



**HAL**  
open science

# Métamatériau microstructuré non-linéaire pour l'atténuation du bruit et des vibrations en basses fréquences

Déborah Lavazec, Gwendal Cumunel, Denis Duhamel, Christian Soize, Anas  
Batou

► **To cite this version:**

Déborah Lavazec, Gwendal Cumunel, Denis Duhamel, Christian Soize, Anas Batou. Métamatériau microstructuré non-linéaire pour l'atténuation du bruit et des vibrations en basses fréquences. 13e Congrès Français d'Acoustique et 20ème colloque Vibrations, SHocks and NOise, Apr 2016, Le Mans, France. pp.1-7. hal-01303185

**HAL Id: hal-01303185**

**<https://hal.science/hal-01303185v1>**

Submitted on 16 Apr 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Congrès français d'acoustique

&

## Vibrations, Shocks, and Noise

**Title:** Métamatériau microstructuré non-linéaire pour l'atténuation du bruit et des vibrations en basses fréquences

D. Lavazec<sup>1,2</sup>, G. Cumunel<sup>1</sup>, D. Duhamel<sup>1</sup>, C. Soize<sup>2</sup>, A. Batou<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Université Paris-Est, Laboratoire Navier, ENPC/IFSTTAR/CNRS, 6 et 8 Avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne La Vallée Cedex 2, France*

<sup>2</sup>*Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France*

*Email: deborah.lavazec@enpc.com*

En raison de leurs grandes longueurs d'onde, les ondes acoustiques et les vibrations mécaniques en basses fréquences ne peuvent être facilement réduites dans les structures par l'utilisation de matériaux dissipatifs. Nous proposons de réduire le bruit et les vibrations sur une large bande de fréquences à travers un métamatériau microstructuré par un transfert et une dissipation de l'énergie dans des inclusions ayant un comportement dynamique non-linéaire. Celles-ci sont arrangées aléatoirement dans la matrice du matériau. L'inclusion est une sphère creuse contenant une masse concentrée reliée à la sphère par deux poutres, qui est réalisée de manière à obtenir un comportement dynamique non-linéaire dans la bande de fréquences d'analyse. Ce système mécanique est modélisé par un système masse-ressort-amortisseur avec une raideur non-linéaire. La non-linéarité permet une atténuation sur une large bande de fréquences, contrairement aux systèmes linéaires qui n'engendrent une réduction que sur une bande de fréquences étroite. Nous présenterons tout d'abord le design de l'inclusion, obtenu à l'aide d'une modélisation stochastique, dans le but d'optimiser la réponse non-linéaire du système dynamique. Des résultats expérimentaux en statique et en dynamique ont également été obtenus et seront comparés aux prédictions numériques. Puis, nous présenterons la modélisation et l'homogénéisation numérique du métamatériau ainsi que sa dissipation effective.

**Mots-clés:** contrôle du bruit, contrôle des vibrations, absorbeur non-linéaire, homogénéisation, métamatériau

En raison de leurs grandes longueurs d'onde, les ondes acoustiques et les vibrations mécaniques en basses fréquences ne peuvent être facilement réduites dans les structures par l'utilisation de matériaux dissipatifs. Nous proposons de réduire le bruit et les vibrations sur une large bande de fréquences à travers un métamatériau microstructuré par un transfert et une dissipation de l'énergie dans des inclusions ayant un comportement dynamique non linéaire. Celles-ci sont arrangées aléatoirement dans la matrice du matériau. L'inclusion est un support creux contenant une masse ponctuelle reliée au support par deux poutres, qui est réalisée de manière à obtenir un comportement dynamique non linéaire dans la bande de fréquences d'analyse. Ce système mécanique est modélisé par un système masse-ressort-amortisseur avec une raideur non linéaire. La non-linéarité permet une atténuation sur une large bande de fréquences, contrairement aux systèmes linéaires qui n'engendrent une réduction que sur une bande de fréquences étroite. Nous présenterons tout d'abord le design de l'inclusion en terme de géométrie, dimension et matériaux, l'échantillon expérimental obtenu par impression 3D ainsi que les résultats expérimentaux obtenus. Nous comparerons ensuite ces résultats à la prévision numérique donnée par un modèle numérique stochastique. Les résultats obtenus prouvent l'atténuation sur une large bande basses fréquences, comme attendu.

## 1 Introduction

Parmi les premiers papiers traitant du pompage de l'énergie par des oscillateurs simples, les travaux de Frahm [1] et de Roberson [2] peuvent être cités. Depuis ces travaux, les développements de métamatériaux pour absorber les vibrations et le bruit ont reçu récemment une grande attention et de nombreux papiers ont été publiés sur ce sujet, comme par exemple, [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. De nombreux travaux ont également traité du pompage de l'énergie par des oscillateurs linéaires et non linéaires dans le but d'atténuer les vibrations et le bruit pour des systèmes discrets ou continus aux échelles macroscopiques et microscopiques. On peut notamment citer [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

Ce papier traite de la réduction des vibrations et du bruit dans les structures à l'échelle macroscopique pour la bande basses fréquences pour laquelle les premiers modes structuraux sont excités. Il est bien connu que les matériaux passifs dissipatifs ne sont pas très efficaces pour ce cas, comme ils peuvent l'être pour les moyennes et hautes fréquences. L'objectif final de ce travail est de réduire les vibrations et le bruit induit sur une large bande basses fréquences grâce à un matériau microstructuré contenant des inclusions qui sont réparties aléatoirement dans la matrice du matériau. La première étape de ce travail est de concevoir et d'analyser l'efficacité d'une inclusion, construite comme étant un cadre contenant une masse ponctuelle, centrée sur une poutre. Cette inclusion se comporte comme un oscillateur non linéaire conçu de manière à ce que le pompage de l'énergie soit efficace sur une large bande de fréquence autour de sa résonance, contrairement à une bande de fréquence étroite pour un oscillateur linéaire. Pour cette première étape, l'objectif est de développer un modèle mécanique simple ayant la capacité de prédire correctement les résultats expérimentaux qui ont été mesurés. La seconde étape consistera à développer un système dynamique non linéaire plus sophistiqué. Dans ce papier, consacré à la première étape, il est prouvé que la non-linéarité induit une atténuation sur une large bande de fréquence autour de la résonance, alors que le système linéaire associé permet une réduction seulement sur une bande de fréquence étroite. Nous

présenterons la conception de l'inclusion en terme de géométrie, dimension et matériaux, la fabrication expérimentale de ce système réalisée par un système d'impression 3D, et les mesures expérimentales qui ont été obtenues. Nous comparerons les prévisions données par le modèle numérique stochastique avec les mesures. Les résultats obtenus exposent l'atténuation physique sur une large bande basses fréquences, comme attendu.

## 2 Conception de l'inclusion, réalisation expérimentale, et identification du matériau

Une inclusion a été conçue à l'échelle macroscopique. Elle est composée d'une masse ponctuelle (un cube), centrée sur une poutre, laquelle est attachée à un cadre creux. La longueur de la poutre est  $0.0125\text{ m}$  et sa section carrée est  $0.001 \times 0.001\text{ m}^2$ . Les dimensions externes du cube sont  $0.005 \times 0.005 \times 0.005\text{ m}^3$ . Le trou est un cylindre qui est centré dans le cube et ses dimensions sont  $0.005 \times 0.00175^2\pi\text{ m}^3$ . Le matériau de l'inclusion et du cadre est de l'ABS. Cette inclusion a été conçue grâce à un système d'impression 3D (l'ABS (Acrylonitrile Butadiene Styrene) est couramment utilisé comme matériau pour l'impression 3D). Une vis en acier est insérée dans le trou (voir Figure 1). La

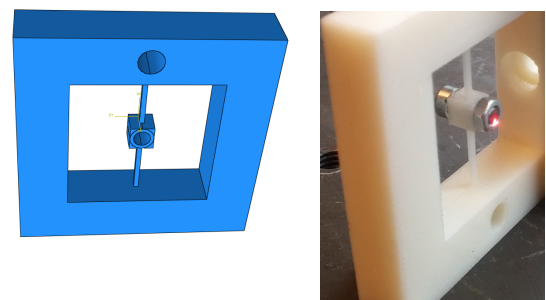


FIGURE 1 – Conception de l'inclusion insérée dans le cadre (figure de gauche) et sa réalisation expérimentale avec un système d'impression 3D (figure de droite).

masse  $m$  de l'inclusion est arrondie à celle de la vis

qui est  $0.0012 \text{ kg}$ . La masse volumique de l'ABS est  $1780 \text{ kg/m}^3$ . De tests de traction ont été effectués pour l'identification des propriétés mécaniques du matériau ABS qui est supposé être homogène, élastique linéaire et isotrope. Les tests ont fourni le module de Young,  $2.2 \times 10^9 \text{ Pa}$  et le coefficient de Poisson  $0.35$ . Cette inclusion a été conçue de manière à ce que la première fréquence de résonance du cadre soit autour de  $1200 \text{ Hz}$  et que la première fréquence de résonance de l'inclusion (masse ponctuelle et poutre) soit autour de  $167 \text{ Hz}$ . Nous nous intéressons à l'analyse de la réponse aléatoire stationnaire de l'inclusion dans la bande fréquentielle d'analyse  $B_a = [-f_{\max}, f_{\max}]$  avec  $f_{\max} = 1024 \text{ Hz}$ , causée par l'excitation aléatoire stationnaire générée par une accélération imposée aux deux extrémités de la poutre. La même accélération est imposée aux deux extrémités. L'accélération est égale à l'accélération qui est imposée au cadre (qui peut être considéré comme rigide dans la bande fréquentielle d'analyse), sur lequel une force externe aléatoire stationnaire est appliquée (voir le paragraphe 5). La bande fréquentielle d'observation est la bande  $B_o = [90, 190] \text{ Hz} \subset B_a$ , qui contient la fréquence de résonance pour la basse et la haute amplitude de l'excitation.

### 3 Modèle numérique avec excitation stochastique

Comme expliqué au paragraphe 1, un oscillateur non linéaire avec un degré de liberté (DDL) est construit pour modéliser le comportement dynamique non linéaire de l'inclusion définie au paragraphe 2. La non-linéarité de l'inclusion est due aux effets géométriques non linéaires causés par les déplacements finis, le matériau ABS étant supposé ayant un comportement linéaire. Pour la configuration expérimentale qui est étudiée, la direction principale de l'excitation et de la réponse mesurée de l'inclusion est celle du déplacement normal au plan du support (flexion de la poutre dans le plan perpendiculaire au plan du support). Par conséquent, l'approche proposée consiste à modéliser ce déplacement normal de l'inclusion par un oscillateur non linéaire à un DDL. Comme la non-linéarité est due aux effets géométriques conséquents au déplacement fini, il peut être attendu un effet rigidifiant se traduisant par une augmentation de la fréquence de résonance. Cependant, les mesures expérimentales réalisées sur cette inclusion (voir le paragraphe 5) ont montré un effet assouplissant pour lequel la fréquence de résonance diminue significativement. Un tel comportement peut être expliqué par la participation d'autres DDLs (torsion autour de l'axe de la poutre et flexion dans le plan du support), qui sont excités par un couplage non linéaire. De ce fait, pour ce type de comportement, il aurait été mieux de développer un oscillateur non linéaire à plusieurs DDLs (qui est en cours comme étant la deuxième étape de ce travail). Néanmoins, il reste intéressant de développer un oscillateur non linéaire à un DDL pour lequel la force élastique non linéaire est directement identifiée à partir des résultats expérimentaux. Le modèle identifié, qui reproduira approximativement les mesures, permettra d'analyser

le phénomène attendu de pompage de l'énergie sur une plus large bande fréquentielle autour de la fréquence de résonance.

Le modèle non linéaire à un DDL est composé d'un système masse-ressort-amortisseur avec un ressort non linéaire, excité par son support (voir le schéma en Figure 2). La masse de la poutre est négligée. Soit  $X_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t)$  le déplacement imposé au support et soit  $X_s(t)$  le déplacement relatif de la masse ponctuelle par rapport au support. Soit  $\{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t), t \in \mathbb{R}\}$  l'accélération

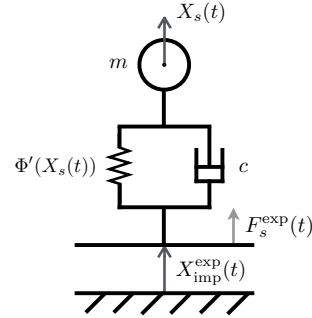


FIGURE 2 – Modèle 1D simplifié.

imposée au support, qui est un processus stochastique, centré, du second-ordre et gaussien, défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , pour lequel la fonction de densité spectrale de puissance est notée  $S_{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega)$ .

Nous cherchons à trouver la solution stochastique, du second-ordre, stationnaire  $\{X_s(t), t \in \mathbb{R}\}$  (qui n'est pas gaussienne) de l'équation non linéaire stochastique suivante  $m(\ddot{X}_s(t) + \ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t)) + c\dot{X}_s(t) + \Phi'(X_s(t)) = 0$  pour  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , qui est réécrite comme

$$m\ddot{X}_s(t) + c\dot{X}_s(t) + \Phi'(X_s(t)) = F_s^{\text{exp}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où  $F_s^{\text{exp}}(t) = -m\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t)$ ,  $m$  est la masse de l'inclusion introduite précédemment,  $c$  est le coefficient d'amortissement,  $\Phi'(x)$  est la dérivée par rapport à  $x$  du potentiel élastique qui sera identifiée au paragraphe 5 pour deux différentes amplitudes d'excitation.

La puissance d'entrée moyenne  $\Pi_{\text{in}} = E\{F_s^{\text{exp}}(t)\dot{X}_s(t)\}$  (pour laquelle  $E$  est l'espérance mathématique) et la puissance dissipée moyenne  $\Pi_{\text{diss}} = cE\{\dot{X}_s(t)^2\}$ , qui sont indépendantes de  $t$  et qui sont égales (grâce à la stationnarité), peuvent être écrites comme  $\Pi_{\text{in}} = \int_{\mathbb{R}} \pi_{\text{in}}(\omega) d\omega$  et  $\Pi_{\text{diss}} = \int_{\mathbb{R}} \pi_{\text{diss}}(\omega) d\omega$ , pour lesquelles les densités  $\pi_{\text{in}}(\omega)$  et  $\pi_{\text{diss}}(\omega)$  sont telles que

$$\pi_{\text{in}}(\omega) = S_{F_s^{\text{exp}} \dot{X}_s}(\omega) \quad , \quad \pi_{\text{diss}}(\omega) = c S_{\dot{X}_s}(\omega). \quad (2)$$

Dans l'Eq. (2),  $S_{F_s^{\text{exp}} \dot{X}_s}$  est la fonction de densité interspectrale des processus stochastiques stationnaires  $F_s^{\text{exp}}$  et  $\dot{X}_s$ , et  $S_{\dot{X}_s}$  est la fonction de densité spectrale de puissance du processus stochastique stationnaire  $\dot{X}_s$ . Le pompage de l'énergie exprimé comme une fonction de la fréquence est donc caractérisé par  $\pi_{\text{in}}(\omega) = \pi_{\text{diss}}(\omega)$ . Dans le but de qualifier l'efficacité du pompage de l'énergie comme une fonction de l'intensité de la non-linéarité, on introduit la quantité normalisée,

$$\pi_{\text{in, norm}}(\omega) = \frac{\pi_{\text{diss}}(\omega)}{S_{F_s^{\text{exp}}}(\omega)}. \quad (3)$$

Finalement, le potentiel élastique  $\Phi(x)$  sera identifié expérimentalement grâce à la fonction dépendant de la fréquence  $\text{FRF}^2(\omega)$  définie sur  $B_0$  par,

$$\text{FRF}^2(\omega) = \frac{|S_{\dot{X}_s F_s^{\text{exp}}}(\omega)|^2}{|S_{F_s^{\text{exp}}}(\omega)|^2} \quad (4)$$

Il peut être noté que si  $\Phi'(x)$  était une fonction linéaire de  $x$  (oscillateur linéaire), alors  $\text{FRF}^2$  aurait représenté le carré du module de la fonction de réponse en fréquence du filtre linéaire associé pour lequel  $F_s^{\text{exp}}$  est l'entrée et  $\dot{X}_s$  la sortie.

## 4 Solver stochastique et traitement du signal

*Solver stochastique.* Pour la construction de la solution stochastique stationnaire de l'équation différentielle non linéaire définie par l'Eq. (1), la méthode de Monte Carlo [29] est utilisée. Soit  $\{F_s^{\text{exp}}(t; \theta_\ell), t \in \mathbb{R}\}$  une réalisation du processus stochastique  $F_s^{\text{exp}}$  pour  $\theta_\ell \in \Theta$ . Considérant  $L$  réalisations indépendantes, pour chaque réalisation  $\theta_\ell$ , nous avons donc à résoudre l'équation différentielle non linéaire déterministe avec des conditions initiales,

$$\begin{cases} m\ddot{X}(t; \theta_\ell) + c\dot{X}(t; \theta_\ell) + \Phi'(X(t; \theta_\ell)) = F_s^{\text{exp}}(t; \theta_\ell), \\ t \in [0, t_0 + T], \\ X(0, \theta_\ell) = 0, \dot{X}(0, \theta_\ell) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

La partie  $\{X(t; \theta_\ell), t \in [0, t_0]\}$  de la réponse aléatoire non-stationnaire correspond au signal transitoire induit par les conditions initiales, qui décroît exponentiellement à cause de l'amortissement. Cette partie de la réponse est supprimée dans le traitement du signal des quantités du second-order de la solution stationnaire. Le temps  $t_0$  est choisi de sorte que la réponse transitoire soit négligeable pour  $t \geq t_0$ . La part de la trajectoire correspondant à la réponse stationnaire est  $X_s(t; \theta_\ell) = X(t - t_0; \theta_\ell)$  pour  $t$  dans  $[t_0, t_0 + T]$ . Le temps  $T$  qui est relié à la résolution fréquentielle est défini après. Le problème déterministe défini par l'Eq. (5) sera résolu avec un schéma de Störmer-Verlet présenté après.

*Échantillonnage temporel et fréquentiel.* Pour construire les quantités du second-order de la réponse stationnaire  $X_s$ , le traitement du signal requiert un échantillonnage temporel avec un pas de temps constant  $\Delta_t$  qui est obtenu grâce au théorème de Shannon pour les processus stochastiques stationnaires [30, 31]. L'échantillonnage fréquentiel est donc écrit comme  $f_e = 2f_{\text{max}}$  et le pas de temps est  $\Delta_t = 1/f_e$ . L'échantillonnage temporel correspondant est  $t_\alpha = \alpha \Delta_t$  avec  $\alpha = 0, 1, \dots, N - 1$  pour lequel l'entier  $N$  est choisi de sorte à ce que la résolution fréquentielle  $\Delta_f = 1/T = 0.125 \text{ Hz}$  où  $T = N\Delta_t$  donne  $N = 16384$  pour  $T = 8 \text{ s}$ . Les points d'échantillonnage correspondants dans le domaine fréquentiel sont  $f_\beta = -f_{\text{max}} + (\beta + 1/2)\Delta_f$  pour  $\beta = 0, 1, \dots, N - 1$ .

*Génération de réalisations indépendantes du processus stochastique  $F_s^{\text{exp}}$ .* La représentation spectrale du second-order usuelle pour les processus stochastiques stationnaires est utilisée [32, 33]. La fonction de densité spectrale de puissance  $S_{F_s^{\text{exp}}}(\omega)$  du processus stochastique, centré, du second-order, stationnaire, gaussien  $F_s^{\text{exp}}$  est telle que  $S_{F_s^{\text{exp}}}(\omega) = m^2 S_{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega)$ , pour laquelle  $S_{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega) = \omega^4 S_{X_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega)$ . La fonction d'autocorrélation  $\tau \mapsto R_{X_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\tau)$  du processus stochastique  $X_{\text{imp}}^{\text{exp}}$  est telle que  $R_{X_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\tau) = E\{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t + \tau)\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t)\}$  et telle que  $R_{X_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} S_{X_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega) d\omega$ . Le générateur de réalisations du processus stochastique, du second-order, stationnaire et gaussien  $X_{\text{imp}}^{\text{exp}}$  est basé sur la représentation spectrale usuelle [34, 35]. Soient  $\Psi_0, \dots, \Psi_{N-1}$ ,  $N$  variables aléatoires uniformes mutuellement indépendantes sur  $[0, 1]$ , et soient  $\phi_0, \dots, \phi_{N-1}$ ,  $N$  variables aléatoires uniformes mutuellement indépendantes sur  $[0, 2\pi]$ , qui sont indépendantes de  $\Psi_0, \dots, \Psi_{N-1}$ . La représentation spectrale utilisée est,

$$\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t) \simeq \sqrt{2\Delta_\omega} \text{Re} \left\{ \sum_{\beta=0}^{N-1} \sqrt{S_{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega_\beta)} Z_\beta e^{-i\omega_\beta t} e^{-i\phi_\beta} \right\}, \quad t \in [0, t_0 + T], \quad (6)$$

pour laquelle  $\Delta_\omega = 2\pi \Delta_f$ , où  $Z_\beta = \sqrt{-\log(\Psi_\beta)}$  et  $\omega_\beta = 2\pi f_\beta$ . D'après l'Eq. (6), il peut être déduit que chaque réalisation  $\{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t; \theta_\ell), t \in [t_0; t_0 + T]\}$  est décrite comme

$$\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t; \theta_\ell) \simeq \sqrt{2\Delta_\omega} \text{Re} \left\{ \sum_{\beta=0}^{N-1} g_{\beta, \ell} e^{-i\omega_\beta t} \right\}, \quad t \in [0, t_0 + T], \quad (7)$$

où  $g_{\beta, \ell} = \sqrt{S_{\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}}(\omega_\beta)} Z_\beta(\theta_\ell) e^{-i\phi_\beta(\theta_\ell)}$ . Par l'utilisation de la FFT  $\{\hat{g}_{0, \ell}, \dots, \hat{g}_{N-1, \ell}\}$  de  $\{g_{0, \ell}, \dots, g_{N-1, \ell}\}$ , qui est écrite comme  $\hat{g}_{\alpha, \ell} = \sum_{\beta=0}^{N-1} g_{\beta, \ell} \exp\{-2i\pi\alpha\beta/N\}$  pour  $\alpha = 0, 1, \dots, N - 1$ , on obtient

$$\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t_\alpha; \theta_\ell) = \sqrt{2\Delta_\omega} \text{Re} \left\{ \exp\left\{-i\pi\alpha\left(\frac{1-N}{N}\right)\right\} \hat{g}_{\alpha, \ell} \right\}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (8)$$

*Schéma d'intégration de Störmer-Verlet.* Le schéma d'intégration de Störmer-Verlet est bien adapté pour la résolution des systèmes hamiltoniens dynamiques [36, 37] comme proposé, par exemple, pour le cas dissipatif, dans [38]. Un tel schéma préserve l'énergie mécanique durant l'intégration numérique. Nous réécrivons donc l'Eq. (5) dans la forme hamiltonienne dissipative suivante

$$\begin{cases} \dot{X}(t; \theta_\ell) = \frac{1}{m} Y(t; \theta_\ell) \quad , \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ \dot{Y}(t; \theta_\ell) = -\Phi'(X(t; \theta_\ell)) - \frac{c}{m} Y(t; \theta_\ell) + F_s^{\text{exp}}(t; \theta_\ell), \\ t \in [t_0, t_0 + T], \\ X(0; \theta_\ell) = 0, Y(0; \theta_\ell) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

On utilise la notation  $u_\ell^\alpha = U(t_\alpha; \theta_\ell)$ . Le schéma d'intégration de Störmer-Verlet pour l'Eq. (9) est alors

écrit, pour  $\alpha = 0, 1, \dots, N - 1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\ell^{\alpha+1/2} = x_\ell^\alpha + \frac{\Delta t}{2m} y_\ell^\alpha, \\ y_\ell^{\alpha+1} = y_\ell^\alpha + \Delta t \left( -\Phi'(x_\ell^{\alpha+1/2}) - \frac{c}{2m} y_\ell^\alpha - \frac{c}{2m} y_\ell^{\alpha+1} + F_s^{\text{exp}}(t_{\alpha+1}; \theta_\ell) \right), \\ x_\ell^{\alpha+1} = x_\ell^{\alpha+1/2} + \frac{\Delta t}{2m} y_\ell^{\alpha+1}, \end{array} \right. \quad (10)$$

où  $F_s^{\text{exp}}(t_{\alpha+1}; \theta_\ell) = -m \ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}(t_{\alpha+1}; \theta_\ell)$ .

*Traitement du signal.* Pour estimer les fonctions de densité spectrale de puissance et les fonctions de densité inter-spectrale définies aux Eqs. (2) et (4), la méthode du périodogramme [30, 31] est utilisée.

## 5 Mesures expérimentales et identification du modèle avec excitation stochastique

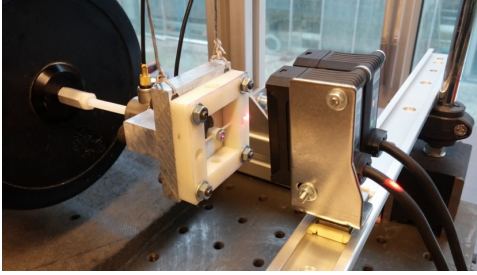


FIGURE 3 – La configuration expérimentale.

*Configuration expérimentale et mesures.* La configuration expérimentale peut être observée en Figure 3. Le déplacement  $X_{\text{imp}}^{\text{exp}}$  à un point du cadre rigide qui est suspendu et le déplacement  $X^{\text{exp}}$  de la masse ponctuelle (inclusion) sont mesurés avec deux capteurs laser. L'excitation appliquée sur le cadre rigide est donnée par un pot vibrant. Les réponses expérimentales ont été mesurées pour deux amplitudes de l'accélération expérimentale  $\ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}$  : la première correspond à une amplitude faible pour laquelle la réponse de l'oscillateur est approximativement linéaire et la seconde correspond à une amplitude forte pour laquelle la réponse est non linéaire. Ces deux cas seront identifiés par les symboles L et NL, respectivement. Par conséquent, la force correspondante  $F_s^{\text{exp}} = -m \ddot{X}_{\text{imp}}^{\text{exp}}$  appliquée à l'oscillateur est notée, pour les deux amplitudes, par  $F_s^{\text{exp,L}}$  et  $F_s^{\text{exp,NL}}$ . Les fonctions de densité spectrale de puissance  $S_{F_s^{\text{exp,L}}}$  et  $S_{F_s^{\text{exp,NL}}}$  sont affichées en Figure 4 pour la bande fréquentielle  $B_o$ . Des fluctuations peuvent être observées sur ces fonctions de densité spectrale de puissance, ce qui implique des fluctuations pour les fonctions de densité spectrale de puissance du déplacement de l'inclusion (ces fluctuations seront réduites dans les prochains travaux par une adaptation de la configuration expérimentale et du traitement du signal). Comme ces fonctions de densité spectrale de puissance expérimentales sont utilisées comme

entrées pour les réponses stochastiques numériques de l'oscillateur non linéaire, ces fluctuations entraînent des fluctuations dans les fonctions de densité spectrale de puissance des réponses.

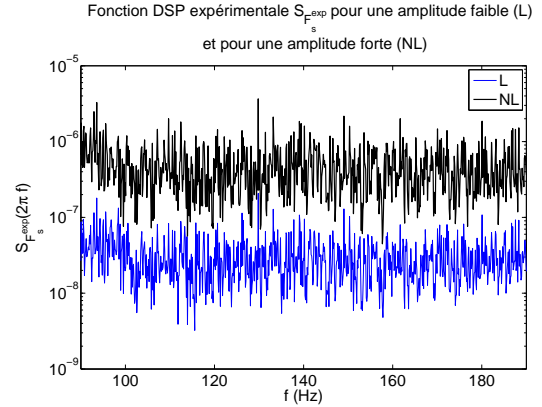


FIGURE 4 – Fonction DSP expérimentale  $S_{F_x}^{\text{exp}}$  pour une amplitude faible (L) et pour une amplitude forte (NL) de l'excitation.

*Identification expérimentale de la force élastique non linéaire.* Comme expliqué au paragraphe 3, pour chacune des deux amplitudes, l'identification expérimentale de la force élastique non linéaire est obtenue en réduisant au maximum sur la bande fréquentielle  $B_o$ , la distance entre  $\text{FRF}^2$  (définie par l'Eq. (6)) calculée avec le modèle et la même quantité construite à partir des mesures expérimentales.

(i)- *Faible amplitude.* Une représentation algébrique à un paramètre de  $\Phi'(x)$  est choisie comme  $\Phi'_L(x) = k_1 x$ . L'identification expérimentale donne  $k_1 = 1305 \text{ N/m}$  (voir Figure 5).

(ii)- *Forte amplitude.* Une représentation algébrique à trois paramètres de  $\Phi'(x)$  est définie par  $\Phi'_{\text{NL}}(x) = k_1 x (\alpha_1 + \alpha_2 x^2)^{-1/4}$  où  $k_1$  est fixée à la valeur identifiée pour le cas à faible amplitude et où l'identification expérimentale des deux paramètres positifs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  donne  $\alpha_1 = 3$  et  $\alpha_2 = 10^8 \text{ m}^{-2}$  (voir Figure 5).

Pour chacune des deux amplitudes, la Figure 6 présente la comparaison entre la fonction  $\text{FRF}^2$  pour le modèle identifié avec celle obtenue avec les mesures expérimentales. Il peut être vu un raisonnable accord entre les essais et le numérique, sachant qu'une approximation a été introduite pour la construction du modèle (voir les explications données au paragraphe 3) et en prenant en compte l'existence de fluctuations dans les fonctions de densité spectrale de puissance expérimentale de l'entrée.

## 6 Pompage de l'énergie dans la bande fréquentielle $B_o$ et comparaison avec les résultats expérimentaux

La Figure 7 (prédictions avec le modèle identifié) et la Figure 8 (résultats expérimentaux) montrent la densité

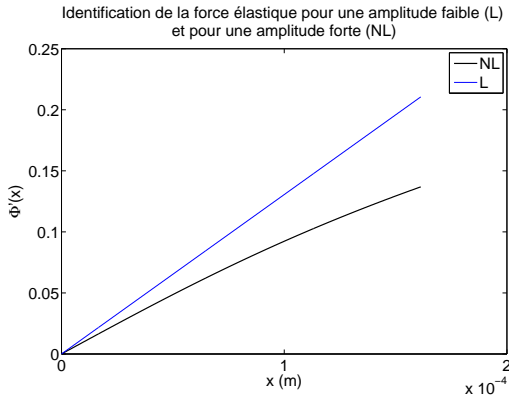


FIGURE 5 – Identification de la force élastique pour une faible amplitude (L) et pour une forte amplitude (NL) de l’excitation.

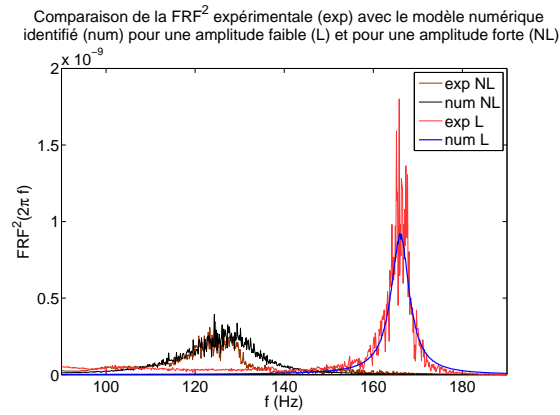


FIGURE 6 – Comparaison de la  $FRF^2$  expérimentale (exp) avec celle du modèle numérique identifié (num) pour une faible amplitude (L) et pour une forte amplitude (NL).

de puissance de l’entrée normalisée définie par l’Eq. (3) pour une amplitude faible et pour une amplitude forte. Il peut être vu une raisonnable concordance entre la prédiction obtenue avec le modèle et les essais. De plus, les résultats présentés dans ses deux figures confirment un fort effet de la non-linéarité qui permet au pompage de l’énergie d’être efficace sur une plus large bande de fréquence autour de la résonance que pour le cas linéaire, ce qui était l’objectif de ce travail.

## 7 Conclusions

Dans ce papier, nous avons présenté les résultats relatifs à la première étape d’un travail dédié à la conception et à l’analyse d’un matériau microstructuré non linéaire pour réduire le bruit et les vibrations en basses fréquences. Nous avons développé la conception d’une inclusion à l’échelle macroscopique, qui a été produite avec un système d’impression 3D. Les dimensions de cette inclusion peuvent être facilement réduites avec la même technologie. Une première version du modèle dynamique non linéaire a été développée et ses paramètres ont été identifiés avec

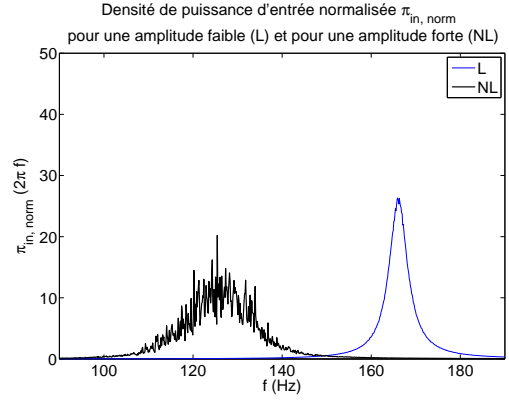


FIGURE 7 – Densité de puissance de l’entrée normalisée  $\pi_{in, norm}$  prédite par le modèle identifié pour une faible amplitude (L) et pour une haute amplitude (NL).

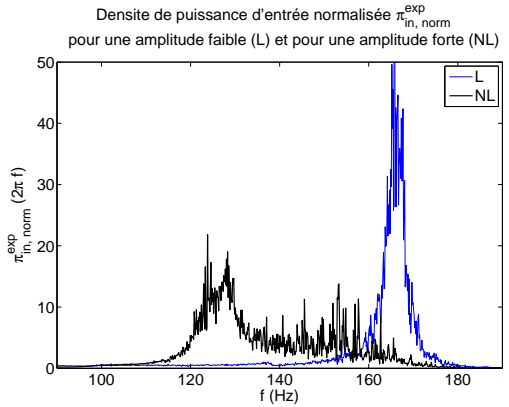


FIGURE 8 – Densité de puissance de l’entrée normalisée  $\pi_{in, norm}^{exp}$  obtenue avec les résultats expérimentaux pour une faible amplitude (L) et pour une forte amplitude (NL).

les tests expérimentaux. Les prédictions données par le modèle et les essais ont confirmé que le phénomène du pompage de l’énergie est efficace sur une plus large bande fréquentielle autour de la fréquence de résonance que pour le cas linéaire. Le travail en cours consiste à développer un modèle plus sophistiqué de l’inclusion, prenant en compte les couplages non linéaires entre plusieurs degrés de liberté.

## Remerciements

Ce travail a bénéficié d’une aide de l’état gérée par l’ANR au titre du programme des Investissements d’Avenir ANR-11-LABX-002-01.

## Références

- [1] H. Frahm. Device for damping vibrations of bodies. *United states patent office*, pages 1–9, 1911.
- [2] R. E. Roberson. Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Portions of a dissertation submitted to the Department of Applied Mechanics, Washington University, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.*, pages 205–220, 1952.

- [3] D.R. Smith and N. Kroll. Negative refractive index in left-handed materials. *Physical Review Letters*, 85 :2933–2936, 2000.
- [4] H. Chen and C.T. Chan. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials. *Applied Physics Letters*, 91 :183518–1, 183518–3, 2007.
- [5] Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu, and J. Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical Review Letters*, 99 :093904–1, 093904–4, 2007.
- [6] P. Sheng, J. Mei, Z. Liu, and W. Wen. Dynamic mass density and acoustic metamaterials. *Physica B*, 394 :256–261, 2007.
- [7] Z. Yang, J. Mei, M. Yang, N.H. Chan, and P. Sheng. Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass. *Physical Review Letters*, 101(20) :204301–1, 204301–4, 2008.
- [8] S.H. Lee, C.M. Park, Y.M. Seo, Z.G. Wang, and C.K. Kim. Acoustic metamaterial with negative density. *Physics Letters A*, 373 :4464–4469, 2009.
- [9] X. Zhou and G. Hu. Analytic model of elastic metamaterials with local resonances. *Physical Review B*, 79 :195109–1, 195109–9, 2009.
- [10] X.N. Liu, G.K. Hu, G.L. Huang, and C.T. Sun. An elastic metamaterial with simultaneously negative mass density and bulk modulus. *Applied Physics Letters*, 98 :251907, 2011.
- [11] Li, S. and Gao, X.L. (eds). *Handbook of Micromechanics and Nanomechanics*. Pan Stanford Publishing, 2013.
- [12] M.I. Hussein and M.J. Frazize. Metadamping : an emergent phenomenon in dissipative metamaterials. *Journal of Sound and Vibration*, 332 :4767–4774, 2013.
- [13] D. Del Vescovo and I. Giorgio. Dynamic problems for metamaterials : Review of existing models and ideas for further research. *International Journal of Engineering Science*, 80 :153–172, 2014.
- [14] X. Wang. Dynamic behaviour of a metamaterial system with negative mass and modulus. *International Journal of Solids and Structures*, 51 :1534–1541, 2014.
- [15] R. Zhu, X.N. Liu, G.K. Hu, C.T. Sun, and G.L. Huang. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :2759–2773, 2014.
- [16] X. Wang, H. Zhao, X. Luo, and Z. Huang. Membrane-constrained acoustic metamaterials for low frequency sound insulation. *Applied Physics Letters*, 108(4) :041905, 2016.
- [17] C. Soize. Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity. A model based on the theory of fuzzy structures and model parameters estimation. *Computers and Structures*, 58 :901–915, 1995.
- [18] O. Gendelman, L.I. Manevitch, A.F. Vakakis, and R. M’Closkey. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part I-dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :34–41, 2001.
- [19] A.F. Vakakis and O. Gendelman. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part II-resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68 :42–48, 2001.
- [20] A.F. Vakakis. Shock isolation through the use of nonlinear energy sinks. *Journal of Vibration and Control*, 9 :79–93, 2003.
- [21] G.W. Milton, M. Briane, and J.R. Willis. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics*, 8 :1–20, 2006.
- [22] A. Carrella, M.J. Brennan, and T.P. Waters. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *Journal of Sound and Vibration*, 301 :678–689, 2007.
- [23] N.A. Alexander and F. Schilder. Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 319 :445–462, 2009.
- [24] Z. Yang, H.M. Dai, N.H. Chan, G.C. Ma, and P. Sheng. Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50-1000 Hz regime. *Applied Physics Letters*, 96 :041906–1, 041906–3, 2010.
- [25] J.-L. Auriault and C. Boutin. Long wavelength inner-resonance cut-off frequencies in elastic composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :3269–3281, 2012.
- [26] Y. Xiao, J. Wen, and X. Wen. Sound transmission loss of metamaterial-based thin plates with multiple subwavelength arrays of attached resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :5408–5423, 2012.
- [27] S. Varanasi, J.S. Bolton, T.H. Siegmund, and R.J. Cipra. The low frequency performance of metamaterial barriers based on cellular structures. *Applied Acoustics*, 74 :485–495, 2013.
- [28] L.D. Viet and N.B. Nghi. On a nonlinear single-mass two-frequency pendulum tuned mass damper to reduce horizontal vibration. *Engineering Structures*, 81 :175–180, 2014.
- [29] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Second Edition, John Wiley & Sons, 2008.
- [30] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [31] C. Soize. Fundamentals of Random Signal Analysis, Application to Modal Identification in Structural Dynamics, Course given at PUC-Rio University, Rio de Janeiro, Brazil, August 19-23, 1996. Final Edition, Paris, France, 1997.
- [32] L. Guikhman and A.V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes*. Springer Verlag, 1979.
- [33] M.B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.
- [34] M. Shinozuka. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *Journal of the Acoustical Society America*, 49 :357–367, 1971.
- [35] F. Poirion and C. Soize. Numerical methods and mathematical aspects for simulation of homogeneous and non homogeneous Gaussian vector fields. In P. Krée and W. Wedig, editors, *Probabilistic Methods in Applied Physics*, pages 17–53. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [36] L. Verlet. Computer "experiments" on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical Review*, 159(1) :98–103, 1967.
- [37] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer/Verlet method. *Acta Numerica*, 12 :399–450, 2003.
- [38] C. Soize and I. E. Poloskov. Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(11) :3594–3612, 2012.