méthodes. Les techniques du présent article iront de la simple imitation de [CJ04] à l'argument de concentration apparu dans [Del07, §6]. Ce dernier est employé deux fois, ce qui lève un peu le voile sur une technique encore mystérieuse.

Classifier les groupes simples connexes minimaux de rang de Morley fini est une étape essentielle à l'étude de la conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber. Nous renvoyons à l'introduction de [Del07] pour l'état des lieux du programme de Borovik. En type impair *et sous l'hypothèse d'ordinarité*, Cherlin et Jaligot avaient prouvé :

Fait ([CJ04, Theorem 1.8]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini* ordinaire, *simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. Alors le rang de Prüfer de G est au plus 2, et l'on a les possibilités suivantes :*

1. *Le rang de Prüfer de G est 1 :*
   - *(a) Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*
   - *(b) Si C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$, alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.*
2. *Le rang de Prüfer de G est 2 :*
   Alors $T = C = C(V)$ est nilpotent, $|W| = 3$, toutes les involutions de G sont conjuguées, et G interprète un corps algébriquement clos de caractéristique 3. En outre :
   - *(a) Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$*

est un sous-groupe de Borel de la forme $O(B_i) \rtimes T$, où $O(B_i)$ est inversé par les deux involutions de T distinctes de i.

(b) *Sinon, C est un sous-groupe de Borel nilpotent de G.*

C'est ce Fait que le présent article s'attache à réécrire. Notre énoncé ne fait pas appel à l'ordinarité, et contribue dans un certain sens à affranchir l'étude des groupes de rang de Morley fini de la théorie des modèles : même si les définitions qui la sous-tendent reposent sur le rang de Morley, la théorie des (∞, d)-groupes de Burdges est une théorie de l'unipotence, et nous ne parlerons que de groupes !

Signalons enfin que l'ensemble formé par [Bur07], [BCJ07], [Del07], et le présent article, est retravaillé de façon globale et cohérente dans le cadre plus général des groupes localement résolubles ; [DJ07] proposera des résultats très similaires à ceux de [CJ04].

Théorème-Synthèse *Soit G un groupe de rang de Morley fini, simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. Alors le rang de Prüfer de G est au plus 2, et l'on a les possibilités suivantes :*

1. *Le rang de Prüfer de G est 1 :*
   (a) *Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*
   (b) *Si C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$, alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.*
2. *Le rang de Prüfer de G est 2 :*
   Alors $T = C = C(V)$ est nilpotent, $|W| = 3$, toutes les involutions de G sont conjuguées, et G interprète un corps algébriquement clos de caractéristique 3. En outre :
   C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel admettant un sous-groupe Y_i de degré d'unipotence égal à celui de B_i, et inversé par les deux involutions de T distinctes de i.

Bien que l'appareil de commentaires soit minimal, cet article est autonome : la Section 1 présente tous les rappels nécessaires.

La Section 2 gagne un temps précieux en déterminant les 2-sous-groupes de Sylow avant analyse, au lieu de procéder au coup-par-coup : c'est possible grâce à la "toricité"' de Burdges et Cherlin (Fait 1.29 infra).

En §3 on se penche sur le cas (non-algébrique) d'un groupe simple connexe minimal de rang de Prüfer 1. On y prouve (1)(b) de notre Théorème-Synthèse. L'étude de la configuration de rang de Prüfer 2 (la partie (2) du Théorème-Synthèse) commence avec la Section 4. Le plan de bataille spécifique y sera exposé.

1 Matériel requis

1.1 Groupes simples connexes minimaux de type impair

Définition 1.1 *Un groupe de rang de Morley fini est* simple connexe minimal *s'il est simple infini, et que tout sous-groupe définissable connexe propre en est résoluble.*

Définition 1.2 *Un* sous-groupe de Borel *d'un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal en est un sous-groupe propre, définissable, connexe, et maximal pour ces propriétés.*

Définition 1.3 *Un sous-groupe $M < G$ définissable propre d'un groupe de rang de Morley fini est* fortement inclus *s'il contient des involutions, mais que pour tout $g \notin N_G(M)$, $M \cap M^g$ est sans involution.*

Fait 1.4 ([BCJ07, Theorem 1]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini et de type impair. Si G possède un sous-groupe fortement inclus, alors G est de rang de Prüfer* 1*.*

Fait 1.5 (tiré de [BCJ07, Fact 2.1]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini et de type impair. Alors G est de rang de Prüfer* 1 *ou* 2*.*

La dichotomie (1)-(2) du Théorème-Synthèse est donc acquise.

Fait 1.6 ([Del07, Théorème 1.1]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de* 2*.*

Le Fait 1.29 ci-après justifie que l'on puisse retirer le mot "torique" dans cet énoncé. La partie (1)(a) du Théorème-Synthèse est ainsi prouvée.

1.2 Généricité

Etant donnée une partie X d'un groupe G, on note $X^\#$ l'ensemble $X \setminus \{1\}$, et X^G l'ensemble $\cup_{g\in G} X^g$.

Fait 1.7 ([Del07, Corollaire 2.4]) *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $\{1\} \neq X \subseteq G$ un sous-ensemble définissable. Alors $\mathrm{rg}(X^G \cap M) < \mathrm{rg}(X^G)$.*

Fait 1.8 ([CJ04, Lemma 3.4]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Soit B un sous-groupe définissable propre connexe, d'indice fini dans son normalisateur et tel que $\cup_{g\in G} B^g$ soit générique dans G. Soit $x \in N_G(B) \setminus B$*

d'ordre $n > 1$ modulo B. On note $\langle x\rangle B$ l'union $B \cup xB \cup \cdots \cup x^{n-1}B$. Alors l'ensemble définissable

$$X_1 = \{x_1 \in xB \text{ tels que } \exists g \in G \setminus N_G(B),\ x_1 \in (\langle x\rangle B)^g\}$$

est générique dans xB.

Fait 1.9 ([CJ04, Lemma 3.6]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini tel que H° soit abélien. Si x est un élément de $H \setminus H^\circ$ tel que les éléments du coset xH° soient génériquement d'ordre n pour un entier $n > 1$, alors tout élément de xH° est d'ordre n.*

Fait 1.10 ([CJ04, Lemma 3.7]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini. On suppose que H° est nilpotent, que H/H° est d'ordre un nombre premier p, et que les éléments de chaque coset de H° distinct de H° sont génériquement d'ordre p. Si un élément $x \in H \setminus H^\circ$ a un centralisateur infini dans H°, alors H° contient un sous-groupe p-unipotent non-trivial.*

Fait 1.11 ([CJ04, Lemma 3.8]) *Soient H un groupe de rang de Morley fini* de type impair*, et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. On suppose que $H^\circ \leq C_H(S^\circ)$ et que pour chaque $x \in H \setminus H^\circ$, il existe un entier n tel que les éléments du coset xH° soient génériquement d'ordre au plus n. Alors $C_H(S^\circ) = H^\circ$.*

Définition 1.12 *Un sous-ensemble définissable X d'un groupe de rang de Morley fini G est* généreux dans G *si X^G est générique dans G.*

Fait 1.13 ([Jal06, Lemma 3.9]) *Soient $L \leq H \leq G$ des groupes de rang de Morley fini, H et L étant définissables. On suppose que H est connexe. Si L est généreux dans H et que H l'est dans G, alors L est généreux dans G.*

Définition 1.14 *Un* tore décent *d'un groupe de rang de Morley fini en est un sous-groupe définissable, abélien, divisible et qui coïncide avec la clôture définissable de sa torsion.*

Fait 1.15 ([Che05, Lemma 4]) *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini et $T \leq G$ un tore décent. Alors $C^\circ(T)$ est généreux dans G.*

Fait 1.16 ([Che05, dernières lignes]) *Les tores décents maximaux d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués.*

1.3 Involutions et 2-tores

Fait 1.17 ([Del07, Lemme 3.1]) *Soient G un groupe, $H \leq G$ et $K \leq N(H)$ deux sous-groupes. On suppose que K est 2-divisible, et qu'il existe une involution $i \in G$ telle que*

- *i centralise ou inverse H, et*
- *i inverse K.*

Alors $[H, K] = 1$.

Si σ est un automorphisme involutif et définissable d'un groupe de rang de Morley fini G, on note $G^{-\sigma}$ l'ensemble $\{g \in G,\ g^\sigma = g^{-1}\}$.

Fait 1.18 ([BN94, Exercice 14 p.73]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans involutions. Soit σ un automorphisme involutif et définissable de G. Alors $G^{-\sigma}$ est 2-divisible, et l'on a la décomposition univoque $G = C_G(\sigma) \cdot G^{-\sigma}$.*

Le fait suivant est immédiat.

Fait 1.19 *Soit A un groupe abélien connexe et 2-divisible de rang de Morley fini. Soit φ un automorphisme involutif et définissable de A. Alors $A = C_A(\varphi)(+)A^{-\varphi}$, où le symbole $(+)$ signifie que l'intersection est finie. En particulier, si $C_A(\varphi)$ est fini, alors φ inverse A.*

Fait 1.20 (Borovik-Poizat, [BN94, Lemma 10.8 et Theorem 10.11]) *Les 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués. En outre, de tels sous-groupes sont nilpotents-par-fini, et l'on peut décomposer leur composante connexe sous la forme*

$$S^\circ = T * U,$$

où T est un 2-tore, et U un 2-groupe définissable connexe nilpotent d'exposant borné.

Fait 1.21 ([BN94, Theorem 10.22]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et T le 2-tore maximal de S. Alors $N(T)$ contrôle la fusion dans S°. (Cela signifie que si A et B sont sont deux sous-ensembles de S° conjugués dans G, alors A et B sont conjugués dans $N(T)$.)*

Fait 1.22 (Théorème Z^*, [BBC07, Theorem 5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, S un 2-sous-groupe de Sylow de G, et i une involution de S. Alors l'un des deux cas suivant se produit :*

(a) i est conjuguée dans G à une autre involution de S.

(b) $C(i)$ est connexe.

Enfin le fait suivant est indispensable en présence d'un Viergruppe.

Fait 1.23 (Tiré de [Bor95, Theorem 5.14], voir [Bur04, Lemma 3.22]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe résoluble de type impair. On suppose qu'il existe un Viergruppe V agissant définissablement sur H. Alors $H = \langle C_H^\circ(i), i \in V^\# \rangle$.*

1.4 Torsion

Soit p un nombre premier non nul.

Fait 1.24 ([Del07, Corollaire 2.24]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini* de type impair*, résoluble, et connexe. Soit T un p-tore de H. Alors T centralise un 2-tore maximal de H.*

Fait 1.25 ([BN94, Exercice 11 p.93]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et $H \lhd G$ un sous-groupe définissable. On suppose qu'il existe $x \in G$ tel que $\bar{x} \in G/H$ soit un p-élément. Alors xH contient un p-élément.*

Fait 1.26 ([BP90, Proposition 3.2]) *Soient P un p-tore et $\Omega_{p^2} = \{x \in P, x^{p^2} = 1\}$. Si un automorphisme d'ordre fini de P centralise Ω_{p^2}, alors il centralise P.*

Fait 1.27 ([BN94, Theorem 6.20]) *Soit P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors :*

1. *P° est nilpotent et $P^\circ = U * T$ est produit central d'un p-groupe nilpotent d'exposant borné U et d'un p-tore T.*
2. *$Z(P) \neq 1$ et P satisfait la condition de normalisateur.*
3. *Si P est infini d'exposant borné, alors $Z(P)$ possède une infinité d'éléments d'ordre p et P est nilpotent.*

Fait 1.28 ([FJ05, Theorem 1.8]) *Soit H un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors les p-sous-groupes de Sylow de H sont connexes.*

Fait 1.29 ([BC08, Theorem 3]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe. Si x est un p-élément tel que $C^\circ(x)$ soit sans p-unipotence, alors x appartient à tout p-tore maximal de $C^\circ(x)$.*

Fait 1.30 ([BC08, Corollary 5.3]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini. Soit T un tore décent maximal. On suppose que le groupe fini $N(T)/C^\circ(T)$ est d'ordre impair ; soit r le plus petit diviseur premier de cet ordre. Soit x un r-élément de $N(T)$ d'ordre r dans le quotient. Alors $C^\circ(x)$ contient de la r-unipotence.*

1.5 Quelques résultats de normalisation

Fait 1.31 ([Del07, Fait 3.12]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient w une involution de G agissant sur un sous-groupe définissable H, et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. Alors une H-conjuguée de w normalise S.*

Fait 1.32 ([Del07, Corollaire 3.14]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair. Soient w une involution agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors une H-conjuguée de w normalise Q.*

Les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow seront présentés dans la Définition 1.56.

Fait 1.33 ([Del07, Corollaire 3.15]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair. Soient w une involution agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et U un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H. Alors une H-conjuguée de w normalise U.*

Un résultat "ascendant" sera énoncé en §2.

1.6 Sous-groupes de Carter

Un sous-groupe de *Carter* d'un groupe de rang de Morley fini est un sous-groupe définissable, connexe, nilpotent, et d'indice fini dans son normalisateur.

Fait 1.34 ([FJ05, Theorem 3.1]) *Tout groupe de rang de Morley fini possède des sous-groupes de Carter. En outre, tout sous-groupe abélien divisible de torsion est inclus dans un tel sous-groupe.*

Fait 1.35 ([FJ05, Theorem 3.9]) *Dans un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini, les sous-groupes de Carter sont conjugués et autonormalisants.*

Fait 1.36 ([Jal06, Theorem 1.1]) *Dans un groupe connexe de rang de Morley fini, les sous-groupes de Carter généreux sont génériquement disjoints et conjugués.*

1.7 Groupes résolubles

On note $F(G)$ le sous-groupe de Fitting d'un groupe de rang de Morley fini G. Ce sous-groupe est définissable et nilpotent ([BN94, Theorem 7.3]).

Fait 1.37 ([BN94, Theorem 9.21]) *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/F^\circ(G)$ est divisible et abélien.*

On note K_+ le groupe additif d'un corps et $K^\times$ son groupe multiplicatif. Etant donnés deux sous-groupes A et B d'un groupe de rang de Morley fini G, A est dit *B-minimal* si A est définissable infini, normalisé par B, et minimal pour ces propriétés.

Fait 1.38 (Théorème du corps de Zilber, [BN94, Theorem 9.1]) *Soit $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini, où A et H sont des sous-groupes abéliens infinis définissables tels que A soit H-minimal et $C_H(A) = 1$. Alors G interprète un corps algébriquement clos.*

Plus précisément, A est isomorphe au groupe additif d'un corps algébriquement clos K sur lequel H agit par multiplication du corps :

$$A \simeq K_+, \qquad H \simeq T \leq K^\times,$$

où T est un sous-groupe définissable de $K^\times$.

1.8 Théorie(s) de l'unipotence

A l'orée de cette sous-section nous mentionnons trois faits qui forment le cahier des charges idéal d'une théorie de l'unipotence. Ils seront utilisés dans la seule §3.

Fait 1.39 ([CJ04, Lemma 2.41]) *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe un sous-groupe normal, définissable, connexe, et sans involution* maximal *de H, noté $O(H)$. De plus,* si H est ordinaire*, on a $O(H) \leq F^\circ(H)$.*

Fait 1.40 ([CJ04, Lemma 3.2]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe, résoluble, et de type impair. Si $O(H) = 1$, alors H est divisible abélien.*

Fait 1.41 ([CJ04, Proposition 3.11]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal* et ordinaire*. Si B_1 et B_2 sont deux sous-groupes de Borel distincts tels que $O(B_1) \neq 1$ et $O(B_2) \neq 1$, alors $F(B_1) \cap F(B_2) = 1$.*

1.8.1 $U_{\tilde{p}}$-groupes, $\tilde{p}$-groupes, paramètres d'unipotence

Quand p est un nombre premier, un p-sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini est *p-unipotent*, ou encore un *U_p-groupe*, s'il est définissable, connexe, nilpotent, et d'exposant borné. Nous ne redonnerons pas la définition des $U_{(\infty,d)}$-groupes de Burdges. Voir par exemple [Del07, §2.8.2].

L'énoncé suivant est à rapprocher du Fait 1.39.

Fait 1.42 ([CJ04, Corollary 2.16]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors il existe un unique U_p-sous-groupe définissable* maximal *de H. Ce sous-groupe est contenu dans $F^\circ(H)$ et noté $U_p(H)$.*

Ce qui suit n'est qu'un aperçu synthétique ; on renvoie indifféremment à [Del07, §2.8] ou à [FJ05, §2].

Définition 1.43 *Un* paramètre d'unipotence *est un couple $\tilde{p} = (p, d) \in (\{\infty\} \cup \mathcal{P}) \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ qui satisfait $p < \infty \Leftrightarrow d = \infty$.*

Définition 1.44 *Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence. Un $\tilde{p}$-groupe est par définition, selon la valeur de $\tilde{p}$:*
- *$\tilde{p} = (\infty, 0)$: un tore décent.*
- *$\tilde{p} = (\infty, d)$: un (∞, d)-groupe nilpotent de Burdges.*
- *$\tilde{p} = (p, \infty)$: un groupe p-unipotent.*

On (pré-)ordonne les paramètres d'unipotence comme suit :

$(p, \infty) \succeq \tilde{q}$ pour tout paramètre d'unipotence $\tilde{q}$;
$(\infty, r) \succeq (\infty, s) \;\Leftrightarrow\; r \geq s$.

Définition 1.45 *Un* $U_{\tilde{p}}$-groupe *de rang de Morley fini est un groupe engendré par ses $\tilde{p}$-sous-groupes (définissables).*

Définition 1.46 *Soit p une caractéristique (éventuellement ∞). Soit G un groupe de rang de Morley fini. On note $d_p(G)$ et l'on appelle* degré de p-unipotence *de G le plus grand $d \geq 1$, s'il existe, tel que $U_{(p,d)}(G) \neq 1$. On pose sinon $d_p(G) = 0$.*

(Notons que pour $p < \infty$, d_p vaut toujours 0 ou ∞.)

Définition 1.47 *Soient H un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini et $\tilde{p} = (p, d)$ un paramètre d'unipotence.*
- *H* admet *le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$.*
- *$\tilde{p}$ est* maximal *dans H si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$ et $d_p(H) = d$.*

Ces notions se comportent bien vis-à-vis des morphismes.

Fait 1.48 ([FJ05, Lemma 2.13]) *Soit $f : G \to H$ un morphisme définissable entre groupes de rang de Morley fini. Alors*
1. *(push-forward) $f(U_{\tilde{p}}(G)) \leq U_{\tilde{p}}(H)$ est un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*
2. *(pull-back) On suppose que le paramètre $\tilde{p}$ n'est pas de la forme (p, ∞), ou que G est résoluble. Si $U_{\tilde{p}}(H) \leq f(G)$, alors $f(U_{\tilde{p}}(G)) = U_{\tilde{p}}(H)$.*

Un groupe sans unipotence non-triviale est un bon tore d'après le fait suivant, à comparer au fait 1.40.

Fait 1.49 ([FJ05, Theorem 2.11]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si $U_{(p,d)}(H) = 1$ pour chaque paramètre d'unipotence (p, d) tel que $0 < d \leq \infty$, alors H est un bon tore.*

1.8.2 Unipotence et nilpotence

Fait 1.50 ([FJ05, Theorem 2.7]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et nilpotent. Alors*

$$G = [d(S) * U_{(\infty,1)}(G) * \cdots * U_{(\infty,d_\infty(G))}(G)] * [U_2(G) \times \cdots \times U_{q_{max}}(G)],$$

où S est le sous-groupe de torsion divisible de G, $d(S)$ sa clôture définissable, et q_{max} désigne le plus grand nombre premier q tel que $U_q(G)$ soit non-trivial.

Fait 1.51 ([FJ05, Lemma 2.9]) *Soit G un $\tilde{p}$-groupe non-trivial de rang de Morley fini. Alors $U_{\tilde{p}}(Z(G)) \neq 1$.*

Fait 1.52 ([Bur04, Lemma 3.18]) *Soient G et H deux groupes de rang de Morley fini, H agissant définissablement sur G. On suppose que G est un $\tilde{p}$-groupe définissable sans q-torsion (q est un nombre premier), et que H est un q-groupe d'exposant borné formé d'automorphismes définissables de G. Alors $C_G(H)$ est encore un $\tilde{p}$-groupe.*

Nous complétons en caractéristique ∞ l'analogie avec le Fait 1.39.

Fait 1.53 ([Bur04, Theorem 2.21]) *Soient H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, et $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(H))$. Si $d_\infty(H) > 0$, alors $U_{\tilde{p}}(H) \leq F^\circ(H)$.*

1.8.3 Homogénéité de Frécon

Définition 1.54 *Un $U_{\tilde{p}}$-groupe G de rang de Morley fini est* $\tilde{p}$-homogène *si chaque sous-groupe définissable connexe nilpotent de G est encore un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*

Fait 1.55 ([FJ05, Theorem 2.18]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini (non nécessairement résoluble). On suppose que G agit définissablement sur un $\tilde{p}$-groupe définissable H. Alors $[G, H]$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe $\tilde{p}$-homogène de H.*

1.8.4 $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Définition 1.56 *Un* $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow *est un $\tilde{p}$-sous-groupe maximal.*

Fait 1.57 ([FJ05, Proposition 2.8], [Bur04, Lemma 2.28]) *Soient G un $\tilde{p}$-groupe de rang de Morley fini et $H < G$ un sous-groupe définissable. Si S_1 est le $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H et S_2 celui de $N_G(H)$, alors $S_1 < S_2$.*

Fait 1.58 ([FJ05, Corollary 5.11], [Bur04, Lemma 4.19]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow de H sont les sous-groupes de la forme $U_{\tilde{p}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$, où Q est un sous-groupe de Carter de H.*

1.8.5 Lemmes de Jaligot

Voici les analogues du Fait 1.41.

Fait 1.59 ([Bur07, Corollary 2.2]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Alors $F(B_1) \cap F(B_2)$ est sans torsion.*

Fait 1.60 ([Del07, Lemme 2.29]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et B un sous-groupe de Borel de G. Soit $A \leq U_p(B)$ un sous-groupe infini (non nécessairement définissable). Alors B est l'unique sous-groupe de Borel de G contenant A.*

Rappelons une notation fréquente.

Notation 1.61 *Pour $\tilde{p} = (\infty, d)$, on note $F_d(H) = U_{\tilde{p}}(F^\circ(H))$.*

Fait 1.62 ([Del07, Lemme 3.3]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit B un sous-groupe de Borel de G, de paramètre d'unipotence* maximal $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(B))$ avec $d_\infty(B) > 0$. *Soit U un $\tilde{p}$-sous-groupe définissable de B contenant un sous-groupe $A \neq 1$ tel que $d_\infty(C^\circ(A)) \leq d_\infty(B)$.*

Alors $U_{\tilde{p}}(B) = F_{d_\infty(B)}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G, et c'est le seul qui contienne U. Enfin B est l'unique sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ *qui contienne U.*

1.9 Groupes simples connexes minimaux et intersections de paires maximales

Définition 1.63 *Deux sous-groupes de Borel B_1 et B_2 distincts forment une* paire maximale *si l'on ne peut pas trouver deux autres sous-groupes de Borel B_3 et B_4 tels que $(B_1 \cap B_2)^\circ < (B_3 \cap B_4)^\circ$.*

Fait 1.64 ([Bur07, Theorem 4.3]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Alors les faits suivants sont équivalents :*

1. *B_1 et B_2 sont les seuls sous-groupes de Borel contenant H.*
2. *La paire (B_1, B_2) est maximale.*
3. *H est maximal parmi les groupes de la forme $(B_1 \cap B_3)^\circ$, avec B_3 un sous-groupe de Borel distinct de B_1.*
4. *$d_\infty(B_1) \neq d_\infty(B_2)$.*

Fait 1.65 ([Bur07, Theorem 4.1, 1.]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Soit $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$. Alors H' est homogène (éventuellement trivial).*

Fait 1.66 ([Bur07, Theorem 4.5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et (B_1, B_2) une paire maximale avec $d_\infty(B_1) \geq d_\infty(B_2)$. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ est non-abélien et l'on note $r' = d_\infty(H')$. Alors :*

1. *$d_\infty(B_1) > d_\infty(H) = d_\infty(B_2)$ et $N^\circ(H) = H$.*
2. *Tout sous-groupe définissable connexe nilpotent de H est abélien.*
3. *$F_{r'}(H) = U_{(\infty,r')}(H)$ est l'unique (∞, r')-sous-groupe de Sylow de H. Il est inclus dans $F^\circ(B_2)$ et la composante connexe de son normalisateur est incluse dans B_2.*
4. *$F_\ell(B_2) \leq Z(H)$ pour chaque $\ell \neq r'$, et $F_{r'}(B_2)$ est non-abélien. (En particulier $F_\ell(B_2)$ est non-abélien si et seulement si $\ell = r'$.)*
5. *Les sous-groupes de Carter de H sont des sous-groupes de Carter de B_1, et la composante connexe de leur normalisateur est incluse dans B_2.*
6. *$F_{r'}(B_1) = F(B_1) \cap F(B_2)$ est (∞, r')-homogène, et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(F_{r'}(B_1))$.*
7. *$F^\circ(B_1)$ et $F^\circ(B_2)$ sont divisibles.*

Fait 1.67 ([Del07, Corollaire 2.56]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit K un sous-groupe définissable, connexe, et nilpotent* non-abélien. *Alors K est inclus dans un* unique *sous-groupe de Borel de G.*

Fait 1.68 ([Del07, Lemme 3.8]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et $B \neq B^g$ deux conjugués distincts d'un sous-groupe de Borel B. On suppose que $F(B) \cap F(B^g)$ n'est pas homogène. Alors $F^\circ(B)$ est abélien.*

Fait 1.69 ([Del07, Lemme 3.9]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que (B_1, B_2) est une paire maximale, et que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Soient $r' = d_\infty(H')$ et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors $Q_{r'} := U_{(\infty,r')}(Q)$ est non-trivial, central dans H, et des trois cas suivants un et un seul se produit.*
- $N_G^\circ(Q_{r'}) = H$.
- $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) > H$, de plus $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) = H$ et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.
- $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) > H$, de plus $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) = H$ et B_2 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.

Fait 1.70 ([Del07, Lemme 3.10]) *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 1.69. On suppose en outre que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Alors tout (∞, r')-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{(\infty,r')}(H)$ est inclus dans B_2.*

Fait 1.71 ([Del07, Lemme 3.11]) *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 1.69. On suppose en outre que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Si Q est sous-groupe de Carter de B_1 et de B_2, alors $U_{(\infty,r')}(B_2) = F_{r'}(B_2)$ est l'unique (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2.*

2 Un point sur les 2-sous-groupes de Sylow

La Proposition 2.4 détermine en général le 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe simple connexe minimal de type impair : c'est celui de PSL_2, ou alors un 2-tore. Cette section est toute dédiée à la preuve de la Proposition 2.4. Nous faisons appel ici seulement à trois faits supplémentaires qui ne seront pas utilisés dans le reste de l'article.

Fait 2.1 *Le seul automorphisme d'ordre fini d'un groupe de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ est l'inversion.*

Fait 2.2 *Un automorphisme involutif α d'un 2-tore τ ne fixant qu'un nombre fini d'éléments de τ est l'inversion.*

Fait 2.3 ([BC05, Corollary 5.10]) *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair, et S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $C_S(S^\circ) = S^\circ$.*

Proposition 2.4 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors ou bien S est connexe, ou bien $S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'action étant par inversion.*

Preuve
Supposons S non-connexe, et montrons que $S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit $\alpha \in S \setminus S^\circ$ et d'ordre minimal pour cette propriété ; ainsi $\alpha^2 \in S^\circ$.

Dans un premier temps nous montrons que α inverse S°. Soit $\sigma = C^\circ_{S^\circ}(\alpha)$; supposons $\sigma \neq 1$. Alors $\sigma \cdot \langle\alpha\rangle \leq C^\circ(\alpha)$ qui est résoluble, donc le Fait 1.28 implique l'existence d'un 2-tore de G qui contient α et σ. En particulier $\alpha \in C^\circ(\sigma)$. Mais $C^\circ(\sigma)$ qui est résoluble contient $S^\circ \cdot \langle\alpha\rangle$, donc le Fait 1.28 force $\alpha \in S^\circ$, une contradiction. Ainsi α ne rencontre qu'un nombre fini de points fixes dans son action sur S°. Comme $\alpha^2 \in S^\circ$, cette action est involutive. D'après le Fait 2.2 α inverse S°.

Nous montrons à présent que α est une involution. Supposons $\alpha^2 \neq 1$. Alors $S^\circ \leq C^\circ(\alpha^2)$, mais d'après le Fait 1.29, on a aussi $\alpha \in C^\circ(\alpha) \leq C^\circ(\alpha^2)$. Comme $\alpha^2 \neq 1$, $C^\circ(\alpha^2)$ est résoluble ; ce groupe contient $S^\circ \cdot \langle\alpha\rangle$, et le Fait 1.28 implique donc $\alpha \in S^\circ$, une contradiction. Ainsi $\alpha^2 = 1$, c'est-à-dire que α est une involution.

Nous nous tournons vers le rang de Prüfer. Soit $V = \langle I(S^\circ)\rangle$. Puisque α inverse S°, α centralise V. Nous considérons à présent l'action de V sur $C^\circ(\alpha)$. D'après le Fait 1.31, il existe un 2-sous-groupe de Sylow T de $C^\circ(\alpha)$ qui est V-invariant. D'après le Fait 1.28, T est un 2-tore, qui est même maximal dans G. D'après le Fait 1.29, $\alpha \in T$.

Supposons qu'il existe une involution k de $V \leq S^\circ$ telle que $C^\circ_T(k) \neq 1$, et posons $\tau = C^\circ_T(k)$. Le groupe $C^\circ(k)$ est résoluble, et contient k d'après le Fait 1.29. Ainsi $\tau \cdot \langle k\rangle \leq C^\circ(k)$, et d'après le Fait 1.28 cela entraîne qu'il existe un 2-tore de $C^\circ(k)$ qui contient $\tau \cdot \langle k\rangle$. En particulier $k \in C^\circ(\tau)$. Ce dernier groupe est résoluble et contient $T \cdot \langle k\rangle$, donc d'après le Fait 1.28 on a $k \in T$. En particulier $\alpha \in T \leq C^\circ(k)$. Ce dernier groupe est résoluble et contient $S^\circ \cdot \langle\alpha\rangle$, donc le Fait 1.28 implique $\alpha \in S^\circ$, une contradiction.

Ainsi pour chaque involution k de V, $C_T(k)$ est fini, ce qui d'après le Fait 2.2 signifie que k inverse T. En particulier il y a exactement une involution dans V, et le rang de Prüfer de G est donc 1.

Soit à présent $\beta \in S \setminus S^\circ$. D'après le Fait 2.3, β ne centralise pas S°. D'après le Fait 2.1, β inverse donc S° ; c'est aussi ce que fait α. Ainsi $\alpha\beta \in C_S(S^\circ) = S^\circ$ encore selon le Fait 2.3. Nous avons donc prouvé que $S = S^\circ \rtimes \langle\alpha\rangle \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'action étant par inversion. □

Nous en déduisons un résultat de normalisation complétant ceux de §1.5.

Corollaire 2.5 (cf. [Del07, Corollaire 1.2]) *Soient G un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 2, V un Viergruppe de G. Soit H un sous-groupe non-trivial définissable connexe propre de G. Si H est V-invariant, alors H est inclus dans un sous-groupe de Borel V-invariant.*

Preuve
Soit H un contre-exemple maximal à notre énoncé. Comme dans [Del07, Lemme 3.18], on peut montrer que H est abélien ; c'est un sous-groupe de Carter abélien de G. On pourrait conclure en argumentant que les sous-groupes de

Carter de G sont conjugués d'après un résultat de Frécon : mais il n'est pas encore publié, et nous biaisons donc.

D'après le Fait 1.23, l'une des trois involutions de V, disons i, a un centralisateur non-trivial dans H. Soit $K = C_H^\circ(i) \neq 1$. Il est clair que K est V-invariant, et par maximalité de H il vient $H = N^\circ(K)$. En particulier K est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(i)$, et il en contient donc un 2-tore maximal. Or par toricité de l'involution i, $C^\circ(i)$ est de rang de prüfer 2. Le groupe K contient donc un 2-tore maximal de G, qui d'après la Proposition 2.4 est un 2-sous-groupe de Sylow S de G. En particulier $V \leq N(S)$ force $V \leq S \leq H$, et tout sous-groupe de Borel contenant H convient. □

3 Rang de Prüfer 1

Dans cette section nous travaillons en rang de Prüfer 1 pour étudier le cas laissé ouvert par le Fait 1.6, à savoir celui où le centralisateur connexe d'une involution est un sous-groupe de Borel ; ceci correspond au cas (1)(b) du Théorème-Synthèse. Ceci complètera la preuve de la partie (1) de notre Théorème-Synthèse. Aucun résultat de cette section n'est employé par la suite.

Il nous suffit de prouver

Théorème 3.1 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer 1. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, et i l'unique involution de S°. Soient $C = C^\circ(i)$, $T = C^\circ(S^\circ)$, et $W = N(T)/T$. On suppose que C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$.*

Alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.

Nous contrôlerons d'abord le groupe de Weyl W (Proposition 3.5) pour ensuite montrer qu'il agit en inversant $C^\circ(i)$ (Proposition 3.12).

Notation 3.2

G est un groupe simple connexe minimal de type impair, rang de Prüfer 1.

S est un 2-sous-groupe de Sylow de G et i est l'unique involution de S°.

On suppose que $C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel de G.

Soit $B = C^\circ(i)$.

Remarque 3.3 *Comme i et B se 0-définissent l'un l'autre, on a $C(i) = N(B)$.*

Nous déterminons à présent le groupe $N(B)/B$ par la technique de [CJ04].

Notation 3.4 *Soit $W = N(B)/B$.*

Proposition 3.5 *$W \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Preuve

Supposons $W \neq 1$, et montrons $|W| = 2$. Soit $x \in N(B) \setminus B$ d'ordre n sur B. B est généreux dans G, car $B \geq C^\circ(d(S^\circ))$, qui est généreux grâce au Fait 1.15. D'après le Fait 1.8, l'ensemble $X_1 = \{x_1 \in xB$ tels que $\exists g \in G \setminus N(B),\ x_1 \in (\langle x \rangle B)^g\}$ est générique dans xB.

Nous allons travailler modulo $O(B)$ (nous renvoyons au Fait 1.39). Soit $H = (B \cdot \langle x \rangle)/O(B)$, de sorte que $H^\circ = B/O(B)$. Alors H° est de rang de Prüfer exactement 1 et $O(H^\circ) = 1$. C'est un groupe divisible abélien d'après le Fait 1.40. Donc $H^\circ = \mathrm{Tor}(H^\circ) \oplus D$ où D est divisible sans torsion et $\mathrm{Tor}(H^\circ)$ est somme d'un unique 2-tore noté τ et pour chaque q premier $\neq 2$ d'un nombre fini de q-tores.

Pour $g \in G \setminus N(B)$, on forme $T_g = (O(B) \cdot (B \cap B^g))/O(B) \leq H^\circ$. C'est un groupe définissable et $2^\perp$. En effet sinon, on trouve en relevant la torsion un 2-élément commun à B et à B^g. D'après la Remarque 3.3, il vient $B^g = B$, une contradiction.

Comme H° est abélien, T_g est normal dans H°, et en particulier $T_g^\circ \leq O(H^\circ) = 1$. Les groupes T_g forment donc une famille uniformément définissable de groupes *finis*. Par élimination des quanteurs infinis, il existe une borne sur leur ordre. Comme H° est abélien divisible, la borne sur $|T_g|$ implique $T_g \leq T_0$ pour un même sous-groupe *fini et indépendant de g*.

En particulier, si $x_1 \in X_1$, on a $x_1^n \in B \cap B^g$ pour un $g \notin N(B)$ et donc $\overline{x_1}^n \in T_0$ est d'ordre fini. Un sous-ensemble générique de $\bar{x}H^\circ$ est ainsi d'exposant borné.

Ceci vaut encore pour les autres cosets modulo H° de H, qui sont tous donnés par une puissance de $\bar{x}$. D'après le Fait 1.11, il vient $C_H(\tau) = H^\circ$. En particulier, l'action de $\bar{x}$ sur τ est non-triviale, et donc $\bar{x}$ inverse τ ($\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty}) \simeq (\mathbb{Z}_2)^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, le second facteur étant sans torsion).

Maintenant si y est un autre élément de $N(B) \setminus B$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ inversent tous deux τ, donc sont congrus modulo $C_H(\tau) = H^\circ$, et ainsi x et y sont congrus modulo B. L'ordre de W est donc 2. □

On suppose désormais que W est non-trivial. D'après la Proposition 3.5, $|W| = 2$.

Lemme 3.6 *Le 2-sous-groupe de Sylow de G est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'action étant par inversion. En particulier, $N(B) = B \rtimes \langle w \rangle$ pour une involution w de $N(B) \setminus B$ qui inverse S°.*

Preuve

D'après le Fait 1.25, S n'est pas connexe. La Proposition 2.4 implique alors que S a la forme indiquée. Le reste est immédiat. □

Notation 3.7 *Soit w une involution comme dans le Lemme 3.6.*

Lemme 3.8 $\mathcal{I}(G) = i^G$.

Preuve
Evident en rang de Prüfer 1, au vu du Fait 1.29. □

Noter la parfaite symétrie de la paire (i, w) :

Corollaire 3.9 *La configuration est symétrique dans le sens suivant. $C^\circ(w)$ est un sous-groupe de Borel conjugué à B et i-invariant, avec $i \notin C^\circ(w)$.*

Preuve
En effet w est conjuguée à i, donc $C^\circ(w)$ est un sous-groupe de Borel conjugué à B. En outre i normalise $C^\circ(w)$. Maintenant si $i \in C^\circ(w)$, alors par connexité des sous-groupes de Sylow, Fait 1.28, on a $i = w$, une contradiction. □

Notation 3.10 *Soit B_w le sous-groupe de Borel $C^\circ(w)$ (bien sûr $B_w \neq B$).*

Lemme 3.11 *Si B est abélien, alors w inverse B.*

Preuve
Supposons en effet B abélien. Si $C^\circ_B(w) \neq 1$, soit $x \in C^\circ_B(w)^\#$. Alors $x \in B \cap B^w$ qui sont tous deux abéliens, donc $C^\circ(x) > B$, une contradiction. Ainsi $C_B(w)$ est fini, et d'après le Fait 1.19, w inverse B. □

Nous allons désormais démontrer la

Proposition 3.12 *B est abélien et w l'inverse.*

Ceci achèvera de montrer le Théorème 3.1. La preuve de la Proposition 3.12 occupera quelques lemmes ; elle ressemble beaucoup à celle de [Del07, Théorème 4.10].

Supposons que B ne soit pas abélien. En particulier B n'est pas un bon tore. D'après le Fait 1.49, B admet au moins un paramètre d'unipotence distinct de $(\infty, 0)$.

Notation 3.13 *Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence* maximal *pour B ($\tilde{p} \neq (\infty, 0)$).*

Lemme 3.14 *Soit $Y < G$ un sous-groupe définissable, connexe, et $\langle i, w\rangle$-invariant. Si Y admet le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$, alors il l'admet pour paramètre d'unipotence* maximal.

Preuve
Ce lemme est trivial si $\tilde{p}$ est de la forme (p, ∞), on suppose donc $\tilde{p} = (\infty, d)$ pour un entier d. Soit Y comme dans l'énoncé, de sorte que $U_{\tilde{p}}(Y) \neq 1$. On montre que le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ est maximal pour Y. Supposons en effet $d_\infty(Y) > d$.

Si $U_\infty(Y)$ possède une involution k, alors k est centrale dans $U_\infty(Y)$; donc $U_\infty(Y) \leq C^\circ(k)$ qui est un conjugué de B d'après le Lemme 3.8. Ceci contredit la définition de $\tilde{p}$ dans la Notation 3.13. Ainsi $U_\infty(Y)$ est sans involution.

Considérons maintenant l'action de i sur $U_\infty(Y)$. D'après le Fait 1.52, $C^\circ_{U_\infty(Y)}(i)$ est un $(\infty, d_\infty(Y))$-groupe. Par définition de $\tilde{p}$, il vient que i inverse $U_\infty(Y)$.

Le même argument vaut pour w, et encore pour iw, qui d'après le Lemme 3.8 sont conjuguées à i. Ceci est absurde. $\square$

Corollaire 3.15 *Aucun sous-groupe définissable, connexe, propre et $\langle i, w\rangle$-invariant ne peut contenir à la fois $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$.*

Preuve

Soit en effet Y un sous-groupe comme dans l'énoncé. D'après le Lemme 3.14, $\tilde{p}$ est un paramètre d'unipotence maximal pour Y. Maintenant, selon le Fait 1.60 ou le Fait 1.62 selon la nature de $\tilde{p}$, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(Y)$. Mais comme Y contient aussi $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, le même argument impose $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B_w)$, donc $B = B_w$, une contradiction. $\square$

Notation 3.16 *On note $H = (B \cap B_w)^\circ = C^\circ(i, w)$.*

Si $H = 1$, alors w inverse B qui est donc abélien, une contradiction. Ainsi a-t-on $H \neq 1$.

Lemme 3.17 *$F^\circ(B)$ est sans involution.*

Preuve

Sinon, il contient un 2-tore S° qui est central dans B. En particulier, $S^\circ \leq C^\circ(H)$. Mais par symétrie, il y a un 2-tore S°_w dans $F^\circ(B_w)$, et donc $S^\circ_w \leq C^\circ(H)$. Ainsi i et w qui commutent sont-elles dans un même sous-groupe définissable connexe. La connexité des sous-groupes de Sylow donnée par le Fait 1.28 implique $i = w$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.18 *H est abélien et sans involution.*

Preuve

Supposons H non-abélien. Alors $Y = C^\circ(H')$ est $\langle i, w\rangle$-invariant et contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ ainsi que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, une contradiction au Corollaire 3.15. Ainsi H est abélien.

Si H possède une involution k, alors $k \in C^\circ(i) \cap C^\circ(w)$ et donc $k = i = w$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.19 *w inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ qui est abélien. (De même i inverse $U_{\tilde{p}}(B_w)$.)*

Preuve

$U_{\tilde{p}}(B)$ est sans involution d'après le Lemme 3.17. Soit $X = C^\circ_{U_{\tilde{p}}(B)}(w)$, et supposons $X \neq 1$. D'après le Fait 1.52 ou de manière évidente selon que $\tilde{p}$ est de caractéristique nulle ou première, X est un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe, qui est commun à B et à B_w. D'après le Fait 1.53 (resp. Fait 1.42) si $\tilde{p}$ est de caractéristique nulle (resp. première), X est inclus dans $F^\circ(B)$ et dans $F^\circ(B_w)$. Le groupe $Y = C^\circ(X)$ est alors $\langle i, w\rangle$-invariant, et contient à la fois $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, une contradiction au Corollaire 3.15.

Ainsi $X = 1$ et w inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ qui est abélien. La symétrie de la configuration implique alors la deuxième affirmation. □

Lemme 3.20 *w n'inverse pas $F^\circ(B)$. (De même, i n'inverse pas $F^\circ(B_w)$.)*

Preuve

Sinon $F^\circ(B)$ est inversé par w, et S° aussi par choix de w. D'après le Fait 1.17, il vient $[F^\circ(B), S^\circ] = 1$, et donc $F^\circ(B) \cdot S^\circ$ est nilpotent. Cela prouve $S^\circ \leq F^\circ(B)$, une contradiction au Lemme 3.17. □

Lemme 3.21 *$C_B^\circ(H) = H$.*

Preuve

L'inclusion $H \leq C_B^\circ(H)$ est évidente, car H est abélien d'après le Lemme 3.18. Nous prouvons l'autre. Soit $X = C_{F^\circ(B_w)}(i) \leq H$. D'après le Lemme 3.20, $X \neq 1$. On forme $Y = C^\circ(X)$ qui contient $U_{\tilde{p}}(B_w)$ et qui est $\langle i, w\rangle$-invariant. D'après le Lemme 3.14, $\tilde{p}$ est alors un paramètre d'unipotence maximal pour Y. Maintenant le Fait 1.60 ou 1.62 selon la nature de $\tilde{p}$ implique que $U_{\tilde{p}}(B_w) = U_{\tilde{p}}(Y)$. En particulier, $Y \leq N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_w)) = B_w$. Par conséquent $C_B^\circ(H) \leq (B \cap Y)^\circ \leq H$. □

Notation 3.22 *Soit $N = N_B^\circ(H)$.*

Lemme 3.23 *N n'a pas d'involutions.*

Preuve

Sinon on a un 2-tore non-trivial $S_1^\circ \leq N$, et d'après le Lemme 1.31 on peut supposer que w normalise S_1°. Comme $w \notin S_1^\circ$, on a d'après la structure du 2-sous-groupe de Sylow du Lemme 3.6 que w inverse S_1°.

D'autre part w centralise H par définition de ce dernier. Comme S_1° normalise H, le Fait 1.17 implique $[H, S_1^\circ] = 1$, donc $S_1^\circ \leq H$ d'après le Lemme 3.21. Ceci contredit le Lemme 3.18. □

Preuve de la Proposition 3.12

N étant sans involution, d'après le Fait 1.18 on a une décomposition $N = C_N(w) \cdot N^{-w}$, et chacun des deux facteurs est de degré 1. Soit $n \in N^{-w}$. Alors w inverse $d(n)$ qui n'a pas d'involution, et qui normalise H, lequel est inversé par w. Le Fait 1.17 implique $[d(n), H] = 1$, donc $d(n) \leq C(H)$. Ainsi $N^{-w} \subseteq C(H)$.

D'autre part $C_N(w) = C_N^\circ(w) \leq H \leq C(H)$, et donc $N \leq C(H)$. Enfin $N \leq C_B^\circ(H) = H$ d'après le Lemme 3.21.

H est donc un sous-groupe de Carter de B, et il contient donc un 2-tore (inclure un 2-tore de B dans un sous-groupe de Carter avec le Fait 1.34 ; puis les sous-groupes de Carter de B sont conjugués d'après le Fait 1.35). Ceci est une contradiction au Lemme 3.18 qui achève la preuve de la Proposition 3.12. $\square$

Remarque 3.24 *L'abélianité de B ainsi établie, il est possible que ce soit un bon tore !*

N'oubliant pas le Lemme 3.11, on a :

Corollaire 3.25 $N(B) = B \rtimes \langle w \rangle$ *où l'action de w sur B est par inversion.*

Le lecteur peut vérifier que le Théorème 3.1 est prouvé, ce qui jumelé avec le Fait 1.6 achève le cas (1) du Théorème-Synthèse. Encore deux mots.

Proposition 3.26 *Soient deux involutions i et j en position générique. Il existe alors une (unique) involution k telle que i et j normalisent le sous-groupe de Borel $C^\circ(k)$. Les involutions i et j sont dans le même coset strict de $C^\circ(k)$ (et en particulier leur produit est dans un unique conjugué de B), et elles sont $C^\circ(k)$-conjuguées.*

Preuve

Les involutions de G sont toutes conjuguées d'après le Lemme 3.8. Si pour i et j en position générique, la clôture définissable $d(ij)$ est sans involution, alors la preuve du Fait 1.22 (pour laquelle nous renvoyons à [BBC07]) impose que $C(i)$ est connexe, une contradiction à l'hypothèse de cette sous-section.

Pour i et j en position générique, il existe donc une involution k dans $d(ij)$. Comme k est encore conjuguée à i et à j, $C^\circ(k)$ est un sous-groupe de Borel dont k est l'unique involution. Ainsi $i, j \in C(k) \setminus C^\circ(k)$. L'unicité de k pour ces propriétés est évidente.

Enfin $C(k)$ conjugue ses 2-sous-groupes de Sylow, qui sont de la forme $\tau \rtimes \langle w \rangle$, où toutes les involutions hors de τ sont τ-conjuguées. Cela prouve qu'il y a dans $C(k)$ deux classes d'involutions : k et toutes les autres, qui sont $C^\circ(k)$-conjuguées entre elles. $\square$

Corollaire 3.27 $\mathrm{rg}(G) = 3\,\mathrm{rg}(C(i))$.

Preuve

On considère l'application f qui à deux involutions i et j en position générique associe l'unique involution k comme dans la Proposition 3.26. Soit (i_0, j_0) une paire générique fixée. Alors d'après la Proposition 3.26, les paires (i_1, j_1) ayant même image k_0 que (i_0, j_0) par f sont exactement les paires d'involutions distinctes de $I(C(k_0)) \setminus \{k_0\}$.

Les fibres de f sont donc de rang égal à $2\,\mathrm{rg}(C(i))$. Or il est clair que l'image de f est $I(G)$. On a donc $2(\mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i))) - 2\,\mathrm{rg}(C(i)) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i))$, et il vient $\mathrm{rg}(G) = 3\,\mathrm{rg}(C(i))$. $\square$

4 Rang 2 - Généralités

Nous nous tournons à présent vers le cas du rang de Prüfer 2, pour prouver la partie (2) du Théorème-Synthèse. Rappelons l'énoncé qui nous occupe.

Théorème-Synthèse (en rang de Prüfer 2) *Soit G un groupe de rang de Morley fini, simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. On suppose que le rang de Prüfer de G est 2.*
Alors $T = C = C(V)$ est nilpotent, $|W| = 3$, toutes les involutions de G sont conjuguées, et G interprète un corps algébriquement clos de caractéristique 3. En outre :
C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel admettant un sous-groupe Y_i de degré d'unipotence égal à celui de B_i, et inversé par les deux involutions de T distinctes de i.

Notation 4.1 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 2. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et $V = \langle I(S^\circ)\rangle = \{1, i_1, i_2, i_3\}$.*

Dans cette première section dédiée au sujet, nous introduisons les notations et commençons l'étude des sous-groupes de Carter et de Weyl.

En §5, on montre que le centralisateur connexe de l'une des trois involutions de S° est un sous-groupe de Borel. L'argument est calqué sur [Del07, §6]. En §6, la même technique prouve un résultat similaire pour un autre centralisateur connexe : démonstration nécessaire car on n'a pas encore établi la conjugaison des involutions. Cette dernière propriété n'est prouvée qu'en §7, après des calculs de rang reposant sur les ensembles $T[w]$. Enfin §8 rassemble les pièces du puzzle, reprend l'étude du groupe de Weyl, et achève la preuve du Théorème-Synthèse.

4.1 Premiers résultats sur le sous-groupe de Carter

Noter que la Proposition 2.4 implique immédiatement :

Lemme 4.2 *$S = S^\circ$.*

Lemme 4.3 *$\langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle = G$.*

Preuve
Supposons $\langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle < G$, et fixons un sous-groupe de Borel $B_0 \geq \langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle$. Si B est un sous-groupe de Borel V-invariant, alors d'après le Fait 1.23 $B = \langle C_B^\circ(i), i \in V^\#\rangle \leq B_0$. Ainsi B_0 est unique parmi les sous-groupes de Borel V-invariants. Notons que B_0 contient un 2-sous-groupe de Sylow de G.

Soit $M_0 = N(B_0)$. Nous montrons que ce groupe est fortement inclus. Soit en effet $g \notin M_0$ et supposons qu'il existe une involution k dans $M_0 \cap M_0^g$. Alors d'après le Lemme 4.2, $k \in B_0 \cap B_0^g$. B_0 conjugue k à une involution de V, donc par définition de B_0 il vient $C^\circ(k) \leq B_0$ et $C^\circ(k) \leq B_0^g$ de même. Or $C^\circ(k)$ contient un B_0-conjugué V_1 de V, et ainsi $V_1 \leq B_0 \cap B_0^g$. Comme B_0 est le seul sous-groupe de Borel V-invariant, c'est aussi le seul sous-groupe de Borel V_1-invariant. Ainsi $B_0^g = B_0$, une contradiction à la définition de g.

Le groupe M_0 est donc fortement inclus, et d'après le Fait 1.4, le rang de Prüfer de G est 1, une contradiction. □

Notation 4.4 *Soit $Q \geq S^\circ$ un sous-groupe de Carter de G (existence assurée par le Fait 1.34).*

Corollaire 4.5 *Q est abélien.*

Preuve

S'il existe un unique sous-groupe de Borel B_0 contenant Q, alors B_0 est à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant chaque $C^\circ(i) \geq Q$ pour $i \in V^\#$. Il vient en particulier $\langle C^\circ(i), i \in V^\# \rangle \leq B_0$, une contradiction au Lemme 4.3. Donc le sous-groupe connexe et nilpotent Q est inclus dans au moins deux sous-groupes de Borel distincts, et le Fait 1.67 implique son abélianité. □

Corollaire 4.6 *Si les trois involutions de V ne sont pas G-conjuguées, alors Q est autonormalisant dans G.*

Preuve

On suppose que $i \in V$ n'est conjuguée à aucune des deux autres. D'après le Lemme 4.2, on a $i^G \cap S = \{i\}$. D'après le "Théorème Z^*", Fait 1.22, $C(i)$ est connexe. Maintenant i est $N_G(Q)$-invariante, donc $N_G(Q) \leq N_{C(i)}(Q) = N_{C^\circ(i)}(Q) = Q$ d'après le Fait 1.35. □

Corollaire 4.7 *Il y a une ou trois classes de conjugaison d'involutions, mais pas deux.*

Preuve

Supposons au contraire $i_1^G = i_2^G \neq i_3^G$. D'après le Fait 1.21, il existe $g \in N(S^\circ)$ tel que $i_2 = i_1^g$. Maintenant un argument de Frattini implique $N(S^\circ) = N^\circ(S^\circ) \cdot N_{N(S^\circ)}(Q) = N^\circ(S^\circ)$ d'après le Corollaire 4.6. Donc $g \in N^\circ(S^\circ) = C^\circ(S^\circ) \leq C^\circ(V)$, contradiction. □

4.2 Les trois sous-groupes de Borel

Nous allons maintenant introduire trois sous-groupes de Borel, associés aux centralisateurs des involutions en jeu.

Lemme 4.8 *Soit $i \in V^\#$. Alors aucun sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$ n'est abélien.*

Preuve

Si $B_i \geq C^\circ(i)$ est abélien, alors $B_i = C^\circ(V)$. En particulier les trois centralisateurs connexes $C^\circ(j)$ (pour $j \in V^*$) sont égaux à B_i, une contradiction au Lemme 4.3. □

D'après le Lemme 4.8, si $B_i \geq C^\circ(i)$ $(i \in V^\#)$ est un sous-groupe de Borel, alors B_i n'est pas abélien. En particulier, d'après le Fait 1.49, un tel sous-groupe de Borel admet un paramètre d'unipotence distinct de $(\infty, 0)$.

Notation 4.9 *Soient pour $i \in V^\#$*

$\mathcal{B}(i) = \{$*sous-groupes de Borel de G contenant $C^\circ(i)$*$\}$,

$\tilde{q}_i = \max\{\tilde{q}$, *tels qu'il existe $B \in \mathcal{B}(i)$ admettant $\tilde{q}$ comme paramètre d'unipotence maximal*$\}$,

et un $B_i \in \mathcal{B}(i)$ admettant $\tilde{q}_i$ comme paramètre d'unipotence maximal.

Nous hiérarchisons à présent les involutions en fonction du degré d'unipotence du sous-groupe de Borel qui leur est attaché depuis la Notation 4.9. Cela est nécessaire pour établir la conjugaison des involutions, qui sera prouvée bien plus tard.

Notation 4.10 *On suppose que i_1 est maximale :*

$$\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_2, \qquad \tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_3.$$

Cela signifie d'une part que si $\tilde{q}_2$ ou $\tilde{q}_3$ est un paramètre en caractéristique première, alors $\tilde{q}_1$ est aussi un paramètre en caractéristique première (mais a priori pas forcément la même), et d'autre part, que si les trois sont en caractéristique nulle, alors on a les inégalités correspondantes sur les degrés d'unipotence.

B_1 est ainsi un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i_1)$, et de paramètre d'unipotence maximal parmi ceux des sous-groupes de Borel qui contiennent le centralisateur connexe d'une involution.

Remarque 4.11 *On ne classe pas encore i_2 et i_3 : pour la symétrie des preuves.*

Lemme 4.12 *Soit $H < G$ un $\tilde{q}$-sous-groupe définissable, avec $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. Si une involution de G agit sur H, alors elle l'inverse. (En particulier H est $2^\perp$).*

Preuve

Soit k une involution de G normalisant H. D'après le Lemme 4.2, k est conjuguée dans G à une involution de V. Si $k \in H$ qui est définissable connexe et nilpotent, alors k est centrale dans H. Dans ce cas $H \leq C^\circ(k)$, mais d'après les Notations 4.9 et 4.10, $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$, une contradiction. Ainsi H est $2^\perp$.

D'après le Fait 1.52, $C^\circ_H(k)$ est alors un $U_{\tilde{q}}$-sous-groupe de $C^\circ(k)$. Encore par maximalité de $\tilde{q}_1$, il vient $C^\circ_H(k) = 1$ et donc k inverse H. □

Corollaire 4.13 *Soient H un sous-groupe définissable connexe résoluble V-invariant. Alors pour tout paramètre d'unipotence $\tilde{q}$ de H, on a $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$.*

Preuve
Supposons l'inégalité fausse. On peut supposer que $\tilde{q}$ est un paramètre d'unipotence maximal pour H. D'après le Fait 1.53, $U_{\tilde{q}}(H)$ est alors un $\tilde{q}$-groupe. D'après le Lemme 4.12, $U_{\tilde{q}}(H)$ est $2^\perp$ et inversé par les trois involutions de V, une contradiction. □

5 La campagne du premier centralisateur

Théorème 5.1 $C^\circ(i_1) = B_1$.

Supposons pour presque toute cette longue section le contraire. Attention, la §5.6 ne sera plus sous cette hypothèse absurde : on y développera une conséquence du Théorème 5.1.

On suppose dorénavant $C^\circ(i_1) < B_1$.

Nous devons ici rompre la symétrie et privilégier i_1 ; la preuve du Théorème 5.1 suit la démarche de [Del07, §6] qui sera souvent évoqué. On introduira donc des ensembles $T[w]$ pour contredire la simplicité du groupe ambiant. Ce n'est pas avoir manqué d'imagination : adapter cette technique exige une certaine attention.

Nous allons commencer par rendre B_1 distinct des deux autres sous-groupes de Borel (ce qui n'est pas trivial), puis reprendre l'étude des "pseudo-tores" $T[w]$. Ces ensembles s'avéreront génériquement concentrés dans B_1.

Lemme 5.2 (cf. [Del07, Lemmes 4.2 et 4.3]) *On peut supposer que $F^\circ(B_1)$ est sans involutions. Il suit que pour chaque $i \in V^\#$, on a la décomposition $B_1 = C^\circ_{B_1}(i) \cdot (F^\circ(B_1))^{-i}$, où chaque terme est de degré 1. En particulier, si un élément $x \in B_1$ est inversé par une involution de B_1 et que $d(x)$ est $2^\perp$, alors $x \in F^\circ(B_1)$.*

Preuve
Sinon $F^\circ(B_1)$ contient une involution k qui est centrale dans B_1. En particulier $B_1 = C^\circ(k)$. Il suffit alors de changer le nom de i_1 pour avoir que $C^\circ(i_1)$ est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_1$, contre l'hypothèse que $C^\circ(i_1) < B_1$. Ainsi $F^\circ(B_1)$ est-il $2^\perp$.

La décomposition provient alors des Faits 1.37 et 1.18, tout comme dans [Del07, Lemme 4.3]. Enfin si $x \in B_1$ est inversé par une involution $j \in B_1$, on a une décomposition $x = cf$ avec des notations naturelles, et $x^2 = x^{-j}x = f^2$, donc $x^2 \in F^\circ(B_1)$. Comme $d(x)$ est sans involution, $d(x) = d(x^2)$ et donc $x \in F^\circ(B_1)$. □

Notation 5.3 *Soient pour chaque* $w_1 \in i_1^G$ *l'ensemble définissable*

$$T_1[w_1] = \left\{b \in B_1,\ b^{w_1} = b^{-1}\right\}$$

$$\textit{et } I_1 = \left\{w_1 \in i_1^G \setminus N(B_1),\ \mathrm{rg}(T_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B_1))^{-i_1}\right)\right\}.$$

Lemme 5.4 (cf. [Del07, Lemme 4.28]) I_1 *est un sous-ensemble (définissable) générique de* i_1^G*.*

Preuve

Similaire à celle de [Del07, Lemme 4.28] : on forme la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi_{11}: & i_1^G \setminus N(B_1) & \to & G/B_1 \\ & w_1 & \mapsto & w_1 B_1, \end{array}$$

et l'on compte. □

A noter, nous ne travaillerons pas avec les $T_1[w_1]$, mais avec leur composante connexe. Une telle remarque suppose qu'on s'attende, conformément à l'analyse de [Del07], à ce que les $T_1[w_1]$ soient bien des groupes définissables !

5.1 B_1 distinct de B_2 et B_3

Cette sous-section est entièrement consacrée à l'indispensable proposition suivante.

Proposition 5.5 *On peut supposer* $B_1 \neq B_2$ *et* $B_1 \neq B_3$ *(simultanément).*

La preuve de la Proposition 5.5 va occuper quelques lemmes. On suppose $B_1 = B_2$.

Lemme 5.6 i_3 *inverse* $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$*. En particulier* $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(F^\circ(B_1))$*.*

Preuve

En effet soit $X = C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_3)$, que l'on suppose non-trivial. Puisque $F^\circ(B_1)$ est sans involution d'après le Lemme 5.2, X est un $U_{\tilde{q}_1}$-groupe d'après le Fait 1.52 (ou par simple bon sens si $\tilde{q}_1$ est en caractéristique première). Comme $X \leq B_3$, on a d'après la Notation 4.10 $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_3$. Le Fait 1.42 ou 1.53 selon la caractéristique impose $X \leq F^\circ(B_3)$. Soit $N = N^\circ(X)$. Alors N contient $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_1)))$ ainsi que $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_3)))$.

Si le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_1$ est maximal pour N, alors le Fait 1.60 ou 1.62 selon la caractéristique entraîne $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B_3)$. En particulier $B_2 = B_1 = B_3$ et ceci contredit le Lemme 4.3. Ainsi le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_1$ n'est pas maximal pour N. Pourtant V normalise X donc N, et c'est une contradiction au Corollaire 4.13. □

Notation 5.7

Soit $U_2 = C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^{-i_1}$.

On définit également $U_1 = C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_1) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^{-i_2}$.

Lemme 5.8 $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_1 \oplus U_2$*, où chacun des deux termes est un* $\tilde{q}_1$*-groupe normal dans* B_1 *(éventuellement trivial).*

Preuve

L'involution i_3 inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ qui est abélien et V-invariant, donc d'après le Fait 1.23 il vient $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = \langle C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_1), C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2)\rangle = U_1 + U_2$. La somme est directe : en effet on a $U_1 \cap U_2 \leq C_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_3)$ qui est trivial puisque $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ n'a pas d'involution d'après le Lemme 5.2 et que i_3 l'inverse.

Chacun des deux termes U_1 et U_2 est un $\tilde{q}_1$-groupe d'après le Fait 1.52, ou de manière évidente, suivant la nature de $\tilde{q}_1$. Enfin U_1 comme U_2 est normal, d'après la décomposition du Lemme 5.2 et le fait que $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(F^\circ(B_1))$. $\square$

Quitte à échanger i_1 et i_2 on peut supposer que $U_2 \neq 1$. En revanche on ne fait pas d'hypothèse sur U_1, ce que compense le lemme suivant.

Lemme 5.9 *Si* $U_1 = 1$*, alors* i_1 *et* i_2 *ne sont pas* G*-conjuguées.*

Preuve

Si $U_1 = 1$, alors d'après le Lemme 5.8, on a $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_2$, et i_2 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Supposons par ailleurs, en vue d'une contradiction, que $i_2 = i_1^g$ pour un $g \in G$.

Alors B_1^g est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_1$ et contenant $C^\circ(i_2)$. Or $B_2 = B_1$ impose que l'*unique* sous-groupe de Borel ayant ces propriétés est B_1. Il vient donc $g \in N(B_1)$. Maintenant comme i_2 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, $i_1^g = i_2$ centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^g$ et donc i_1 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B) = U_1$, une contradiction. $\square$

Notation 5.10 *Soit* $w_1 \in I_1$ *(voir Notation 5.3).*

On remarquera qu'une seule involution de I_1 suffit dans cette sous-section.

Lemme 5.11 *Aucun sous-groupe strict définissable, connexe, et* w_1*-invariant ne contient* $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$*.*

Preuve

Au vu du Fait 1.60, l'affirmation est évidente si $\tilde{q}_1$ est de la forme (p_1, ∞). En effet w_1 ne normalise pas B_1, par définition de I_1 (Notation 5.3). On suppose donc que $\tilde{q}_1$ est un paramètre d'unipotence de caractéristique nulle.

Soient H comme dans l'énoncé et $\tilde{q} \geq \tilde{q}_1$ un paramètre d'unipotence maximal pour H, que l'on prend aussi en caractéristique nulle. Alors $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ et $U_{\tilde{q}_1}(B_1)^{w_1}$ sont inclus dans H. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors le Fait 1.62 impose $w_1 \in N(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$. Dans ce cas $w_1 \in N(B_1)$, contre la définition de I_1 (Notation 5.3). On a donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. Notamment d'après le Lemme 4.12, w_1 inverse $U_{\tilde{q}}(H)$.

D'autre part $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq H$ est d'après le Fait 1.62 un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de H. D'après le Fait 1.33 il existe donc une H-conjuguée w' de w_1 qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Notamment w' normalise B_1. D'après le Lemme 4.2, on a $w' \in B_1$. On considère la classe de conjugaison de w' dans B_1.

Si w' est, dans B_1, conjuguée à i_1 ou à i_3, alors w' inverse $U_2 \leq H$ ainsi que $U_\infty(H)$. Le Fait 1.17 impose $[U_2, U_\infty(H)] = 1$, et donc $U_\infty(H) \leq C^\circ(U_2) \leq B_1$, ce qui contredit $\tilde{q} > \tilde{q}_1$.

Si w' est dans B_1 conjuguée à i_2, alors en particulier i_1 et i_2 sont G-conjuguées. D'après le Lemme 5.9, $U_1 \neq 1$. Donc w' inverse $U_1 \leq H$, ainsi que $U_\infty(H)$. Dans ce cas le Fait 1.17 impose $[U_1, U_\infty(H)] = 1$, et donc $U_\infty(H) \leq C^\circ(U_1) \leq B_1$, ce qui contredit encore $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. □

Corollaire 5.12 *$T_1[w_1]$ est un groupe abélien définissable.*

Preuve

Soit $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_1}$. On suppose $X \neq 1$; d'après le Lemme 5.6, on a $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq N^\circ(X)$, et le Lemme 5.11 appliqué à $N^\circ(X)$ entraîne une contradiction. Ainsi $X = 1$, et donc $B_1 \ capB_1^{w_1}$ est abélien. La conclusion suit. □

Notation 5.13 *Soit $A_2 \leq U_2$ un sous-groupe B_1-minimal.*

Lemme 5.14 *A_2 est un $\tilde{q}_1$-sous-groupe définissable et normal de B_1, inversé par i_1 et i_3, et centralisé par i_2.*

Preuve

Tout découle de la définition de U_2 (Notation 5.7), sauf le fait que A_2 soit bien un $\tilde{q}_1$-groupe si ce paramètre est de caractéristique nulle. Dans ce cas, nous invoquons le Fait 1.55 : en effet $U_2 \leq [U_{\tilde{q}_1}(B_1), B_1]$ est alors $\tilde{q}_1$-homogène, et A_2 est bien un $\tilde{q}_1$-groupe. □

Corollaire 5.15 $C^\circ_{T_1[w_1]}(A_2) = 1$.

Preuve

La preuve du Corollaire 5.12 établit que $F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_1}$ est trivial. En particulier, il vient $T_1[w_1] \cap F^\circ(B_1) = 1$.

Soit maintenant $t \in C_{T_1[w_1]}(A_2)$. Alors $A_2 \leq C^\circ(t)$. Soit L_2 un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(t)$ contenant A_2. Comme $C^\circ(t)$ est w_1-invariant, il existe d'après le Fait 1.33 une involution w' conjuguée à w_1 sous $C^\circ(t)$ et qui normalise L_2.

Mais d'après le Fait 1.60 ou 1.62, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant A_2. En particulier w' normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, et il vient d'après le Lemme 4.2 $w' \in B_1$. L'élément $t \in B_1$ est ainsi inversé par l'involution w' de B_1. D'après le Fait 1.37, il existe $f \in F^\circ(B_1)$ tel que $t^{-1} = t^{w'} = tf$, et donc $t^2 \in T_1[w_1] \cap F^\circ(B_1) = 1$. Ainsi t est une involution de $T_1[w_1]$, lequel est abélien. En type impair, on a donc borné le cardinal de $C_{T_1[w_1]}(A_2)$ par 4. □

Preuve de la Proposition 5.5

Remarquons que le Corollaire 5.15 implique que $B_1/C_{B_1}(A_2)$ n'est pas trivial. Le théorème du corps, Fait 1.38, appliqué au groupe $A_2 \rtimes B_1/C_{B_1}(A_2)$ fait alors apparaître un corps algébriquement clos K tel que $A_2 \simeq K_+$ et $B_1/C(A_2) \hookrightarrow K^\times$.

Maintenant d'après le Corollaire 5.15, l'image de $T_1[w_1]$ dans $K^\times$ est encore de rang égal à $\mathrm{rg}(T_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1))^{-i_1} \geq \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(K_+)$. Ainsi $K^\times$ est-il isomorphe à un quotient de $T_1[w_1]$ par un sous-groupe fini ; en particulier $T_1[w_1]$ contient un 2-tore.

Ce 2-tore est inversé par w_1, une contradiction au Lemme 4.2 qui démontre l'impossibilité de $B_2 = B_1$. Nous avons ainsi prouvé que $B_1 \neq B_2$, et l'on établit $B_1 \neq B_3$ de même. (Rappelons qu'aucune hypothèse faite avant l'énoncé de la Proposition 5.5 ne distingue i_2 et i_3.) □

5.2 Reprise des affaires

Le lemme suivant est vide de contenu. D'une part il semble intuitif que le cas d'unipotence de torsion ne posera aucun problème : les U_p conventionnels offrent un analogue irréprochable des O du cas ordinaire, il suffit d'imiter [CJ04], et dans le pire des cas il y aurait le théorème de Wagner ! D'autre part la preuve ressemble à un tour de passe-passe.

Lemme 5.16 *B_1 est sans unipotence de torsion.*

Preuve

On suppose $U_p(B_1) \neq 1$ pour un nombre premier $p \neq 2$. Soit $H = (B_1 \cap B_2)^\circ \geq C^\circ(V) \geq V$. Supposons H non-abélien. Dans ce cas, $Z^\circ(U_p(B_1)) \leq N^\circ(H')$, mais le Fait 1.60 impose que B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $Z^\circ(U_p(B_1))$. Ainsi $Z(F^\circ(B_2)) \leq N^\circ(H') \leq B_1$. C'est encore le Fait 1.60 qui implique que B_2 n'a pas d'unipotence de torsion. Le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_2$ est donc de la forme (∞, d_2). Mais $1 \neq U_{(\infty,d_2)}(Z(F^\circ(B_2))) \leq B_1$. Cette fois c'est le Fait 1.62 appliqué avec $U_{(\infty,d_2)}(Z(F^\circ(B_2)))$ dans les deux rôles qui impose que (∞, d_2) n'est pas un paramètre d'unipotence maximal pour B_1. Ainsi $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Nous sommes donc en présence d'une intersection non-abélienne telle que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. D'après le Fait 1.64 (4), la paire (B_1, B_2) est maximale. D'après le Fait 1.66 (7), $F^\circ(B_1)$ est sans p-unipotence, une contradiction.

H est ainsi abélien. En particulier $H = C^\circ(V)$ et $C^\circ_{B_1}(i_2) = C^\circ(V)$. Comme on a simultanément $B_1 \neq B_3$ d'après la Proposition 5.5, les mêmes arguments impliquent $C^\circ_{B_1}(i_3) = C^\circ(V)$. Alors le Fait 1.23 implique $B_1 = \langle C^\circ_{B_1}(i_1), C^\circ_{B_1}(i_2), C^\circ_{B_1}(i_3)\rangle = \langle C^\circ(i_1), C^\circ(V), C^\circ(V)\rangle = C^\circ(i_1)$, une contradiction. □

Ainsi $\tilde{q}_1$ est-il de la forme (∞, d_1). Nous garderons ce fait à l'esprit, et n'y ferons plus référence.

Lemme 5.17 *Les involutions i_2 et i_3 inversent $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ qui est abélien, et i_1 le centralise.*

Preuve

Soit $X = C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2)$ et supposons $X \neq 1$. D'après le Lemme 5.2 et le Fait 1.52, X est un $\tilde{q}_1$-groupe. Formons $N = N^\circ(X) \geq X$. Alors N est V-invariant car X l'est, si bien que d'après le Corollaire 4.13, N admet $\tilde{q}_1$ pour paramètre d'unipotence maximal.

Maintenant $X \leq B_2$ donc par définition de $\tilde{q}_1$ il vient $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2$, et $X \leq U_{\tilde{q}_1}(B_2)$ grâce au Fait 1.53. Notamment $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_2))) \leq N$, et le Fait 1.62 impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_2)$ est le seul $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Mais comme d'autre part $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_1))) \leq N$, le Fait 1.62 implique de même que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est le seul $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Il vient $B_1 = B_2$, une contradiction à la Proposition 5.5.

Ainsi i_2 inverse bien $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Comme aucune hypothèse n'a été faite pour distinguer i_2 et i_3, il est clair que i_3 aussi agit par inversion. L'involution i_1 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, qui est abélien. $\square$

5.3 Réduction de $T_1[w_1]$

L'élimination de la torsion dans les ensembles $T_1[w_1]$ était une étape essentielle de [Del07, §6]. Ici nous butons sur un léger problème, à savoir la possibilité d'une involution résiduelle. On travaillera donc avec les ensembles $\tau_1[w_1]$, définis ci-après, et qu'il faut penser comme la composante connexe des $T_1[w_1]$. Cela ne sera justifié que lorsqu'on aura prouvé leur abélianité dans le Corollaire 5.24.

Notation 5.18 *Pour w_1 dans I_1, soit $\tau_1[w_1]$ l'ensemble des carrés des éléments de $T_1[w_1]$.*

Lemme 5.19 (cf. [Del07, Lemme 6.9]) *$\tau_1[w_1]$ est un sous-ensemble générique de $T_1[w_1]$, et formé d'éléments dont la clôture définissable est sans torsion.*

Preuve

Nous commençons par l'étude des éléments de torsion de $T_1[w_1]$. Soit $t \in T[w_1]$ un p-élément, où p est un nombre premier ; on montre que t est une involution. Rappelons que B_1 est sans p-unipotence, d'après le Lemme 5.16. Soit P un p-sous-groupe de Sylow de B_1 contenant t, P est un p-tore. L'involution w_1 normalise $C^\circ(t) \geq C^\circ(P)$ qui contient d'après le Fait 1.24 un 2-tore maximal de B_1 et de G, disons S_1°. D'après le Lemme 4.2, il vient $w_1 \in S_1^\circ \leq C^\circ(P) \leq C^\circ(t)$, et pourtant w_1 inverse t. L'élément t est donc une involution. A ce point il est clair que si $t \in \tau_1[w_1]$, alors sa clôture définissable $d(t)$ est bien sans torsion. Nous prouvons désormais la généricité de $\tau_1[w_1]$ dans $T_1[w_1]$.

Remarquons qu'une involution k de $T_1[w_1]$ ne peut pas être B_1-conjuguée à i_1. En effet sinon il vient d'après le Lemme 4.2 $w_1 \in C^\circ(k) \leq B_1$ par définition de B_1, et cela contredit la définition de $w_1 \in I_1$.

Soient maintenant k et ℓ deux involutions supposées distinctes de $T[w_1]$. D'après ce que nous venons de remarquer, k et ℓ sont B_1-conjuguées à i_2 ou i_3. En particulier elles inversent $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ d'après le Lemme 5.17. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(k\ell)$. Ce dernier groupe, que nous noterons X, est w_1-invariant car $(k\ell)^{w_1} =$

$k\ell$. Soit $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour $X = C^\circ(k\ell)$. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors le Fait 1.53 impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est définissablement caractéristique dans X, donc que w normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Il vient $w_1 \in N(B_1)$, une contradiction. Donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. Pourtant X est $\langle w_1, k\rangle = \{1, w_1, k, w_1k\}$-invariant, et cela contredit le Corollaire 4.13.

$T_1[w_1]$ possède donc au plus une involution. S'il n'y en a pas, il est évident que pour chaque $t \in T_1[w_1]$, la clôture définissable $d(t)$ est 2-divisible, et donc que $\tau_1[w_1] = T_1[w_1]$. Sinon, soit k l'unique involution de $T_1[w_1]$. Soit $Y = T[w_1]\backslash\tau_1[w_1]$. Alors la multiplication à gauche par k est une injection définissable de Y dans $\tau_1[w_1]$, et il est clair que $\tau_1[w_1]$ est bien générique dans $T_1[w_1]$. $\square$

L'involution w_1 inverse point-à-point l'ensemble $\tau_1[w_1]$, et $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B))^{-i_1}$. En outre $\tau_1[w_1]$ a cette propriété essentielle que si $t \in \tau_1[w_1]$, alors $d(t) \subseteq \tau_1[w_1]$. On travaillera donc avec $\tau_1[w_1]$ au lieu de $T_1[w_1]$, et la preuve suivra celle de [Del07, §6].

Lemme 5.20 (cf. [Del07, Corollaire 6.8]) $\forall t \in \tau_1[w_1]^\#$, $C_{B_1}(t) \cap i_1^{B_1} = \emptyset$.

Preuve

Soient $t \in \tau_1[w_1]^\#$ et une involution $j_1 \in i_1^{B_1}$ qui centralise t. L'involution w_1 normalise $C(t)$ qui contient j_1. D'après le Lemme 1.31, il existe une involution w_1' conjuguée sous $C(t)$ à w_1 et telle que $[w_1', j_1] = 1$. Notons que $w_1' \neq j_1$, car sinon t serait une involution, ce que le Lemme 5.19 interdit. En outre on a grâce au Lemme 4.2 $w_1' \in C^\circ(j_1) \leq B_1$ par définition de B_1.

D'après le Lemme 5.17, l'action de w_1' sur $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est par centralisation ou bien par inversion, mais "sans mélange". Comme w_1' inverse $d(t)$ qui est 2-divisible au vu du Lemme 5.19, le Fait 1.17 impose $[d(t), U_{\tilde{q}_1}(B_1)] = 1$. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(t)$. Puisque $C^\circ(t)$ est $\langle w_1', j_1\rangle$-invariant, le Corollaire 4.13 implique que $C^\circ(t)$ admet $\tilde{q}_1$ pour paramètre d'unipotence maximal. Ainsi $U_\infty(B_1) = U_\infty(C^\circ(t))$. Pourtant ce dernier groupe est w_1-invariant, donc w_1 normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.21 (cf. [Del07, Corollaire 6.14]) *Il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(\tau_1[w_1])$ qui est inclus dans $\tau_1[w_1]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$.*

Preuve

Supposons que chaque t de $\tau_1[w_1]$ centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Selon le Fait 1.62, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est un sous-groupe de Sylow de $C^\circ(t)$ qui est w_1-invariant. D'après le Fait 1.33, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(t)$ à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Prenant les normalisateurs connexes et d'après le Lemme 4.2, on a $w' \in B_1$. Ainsi $w' \in B_1$ inverse $d(t)$. Mais $d(t)$ est un groupe sans torsion d'après le Lemme 5.19 ; le Lemme 5.2 implique $d(t) \leq F^\circ(B_1)$. Conjuguant par w_1, on a aussi $d(t) \leq F^\circ(B_1)^{w_1}$, et cela est valable pour chaque t de $\tau_1[w_1]$.

Alors grâce au Lemme 5.19, $\tau_1[w_1] \subseteq (F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_1})^\circ$ qui est un groupe définissable connexe nilpotent inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts, donc abélien d'après le Fait 1.67. En particulier $\tau_1[w_1]$ est également un groupe abélien. Maintenant $C^\circ(\tau_1[w_1])$ est un groupe w_1-invariant qui contient $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. D'après le Fait 1.33, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Passant aux normalisateurs connexes et d'après le Lemme 4.2, on a $w' \in B_1$. L'involution $w' \in B_1$ inverse donc tout le groupe $\tau_1[w_1]$.

Soit $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors d'après le Fait 1.53, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est définissablement caractéristique dans $C^\circ(\tau_1[w_1])$, et en particulier $w_1 \in N(B_1)$, une contradiction. Donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. D'après le Lemme 4.12, w' inverse $U_\infty(C^\circ(\tau_1[w_1]))$. Si dans B_1, w' est conjuguée à i_2 ou à i_3, alors d'après le Lemme 5.17, w' inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(\tau_1[w_1])$, et le Fait 1.17 impose $U_\infty(C^\circ(\tau_1[w_1])) \leq B_1$, une contradiction.

Ainsi w' est-elle une B_1-conjuguée de i_1. Elle inverse donc dans B_1 un ensemble de rang exactement $\mathrm{rg}(F^\circ(B_1))^{-i_1} = \mathrm{rg}(\tau_1[w_1])$ par définition de I_1 (Notation 5.3). Alors $\tau_1[w_1] \subseteq (F^\circ(B_1))^{-w'}$ est l'unique sous-groupe générique dans l'ensemble $(F^\circ(B_1))^{-w'}$ qui est de degré 1 d'après le Lemme 5.2. En particulier $\tau_1[w_1]$ est ainsi normalisé par $C^\circ(w')$, et il vient que le sous-groupe définissable $\tau_1[w_1] \rtimes C^\circ(w')$ est générique dans B_1. Comme ce dernier est connexe, on a $B_1 = \tau_1[w_1] \rtimes C^\circ(w')$, et donc $\tau_1[w_1]$ est normal dans B_1. Ainsi w_1 normalise $B_1 = N^\circ(\tau_1[w_1])$, une contradiction. L'hypothèse faite au début de cette preuve est absurde.

Il y a donc un $t \in \tau_1[w_1]$ ne centralisant pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Considérons alors la clôture définissable $d(t)$, et passons modulo $C_{d(t)}(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$. L'image $\overline{d(t)}$ est non-triviale par choix de t, et sans torsion d'après le Lemme 5.19 et le Fait 1.25. En particulier, d'après le Fait 1.49, $\overline{d(t)}$ admet un paramètre d'unipotence, qui est nécessairement de la forme (∞, s). Maintenant le Fait 1.48 (2) implique qu'il existe un (∞, s)-sous-groupe définissable de $d(t)$ qui n'est pas nul dans la projection, c'est-à-dire qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. $\square$

Notation 5.22 (cf. [Del07, Notation 6.15]) *Soient, comme dans le Lemme 5.21, s un entier ≥ 1 et T_s un (∞, s)-groupe abélien inclus dans $\tau_1[w_1]$ ne centralisant pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$.*

Proposition 5.23 (cf. [Del07, Proposition 6.17]) *$B_1 \cap B_1^{w_1}$ est abélien.*

Preuve

Sinon $X = F(B_1) \cap F(B_1^{w_1})$ n'est pas trivial. D'après le Fait 1.59, il n'y a pas de torsion dans X, en particulier $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1^{w_1}) = (F(B_1) \cap F(B_1^{w_1}))^\circ$.

Soient $N = N^\circ(X)$ et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. Comme w_1 normalise $N \geq U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, il faut $\tilde{q} > \tilde{q}_1$ pour échapper à la contradiction usuelle. Non moins habituellement, il existe une involution w' conjuguée sous N à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. En particulier $w' \in B_1$ pour les raisons fréquentes. En outre w_1 et w' doivent toutes deux inverser $U_\infty(N)$ d'après le Lemme 4.12.

Si w' est conjuguée dans B_1 à i_2 ou à i_3, alors d'après le Lemme 5.17, elle inverse $U_\infty(B_1)$. Comme w' inverse aussi $U_\infty(N)$ et que l'un normalise l'autre, il vient grâce au Fait 1.17 $[U_\infty(B_1), U_\infty(N)] = 1$, donc $U_\infty(N) \leq C^\circ(U_\infty(B_1)) \leq B_1$, une contradiction. Donc $w' \in i_1^{B_1}$.

Comme $\tilde{q} > \tilde{q}_1$, $N^\circ_{B_1}(X)$ est inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts. D'après le Fait 1.65, $(N^\circ_{B_1}(X))'$ est homogène. D'autre part selon le Fait 1.55, $[T_s, U_{\tilde{q}_1}(B_1)]$ est un $\tilde{q}_1$-groupe homogène, et non-trivial par choix de T_s (Notation 5.22). Comme il est inclus dans $(N^\circ_{B_1}(X))'$, on en déduit que $(N^\circ_{B_1}(X))'$ est $\tilde{q}_1$-homogène. Comme $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)' \leq (N^\circ_{B_1}(X))'$, il vient que $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)'$ est lui aussi $\tilde{q}_1$-homogène.

On montre à présent que $F^\circ(B_1)$ est abélien. Sinon, X est homogène d'après le Lemme 1.68. Comme X contient $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)'$ qui est $\tilde{q}_1$-homogène, X est ainsi $\tilde{q}_1$-homogène. Maintenant pour chaque $r < d_\infty(B_1)$, la décomposition centrale du Fait 1.50 implique $F_r(B_1) \leq C^\circ(X) \leq N$ qui n'est pas inclus dans B_1, car $d_\infty(N) > d_\infty(B_1)$. Comme d'autre part $F_r(B_1) \leq B_1$, le Fait 1.67 implique que $F_r(B_1)$ est abélien. Donc chaque $F_r(B_1)$ est abélien pour $r < d_\infty(B_1)$. Comme $U_\infty(B_1)$ l'est aussi grâce au Lemme 5.17, la décomposition du Fait 1.50 implique que $F^\circ(B_1)$ est abélien.

On forme enfin $Y = (F^\circ(B_1))^{-i_1}$. Y est un sous-groupe car $F^\circ(B_1)$ est abélien, et non-trivial - c'est l'hypothèse de cette section ! Comme $w' \in i_1^{B_1}$, la décomposition donnée dans le Lemme 5.2 impose que w' aussi inverse Y, lequel est par ailleurs inclus dans N. Comme d'autre part, w' inverse $U_\infty(N)$, le lemme 1.17 implique $[Y, U_\infty(N)] = 1$. Ainsi $N \leq C^\circ(Y)$, mais $Y \lhd B_1$. En particulier $\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}$, une contradiction. □

Jumelant avec le Lemme 5.19, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.24 *$T_1[w_1]$ et $\tau_1[w_1]$ sont des groupes abéliens définissables. $T_1[w_1]$ est d'indice au plus 2 sur sa composante connexe $\tau_1[w_1]$, qui est divisible.*

Lemme 5.25 (cf. [Del07, Lemme 6.11]) *Aucune involution de B_1 n'inverse $\tau_1[w_1]$. Aucune involution de $i_1^{B_1}$ ne centralise $\tau_1[w_1]$.*

Preuve

Si une involution de B_1 inverse $\tau_1[w_1]$, alors $\tau_1[w_1]$ étant sans torsion, le Lemme 5.2 implique $\tau_1[w_1] \leq F^\circ(B_1)$. Comme $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est abélien (Lemme 5.17), on a $T_s \leq \tau_1[w_1] \leq C^\circ(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$, contre la définition de T_s (Notation 5.22).

Soit maintenant $j_1 \in i_1^{B_1}$ centralisant $\tau_1[w_1]$. Alors $j_1 \in C(\tau_1[w_1])$ qui est w_1-invariant, donc d'après le Lemme 1.31 il existe une involution w' conjuguée sous $C(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui centralise j_1. Mais comme j_1 est conjuguée à i_1 dans B_1, on a $C^\circ(j_1) \leq B_1$, et d'après le Lemme 4.2 $w' \in B_1$. Pourtant w' comme w_1 inverse $\tau_1[w_1]$, ce qui contredit l'affirmation précédente. □

5.4 Apparition de la paire maximale et scission de B_1

Lemme 5.26 *Il existe un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et contenant $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$.*

Preuve
On prend un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$; si ce n'est pas B_1, il convient ; si c'est B_1, alors $B_1^{w_1}$ convient. $\square$

Notation 5.27 *Soit $B_M \geq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$ un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et maximisant $H = (B_1 \cap B_M)^\circ$ parmi de telles intersections.*

Proposition 5.28 (cf. [Del07, Proposition 6.25]) *H n'est pas abélien.*

Preuve
On suppose H abélien. Soit $t \in \tau_1[w_1]$. Alors $H \leq C_{B_1}(t)$ qui ne coupe pas $i_1^{B_1}$ d'après le Lemme 5.20, et donc H n'est pas un sous-groupe de Carter de B_1.

Par hypothèse $H \leq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1]) \leq H$ et donc $H = C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$. Si B_0 est un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et contenant $N^\circ(H)$, alors B_0 est comme dans la Notation 5.27, et $(B_1 \cap B_0)^\circ \geq N^\circ_{B_1}(H) > H$, une contradiction avec la maximalité définissant H. B_1 est donc le seul sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$. En particulier $N^\circ_{C^\circ(\tau_1[w_1])}(H) \leq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1]) = H$.

H est ainsi un sous-groupe de Carter de $C^\circ(\tau_1[w_1])$ qui est w_1-invariant. D'après le Fait 1.32, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise H. L'involution w' normalise aussi l'unique sous-groupe de Borel contenant son normalisateur. Donc w' normalise B_1 et $w' \in B_1$ d'après le Lemme 4.2. Ainsi $w' \in B_1$ inverse $\tau_1[w_1]$, et c'est une contradiction au Lemme 5.25. $\square$

Remarquons que nous sommes en présence d'une intersection maximale non-abélienne au sens de [Bur07]. Soit en effet B_0 un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et tel que $(B_1 \cap B_0) \geq H$. Alors $B_0 \geq H \geq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$, donc B_0 est comme dans la Notation 5.27. Par maximalité de H au sens de cette notation, on a $(B_1 \cap B_0)^\circ = H$. Ainsi H est maximal au sens du Fait 1.64 (3), ce qui implique que la paire (B_1, B_M) est maximale au sens de la Définition 1.63.

Lemme 5.29 (cf. [Del07, Lemmes 6.26 et 6.27]) *$d_\infty(H') = s$ et $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_M)$.*

Preuve
D'après le Fait 1.65, H' est un groupe homogène. On suppose que son unique degré d'unipotence noté r' est distinct de s. Alors d'après le Fait 1.58, les (∞, s)-sous-groupes de Sylow de H sont inclus dans ses sous-groupes de Carter. T_s est donc inclus dans un sous-groupe de Carter Q_H de H. Or Q_H est de rang de Prüfer au plus 1, car d'après le Lemme 5.20, $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$ ne coupe pas $i_1^{B_1}$. En particulier Q_H n'est un sous-groupe de Carter ni de G, ni de B_1. L'examen du Lemme 1.69, dont nous adoptons la notation $(Q_H)_{r'}$, laisse subsister le seul cas où l'unique sous-groupe de Borel contenant $N^\circ_G((Q_H)_{r'})$ est B_1.

Ainsi $N^\circ_{C^\circ(\tau_1[w_1])}(Q_H) \leq (B_1 \cap C^\circ(\tau_1[w_1]))^\circ \leq H$ par définition de H. En particulier, Q_H est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Mais d'après le Fait

1.33, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise Q_H. Alors w' normalise B_1 qui jouit d'une propriété d'unicité définie à partir de Q_H. D'après le Lemme 4.2, $w' \in B_1$. L'involution $w' \in B_1$, tout comme w_1, inverse $\tau_1[w_1]$. C'est une contradiction au Lemme 5.25. Le premier point est ainsi prouvé.

On suppose à présent $d_\infty(B_1) \leq d_\infty(B_M)$. Par l'asymétrie du Fait 1.64 (4), on a même $d_\infty(B_1) < d_\infty(B_M)$. D'après le Fait 1.66, on a alors pour chaque $r \neq s$ que $F_r(B_1) \leq Z(H)$. C'est notamment le cas pour $d_\infty(B_1) > s$, et il vient donc que $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(H)$. En particulier $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ commute avec $\tau_1[w_1]$, une contradiction. □

Corollaire 5.30 *Un sous-groupe de Carter de H est un sous-groupe de Carter de B_1, donc de G, et donc de B_M.*

Notation 5.31 *A conjugaison près, nous supposerons que le sous-groupe de Carter Q (défini dans la Notation 4.4) est inclus dans H.*

Notation 5.32 *Soit $\Sigma = F_s(H) = U_{(\infty,s)}(H)$ (nous renvoyons au Fait 1.66).*

Lemme 5.33 (cf. [Del07, Lemme 6.32]) *Σ est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow abélien de B_1. Il contient $\tau_1[w_1]$ qui est (∞, s)-homogène.*

Preuve

Comme Σ est définissable, connexe, nilpotent, et inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts, il est abélien d'après le Fait 1.67.

Soit $L \geq \Sigma$ un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B_1. D'après le Fait 1.66 (3), $N^\circ(F_s(H)) \leq B_M$. Il vient donc $N_L^\circ(\Sigma) \leq (L \cap B_M)^\circ \leq H$ donc $U_{(\infty,s)}(N_L^\circ(\Sigma)) \leq \Sigma$. Le Fait 1.57 impose $L = \Sigma$.

Soit enfin $(\infty, s') \neq (\infty, s)$ un paramètre d'unipotence apparaissant dans $\tau_1[w_1]$, et $T_{s'} \leq \tau_1[w_1]$ un sous-groupe indécomposable de ce degré d'unipotence. H' est (∞, s)-homogène d'après le Fait 1.65 et le Lemme 5.29, donc grâce au Fait 1.58, $T_{s'}$ s'inclut dans un sous-groupe de Carter de H. En particulier $C_H^\circ(T_{s'})$ est de rang de Prüfer 2, contre le Lemme 5.20. Ainsi $\tau_1[w_1]$ est-il (∞, s)-homogène, et notamment, il est inclus dans Σ par définition de celui-ci. □

Notation 5.34 (cf. [Del07, Notation 6.33]) *Soit $K_1 = [\Sigma, i_1]$.*

Proposition 5.35 (cf. [Del07, Lemme 6.34]) *K_1 ne dépend pas de i_1, ni de w_1. C'est un (∞, s)-groupe abélien homogène et sans involutions, de même rang que $\tau_1[w_1]$. Enfin $B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$ et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$.*

Preuve

Le théorème des indécomposables de Zilber entraîne la connexité de K_1. Maintenant K_1 qui est abélien ne peut pas posséder de 2-tore, car ce serait un 2-tore inversé par i_1, contre le Lemme 4.2. Comme K_1 est connexe, il est sans involution d'après le Fait 1.28.

On considère l'action de i_1 sur Σ qui est abélien, connexe, et 2-divisible car sans 2-unipotence. D'après le Fait 1.19, on a $\Sigma = C_\Sigma(i_1)(+)\Sigma^{-i_1}$, où le symbole $(+)$ signifie que l'intersection est finie. Il est clair que $K_1 = (\Sigma^{-i_1})^\circ$, et il vient donc $\mathrm{rg}(\Sigma) = \mathrm{rg}(C_\Sigma(i_1)) + \mathrm{rg}(K_1)$.

D'après le Lemme 5.20 $\tau_1[w_1] \cap C^\circ(i_1) = 1$, et donc $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \leq \mathrm{rg}(\Sigma) - \mathrm{rg}\, C^\circ_\Sigma(i_1) = \mathrm{rg}(K_1)$. D'autre part K_1 est un groupe $2^\perp$ inversé par $i_1 \in B_1$. Avec le Lemme 5.2, on a $K_1 \subseteq (F^\circ(B_1))^{-i_1}$. Mais par définition de w_1, il vient $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1)^{-i_1}) \geq \mathrm{rg}(K_1)$, donc tous ces rangs sont égaux.

K_1 est alors un sous-groupe définissable générique de $F^\circ(B_1)^{-i_1}$ qui est de degré 1 d'après le Fait 5.2. Notamment $C^\circ(i_1)$ normalise K_1, et $K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$ est un sous-groupe définissable générique de B_1. Ce dernier étant connexe, on a $B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$.

Enfin, $K_1 \leq [\Sigma, i_1] \leq H'$ qui est un groupe (∞, s)-homogène d'après le Lemme 5.29. En particulier K_1 est un (∞, s)-sous-groupe de $F^\circ(B_1)$, et donc inclus dans $F_s(B_1)$. Le Fait 1.66 (6) force l'unicité dans l'inclusion $C^\circ(K_1) \leq B_1$.
□

Lemme 5.36 *Si i_i et i_2 sont G-conjuguées, alors i_2 inverse K_1.*

Preuve
On considère $X = C^\circ_{K_1}(i_2)$ supposé non-trivial, et disons $i_2 = i_1^g$ pour un $g \in G$. Alors X est inclus dans $C^\circ(i_2) \leq B_1^g$. En outre i_2 inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ et centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g)$ d'après le Lemme 5.17. Mais i_1 inverse K_1 donc elle inverse aussi X, et ainsi le Lemme 5.2 appliqué dans B_1^g donne $X \leq F^\circ(B_1^g)$. En particulier $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g) \leq C^\circ(X)$. Mais d'après la Proposition 5.35, $C^\circ(X) \leq B_1$, et ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g) \leq B_1$. Le Fait 1.62 force alors $B_1^g = B_1$. L'involution i_2 centralise et inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B^g)$, une contradiction. □

Corollaire 5.37 (cf. [Del07, Corollaire 6.4]) $i_1^G \cap S = \{i_1\}$.

Preuve
En effet, d'après le Corollaire 4.7, il y a une ou trois classes d'involutions. S'il y en a une seule, le Lemme 5.36 appliqué avec i_2 puis avec i_3 impose que i_1 centralise K_1, contre sa définition. □

Le contrôle de la classe de i_1 dans le Corollaire 5.37 est indispensable aux arguments de conjugaison sur lesquels s'appuie la combinatoire de la sous-section suivante. Sans un tel résultat, les calculs de rang sont impossibles. Sa preuve n'en avait pas été différée pour entretenir le suspense ; le Corollaire 5.37 nécessite le Lemme 5.36 et nous semble inaccessible plus tôt dans la preuve.

Corollaire 5.38 $N(B_1) = B_1$.

Preuve
Un argument de Frattini donne $N(B_1) = N_{N(B_1)}(Q) \cdot B_1$, mais d'après le Corollaire 4.6, $N(Q) = Q$. □

5.5 La correspondance $K_1 \sim \tau_1$ et la contradiction à la simplicité

Afin de faciliter la lecture, pour chaque sous-groupe définissable H nous notons $\check{H} = U_{(\infty,s)}(O(H))$.

Remarque 5.39 *Comme Σ peut contenir un 2-tore central, il faut bien travailler avec des O partout ; puis pour être sûr d'avoir des (∞, s)-sous-groupes de Sylow, reprendre la partie (∞, s)-engendrée !*

Lemme 5.40 (cf. [Del07, Proposition 6.38]) *Il existe un (∞, s)-sous-groupe de Sylow L de $C^\circ(\tau_1[w_1])$ tel que $\check{L} = \check{\Sigma}$.*

Preuve

Soit $X = \check{F}_s(B_M) = U_{(\infty,s)}(O(F_s(B_M)))$. Alors X est un (∞, s)-groupe par définition ; d'autre part il est non-trivial. En effet grâce au Lemme 5.33, au Fait 1.71 et au Corollaire 5.30, $F_s(B_M) \geq \tau_1[w_1]$ qui n'a pas d'involution d'après le Lemme 5.19, et donc d'après le Fait 1.40, $O(F_s(B_M)) \geq \tau_1[w_1]$. Comme ce dernier est (∞, s)-homogène, on a $X \geq \tau_1[w_1]$. On prouve de même que $K_1 \leq X$.

Nous montrerons que $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$. Comme $i_1 \in B_M$ normalise X qui est $2^\perp$ et connexe par définition, on a d'après le Fait 1.18 la décomposition univoque $X = C_X(i_1) \cdot X^{-i_1}$, où chaque terme est de degré 1. Mais alors $C_X(i_1) = C^\circ_X(i_1) \leq C^\circ(i_1) \leq B_1$, donc $C_X(i_1) \leq (B_1 \cap B_M)^\circ = H$. D'autre part, X étant un $U_{(\infty,s)}$-groupe sans involution, le Fait 1.52 entraîne que $C_X(i_1)$ est encore un $U_{(\infty,s)}$-groupe. Ainsi $C_X(i_1) \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$ d'après la Notation 5.32.

Pour montrer que $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$, il suffit ainsi de montrer qu'un élément $z \in X^{-i_1}$ qui centralise $\tau_1[w_1]$ appartient à Σ. Soit donc $z \in C^\circ_X(\tau_1[w_1])$ tel que $z^{i_1} = z^{-1}$.

Pour chaque $t \in \tau_1[w_1]$, on a $[z, t] = 1$ et $[z^{i_1}, t] = 1$, donc $[z, t^{i_1}] = 1$. En particulier, z commute à $[t, i_1]$. Donc z centralise $[\tau_1[w_1], i_1]$ qui n'est pas trivial d'après le Lemme 5.25. D'autre part $[\tau_1[w_1], i_1] \leq [\Sigma, i_1] = K_1$ par définition de ce dernier. Maintenant d'après la Proposition 5.35 B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$, et donc à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ([\tau_1[w_1], i_1])$. Comme ce dernier est normalisé par z, il vient $z \in N(B_1) = B_1$ d'après le Corollaire 5.38.

Ainsi $z \in B_1$ est inversé par i_1. Comme $z \in X \leq O(F_s(B_M))$, $d(z)$ est sans involution. D'après le Lemme 5.2, $z \in F^\circ(B_1)$. Ainsi $z \in F(B_1) \cap F(B_M) = F_s(B_1) \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$ (on a utilisé le Fait 1.66 (6) pour la première égalité). Nous avons bien prouvé $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$.

Soit enfin $L \geq \Sigma$ un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Le Lemme 1.70 force $L \leq B_M$. Mais d'après le Lemme 1.71 et le Corollaire 5.30, on a $L \leq F_s(B_M)$, et donc $\check{L} \leq X$. Ainsi $\check{L} \leq C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$. D'autre part, le Fait 1.40 implique $O(\Sigma) \leq O(L)$ et donc $\check{\Sigma} \leq \check{L}$, ce qui entraîne l'égalité. Le lemme est démontré. □

Corollaire 5.41 *Il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise $\check{\Sigma}$.*

Preuve

Soit L comme dans le Lemme 5.40. D'après le Fait 1.33, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise L. En particulier w' normalise $\check{\Sigma}$. $\square$

On peut donc travailler avec $\check{\Sigma}$ au lieu de Σ (cf. [Del07], où ce groupe était noté V) : en effet, de manière analogue au début de la preuve du Lemme 5.40, $\check{\Sigma}$ contient bien $\tau_1[w_1]$ et K_1 !

Corollaire 5.42 (cf. [Del07, Lemme 6.39]) $\forall w_1 \in I_1, \exists g \in G$ *tel que* $\tau_1[w_1] = K_1^g$.

Preuve

Soit comme dans le Corollaire 5.41 une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui normalise $\check{\Sigma}$. Notamment w' inverse $\tau_1[w_1]$, c'est une G-conjuguée de i_1, et elle n'est pas dans B_1 d'après le Lemme 5.25. Ainsi $w' \in I_1$ par définition de ce dernier (Notation 5.3). En particulier tout ce qui précède est encore vrai pour w'. L'inclusion de sous-groupes de même rang $\tau_1[w'] \geq \tau_1[w_1]$ se transforme en égalité, et $\check{\Sigma}^{-w'} = \tau_1[w'] = \tau_1[w_1]$.

Maintenant $V \leq H \leq N(\check{\Sigma})$, donc d'après le Lemme 4.2, $w' \in N(\check{\Sigma})$ est conjuguée dans $N(\check{\Sigma})$ à une involution de V. Ce ne peut être que i_1 au vu du Corollaire 5.37. Il existe donc $g \in N(\check{\Sigma})$ tel que $w' = i_1^g$, et ainsi $\tau_1[w_1] = \check{\Sigma}^{-w'} = (\check{\Sigma}^{-i_1})^g \leq K_1^g$, puis l'égalité des rangs prouve l'égalité de ces groupes connexes. $\square$

Proposition 5.43 (cf. [Del07, Corollaires 6.41 et 6.42])

$$\operatorname{rg}\left(K_1^G\right) = \operatorname{rg}\left(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]\right).$$

Preuve

D'après la Proposition 5.35, B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$. En particulier, si $x \in (K_1 \cap K_1^g)^\#$, alors $B_1 = B_1^g$, et il suit que $K_1 = K_1^g$. Le groupe K_1 est donc disjoint de ses conjugués non-identiques. En particulier, $\operatorname{rg}(K_1^G) = \operatorname{rg}(K_1) + \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(N(K_1))$. Mais toujours d'après la Proposition 5.35, $N^\circ(K_1) = B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$, donc il vient que $\operatorname{rg}(K_1^G) = \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(C^\circ(i_1)) = \operatorname{rg}(I_1)$.

Nous évaluons désormais le deuxième membre de l'égalité. Soient $w_0, w_1 \in I_1$. Comme $\tau_1[w_0]$ et $\tau_1[w_1]$ sont d'après le Corollaire 5.42 des conjugués de K_1, ils sont disjoints ou égaux. On suppose donc $\tau_1[w_1] = \tau_1[w_0] = K_1^g$ pour un $g \in G$. Alors w_0 et w_1 sont dans $I(N(K_1^g)) = I(N(B_1^g)) \subset B_1^g$ grâce au Corollaire 5.38. Comme i_1 est isolée dans S, on a que w_1 et w_0 sont toutes deux B_1^g-conjuguées à i_1^g, donc entre elles. D'après la décomposition donnée dans la Proposition 5.35, w_0 et w_1 sont même $K_1^g = \tau_1[w_0]$-conjuguées.

Quand nous calculons $\operatorname{rg}(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1])$, chaque terme est de rang $\operatorname{rg}(K_1)$, et la somme porte sur un ensemble de rang $\operatorname{rg}(I_1)$ modulo une équivalence dont les classes sont encore de rang $\mathrm{rg}(K_1)$. Il est donc clair que $\mathrm{rg}\left(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]\right) = \mathrm{rg}(I_1)$. $\square$

Preuve du Théorème 5.1

L'ensemble $\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]$ est inclus dans K_1^G d'après le Corollaire 5.42 ; il y est générique d'après la Proposition 5.43. En particulier, $B_1 \cap K_1^G$ est générique dans K_1^G, et le Corollaire 1.7 contredit la simplicité de G. $\square$

Rapportons en trophée de cette coûteuse campagne un sous-groupe qui s'avérera fort utile.

5.6 Conséquences - Y_1

Nous noterons encore $B_1 = C^\circ(i_1)$; c'est un sous-groupe de Borel. Tout est à refaire, même la distinction de B_1 d'avec B_2 et B_3 ! Enfin rappelons qu'à ce stade, aucune hypothèse ne distingue encore i_2 d'i_3 (c'est-à-dire $\tilde{q}_2$ de $\tilde{q}_3$) : on s'en souviendra dans les preuves qui suivent.

Pour étudier aisément l'action de V sur $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, il faut pouvoir soutenir que le centralisateur de i_2 (et i_3) dans ce sous-groupe est encore un $\tilde{q}_1$-groupe. Le Fait 1.52 exige l'absence d'involutions, ce que nous ne savons plus garantir ; on travaillera donc plutôt avec de la $\tilde{q}_1$-homogénéité et le Fait 1.55. Ceci explique l'apparent détour qu'est l'introduction de U_1.

Notation 5.44 *Soit* $U_1 = [U_{\tilde{q}_1}(B_1), B_1]$.

Lemme 5.45 U_1 *est un* $\tilde{q}_1$*-sous-groupe définissable, homogène, non-trivial, et normal dans* B_1*.*

Preuve

U_1 est trivialement normal et définissable. Sa $\tilde{q}_1$-homogénéité résulte du Fait 1.55 (en caractéristique finie, c'est évident). Il reste à voir que U_1 est non-trivial. Si $U_1 = 1$, alors $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(B_1)$, et notamment $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(V)$. Le choix de $\tilde{q}_1$ (voir Notation 4.10) impose alors $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2$, et $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq B_2$, donc $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B_2)$. En particulier, le Fait 1.62 entraîne $B_2 = B_1$, et l'on montre de même $B_3 = B_1$, une contradiction au Lemme 4.3. $\square$

Le sous-groupe suivant est le trophée. Nous établirons ses propriétés dans la Proposition 5.56 qui clôt la section.

Notation 5.46 *Soit* Y_1 *un sous-groupe* B_1*-minimal de* U_1*.*

Il est immédiat d'après le Lemme 5.45 que Y_1 est un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de B_1. En particulier, on pourra appliquer le Fait 1.62 avec Y_1 dans les deux rôles (ou le Fait 1.60, mais les configurations à unipotence de torsion doivent sembler bien fades au lecteur arrivé jusqu'ici). Rappelons que par B_1-minimalité, Y_1 est inclus dans $Z(F^\circ(B_1))$.

Lemme 5.47 *Si $B_2 \neq B_1$, alors i_2 inverse Y_1.*

Preuve
Si i_2 n'inverse pas U_1, alors $X = C^\circ_{Y_1}(i_2)$ est non-trivial. Mais comme $B_1 = C_{B_1}(i_2) \cdot F^\circ(B_1)$ et que Y_1 est inclus dans $Z(F^\circ(B_1))$, on a $X \lhd B_1$. Par B_1-minimalité de Y_1, il vient $X = Y_1$ et donc i_2 centralise Y_1.

En particulier $Y_1 \leq B_2$, mais puisque $\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_2$, on a égalité. Le Fait 1.62 entraîne $B_2 = B_1$. □

Nous allons maintenant rendre B_1 distinct de B_2 et B_3. La preuve va occuper quelques lemmes ; elle est absolument similaire à celle de la Proposition 5.5.

Proposition 5.48 *$B_1 \neq B_2$ et $B_1 \neq B_3$.*

On suppose $B_1 = B_2$, et l'on montre une contradiction. D'après le Lemme 4.3, on a $B_3 \neq B_1$; d'après le Lemme 5.47 appliqué à B_3 et i_3, il vient que i_3 inverse Y_1. Comme i_1 le centralise, i_2 inverse Y_1. Comme $Y_1 \leq Z(F^\circ(B_1))$, on a le résultat suivant.

Lemme 5.49 *Toute involution de B_1 distincte de i_1 inverse Y_1.*

Lemme 5.50 *$B_1 = C^\circ(i_1) > C^\circ(i_2)$. En particulier i_1 et i_2 ne sont pas G-conjuguées.*

Preuve
On a par hypothèse $C^\circ(i_2) \leq B_2 = B_1$, mais $Y_1 \not\leq C^\circ(i_2)$. En particulier $C^\circ(i_2) < B_1$, et $C^\circ(i_2)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Notamment i_1 et i_2 ne sont pas G-conjuguées. □

Notation 5.51 *Soit pour chaque $w_2 \in i_2^G$ l'ensemble définissable $T_1[w_2] = \{b \in B_1,\ b^{w_2} = b^{-1}\}$.*

Lemme 5.52 *Il existe une involution $w_2 \in i_2^G \setminus N(B_1)$ telle que $\mathrm{rg}(T_1[w_2]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_1))^{-i_2})$.*

Notation 5.53 *Nous fixons une telle involution w_2.*

Lemme 5.54 *Aucun sous-groupe propre définissable, connexe, et w_2-invariant ne contient Y_1.*

Preuve
Soient H comme dans l'énoncé et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour H. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors $Y_1 \leq U_{\tilde{q}}(H)$. Pourtant d'après le Fait 1.62 (ou 1.60), $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de B_1 contenant Y_1. En particulier, il vient $w_2 \in N(B_1)$, une contradiction.

Ainsi $\tilde{q} > \tilde{q}_1$, et w_2 inverse $U_{\tilde{q}}(H)$ d'après le Lemme 4.12. Maintenant il existe dans H un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow $\hat{U}_1$ contenant Y_1. D'après le Fait

1.33, il existe une involution w_2' conjuguée à w_2 sous H et qui normalise $\hat{U}_1$. Toujours d'après le Fait 1.62 (resp. Fait 1.60) puis d'après le Lemme 4.2, il vient $w_2' \in B_1$. Il est clair que $w_2' \neq i_1$ d'après le Lemme 5.50. En particulier, w_2' inverse Y_1 d'après le Lemme 5.49 ; maintenant le Fait 1.17 force $[Y_1, U_{\tilde{q}}(H)] = 1$, d'où $U_{\tilde{q}}(H) \leq N^\circ(Y_1) = B_1$, une contradiction. □

Corollaire 5.55 $T_1[w_2]$ *est un groupe abélien définissable, et* $C^\circ_{T_1[w_2]}(Y_1) = 1$.

Preuve
On forme d'abord $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_2}$. S'il est non-trivial, le Lemme 5.54 appliqué avec $H = N^\circ(X)$ donne une contradiction. Ainsi $X = 1$, et en particulier $B_1 \cap B_1^{w_2}$ est abélien.
On forme ensuite $X = C^\circ_{T_1[w_2]}(Y_1)$ que l'on suppose non-trivial, et l'on forme son normalisateur $H = N^\circ(X)$. Même contradiction. □

Preuve de la Proposition 5.48
Après des vérifications triviales, le théorème du corps (Fait 1.38) donne un corps algébriquement clos K tel que $Y_1 \simeq K_+$ et qu'un quotient fini de $T_1[w_2]$ se plonge dans $K^\times$. Par choix de w_2, on a pourtant $\mathrm{rg}(T_1[w_2]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1)^{-i_2}) \geq \mathrm{rg}(Y_1) = \mathrm{rg}(K_+)$, donc $T_1[w_2]$ se surjecte sur $K^\times$. En particulier il contient un 2-tore non-trivial, qui est inversé par w_2. Ceci contredit la structure des 2-sous-groupes de Sylow (Lemme 4.2). Ainsi $B_1 \neq B_2$. En l'absence d'hypothèse distinguant i_2 et i_3, on a aussi montré $B_1 \neq B_3$. □

Nous récoltons enfin les fruits de cette étude.

Proposition 5.56 Y_1 *est un* $\tilde{q}_1$*-groupe définissable, homogène, non-trivial, et normal dans* B_1*. Il est inversé par chaque involution de* B_1 *distincte de* i_1*. (En particulier il est* $2^\perp$*).*

Preuve
Evident d'après le Lemme 5.47 et la Proposition 5.48. □

Pour ne pas finir cette section sur une note optimiste, avouons que nous ne savons pas à ce point si B_2 et B_3 sont nécessairement distincts !

6 La campagne du deuxième centralisateur

Nous menons à présent la seconde grande bataille de cette étude. Attention, nous brisons la symétrie qui restait.

Notation 6.1 *On suppose désormais*

$$\tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3.$$

Nous introduisons, suite au Lemme 4.12, un deuxième principe contrôlant l'action des involutions sur l'unipotence. Faisons noter que le Lemme 6.2 est indépendant du fait que $C^\circ(i_2)$ soit un sous-groupe de Borel ou non.

Lemme 6.2 (cf. Lemme 4.12) *Soient B_0 un sous-groupe de Borel et $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. On suppose $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Alors il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe définissable Y_0 normal dans B_0 et central dans $F^\circ(B_0)$ tel que toute involution de $N(B_0) \setminus i_1^G$ inverse Y_0.*

Preuve
Soit $k \in N(B_0) \setminus i_1^G$: nous montrons qu'elle inverse un sous-groupe conforme à l'énoncé, et dont la définition n'implique pas k.

On suppose d'abord que $F^\circ(B_0)$ n'a pas d'involution. Alors d'après le Fait 1.52, $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(k)$ est un $\tilde{q}_0$-groupe, avec $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3$. On a donc $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(k) = 1$, et k inverse $U_{\tilde{q}_0}(B_0)$, donc inverse aussi $Y_0 = U_{\tilde{q}_0}(Z(F^\circ(B_0)))$. Y_0 convient bien, et ne dépend pas de k (prise dans $N(B_0) \setminus i_1^G$).

On suppose à présent que $F^\circ(B_0)$ a une involution ℓ. Alors $B_0 = C^\circ(\ell)$ admet le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_0$, donc il vient $\ell \in i_1^G$. Ainsi à conjugaison près $B_0 = C^\circ(i_1) = B_1$ d'après le Théorème 5.1. Maintenant d'après la Proposition 5.56, chaque involution de $N(B_1) \setminus i_1^G$ inverse Y_1, et donc $Y_0 = Y_1$ convient. $\square$

Le contrôle d'unipotence connaîtra un dernier visage dans le Lemme 7.8 infra. L'enjeu est désormais de prouver que $C^\circ(i_2)$ aussi est un sous-groupe de Borel.

Théorème 6.3 *$C^\circ(i_2)$ est un sous-groupe de Borel.*

Dans un premier cas, les trois involutions sont conjuguées, et le Théorème 6.3 est immédiat grâce au Théorème 5.1. Dans un deuxième cas, il y a plus de travail !

Nous supposons $C^\circ(i_2) < B_2$.

Au vu du Corollaire 4.7, il y a trois classes de conjugaison d'involutions. Nous allons bien sûr consacrer une attention spéciale à celle de i_2 dans cette étude qui imite assez identiquement notre Section 5, et plus fidèlement encore [Del07, §6]. La seule différence est lors du contrôle de la torsion des ensembles $T_2[w_2]$, qui requerra un soin particulier.

Il est évident d'après la structure du 2-sous-groupe de Sylow (Lemme 4.2) et l'hypothèse qu'il y a trois classes, que deux involutions distinctes et conjuguées ne peuvent pas commuter. Dans la suite, nous affublerons chaque involution d'un indice qui signalera sa classe de conjugaison : s_1 sera toujours une G-conjuguée de i_1, etc.

Lemme 6.4 (cf. Lemme 5.2) *Quitte à échanger i_2 et i_3, on peut supposer que $F^\circ(B_2)$ est $2^\perp$; d'où la décomposition usuelle, &c.*

6.1 Introduction et réduction des pseudo-tores

Notation 6.5 *Soient pour chaque $w_2 \in i_2^G$ l'ensemble définissable*

$$T_2[w_2] = \left\{b \in B_2,\ b^{w_2} = b^{-1}\right\}$$

$$\text{et } I_2 = \left\{w_2 \in i_2^G \setminus N(B_2),\ \mathrm{rg}(T_2[w_2]) \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B_2))^{-i_2}\right)\right\}.$$

Lemme 6.6 *I_2 est un sous-ensemble (définissable) générique de i_2^G.*

Notation 6.7 *Nous fixons jusqu'à nouvel ordre une involution w_2 de I_2.*

Lemme 6.8 *Les éventuels éléments de torsion de $T_2[w_2]$ sont des involutions toutes G-conjuguées entre elles ; leur classe n'est pas celle de i_2.*

Preuve

Soit $t \in T_2[w_2]$ un p-élément. Montrons d'abord que B_2 est sans p-unipotence. En effet, grâce au Fait 1.27, on trouve sinon que $C^\circ_{U_p(B_2)}(t)$ est infini, et ce sous-groupe p-unipotent est commun à B_2 et $B_2^{w_2}$, contradiction au Fait 1.60. L'élément t appartient donc à un p-tore P de B_2, et l'on poursuit comme dans le Lemme 5.19 : $C^\circ(P)$ contient un 2-tore maximal S_1°, et w_2 normalise $C^\circ(t) \geq C^\circ(P) \geq S_1^\circ$ d'où d'après le Lemme 4.2, $w_2 \in C^\circ(t)$.

La torsion de $T_2[w_2]$ est donc formée d'involutions. Que ce ne soit pas des conjuguées de i_2 est clair. Reste à supposer qu'il existe dans $T_2[w_2]$ des involutions j_1 et ℓ_3 qui soient G-conjuguées l'une à i_1 et l'autre à i_3. Mais alors $d(j_1\ell_3)$ doit contenir une involution, qui ne peut être que G-conjuguée à i_2 ; appelons-la k_2. En particulier, $[w_2, k_2] = 1$ et donc $w_2 = k_2 \in d(j_1\ell_3) \leq B_2$, une contradiction. □

Le mot d'ordre dans les deux lemmes suivant est d'exporter le seul merveilleux sous-groupe disponible, à savoir Y_1 de la Notation 5.46. Nous rappelons par ailleurs que deux involutions de B_2 conjuguées (dans B_2 ou dans G, cela revient au même) ont même action sur $Z(F^\circ(B_2))$.

Lemme 6.9 *Il y a au plus une G-conjuguée de i_1 dans $T_2[w_2]$.*

Preuve

On suppose qu'il y en a deux : disons $j_1 \neq j_1' \in T_2[w_2]$. Soit $\ell_3 = j_1 w_2$.

Montrons que $d(j_1 j_1')$ est connexe. Supposons d'abord qu'il existe dans $d(j_1 j_1')$ une involution ; elle ne peut être que G-conjuguée à i_3 ; appelons-la s_3. Alors $[w_2, j_1] = [j_1, s_3] = [s_3, w_2] = 1$, ce qui force $w_2 = j_1 s_3 \in B_2$, une absurdité. Ainsi $d(j_1 j_1')$ est sans involution. Maintenant s'il existe dans $d(j_1 j_1')$ un p-élément x, alors on élimine la p-unipotence comme dans le Lemme 6.8, et on en déduit que $C^\circ(x)$ contient un 2-tore maximal de G. Comme $C^\circ(x)$ est normalisé par j_1, il vient d'après le Lemme 4.2 $j_1 \in C^\circ(x)$, donc x est une involution, contradiction. Ainsi $d(j_1 j_1')$ est-il connexe.

Le groupe $C^\circ(j_1 j_1')$ est non-trivial, propre, définissable, connexe, et $\langle j_1, w_2\rangle$-invariant ; gâce au Corollaire 2.5, on l'inclut dans un sous-groupe de Borel B_0

encore $\langle j_1, w_2\rangle$-invariant (et donc également ℓ_3-invariant) ; soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 4.13, $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$. Comme j_1 et j_1' ont même action sur $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, on a d'autre part $\tilde{q}_0 \geq \tilde{q}_2$.

Si $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$, alors $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2))) \leq U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_0)))$, et le Fait 1.62 impose $B_0 = B_2$. En particulier, w_2 normalise B_2, une contradiction. Ainsi $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$.

D'après le Lemme 6.2, il existe dans B_0 un $\tilde{q}_0$-sous-groupe Y_0 normal dans B_0 et inversé par w_2 et ℓ_3. En particulier, Y_0 est centralisé par j_1 et donc $Y_0 \leq C^\circ(j_1)$. Maintenant si l'on écrit $j_1 = i_1^g$, il vient d'après la Proposition 5.56 que $Y_1^g \leq C^\circ(j_1)$ est lui aussi inversé par w_2. Le Fait 1.17 force $[Y_0, Y_1^g] = 1$. En particulier $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, donc $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$ et $Y_1^g \leq U_{\tilde{q}_1}(B_0)$. Le Fait 1.62 entraîne $B_0 = B_1^g = C(j_1)$.

Ainsi a-t-on $C^\circ(j_1 j_1') \leq B_0 = C(j_1)$; en particulier $j_1 j_1' \in d^\circ(j_1 j_1') \leq C^\circ(j_1 j_1') \leq C(j_1)$, donc j_1 centralise et inverse $j_1 j_1'$ qui doit alors être une involution. Enfin $[j_1, j_1'] = 1$, une contradiction. □

Lemme 6.10 *Il y a au plus une G-conjuguée de i_3 dans $T_2[w_2]$.*

Preuve

On suppose qu'il y en a deux : disons $\ell_3 \neq \ell_3' \in T_2[w_2]$. Comme précédemment, $d(\ell_3\ell_3')$ est connexe. L'involution $w_2\ell_3$ est une G-conjuguée de i_1, disons j_1.

On inclut désormais $C^\circ(\ell_3\ell_3')$ dans un sous-groupe de Borel $\langle w_2, \ell_3\rangle$-invariant que l'on appelle B_0, et l'on note $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. Comme ℓ_3 et ℓ_3' ont même action sur $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, on a $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2))) \leq B_0$.

Si $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$, il vient $B_0 = B_2$ et donc B_2 est w_2-invariant, une contradiction. Ainsi $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. D'après le Lemme 6.2, il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe Y_0 normal dans B_0 et inversé par w_2 et ℓ_3. En particulier, $j_1 = w_2\ell_3$ centralise Y_0. Si l'on écrit $j_1 = i_1^g$, on trouve dans B_1^g l'involution w_2, qui inverse Y_0 et Y_1^g, et le premier normalise le second. Il vient ainsi $[Y_0, Y_1^g] = 1$, et donc $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$. Le Fait 1.62 impose $B_0 = B_1^g$.

On a donc $B_0 = C(j_1)$ et $C^\circ(\ell_3\ell_3') \leq C(j_1)$. Mais alors $\ell_3\ell_3' \in C(j_1)$, d'où $\ell_3 = j_1 w_2 \in C(\ell_3\ell_3')$. Ainsi $\ell_3\ell_3'$ est une involution, ce qui est une contradiction.
□

Corollaire 6.11 *$\tau_2[w_2]$ est un sous-ensemble générique de $T_2[w_2]$; la clôture définissable de chacun de ses éléments est sans torsion.*

Ces difficultés passées, nous travaillons avec la classe de i_2 sans nous soucier des deux autres, et la méthode de [Del07, §6] se déroule sans encombre.

Lemme 6.12 (cf. Lemme 5.25) *Aucune B_2-conjuguée de i_2 n'inverse $\tau_2[w_2]$. Si $t \in \tau_2[w_2]^\#$, aucune B_2-conjuguée de i_2 ne centralise t.*

Preuve

Celle du Lemme 5.25 convient. □

Proposition 6.13 (cf. Lemme 5.21) *Il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(\tau_2[w_2])$ qui est inclus dans $\tau_2[w_2]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$. Nous notons T_s un tel sous-groupe.*

Preuve

Remplacer partout dans la preuve du Lemme 5.21 $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ par $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$. Les seuls points litigieux sont alors :

- L'emploi du Lemme 5.17 ; mais il n'intervenait qu'au cas où G n'aurait qu'une seule classe de conjugaison, cas clairement exclu par l'hypothèse de la section en cours.
- Celui du Lemme 5.19 ; mais le Corollaire 6.11 est son analogue exact.

La preuve se déroule ainsi sans encombre. □

Proposition 6.14 (cf. Proposition 5.23) *$B_2 \cap B_2^{w_2}$ est abélien.*

Preuve

Sinon $X = F(B_2) \cap F(B_2^{w_2})$ n'est pas trivial. Soient $N = N^\circ(X)$ et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. Comme $w_2 \notin B_2$ normalise $N \geq U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, il est clair que $\tilde{q} > \tilde{q}_2$. Si l'on fixe un $\tilde{q}_2$-sous-groupe de Sylow $\hat{U}_2$ de N contenant $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, il existe une involution w_2' conjuguée sous N à w_2 et qui normalise $\hat{U}_2$; en particulier $w_2' \in B_2$, et elle y est conjuguée à i_2. En outre w_2' inverse $U_{\tilde{q}}(N)$.

On montre à présent que i_2 centralise $Z(F^\circ(B_2))$. En effet, soit sinon $Y_2 = (Z(F^\circ(B_2)))^{-i_2}$ supposé non-trivial. Il est clair que w_2' inverse Y_2. Maintenant $Y_2 \leq N$, donc il vient $[Y_2, U_{\tilde{q}}(N)] = 1$, et $U_{\tilde{q}}(N) \leq C(Y_2)$, mais Y_2 est normal dans B_2, et donc $\tilde{q}_2 \geq \tilde{q}$, une contradiction. Ainsi i_2 centralise $Z(F^\circ(B_2))$, et comme elle ne centralise pas tout le sous-groupe de Fitting $F^\circ(B_2)$, il est clair que celui-ci n'est pas abélien. En particulier, d'après le Lemme 1.68, X est homogène.

Comme $\tilde{q} > \tilde{q}_2$, $N^\circ_{B_2}(X)$ est inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts. D'après le Fait 1.65, $(N^\circ_{B_2}(X))'$ est homogène. D'autre part selon le Fait 1.55, $[T_s, U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))]$ est un $\tilde{q}_2$-groupe homogène, et non-trivial par choix de T_s. Comme il est inclus dans $(N^\circ_{B_2}(X))'$, on en déduit que $(N^\circ_{B_2}(X))'$ est $\tilde{q}_2$-homogène. Comme $((B_2 \cap B_2^{w_2})^\circ)' \leq (N^\circ_{B_2}(X))'$, il vient que $((B_2 \cap B_2^{w_2})^\circ)'$ est lui aussi $\tilde{q}_2$-homogène. Et comme $((B_2 \cap B_2^{w_2})^\circ)' \leq X$ qui est homogène, on en déduit que X est lui-même $\tilde{q}_2$-homogène.

En particulier, $F_s(B_2)$ commute avec X, donc $F_s(B_2) \leq N$. Comme $\tilde{q} > \tilde{q}_2$, le Fait 1.67 implique l'abélianité de $F_s(B_2)$. Il vient donc $U_{(\infty,s)}(B_2') \leq F_s(B_2) \leq Z(F^\circ(B_2)) \leq C(i_2)$. Maintenant il est clair que i_2 centralise un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B_2, donc qu'une B_2-conjuguée j_2 de i_2 centralise $\tau_2[w_2]$. En particulier $j_2 \in C(\tau_2[w_2])$ qui est w_2-invariant, si bien que par structure du 2-sous-groupe de Sylow il vient $w_2 \in C(\tau_2[w_2])$, une contradiction. □

6.2 Intersection maximale et concentration

Le lecteur ne doit pas s'inquiéter des classes i_1^G et i_3^G : la preuve du Théorème 6.3 imitera fidèlement désormais celle du Théorème 5.1. D'ailleurs il a bien vu comment dans la preuve de la Proposition 6.14, le Lemme 6.2 nous tirait d'embarras. La question de la "hiérarchie" des involutions n'intervient plus.

Notation 6.15 *Soit* $B_M \geq C^\circ_{B_2}(\tau_2[w_2])$ *un sous-groupe de Borel distinct de* B_2 *et maximisant* $H = (B_2 \cap B_M)^\circ$ *parmi de telles intersections. (L'existence est comme dans le Lemme précédant la Notation 5.27.)*

Proposition 6.16 (cf. Proposition 5.28) H_M *n'est pas abélien.*

Preuve
La même. □

Proposition 6.17 (cf. Lemme 5.29) $d_\infty(H'_M) = s$ *et* $\tilde{q}_M < \tilde{q}_2$.

Preuve
La même. □

Corollaire 6.18 (cf. Corollaire 5.30) *(On peut à conjugaison près supposer que)* Q *est un sous-groupe de Carter de* B_2 *et de* B_M.

Notation 6.19 (cf. Notation 5.32) *Soient* $\Sigma_2 = U_{(\infty,s)}(H) = F_s(H)$ *et* $\check{\Sigma}_2 = U_{(\infty,s)}(O(\Sigma_2))$.

Lemme 6.20 (cf. Lemme 5.33) Σ_2 *est un* (∞, s)*-sous-groupe de Sylow abélien de* B_2*. Il contient* $\tau_2[w_2]$ *qui est* (∞, s)*-homogène.*

Preuve
La même. □

Notation 6.21 (cf. Notation 5.34) *Soit* $K_2 = [\Sigma_2, i_2]$.

Proposition 6.22 (cf. Proposition 5.35) K_2 *ne dépend pas de* i_2*, ni de* w_2*. C'est un* (∞, s)*-groupe abélien homogène et sans involution, de même rang que* $\tau_2[w_2]$*. Enfin* $B_2 = K_2 \rtimes C^\circ(i_2)$ *et* B_2 *est l'unique sous-groupe de Borel contenant* $C^\circ(K_2)$.

Preuve
La même. □

Proposition 6.23 (cf. Lemme 5.40) $\check{\Sigma}_2$ *contient* $\tau_2[w_2]$ *ainsi que* K_2*. En outre il existe un* (∞, s)*-sous-groupe de Sylow* L *de* $C^\circ(\tau_2[w_2])$ *tel que* $U_{(\infty,s)}(O(L)) = \check{\Sigma}_2$.

Preuve
Celle du Lemme 5.40 (relire aussi la remarque ouvrant 5.5). □

Preuve du Théorème 6.3
Comme il y a trois classes de conjugaison d'involutions, la combinatoire mise en place par le Corollaire 5.42 est aisément vérifiée : on ne travaille en effet qu'avec les involutions de i_2^G. En particulier on peut concentrer génériquement les conjugués de K_2 dans B_2, et cætera. Contradiction à la simplicité. □

6.3 Conséquences - B_2 distinct de B_3

Les deux centralisateurs $C^\circ(i_1)$ et $C^\circ(i_2)$ sont des sous-groupes de Borel (B_1 et B_2), mais nous ne savons pas encore s'il en va de même de $C^\circ(i_3)$; à vrai dire nous ne savons toujours pas si B_3 est distinct de B_2 ! Voici enfin la réponse (heureusement positive).

Proposition 6.24 *Les trois sous-groupes de Borel sont distincts.*

Au vu de la Proposition 5.48, il suffit de prouver $B_2 \neq B_3$. Nous supposons donc $B_2 = B_3$, et prouvons une contradiction. Rappelons que d'après le Théorème 6.3, $C^\circ(i_2) = B_2$. En particulier grâce au Lemme 4.3, on a $C^\circ(i_3) < B_2$, et i_2 et i_3 ne sont donc pas G-conjuguées. D'après le Corollaire 4.7, il y a ainsi trois classes de conjugaison d'involutions.

La preuve de la Proposition 6.24 commence par un poncif.

Lemme 6.25 *Il existe une involution* $w_3 \in i_3^G \setminus B_2$ *telle que* $\mathrm{rg}(T_2[w_3]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_2))^{-i_3})$*, où* $T_2[w_3] = \{t \in B_2, t^{w_3} = t^{-1}\}$.

Notation 6.26 *Nous fixons une telle involution w_3. Comme i_2 et w_3 ne sont pas conjuguées, il existe dans $d(i_2w_3)$ une involution, qui ne peut être que conjuguée à i_1. Nous la notons j_1.*

Lemme 6.27 *L'ensemble τ des carrés d'éléments de $T_2[w_3]$ est un sous-ensemble générique de $T_2[w_3]$; en outre pour tout t de τ, $d(t)$ est sans torsion et inclus dans τ.*

Preuve

Nous démontrons qu'il y a dans $T_2[w_3]$ au plus un élément de torsion, qui se trouve être une involution ; cela prouvera le tout.

Soit $t \in T_2[w_3]$ un p-élément. B_2 est alors sans p-unipotence, car sinon d'après le Fait 1.27, $Z(U_p(B_2) \cdot \langle t \rangle)$ est infini, et notamment $C^\circ_{U_p(B_2)}(t) \neq 1$. Ce sous-groupe p-unipotent est inclus tant dans B_2 que dans $B_2^{w_3}$, et le Fait 1.60 impose avec le Lemme 4.2 que $w_3 \in B_2$, contradiction.

Ainsi t appartient-il à un p-tore de B_2, qui centralise d'après le Fait 1.24 un 2-tore S_1° maximal dans B_2, donc maximal dans G. Il vient $S_1^\circ \leq C^\circ(t)$ qui est w_3-invariant, donc d'après le Lemme 4.2, $w_3 \in C^\circ(t)$, et donc t est une involution.

Il est clair que t qui commute à w_3 ne peut lui être conjuguée. Elle ne saurait pas davantage être conjuguée à i_2, car sinon $t = i_2$ (seule involution de sa classe dans B_2), et $[w_3, i_2] = 1$, une contradiction. Ainsi $t \in i_1^G$.

Nous supposons à présent qu'il y a dans $T_2[w_3]$ *deux* involutions distinctes t_1 et t'_1 (toutes deux conjuguées à i_1 d'après ce qui précède). Alors dans $C(t_1t'_1)$, on trouve i_2 et w_3, et donc aussi j_1 (voir Notation 6.26). Mais d'après le Lemme 1.31, il existe une $C(t_1t'_1)$-conjuguée de t_1 qui centralise j_1, et cela force $t_1 = j_1 \in C(t_1t'_1)$. En particulier $t_1t'_1$ est une involution, contradiction.

L'argument donnant la généricité de τ dans $T_2[w_3]$ est comme dans le Lemme 5.19. $\square$

Lemme 6.28 *τ est un sous-groupe définissable, abélien, connexe, et inclus dans $F^\circ(B_2)$; de plus l'involution j_1 (Notation 6.26) l'inverse.*

Preuve
Soit $t \in \tau^\#$. Nous montrons que j_1 inverse t. En effet il est clair que j_1 normalise $d(t)$, qui n'a pas d'involution d'après le Lemme 6.27. Supposons donc que j_1 n'inverse pas t : alors il existe $s \in d(t)^\#$ tel que $s^{j_1} = s$. Maintenant $C(s)$ contient le Viergruppe $\langle j_1, i_2\rangle$, mais il est w_3-invariant. D'après le Lemme 1.31 et d'après le Lemme 4.2, il vient $w_3 \in C(s)$. Mais w_3 inverse s, qui est donc une involution de $d(t) \subseteq \tau$, ce qui contredit le Lemme 6.27.

Ainsi j_1 inverse bien t (quelconque dans τ). Mais $j_1 \in C(i_2) = B_2$ et $d(t)$ est $2^\perp$, donc par un argument classique il vient $d(t) \leq F^\circ(B_2)$.

On a alors $\tau \subseteq F^\circ(B_2)$. Comme les éléments de τ ont leur clôture définissable connexe (toujours le Lemme 6.27), il vient $\tau \subseteq (F^\circ(B_2) \cap F^\circ(B_2)^{w_3})^\circ$, et d'après le Fait 1.67 ceci est un groupe abélien. Il en va donc de même de τ, qui est définissable. L'involution j_1 l'inverse. □

Preuve de la Proposition 6.24
Le sous-groupe τ est inclus dans $F^\circ(B_2)$; il est centralisé par i_2 et inversé par j_1. Soit $\ell_3 = j_1 i_2$, clairement conjuguée à i_3. On a alors par choix de w_3 que $\mathrm{rg}(\tau) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_2))^{-i_3}) \geq \mathrm{rg}(\tau)$, donc τ est l'unique sous-groupe générique de l'ensemble $(F^\circ(B_2))^{-i_3}$. En particulier $C_{B_2}(i_3)$ le normalise et $\tau \rtimes C_{B_2}(i_3)$ est un sous-groupe générique de B_2. Il vient ainsi $B_2 = \tau \rtimes C_{B_2}(i_3) = N^\circ(\tau)$, donc w_3 normalise B_2, une contradiction qui achève la preuve de la Proposition 6.24.
□

6.4 Conséquences - Y_2

Nous introduisons à présent un analogue dans B_2 du sous-groupe Y_1 de la Notation 5.46.

Notation 6.29 *Soit $U_2 = [U_{\tilde{q}_2}(B_2), B_2]$.*

Lemme 6.30 *U_2 est un sous-groupe non-trivial, définissable, $\tilde{q}_2$-homogène, et normal dans B_2.*

Preuve
La définissabilité et la normalité sont évidentes. La $\tilde{q}_2$-homogénéité résulte (si nécessaire) du Fait 1.55. Maintenant si U_2 est trivial, alors $U_{\tilde{q}_2}(B_2) \leq B_3$ et le Fait 1.62 (ou le Fait 1.60) avec $\tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3$ force $B_2 = B_3$, une contradiction. □

Notation 6.31 *Soit Y_2 un sous-groupe B_2-minimal de U_2.*

Proposition 6.32 *Y_2 est un sous-groupe définissable $\tilde{q}_2$ -homogène normal dans B_2 ; toutes les involutions de B_2 distinctes de i_2 l'inversent. (En particulier il est $2^\perp$).*

Preuve

Soit $X = C^\circ_{Y_2}(i_3)$. Si $X \neq 1$, alors par B_2-minimalité de Y_2 et le fait que X est encore normal dans B_2, on a $X = Y_2 \leq B_3$. En particulier le Fait 1.62 (ou 1.60) force encore $B_2 = B_3$, une contradiction à la Proposition 6.24.

Ainsi $X = 1$, et i_3 inverse Y_2 que i_2 centralise ; donc i_1 inverse aussi. Comme $Y_2 \leq Z(F^\circ(B_2))$, il est clair que toutes les involutions de B_2 distinctes de i_2 inversent Y_2. □

7 Conjugaison des involutions

Dans cette section nous prouverons que les trois involutions sont conjuguées. Jusqu'au petit carré blanc suivant le Corollaire 7.12 infra, nous supposons qu'il existe deux involutions non-conjuguées. D'après le Corollaire 4.7, il y a exactement trois classes d'involutions.

Rappelons que chaque $C(i)$, où $i \in I(G)$, est alors connexe d'après le Fait 1.22. Commençons par deux principes.

Lemme 7.1 *Deux involutions distinctes et G-conjuguées ne peuvent commuter.*

Preuve

Evident d'après le Lemme 4.2 et l'hypothèse que les classes sont distinctes. □

Lemme 7.2 *Si j et k sont deux involutions non-conjuguées, alors la clôture définissable $d(jk)$ contient une unique involution ℓ, qui représente la troisième classe de conjugaison.*

Preuve

D'après le Lemme 4.2, $d(jk)$ inversé par j ne contient pas de 2-tore non-trivial. Comme j et k ne sont pas conjuguées, il n'est pourtant pas 2-divisible : soit donc ℓ l'unique involution de $d(jk)$. Il est clair d'après le Lemme 7.1 que ℓ n'est G-conjuguée ni à j ni à k. □

7.1 τ général

Nous revenons aux ensembles $T[w]$ et $\tau[w]$ (cf. Notations 5.3 et 5.18) avec une belle généralité.

Notation 7.3 *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. Soit $T_{C(\ell)}[k]$ l'ensemble $\{t \in C(\ell),\ t^k = t^{-1}\}$. Soit aussi $\tau_{C(\ell)}[k]$ l'ensemble des carrés des éléments de $T_{C(\ell)}[k]$.*

Attention, nous ne préjugeons rien du rang de ces ensembles : on va même montrer qu'ils sont triviaux ! D'autre part si pour $\ell \in i_1^G \sqcup i_2^G$ il est vrai que $C(\ell)$ est un sous-groupe de Borel, nous ne disposons (ni n'avons besoin) d'un tel résultat pour $\ell \in i_3^G$.

Proposition 7.4 (cf. Lemmes 5.19, 6.9 et 6.10) *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. On fixe un sous-groupe de Borel B_ℓ contenant $C(\ell)$, et l'on suppose $k \notin B_\ell$. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-ensemble générique de $T_{C(\ell)}[k]$, et si $t \in \tau_{C(\ell)}[k]^\#$, alors sa clôture définissable $d(t)$ est sans torsion.*

Preuve

Nous allons montrer que $T_{C(\ell)}[k]$ contient au plus un élément de torsion. Soit en effet $t \in T_{C(\ell)}[k]$ un p-élément. On exclut comme dans le Lemme 6.9 la p-unipotence de $C(\ell)$ (ceci utilise non seulement que $k \notin C(\ell)$, mais aussi $k \notin B_\ell$). Toujours comme dans le Lemme 6.9, l'élément t est alors dans un p-tore non-trivial P, et $C^\circ(P)$ contient un 2-tore maximal S_1° de G. Ainsi $S_1^\circ \leq C^\circ(P) \leq C^\circ(t)$ qui est k-invariant, ; avec le Lemme 1.31, on peut supposer que S_1° est k-invariant ; d'après le Lemme 4.2, $k \in S_1^\circ \leq C^\circ(t)$. En particulier, t est une involution.

Il est clair que cette involution n'est conjuguée ni à k, ni à ℓ ; nous noterons j les involutions de sa classe de conjugaison ; nous affirmons qu'il y a au plus une telle j dans $T_{C(\ell)}[k]$. Cela démontrera le tout, pourvu qu'on se reporte à la preuve du Lemme 5.19 pour conclure.

Soient donc j et j' deux involutions de $T_{C(\ell)}[k]$. On les suppose distinctes et l'on montre une contradiction. Comme on l'a dit, j et j' représentent la troisième G-classe de conjugaison. Maintenant $\ell \in C(jj')$, et aussi $k \in C(jj')$.

D'après le Lemme 7.2, il existe dans $d(k\ell) \leq C(jj')$ une involution $\hat{j}$, dont la G-classe est nécessairement celle de j et j'. Comme j normalise $C(jj')$, d'après le Lemme 1.31 il existe une involution $\check{j}$ conjuguée sous $C(jj')$ à j et qui centralise $\hat{j}$. D'après le Lemme 7.1, il vient $\check{j} = \hat{j}$. En particulier, $\hat{j}$ centralise et inverse jj', qui est donc une involution, d'où j et j' commutent. Cela contredit le Lemme 7.1.

Pour le reste nous renvoyons à la preuve du Lemme 5.19. Les techniques y développées prouvent que pour chaque $t \in \tau_{C(\ell)}[k]^\#$, la clôture définissable $d(t)$ est sans torsion, et la généricité de $\tau_{C(\ell)}[k]$ dans $T_{C(\ell)}[k]$ est établie à l'avenant.
$\square$

Corollaire 7.5 *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. On fixe un sous-groupe de Borel B_ℓ contenant $C(\ell)$, et l'on suppose $k \notin B_\ell$. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-groupe abélien définissable et connexe de $F^\circ(B_\ell)$. En outre l'unique involution de $d(k\ell)$ inverse $\tau_{C(\ell)}[k]$.*

Preuve

Nous noterons plus simplement $\tau = \tau_{C(\ell)}[k]$. L'affirmation est évidente si $\tau = 1$. On suppose donc $\tau \neq 1$; soit $t \in \tau^\#$. Alors $k, \ell \in N(d(t))$, et d'après le Lemme 7.2, il y a dans $d(k\ell) \leq N(d(t))$ une involution j représentant la troisième classe de conjugaison ; en outre $j \in C(\ell)$.

Nous considérons l'action de j sur $d(t)$ qui est abélien et sans involution d'après la Proposition 7.4. Supposons qu'il existe un élément $1 \neq s \in C_{d(t)}(j)$. Alors $\ell, j \in C(s)$, donc $k' = \ell j$ est une involution de $C(s)$, qui est nécessairement

G-conjuguée à k. D'après le Lemme 1.31, k centralise une $C(s)$-conjuguée de k', et le Lemme 7.1 impose $k \in C(s)$. Comme k inverse $s \in \tau$, on a que s est une involution, une contradiction à la Proposition 7.4. Ainsi j inverse $d(t)$. Comme $d(t)$ est sans torsion et que $j \in C(\ell) \leq B_\ell$, le Lemme 1.37 et un calcul classique imposent $t \in F^\circ(B_\ell)$.

A ce point nous avons prouvé que l'ensemble τ est inclus dans $F^\circ(B_\ell)$. Comme il est également inclus dans $F^\circ(B_\ell)^k$, il est dans leur intersection, et d'après la Proposition 7.4 on a même que $\tau \subseteq (F^\circ(B_\ell) \cap F^\circ(B_\ell)^k)^\circ$. Maintenant d'après le Fait 1.67 et le fait que k ne normalise pas B_ℓ, le groupe $(F^\circ(B_\ell) \cap F^\circ(B_\ell)^k)^\circ$ est abélien, et donc τ aussi. Il est désormais clair que τ est un groupe abélien définissable et connexe. On a prouvé que l'involution j l'inverse. $\square$

7.2 Finitude

Le Corollaire 7.5 a de remarquables conséquences. Nous renvoyons aux Notations 5.46 et 6.31, ainsi qu'aux Propositions 5.56 et 6.32 pour les sous-groupes Y_1, Y_2, et leurs propriétés.

Corollaire 7.6 *Soient $\ell \in i_1^G \sqcup i_2^G$ et $k \notin \ell^G$ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est trivial.*

Preuve
Supposons qu'il existe une ℓ et une k démentant l'énoncé, et menons la configuration à la contradiction. D'après la Proposition 7.4 et le Corollaire 7.5, $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-groupe de $F^\circ(C(\ell))$; ici $B_\ell = C(\ell)$ d'après les Théorèmes 5.1 et 6.3. Nous noterons plus simplement $\tau = \tau_{C(\ell)}[k]$.

D'après le Lemme 7.2, il existe dans $d(k\ell)$ une involution représentant la classe manquante, et que nous notons j.

Soit $N = N^\circ(\tau)$. Ce groupe est $\langle j, k\rangle$-invariant, on l'inclut grâce au Corollaire 2.5 dans un sous-groupe de Borel B_0 encore $\langle j, k\rangle$-invariant. Soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 4.13, on a $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$.

On suppose (à conjugaison près) que $\ell = i_1$. Alors il vient $Y_1 \leq Z(F^\circ(B_1)) \leq N \leq B_0$, donc $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$. Le Fait 1.62 (ou 1.60) appliqué avec Y_1 impose $U_{\tilde{q}_1}(B_0) = U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ puis $B_0 = B_1$. En particulier, k normalise $B_1 = C(\ell)$, une contradiction.

On a donc (à conjugaison près) $\ell = i_2$. Cette fois il vient $Y_2 \leq N \leq B_0$, et pour fuir la contradiction du Fait 1.62 (ou 1.60), il vient $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Soit Y_0 un sous-groupe de B_0 comme dans le Lemme 6.2. Notons que j ou bien k est une involution de i_3^G. Les deux inversent Y_2.

Supposons que ce soit j ; elle inverse alors Y_0 d'après le Lemme 6.2. Dans B_0, il y a Y_2 et Y_0 ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par j, donc le Fait 1.17 impose $[Y_2, Y_0] = 1$. En particulier $Y_0 \leq N^\circ(Y_2) = B_2$, ce qui contredit $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Il est clair que si c'est k l'involution de i_3^G, le même calcul est valable ! $\square$

Nous avons donc rendu triviaux les ensembles $\tau_{C(i_1)}[w_2]$, $\tau_{C(i_1)}[w_3]$, $\tau_{C(i_2)}[w_1]$, et $\tau_{C(i_2)}[w_3]$. Pour pouvoir mener de victorieux calculs de rang, il faut encore réduire à néant les ensembles de la forme $\tau_{C(i_3)}[w_1]$ (par exemple). C'est ce que nous faisons désormais, avec la proposition suivante.

Proposition 7.7 *Soit $w_1 \in i_1^G \setminus B_3$. Alors $\tau_{C(i_3)}[w_1]$ est trivial.*

La preuve de la Proposition 7.7 nécessitera des notations et un argument sophistiqué, reposant sur un troisième principe de contrôle de l'unipotence.

Lemme 7.8 (cf. Lemmes 4.12 et 6.2) *Soient B_0 un sous-groupe de Borel et $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. On suppose $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$. Alors il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe définissable Y_0 sans involution, normal dans $N(B_0)$, et central dans $F^\circ(B_0)$, tel que toute involution de $N(B_0) \cap i_3^G$ inverse Y_0.*

Preuve
Si $F^\circ(B_0)$ est sans involution, et notant ℓ_3 une involution de $N(B_0) \cap i_3^G$, on a que $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(\ell_3)$ est un $\tilde{q}_0$-groupe d'après le Fait 1.52. Par définition de $\tilde{q}_0$, il est trivial. Dans ce premier cas, le sous-groupe $Y_0 = U_{\tilde{q}_0}(Z(F^\circ(B_0)))$ convient évidemment.

On suppose à présent que $F^\circ(B_0)$ possède une involution ; c'est une G-conjuguée de i_1 ou i_2 (mais pas de i_3). Le sous-groupe Y_i associé (Notation 5.46 ou 6.31) convient alors (ne pas oublier que dans ce cas $N(B_0) = B_0$). □

Nous fixons des notations pour la preuve de la Proposition 7.7.

Soit $\tau = \tau_{C(i_3)}[w_1] \neq 1$ la démentant, nous pousserons la configuration à la faute. Soit k_2 l'unique involution de $d(w_1 i_3)$; c'est une G-conjuguée de i_2 qui inverse le groupe abélien connexe $\tau \leq F^\circ(B_3)$ (Corollaire 7.5).

Soit $\ell_3 = w_1 k_2$. Soit V_0 le Viergruppe $\{1, w_1, k_2, \ell_3\}$. Ecrivons $w_1 = i_1^g$ et $k_2 = i_2^h$ pour un g et un h de G.

Formons $N = N^\circ(\tau)$ qui est $\langle w_1, k_2\rangle$-invariant ; d'après le Corollaire 2.5, N est inclus dans un sous-groupe de Borel B_0 encore $\langle w_1, k_2\rangle$-invariant. Soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0.

Comme $\tau \leq F^\circ(B_3)$ (Corollaire 7.5), on a $U_{\tilde{q}_3}(Z(F^\circ(B_3))) \leq N^\circ(\tau) \leq B_0$. En particulier il faut $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$ pour échapper à une contradiction devenue classique. Soit Y_0 donné par le Lemme 7.8. Précisons que Y_0 est un $\tilde{q}_0$-groupe abélien sans involution, que V_0 le normalise, et que ℓ_3 l'inverse.

Lemme 7.9 *L'action de w_1 (et donc, celle de k_2) est "sans mélange" sur Y_0 (i.e., de pure centralisation ou bien de pure inversion).*

Preuve
On suppose qu'il existe $x \in C_{Y_0}(w_1)^\#$. Dans $C(w_1)$, se trouvent alors $d(x)$ (qui est $2^\perp$) et Y_1^g ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3, donc d'après le Fait 1.17, on a $[x, Y_1^g] = 1$. Ainsi $Y_1^g \leq C^\circ(x)$ qui est un groupe V_0-invariant, que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_α encore V_0-invariant. Nous en choisissons un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_\alpha$. Puisque $Y_1^g \leq B_\alpha$, il est clair d'après le Corollaire 4.13 que $\tilde{q}_\alpha = \tilde{q}_1$. Le Fait 1.62 appliqué à Y_1

impose alors $U_{\tilde{q}_1}(B_\alpha) = U_{\tilde{q}_1}(B_1^g)$ puis $B_\alpha = B_1^g = C(w_1)$. En particulier, $Y_0 \leq C^\circ(x) \leq B_\alpha = C(w_1)$.

On suppose à présent qu'il existe $y \in C_{Y_0}(k_2)^\#$. Dans $C(k_2)$, se trouvent alors $d(y)$ (qui est $2^\perp$) et Y_2^h ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3, donc d'après le Fait 1.17, on a $[y, Y_2^h] = 1$. Ainsi $Y_2^h \leq C^\circ(y)$ qui est un groupe V_0-invariant, que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_β encore V_0-invariant. Nous en choisissons un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_\beta$. Si $\tilde{q}_\beta > \tilde{q}_2$, soit Y_β un sous-groupe comme dans le Lemme 6.2. Dans B_β, se trouvent alors Y_2^h et Y_β ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3. D'après le Fait 1.17, il vient $[Y_\beta, Y_2^h] = 1$, et donc $Y_\beta \leq N^\circ(Y_2^h) = B_2^h$, une contradiction à l'hypothèse $\tilde{q}_\beta > \tilde{q}_2$. Ainsi $\tilde{q}_\beta = \tilde{q}_2$. Maintenant le Fait 1.62 appliqué avec Y_2 force $U_{\tilde{q}_2}(B_\beta) = U_{\tilde{q}_2}(B_2^h)$ puis $B_\beta = B_2^h = C(k_2)$. Ainsi $Y_0 \leq C^\circ(y) \leq B_\beta = C(k_2)$.

La conclusion est que s'il existe simultanément un $x \in C_{Y_0}(w_1)^\#$ et un $y \in C_{Y_0}(k_2)^\#$, alors $Y_0 \leq (C(w_1) \cap C(k_2))^\circ = C^\circ(V_0) \leq C^\circ(\ell_3)$, une contradiction au fait que $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$. □

Preuve de la Proposition 7.7

Grâce au Lemme 7.9, l'involution w_1 ou bien centralise Y_1, ou bien l'inverse. Cela signifie que w_1 ou bien k_2 centralise Y_0.

Supposons que w_1 centralise Y_0. Dans $C(w_1)$ se trouvent alors Y_0 et Y_1^g ; l'un normalise l'autre et ℓ_3 inverse les deux. D'après le Fait 1.17 il vient $[Y_0, Y_1^g] = 1$. En particulier $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, $Y_0 \leq N^\circ(Y_1^g) = B_1^g$, et $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$. Le Fait 1.62 (ou 1.60) appliqué avec Y_1^g impose alors $U_{\tilde{q}_1}(B_0) = U_{\tilde{q}_1}(B_1)^g$, d'où $B_0 = B_1^g = C(w_1)$. Ainsi $\tau \leq N^\circ(\tau) \leq B_0 = C(w_1)$, une contradiction au fait que w_1 inverse τ.

Supposons que k_2 centralise Y_0. Dans $C(k_2)$ se trouvent alors Y_0 et Y_2^h ; l'un normalise l'autre et ℓ_3 inverse les deux. D'après le Fait 1.17 il vient $[Y_0, Y_2^h] = 1$. En particulier $Y_2^h \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, $Y_0 \leq N^\circ(Y_2^h) = B_2^h$, et $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$. Le Fait 1.62 (ou 1.60) appliqué avec Y_2^h impose alors $U_{\tilde{q}_2}(B_0) = U_{\tilde{q}_2}(B_2^h)$, d'où $B_0 = B_2^h = C(k_2)$. Ainsi $\tau \leq N^\circ(\tau) \leq B_0 = C(k_2)$, une contradiction au fait que k_2 inverse τ.

Ceci achève la preuve de la Proposition 7.7. □

7.3 Calculs

Corollaire 7.10 $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_2))$. *En outre pour g générique dans G, il existe dans le coset $gC(i_1)$ une involution $w_2 \in i_2^G$.*

Preuve

On considère la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi_{12}: & i_1^G \setminus C(i_2) & \to & G/C(i_2) \\ & w_1 & \mapsto & w_1 C(i_2). \end{array}$$

La fibre au-dessus de $w_1C(i_2)$ est incluse dans $w_1 T_{C(i_2)}[w_1]$, qui est toujours fini d'après le Corollaire 7.6. En particulier, il vient

$$\mathrm{rg}\left(\pi_{12}(i_1^G \setminus C(i_2))\right) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_1)) \leq \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_2)).$$

Maintenant, toujours grâce au Corollaire 7.6, l'inégalité réciproque est vraie en considérant la fonction π_{21}. Il suit que $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_2))$, et que l'image de π_{12} est générique dans $G/C(i_2)$. De même avec π_{21}. □

Corollaire 7.11 $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_3))$. *En outre pour g générique dans G, il existe dans le coset $gC(i_1)$ une involution $w_3 \in i_3^G$.*

Preuve
On considère à présent la projection π_{13}. La fibre au-dessus de $w_1C(i_3)$ est incluse dans $w_1T_{C(i_3)}[w_1]$, qui est toujours fini d'après la Proposition 7.7. En particulier, il vient cette fois $\mathrm{rg}\left(\pi_{13}(i_1^G \setminus C(i_3))\right) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_1)) \leq \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_3))$.
Maintenant, grâce au Corollaire 7.6, l'inégalité réciproque est aussi vraie en considérant la fonction π_{31}. Il suit que $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_3))$, et que l'image de π_{13} est générique dans $G/C(i_3)$. De même avec π_{31}. □

Corollaire 7.12 *Les involutions sont conjuguées.*

Preuve
D'après les Corollaires 7.10 et 7.11, pour g générique dans G, on trouve dans le coset gB_1 une conjuguée w_2 de i_2 *et* une conjuguée w_3 de i_3.
Comme w_2 et w_3 ne sont pas conjuguées, il existe d'après le Lemme 7.2 une involution j dans $d(w_2w_3) \leq B_1$ qui est conjuguée à i_1. Il est donc clair que $j = i_1$. En particulier i_1 et w_2 commutent, et d'après le Lemme 4.2 $w_2 \in C(i_1) = B_1$, une contradiction. □

8 Résumé - détermination du groupe de Weyl

8.1 Résumé

Nous n'avons pas encore prouvé toute la partie (2) du Théorème-Synthèse (dont l'énoncé ouvrait la §4). A ce point voici les informations dont nous disposons.

Théorème 8.1 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $I(S) = I(S^\circ)$ et les involutions de G sont conjuguées. Le centralisateur connexe de chacune est un sous-groupe de Borel. En outre $C^\circ(S^\circ) = C^\circ(I(S^\circ))$ est un sous-groupe de Carter abélien de G, égal à la composante connexe de chacune des trois intersections deux-à-deux de ces sous-groupes de Borel.*

Preuve
Nous renvoyons aux : Lemme 4.2, Corollaire 7.12, Théorème 5.1, Corollaire 4.5.
Sauf l'assertion concernant $C^\circ(S^\circ)$, tout est donc prouvé. Comme $V \leq Q \leq C^\circ(S^\circ) \leq C^\circ(V)$, il suffit de montrer l'abélianité de $C^\circ(V)$. Nous utiliserons le

sous-groupe Y_1 introduit par la Notation 5.46 et ses propriétés décrites dans la Proposition 5.56.

Supposons $B_1 \cap B_2$ non-abélien. Soient $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_2) \neq 1$, $N = N^\circ(X)$, et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. Comme V normalise X donc N, le Corollaire 4.13 implique $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$. Maintenant $Y_1 \leq C^\circ(F^\circ(B_1)) \leq C^\circ(X) \leq N$ impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Tout cela vaut encore pour B_2, donc $B_1 = B_2$, une contradiction à la Proposition 6.24.

Ainsi $B_1 \cap B_2$ est-il abélien. En particulier, l'inclusion $Q \leq (B_1 \cap B_2)^\circ$ se transforme en égalité, car Q est un sous-groupe de Carter de G. Maintenant $Q = (B_1 \cap B_2)^\circ = C^\circ(i_1, i_2) = C^\circ(V)$.

Il en va de même avec les deux autres intersections. □

Rappelons en outre que $C^\circ(i_1) \neq C^\circ(i_2)$, et qu'il existe un sous-groupe normal $Y_1 \lhd C^\circ(i_1)$ de paramètre d'unipotence maximal pour $C^\circ(i_1)$, tel que toute involution de $C^\circ(i_1) \setminus \{i_1\}$ inverse Y_1 (Propositions 6.24 et 5.56).

8.2 Sous-groupes de Borel généreux

Les deux lemmes qui suivent auront une utilité pour déterminer le groupe de Weyl en §8.3.

Lemme 8.2 *Soit B_0 un sous-groupe de Borel contenant Q et distinct de B_1, B_2, et B_3. Pour i dans $V^\#$, soit $H_i = (B_i \cap B_0)^\circ$. Alors il existe dans V au moins deux involutions i telles que H_i ne soit pas abélien.*

Preuve

$H_i = C^\circ_{B_0}(i) \geq Q$. Si H_i est abélien, alors $H_i = Q$. Maintenant d'après le Fait 1.23, on a $B_0 = \langle H_i, i \in V^\# \rangle > H_j$ pour chaque j. Donc au moins deux parmi les H_i sont non-abéliens. □

Lemme 8.3 *Hypothèses et notations du lemme précédent. Si H_i n'est pas abélien, alors (B_0, B_i) est une paire maximale où $d_\infty(B_i) > d_\infty(B_0)$.*

Preuve

Soit en effet $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 4.13, on a $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$. Supposons l'égalité. Soient $X = F^\circ(B_0) \cap F^\circ(B_1)$ et $N = N^\circ(X)$, tous deux V-invariants. Soit $\tilde{q}_N$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. D'après le Corollaire 4.13, on a $\tilde{q}_N \leq \tilde{q}_1$. Comme $Y_1 \leq N$, on a égalité. En particulier, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Mais comme nous avons supposé $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$, il vient $1 \neq U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_0))) \leq N$, et donc d'après le Fait 1.62 appliqué à $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_0)))$, on a que $U_{\tilde{q}_1}(B_0)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Cela force $B_1 = B_0$, une contradiction.

Ainsi $\tilde{q}_1 > \tilde{q}_0$, et le Fait 1.64 (4) prouve la maximalité (au sens des intersections) de H_i, et celle de la paire (B_0, B_i). □

8.3 Détermination du groupe de Weyl

Notation 8.4 *Soit* $W = N(Q)/Q$.

Théorème 8.5 $W \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Preuve

Commençons par montrer la non-trivialité de W. D'après le Corollaire 7.12, les trois involutions de G sont conjuguées. D'après le Fait 1.21, $N(S^\circ)$ contrôle la fusion ; en particulier il existe $g \in N(S^\circ)$ tel que $i_1^g = i_2$. On a donc $g \in N(S^\circ) \leq N(C^\circ(S^\circ)) = N(Q)$ d'après le Théorème 8.1. Comme Q est abélien, il est clair que $g \notin Q$. Le quotient $W = N(Q)/Q$ est donc non-trivial.

Nous prouverons que $W = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$. Pour cela nous montrons d'abord que $C(S^\circ)$ est connexe. Soit en effet $x \in C(S^\circ) \setminus C^\circ(S^\circ)$; grâce au Fait 1.25 on peut supposer que x est un p-élément. Supposons que $C^\circ(x)$ soit sans p-unipotence. Alors d'après le Fait 1.29, x est dans tout p-tore maximal de $C^\circ(x)$. Mais par conjugaison des tores décents maximaux (Fait 1.16), tout tore décent maximal de $C^\circ(x)$ contient un p-tore maximal. Ainsi x est-il dans tout tore décent maximal de $C^\circ(x)$. Comme $S^\circ \leq C^\circ(x)$, x est dans un même tore décent que S°. Cela prouve $x \in C^\circ(S^\circ)$, et cette contradiction au choix de x prouve que $C^\circ(x)$ contient de la p-unipotence, c'est-à-dire que $U_p(C^\circ(x)) \neq 1$.

Maintenant grâce au Fait 1.23 et par conjugaison des involutions, on peut supposer que $C^\circ_{U_p(C^\circ(x))}(i_1) \neq 1$. D'après le Fait 1.60, $B_1 = C^\circ(i_1)$ est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ_{U_p(C^\circ(x))}(i_1)$, et en particulier il vient $x \in N(B_1)$. D'autre part B_1 contient de la p-unipotence. Si $x \in B_1$, alors $x \in N_{B_1}(Q) = Q$ d'après le Fait 1.35, d'où $x \in C^\circ(S^\circ)$, contre le choix de x. Ainsi $x \in N(B_1) \setminus B_1$. Le Fait 1.8 appliqué à B_1 prouve alors l'existence d'un élément $y \in xB_1$ normalisant un conjugué B_1^g *distinct* de B_1. Or $y \notin B_1$ mais $y^{p^n} \in B_1$ pour un n, et il y a donc de la p-torsion dans $d(y)$. Soit enfin z un p-élément de $d(y)$. Alors $z \in N(B_1) \cap N(B_1^g)$, et le Fait 1.27 (3) implique $C^\circ_{U_p(B_1)}(z) \neq 1$ et $C^\circ_{U_p(B_1)^g}(z) \neq 1$. Le Fait 1.60 appliqué autour de $C^\circ(z)$ force $B_1^g = B_1$, une contradiction qui achève de prouver la connexité de $C(S^\circ)$.

D'après le Théorème 8.1 $Q = C^\circ(S^\circ)$, il vient enfin $Q = C(S^\circ)$. D'autre part S° est caractéristique dans Q et $Q = C^\circ(S^\circ)$, donc $N(Q) = N(S^\circ)$. En particulier, $W = N(Q)/Q = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$.

Nous estimons à présent l'ordre de W. Nous notons $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}$ l'ensemble des automorphismes *d'ordre fini* d'une structure (ce n'est pas nécessairement un groupe). Par rigidité, $N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2_{2^\infty})$. D'après le Fait 1.26, on a $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^2_{2^\infty}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}\left((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2\right)$, mais clairement $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}\left((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2\right) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. En résumé $N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

Maintenant un calcul donne $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 96 = 2^5 \cdot 3$, et cela prouve que $W = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$ s'injecte dans un groupe à 96 éléments. S'il existe un 2-élément dans l'image, alors grâce au Fait 1.25 on construit un 2-élément dans $N_G(S^\circ) \setminus C_G(S^\circ)$, et cela contredit la connexité du 2-sous-groupe de Sylow (Lemme 4.2). W s'injecte donc dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et comme W n'est pas trivial la conclusion suit. $\square$

Notation 8.6 *Soit σ un 3-élément de $N(Q)$ qui soit d'ordre 3 modulo Q (son existence est assurée par le Fait 1.25) ; il est clair que σ permute circulairement les involutions de V.*

Corollaire 8.7 *Pour chaque involution i de G, $C(i)$ est un sous-groupe de Borel de G. En outre $C(V)$ est un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve

Au vu du Théorème 8.1, il suffit de prouver la connexité de $C(i)$ puis de $C(V)$. Tout d'abord par un argument de Frattini dans $C^\circ(i)$, on a $C(i) = C^\circ(i) \cdot N_{C(i)}(Q)$. Si $C(i) > C^\circ(i)$, alors $\sigma \in C(i)$. Maintenant i étant l'unique involution centrale de $C^\circ(i)$, est caractéristique dans $C^\circ(i)$. En particulier $i^\sigma = i$, ce qui contredit le choix de σ. $C(i)$ est donc connexe.

Maintenant $Q \leq C(V) \leq C(i)$ qui est connexe, donc d'après le Fait 1.35 $N_{C(i)}(Q) = Q$, d'où $C(V) \leq N_{C(i)}(V) \leq N_{C(i)}(C^\circ(V)) = N_{C(i)}(Q) = Q$. □

Pour achever la preuve de la partie (2) du Théorème-Synthèse, il ne manque plus qu'à faire apparaître un corps algébriquement clos de caractéristique 3. Grâce au Fait 1.30, l'unipotence de torsion arrive à point nommé.

Lemme 8.8 *$C^\circ(\sigma)$ contient de la 3-unipotence.*

Preuve

C'est le Fait 1.30. □

Lemme 8.9 *L'élément générique de σQ est d'ordre 3 ; il en va de même de celui de $\sigma^2 Q$.*

Preuve

D'après le Fait 1.8, l'ensemble $X = \{x \in \sigma Q$ tels que $\exists g \in G \setminus N_G(Q),\ x \in (\langle\sigma\rangle Q)^g\}$ est générique dans σQ. Nous fixons une réalisation x du générique de σQ ; il existe alors $g \notin N(Q)$ tel que $x \in (\langle\sigma\rangle Q)^g$. Soit $y = x^3$. On suppose $y^3 \neq 1$, et l'on montre une contradiction.

D'après le Lemme 8.8, $C^\circ(x)$ contient un sous-groupe 3-unipotent non-trivial U. Alors $U \leq C^\circ(x) \leq C^\circ(y)$ que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_0. Ce sous-groupe de Borel contient $C^\circ(y) \geq Q$, il est donc généreux.

Supposons que B_0 ne soit pas un conjugué de B_1. D'après les Lemmes 8.2 et 8.3, B_0 est alors impliqué dans au moins une paire maximale non-abélienne. Or $B_0 \geq C^\circ(y)$ contient de la 3-unipotence, et cela contredit le Fait 1.66 (7).

Ainsi B_0 est conjugué à B_1, et en particulier il existe une involution notée simplement i telle que $B_0 = C^\circ(i)$. Alors $Q, Q^g \leq C^\circ(y) \leq C^\circ(i)$, et donc $i \in V \cap V^g$. D'autre part $V \neq V^g$ car sinon $Q = C(V) = C(V^g) = Q^g$, contre le fait que $g \notin N(Q)$. Ainsi a-t-on $V \cap V^g = \{i\}$.

Rappelons que $x \in N(Q) = N(V)$, d'où $i^x \in V$. D'autre part $x \in N(Q)^g$ et $i \in V^g$, d'où $i^x \in V^g$. Ainsi $i^x \in V \cap V^g = \{i\}$, d'où $x \in C(i)$. En particulier $\sigma \in C(i)$, contre sa définition. □

Corollaire 8.10 *$N(Q) = Q \rtimes \langle\sigma\rangle$; tous les éléments de $N(Q) \setminus Q$ sont d'ordre 3 ; tous les éléments d'un même coset strict de Q dans $N(Q)$ sont Q-conjugués.*

Preuve

D'après le Fait 1.9, tous les éléments des cosets σQ ou $\sigma^2 Q$ sont d'ordre 3. En particulier on a bien $N(Q) = Q \rtimes \langle\sigma\rangle$.

Soit $x \in N(Q) \setminus Q$. Comme Q est sans 3-unipotence (immédiat par le Corollaire 4.3), le Fait 1.10 impose que $C_Q^\circ(x) = 1$. En particulier $\mathrm{rg}(x^Q) = \mathrm{rg}(Q)$, et clairement $x^Q \subseteq xQ$ qui est de degré 1. Maintenant si $y \in xQ$, alors il en va de même de y^Q, donc $x^Q \cap y^Q \neq 1$, et cela prouve la conjugaison des éléments d'un même coset, c'est-à-dire $x^Q = xQ$. $\square$

Proposition 8.11 *G interprète un corps de caractéristique* 3.

Preuve

Fixons un sous-groupe de Borel B_0 contenant $C^\circ(\sigma)$ et A un sous-groupe B_0-minimal de $U_3(B_0)$ (non-trivial d'après le Lemme 8.8). Si $A \not\leq Z(B_0)$, le corps apparaît grâce au Fait 1.38.

On suppose donc $A \leq Z(B_0)$ pour montrer une contradiction. Si $g \notin N(B_0)$ et qu'il existe $x \in (B_0 \cap B_0^g)^\#$, alors $A, A^g \leq C^\circ(x)$ ce qui provoque une contradiction au Fait 1.60. En particulier B_0 est disjoint de ses conjugués non-identiques, et il est donc généreux dans G.

D'après les Faits 1.13 et 1.36, le sous-groupe de Carter de B_0 est *le* sous-groupe de Carter généreux de G ; c'est donc un conjugué de Q. En particulier B_0 contient un 2-tore maximal, et un Viergruppe V_0.

D'après le Fait 1.23, il existe une involution k de V_0 telle que $C^\circ_{U_3(B_0)}(k) \neq 1$; le Fait 1.60 impose alors $B_0 = C(k)$.

Le sous-groupe de Borel $C(k)$ contient donc A, qui est un sous-groupe abélien d'exposant 3 central dans $C(k)$. En particulier $A \leq C^\circ(V_0)$, et le Fait 1.60 entraîne une contradiction au Lemme 4.3. A n'est donc pas central dans B_0, qui interprète un corps de caractéristique 3. $\square$

Ce corps est bien sûr algébriquement clos ; en revanche rien ne prouve que ce ne soit pas un mauvais corps. Quand bien même ce ne serait pas le cas, une telle configuration est restée ouverte dans [CJ04] !

Références

[BBC07] Alexandre Borovik, Jeffrey Burdges, and Gregory Cherlin. Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate type. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(1) :1–22, 2007.

[BC05] Alexandre Borovik and Gregory Cherlin. Permutation groups of finite Morley rank. In *Model Theory and Applications to Algebra and Analysis*. Cambridge University Press, 2005.

[BC08] Jeffrey Burdges and Gregory Cherlin. Semisimple torsion in groups of finite Morley rank. En préparation, 2008.

[BCJ07] Jeffrey Burdges, Gregory Cherlin, and Eric Jaligot. Minimal connected simple groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups. *J. Algebra*, 314 :581–612, 2007.

[BN94] Alexandre Borovik and Ali Nesin. *Groups of finite Morley rank*, volume 26 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

[Bor95] Alexandre Borovik. Simple locally finite groups of finite Morley rank and odd type. In *Finite and locally finite groups (Istanbul, 1994)*, volume 471 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 247–284. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[BP90] Aleksandr Vasilievich Borovik and Bruno Petrovich Poizat. Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic*, 55(2) :478–491, 1990.

[Bur04] Jeffrey Burdges. *Simple Groups of Finite Morley Rank of Odd and Degenerate Type*. PhD thesis, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, 2004.

[Bur07] Jeffrey Burdges. The Bender method in groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 307(2) :704–726, 2007.

[Che05] Gregory Cherlin. Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory*, 8(5) :613–621, 2005.

[CJ04] Gregory Cherlin and Eric Jaligot. Tame minimal simple groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 276(1) :13–79, 2004.

[Del07] Adrien Deloro. Groupes simples connexes minimaux algébriques de type impair. *Journal of Algebra*, 2007. A paraître.

[DJ07] Adrien Deloro and Eric Jaligot. Groups of finite Morley rank with solvable local subgroups. En préparation, 2007.

[FJ05] Olivier Frécon and Eric Jaligot. Conjugacy in groups of finite Morley rank. In *Model Theory and Applications to Algebra and Analysis*. Cambridge University Press, 2005.

[Jal06] Eric Jaligot. Generix never gives up. *J. Symbolic Logic*, 71(2) :599–610, 2006.