



HAL
open science

Techniques de réduction de modèles espace-temps a posteriori et a priori pour les problèmes de contact frottant

Anthony Giacom, Anthony Gravouil, David Dureisseix, Michel Rochette

► **To cite this version:**

Anthony Giacom, Anthony Gravouil, David Dureisseix, Michel Rochette. Techniques de réduction de modèles espace-temps a posteriori et a priori pour les problèmes de contact frottant. 11e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2013, Giens, France. hal-01301242

HAL Id: hal-01301242

<https://hal.science/hal-01301242>

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Techniques de réduction de modèles espace-temps *a posteriori* et *a priori* pour les problèmes de contact frottant

A. Giacomini^{1,2}, A. Gravouil¹, D. Dureisseix¹, M. Rochette²

¹ Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS, CNRS UMR 5259, F-69621, Villeurbanne (France),
{anthony.giacoma, anthony.gravouil, david.dureisseix}@insa-lyon.fr

² ANSYS France, Villeurbanne (France),
{anthony.giacoma, michel.rochette}@ansys.com

Résumé — L'introduction du contact frottant dans l'analyse par éléments finis de structures déformables est associée à de fortes non-linéarités héritées du caractère non régulier des lois de contact. C'est pourquoi l'utilisation des techniques de réduction de modèle pour ce type de problème semble peu appropriée. Nous proposons d'adopter une résolution espace-temps du problème par une méthode non-incrementale ouvrant alors la possibilité d'utiliser les techniques de réduction de modèle efficaces pour diminuer les temps de calcul.

Mots clés — Contact frottant, LATIN, Réduction de modèle, POD, Multigrid (MG-FAS).

1 Introduction

La simulation numérique de systèmes mécaniques mettant en jeu des contacts frottants entre solides déformables n'est pas sans difficultés. L'ajout de non-linéarités supplémentaires (*e.g* loi de comportement matérielle), de grandes surfaces de contact, grands coefficients de frottement mettent à rude épreuve les techniques classiques de résolution. Bien qu'en se plaçant dans un cadre d'évolution quasi-statique, certains codes industriels peuvent aboutir (ou non) à la résolution d'un tel problème au prix d'importants temps de calcul.

La problématique des temps de calculs a suscité un important et récent intérêt pour les techniques dites de réduction de modèle [1, 2] et à ses applications dans diverses et nombreux domaines. Cependant, le caractère non-régulier des lois de contact frottant semble peu propice à l'utilisation de telles techniques.

L'objectif de ce travail est de proposer une stratégie d'accélération de temps de calculs pour les problèmes de contact frottant dans le cadre de la simulation par éléments finis. Nous nous plaçons de ce cadre de la mécanique élastique, linéaire, isotrope, homogène pour le comportement des solides évoluant dans un régime quasi-statique. Puis, les lois de contact sont appliquées à chacun des solides impliquant un comportement non-linéaire et non-régulier localisé à leurs frontières. Pour résoudre ce problème, la méthode LATIN (LArge Time INcrement) est utilisée. Cette méthode non-incrementale adopte une stratégie de résolution espace-temps lui conférant une efficacité certaine face aux problèmes présentant diverses non-linéarités (contact, lois de comportement matérielle...) [3, 4].

De la même façon qu'il fut observé en mécanique de la rupture [5, 6], nous tentons de mettre à profit le constat de séparabilité des échelles du problème. En effet, l'ensemble des vecteurs générant la solution d'un problème de contact peuvent être compressés dans une base de taille réduite. Chacun de ces nouveaux vecteurs a la particularité de décrire une échelle particulière de la solution (échelle de la structure *vs.* échelle du contact). Ainsi, il semble opportun d'utiliser des approches multi-échelle.

Dans ce qui suit et en s'appuyant sur un exemple, nous proposons d'illustrer ce caractère de séparabilité des échelles. Puis, nous présentons notre stratégie de résolution ainsi que ses performances. D'autres compléments, détails et exemples seront l'objet d'un article à paraître prochainement.

2 Formulation faible du problème discrétisé

À partir de la formulation forte du problème et en utilisant l'approximation éléments finis pour le champs de déplacement solution, on parvient à la formulation faible discrétisée du problème sous les conditions de contact frottant imposées à chaque nœud appartenant à la frontière potentiellement en contact :

$$\forall \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) : \int_0^T \mathbf{u}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{u} dt = \int_0^T \mathbf{u}^{*T} (\mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{ctc}}) dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{f}_{\text{ctc}} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathcal{R}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

\mathbf{K} est la matrice de raideur du système, \mathbf{f}_{ext} et $\boldsymbol{\lambda}$ sont les forces généralisées correspondantes aux forces extérieures et aux réactions de contact aux nœuds potentiels de contact, \mathbf{B} est une matrice booléenne de restriction sélectionnant les degrés de liberté des nœuds de l'interface de contact parmi le vecteur \mathbf{u} des déplacements nodaux généralisés et l'opérateur \mathcal{R} est une notation formelle regroupant les conditions de contact frottant ($\mathcal{R}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow$ les conditions de Signorini et la loi de Coulomb sont vérifiées).

Les inconnues du problèmes sont \mathbf{u} et \mathbf{f}_{ctc} et doivent vérifier l'équation (1) quelle que soit la fonction test \mathbf{u}^* . L'intervalle de temps est discrétisé en m pas de temps constant $t_{0 \leq k \leq m}$ tel que $t_{k+1} = t_k + \Delta t$.

3 Exemple de problème 2D de contact frottant

3.1 Description du problème et analyse *a posteriori*

Pour le cas 2D traité suivant, l'élément utilisé est un triangle à trois nœuds. Les paramètres de la simulation sont : le nombre de pas de temps $m = 201$, le nombre de degrés de liberté $n = 1144$, le nombre de nœuds potentiels en contact $n_C = 101$, le module de Young $E = 3000$ MPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et le coefficient de frottement $\mu = 0.15$. Le modèle étudié (figure 1) est un corps bidimensionnel hémicylindrique en contact frottant sur un bâti rigide. Des déplacements sont imposés sur la frontière supérieure du solide de façon à obtenir un contact étendu sur la frontière hémicylindrique. La zone en contact effective est d'échelle comparable à celle de la structure. Initialement et jusque t_{40} , le corps n'est pas en contact mais est mû d'un mouvement global d'approche. Puis, celui-ci entre en contact et est pressé contre le bâti rigide. Simultanément, un déplacement tangentiel est imposé de manière à activer le frottement.

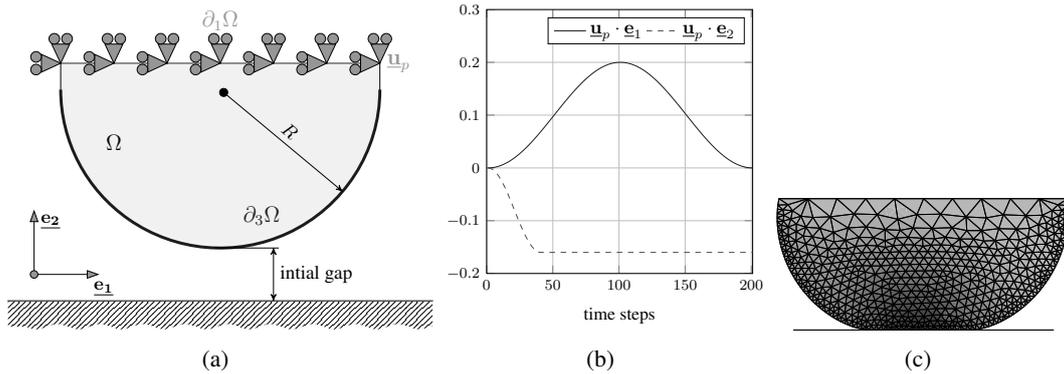


Fig. 1 – (a) Model — (b) Prescribed displacement evolution — (c) Shape of the deformed body at t_{50} .

Après résolution du problème, le champ de déplacement solution est décomposé par SVD (singular value decomposition). Ainsi, des couples de vecteurs singuliers en espace Υ_i (vecteurs singuliers gauches) et en temps ν_i (vecteurs singuliers droits) sont générés. Une base de vecteurs d'espace peut être ainsi formée. Les six premiers vecteurs d'espace sont en figure 2, les valeurs singulières σ_i et fonctions de temps associées sont en figure 3. On remarque nettement qu'un faible nombre de couple de fonctions d'espace et de temps (4 à 5 paires) suffisent pour contenir 99.9% de l'énergie élastique du problème : la solution de ce problème est fortement réductible.

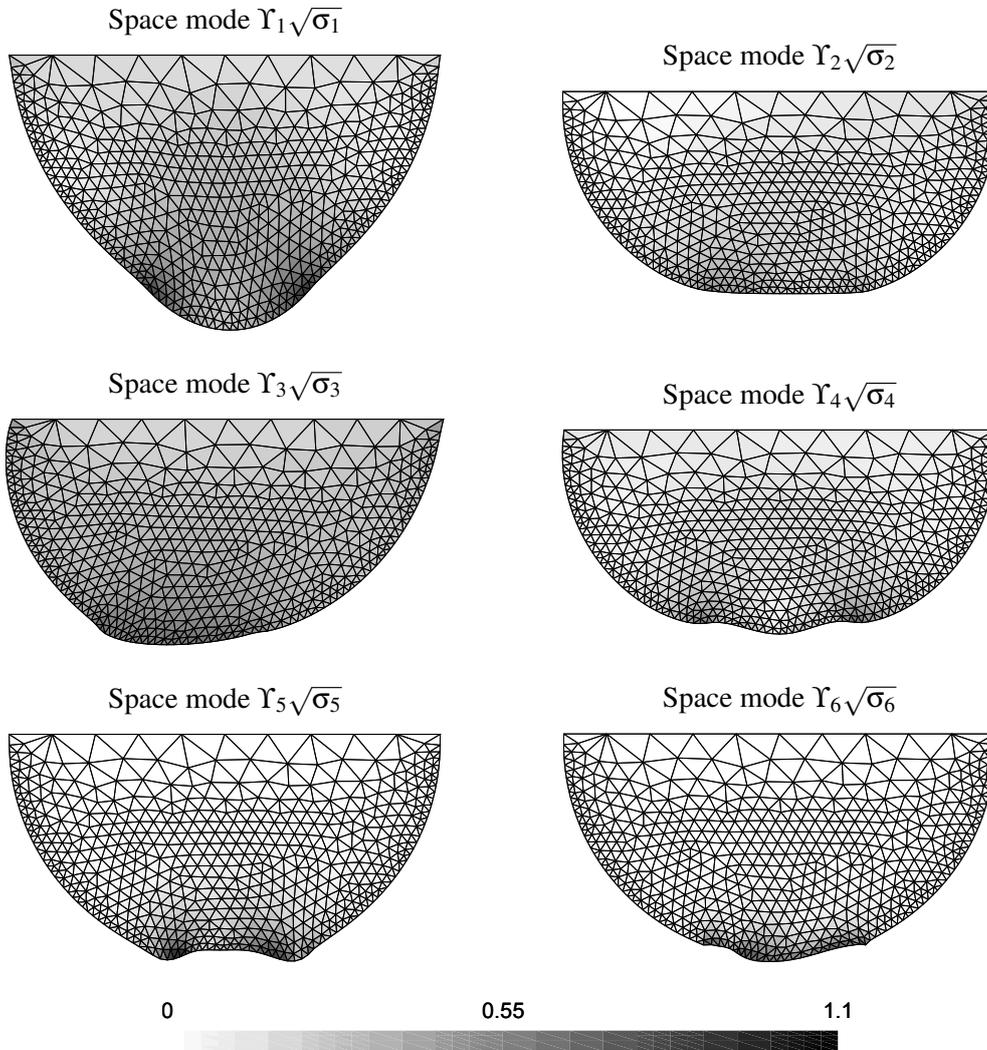


Fig. 2 – Déformées des six premiers modes espaces SVD (vecteurs singuliers gauches) mis à l'échelle par $\sqrt{\sigma}$. L'échelle de gris est le gradient de l'amplitude du champs de déplacement du mode.

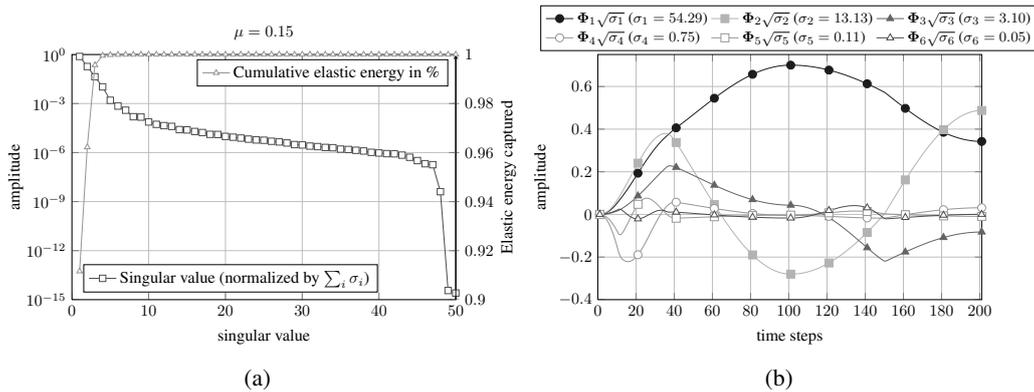


Fig. 3 – (a) Amplitude des 50 premières valeurs singulières (ordonnée logarithmique de gauche) et pourcentage d'énergie élastique cumulé par les modes espace-temps (ordonnée linéaire de droite) — (b) Six premières fonctions du temps SVD (vecteur singulier droit) mis à l'échelle par $\sqrt{\sigma_i}$.

Bien que la solution du problème de contact frottant soit non-régulière, la représentation de la solution sur l'espace-temps permet de définir une base réduite appropriée pour son approximation. Par conséquent, un modèle d'ordre réduit peut être construit.

3.2 Vecteurs singuliers et contenu multi-échelle

On remarque sur la figure 2 que les trois premiers vecteurs de bases en espace ont une contribution étendue à l'échelle de la structure (déformation globale). Tandis que les modes d'ordre supérieur sont particulièrement localisés à la zone en contact. Après le sixième mode, la longueur caractéristique du mode est à comparer à la longueur caractéristique associée à la discrétisation spatiale (taille de maille). Les fonctions du temps associées ont des caractéristiques similaires sur l'intervalle de temps.

La réduction de modèle espace-temps met donc en évidence la séparabilité des échelles. Au minimum, deux échelles peuvent être distinguées : une échelle globale (échelle structure) et une échelle locale (échelle du contact).

Les premières solutions radiales (ou couple de fonctions d'espace et de temps $\sigma_i \Upsilon_i v_i^T$) décrivent de manière globale la déformation de la structure (contenant les plus grandes fractions de l'énergie élastique) tandis que les suivantes apportent des corrections précises et localisées à l'interface de contact.

4 Exploitation de la réduction de modèle au service d'une méthode résolution efficace

Le constat de séparabilité des échelles encourage le déploiement de stratégies multi-échelle. Généralement, de telles techniques consistent à distinguer un comportement global et un comportement localisé sur la structure. Par exemple, dans [7] et dans le cadre de la mécanique de la rupture, la fissure est traitée comme un problème autonome vis-à-vis du problème global de structure. Puis, un couplage faible est réalisé entre ces deux problèmes pour résoudre le problème complet.

Les méthodes multi-grille constituent aussi une gamme efficace de solveurs multi-échelle appliquée à de nombreux domaines et étendue aux problèmes non-linéaires [8, 9, 10, 11]. Certains solveurs itératifs appelés lisseurs (Gauss-Seidel, méthodes de gradients ...) ont la particularité d'annuler rapidement les composantes de haute fréquence de l'erreur (par rapport à la discrétisation du problème) au cours des itérations. Néanmoins, les composantes de basse fréquence sont au contraire lentement capturées. Ainsi, des grilles à discrétisation grossière sont introduites afin de pouvoir apporter des corrections aux grilles fines et ainsi accélérer la convergence.

Nous pouvons faire une analogie entre les observations précédentes et les méthodes multi-grille. Nous proposons de considérer comme grille grossière, les premiers modes (échelle structure) de la base réduite. Puis ceux-ci sont utilisés afin d'apporter des corrections espace-temps grossières. Ces corrections sont calculées à moindre coût sur un modèle réduit (dans un sous-espace de dimension faible). Elles sont ensuite transférées sur le modèle de pleine dimension afin d'accélérer la convergence de la méthode LATIN qui joue alors le rôle de lisseur.

Dans notre cas, nous utilisons les modes SVD de la solution du problème afin d'étudier leur influence sur le solveur mis en place. Néanmoins, nous pourrions les pré-calculer par d'autres moyens (modèles à maillage grossier, solutions analytiques ...) mais cela n'est pas l'objet de ce document.

4.1 Description de la stratégie proposée

Le FAS (Full Approximation Scheme) [8] est un solveur multi-grille dédié aux problèmes non-linéaires. La difficulté de ce procédé est de définir le problème grossier sur lequel la correction grossière à apporter sera calculée à moindre coût.

Globalement, nous proposons de procéder de la manière suivante :

1. Quelques itérations LATIN (ou v_1 relaxations) sur le problème complet (ou de plein rang)
2. Calcul d'une correction espace-temps grossière dans un sous-espace généré par des vecteurs de base d'espace (sur le modèle réduit) ;
3. Quelques itérations LATIN (ou v_2 relaxations) sur le problème complet (ou de plein rang)

De manière similaire, les analogues aux opérateurs intergrilles (restriction et prolongement) doivent être définis afin de transférer les quantités recherchées entre les différents espaces considérés :

- Opérateur de projection entre le modèle plein rang (FOM ou « full order model ») et le modèle réduit (ROM ou « reduced order model ») pour les variables d'effort : \mathbf{R} (e.g. $\mathbf{R} = \Upsilon^T$)

- Opérateur de projection entre FOM et ROM pour les variables de déplacements : $\bar{\mathbf{R}}$ (e.g. $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Y}^T$)
- Opérateur de projection entre ROM et FOM pour les variables de déplacements : \mathbf{P} (e.g. $\mathbf{P} = \mathbf{Y}$)

Afin de respecter des considérations énergétiques (conservation) [10], on impose la condition suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \quad (2)$$

Problème à rang plein (FOM ou problème fin). Les itérations LATIN sont considérées comme des relaxations sur le problème fin (qui est le problème de référence à résoudre). Par conséquent, les tests de convergence doivent être évalués à cette étape. Après chaque étape de relaxation, une solution $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\lambda})$ est itérée. L'étape de relaxation est terminée par l'étape locale de la méthode LATIN de manière à ce que la solution $\tilde{\mathbf{s}}$ respecte les conditions de contact frottant mais pas les conditions d'admissibilité statique. De fait, $\tilde{\mathbf{s}}$ a un résidu d'équilibre défini par :

$$\tilde{\mathbf{res}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{B}^T \tilde{\lambda} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} \quad (3)$$

Problème de rang réduit (ROM ou problème grossier). L'étape grossière consiste à apporter des corrections grossières (mais pertinentes) pour le champ de déplacement et le champ des efforts de contact $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\lambda})$ obtenus par la précédente étape de relaxation. On définit le problème grossier par une combinaison entre la méthode LATIN et la définition du problème grossier défini par la méthode FAS. Ainsi, il s'agit d'un processus à deux étapes sur les incréments correctifs itérant entre l'ensemble des solutions vérifiant l'équilibre statique (au sens des vecteurs définissant le modèle réduit) et l'ensemble des solutions vérifiant les conditions du contact frottant :

- Première étape. On suppose la connaissance d'une première approximation des incréments correctifs $(\widehat{\Delta \mathbf{u}}, \widehat{\Delta \lambda})$ vérifiant les conditions de contact pour $(\tilde{\mathbf{u}} + \widehat{\Delta \mathbf{u}}, \tilde{\lambda} + \widehat{\Delta \lambda})$ (e.g. corrections nulles). Une meilleur approximation pour ces incréments consiste à trouver $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda)$ réduisant le résidu d'équilibre :

$$\mathbf{res} = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{B}^T (\tilde{\lambda} + \Delta \lambda) - \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}) \quad (4)$$

en utilisant des directions de recherche :

$$\Delta \lambda = \widehat{\Delta \lambda} - \mathbf{k} (\Delta \mathbf{v} - \widehat{\Delta \mathbf{v}}) \quad (5)$$

on obtient

$$\mathbf{res} = \tilde{\mathbf{res}} + \mathbf{B}^T (\widehat{\Delta \lambda} + \mathbf{k} \widehat{\Delta \mathbf{v}}) - [\mathbf{K} + \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}] \Delta \mathbf{u} \quad (6)$$

La méthode FAS consiste à annuler la composante grossière du résidu (i.e. $\mathbf{Rres} = 0$) avec la représentation suivante pour le champ de déplacement :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{P} (\Psi - \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}) \quad (7)$$

Par conséquent, on doit résoudre le système linéaire (de taille égale à celle du nombre de vecteurs de base définissant le modèle de réduit) suivant :

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{R} [\mathbf{K} + \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}] \mathbf{P} \right] (\Psi - \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{R} \left[\tilde{\mathbf{res}} + \mathbf{B}^T (\widehat{\Delta \lambda} + \mathbf{k} \widehat{\Delta \mathbf{v}}) \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\mathbf{R} [\mathbf{K} + \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}] \mathbf{P} \right] \Psi = \mathbf{R} \left[\tilde{\mathbf{res}} + \mathbf{B}^T (\widehat{\Delta \lambda} + \mathbf{k} \widehat{\Delta \mathbf{v}}) + [\mathbf{K} + \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}] \mathbf{P} \bar{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Lorsque Ψ (fonction du temps) est calculée, les corrections $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda)$ sont facilement déduites (via la représentation (7) et la direction de recherche (5)). De plus, les champs complets correspondants peuvent être obtenus par $(\tilde{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}, \tilde{\lambda} + \Delta \lambda)$.

- Seconde étape. Cette étape consiste à mettre à jour la correction obtenue lors de la première étape, c'est-à-dire à calculer $(\widehat{\Delta \mathbf{u}}, \widehat{\Delta \lambda})$ de manière à satisfaire les conditions de contact pour les champs complets. Cette étape est tout simplement équivalente à l'étape locale de la méthode LATIN utilisée pour les relaxations. Lorsque cette étape est résolue, les champs complets $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\lambda})$ tels que $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\lambda}) = 0$ sont obtenus et les incréments correctifs $(\widehat{\Delta \mathbf{u}}, \widehat{\Delta \lambda})$ déduits.

4.2 Application

Connaissant *a posteriori* une base réduite permettant de définir un problème grossier, nous comparons la stratégie proposée à la méthode LATIN en termes de nombre de relaxations pour résoudre le cas précédemment évoqué. Les paramètres utilisés pour la nouvelle méthode sont $\nu_1 = \nu_2 = 1$ en imposant 15 itérations sur le problème grossier. On appelle un cycle, l'ensemble des ν_1 relaxations + $i_C = 15$ itérations sur le problème grossier + ν_2 relaxations. Les paramètres de direction de recherche de la méthode LATIN sont fixés aux valeurs optimales.

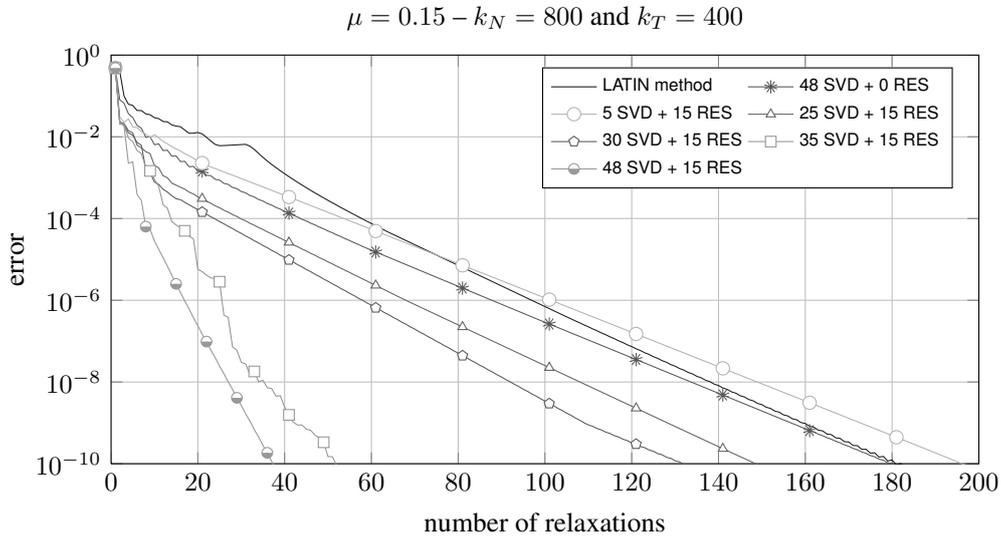


Fig. 4 – Graphe de convergence de la stratégie proposée vs. méthode LATIN. L'influence du nombre de vecteurs *a posteriori* obtenus par SVD définissant le modèle réduit est étudié.

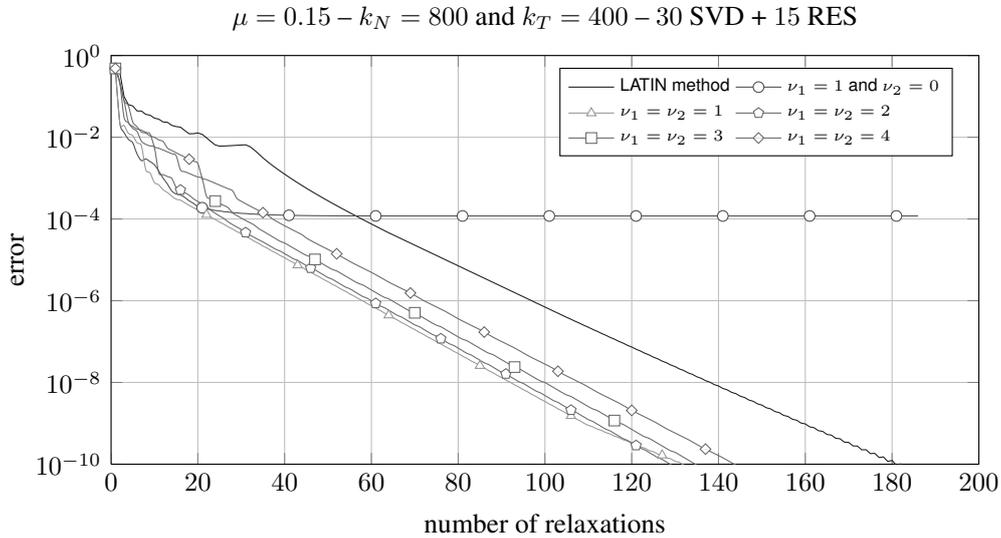


Fig. 5 – Graphe de convergence de la stratégie proposée vs. méthode LATIN. L'influence du nombre de relaxations avant (ν_1 relaxations) et après (ν_2 relaxations) l'étape grossière est étudiée.

4.3 Discussion

De manière générale, les résultats en figure 4 montrent que la méthode proposée converge plus vite que la méthode LATIN. Le nombre de relaxation peut être divisé par 2 voire 10 selon les paramètres utilisés pour la méthode et la précision demandée.

La première remarque concerne le contenu de la base réduite définissant le problème grossier *via* les opérateurs inter-espace \mathbf{P} , \mathbf{R} , $\bar{\mathbf{R}}$. Un modèle d'ordre réduit construit exclusivement sur les vecteurs de

base obtenus par SVD de la solution n'est pas pertinent (très faible accélération de la convergence malgré une importante taille de modèle réduit). En effet, à chaque cycle, une solution itérée (et donc approximée) est construite et celle-ci n'est pas entièrement générée par le modèle réduit construit à partir de la solution du problème. Pour apporter des corrections grossières pertinentes, d'autres vecteurs de base (générant les solutions itérées) doivent être pris en compte. Pour ce faire et arbitrairement, on complète la collection des vecteurs pré-calculé par SVD par 15 vecteurs générant le résidu orthogonal de projection. Puis, à chaque cycle, ces vecteurs sont mis à jour de manière à conserver une taille de base réduite constante au cours de la résolution du problème.

Sur la figure 4, on étudie l'influence du nombre de vecteurs SVD (complété par 15 vecteurs du résidu notés « RES ») composant le problème grossier. De manière générale, plus la base contient de vecteurs SVD, plus la convergence est rapide bien que cela soit au prix d'une taille accrue pour le problème grossier. Un compromis est alors à faire entre taille du problème grossier et pertinence des corrections apportées susceptibles d'accélérer la convergence. Un modèle réduit défini par trop peu de vecteurs de base rend l'étape grossière inefficace (faible accélération), ou pire entrave la convergence global de l'algorithme. L'ajout des vecteurs générant le résidu orthogonal permet de remédier aux éventuels manques de pertinence de l'étape grossière et ainsi rendre plus robuste l'algorithme.

Les courbes de convergence de l'algorithme FAS/LATIN montrent différents régimes durant le processus de convergence. Durant une première phase, la convergence est nettement accélérée. Puis, la vitesse de convergence retrouve celle de la méthode LATIN classique. De manière générale, plus la taille de la base réduite est grande, plus le régime d'accélération est long et important. Cela peut s'expliquer par le contenu multi-échelle de la base réduite (voire section 3). Durant les premières itérations, le comportement à l'échelle de la structure (premiers modes SVD) est capturé impliquant une forte chute de l'erreur. Puis les problèmes de plus petites échelles (*e.g.* contact) sont résolus. La vitesse de convergence est plus ou moins accélérée selon la pertinence de l'étape grossière (*i.e.* contenu de la base). Enfin, le dernier régime indique une vitesse de convergence approximativement équivalente à la vitesse de convergence de la méthode LATIN. Durant cette dernière phase, seules les étapes de relaxations contribuent à la chute de l'erreur et l'étape grossière n'apportent plus de corrections significatives.

Outre la définition de l'étape grossière, d'autres paramètres ont une influence déterminante sur le comportement de l'algorithme et notamment le nombre de relaxation avant et après l'étape grossière. Le nombre de relaxations permet de porter l'effort de calcul soit sur le problème fin soit sur le problème grossier. De manière générale, un nombre important de relaxations permet de rendre plus robuste mais plus lent l'algorithme. À noter qu'imposer un très grand nombre de relaxations revient à résoudre le problème de contact avec la méthode LATIN. En figure 5, l'influence du nombre de relaxations fait émerger une configuration optimale (*i.e.* un nombre minimum de relaxation) bien qu'un nombre suffisant doive être nécessaire afin de rendre le processus convergent (*e.g.* en figure 5, imposer une relaxation ne permet pas d'atteindre des niveaux d'erreur inférieur à 10^{-4}). Ces résultats sont à relier avec le contenu et la pertinence de la base réduite utilisée.

5 Conclusions et perspectives

En s'appuyant sur un exemple, nous avons mis en évidence qu'une solution d'un problème de contact frottant pouvait être compressée dans une base de vecteurs espace-temps. Selon sa complexité et sa capacité à pouvoir être représentée par des fonctions radiales espace-temps, quelques vecteurs peuvent suffire pour générer la solution du problème étudié. Cette décomposition est permise grâce au procédé de réduction de modèle espace-temps.

L'analyse de chacune de ces solutions radiales révèle de façon claire une séparabilité des échelles de la solution. Ce constat justifie l'approche multi-échelle utilisée. La stratégie proposée est calquée sur le solveur non-linéaire multi-grille FAS à deux niveaux en considérant la méthode LATIN comme un lisseur et l'étape grossière comme une méthode de sous-espace.

Cependant, une base réduite construite exclusivement à partir de la POD de la solution (construction *a posteriori*) est insuffisante et n'accélère pas significativement la convergence (même si la solution du problème est fortement réductible). C'est pourquoi, d'autres vecteurs doivent compléter cette base afin de pouvoir générer les solutions itérées au cours des itérations (ou du processus non-linéaire). Par conséquent, l'enrichissement de la base réduite est un point-clé pour accélérer la convergence.

De plus, mais ne figurant pas dans ce document, une telle approche est adaptée au contexte des études paramétriques. En effet, l'utilisation de cette stratégie pour résoudre un problème similaire (*e.g.* étude paramétrique du coefficient de frottement) en ré-exploitant judicieusement les solutions pré-calculées permet d'accélérer les temps de calculs des solutions recherchées.

Dans notre approche, nous supposons la connaissance préalable d'une base réduite issue d'un calcul *a posteriori* SVD. Un autre type d'approche est dit *a priori* : ces méthodes consistent à construire le modèle réduit au cours des itérations et sans connaissance préalable de base réduite. L'enrichissement précédemment décrit pourrait être comparé à une telle approche. Par ailleurs, celui-ci pourrait être aisément intégré en considérant l'approximation radiale pour la solution (ou encore la représentation séparée). L'efficacité d'une telle représentation a déjà été plusieurs fois illustrée dans divers problèmes (mécanique, thermique, ...) [2, 12, 13]. Ces aspects *a priori* appellent clairement au futur déploiement des méthodes PGD (proper generalized decomposition) [14, 15, 16].

Références

- [1] D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Ammar. On the a priori model reduction : Overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :91–128, 2006.
- [2] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1287 – 1296, 2010.
- [3] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Methods : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer-Verlag New York Inc., 1999.
- [4] L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, and P. Ladevèze. Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 :253–263, 1997.
- [5] F. Galland, A. Gravouil, E. Malvesin, and M. Rochette. A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :699 – 716, 2011.
- [6] F. Galland. *An adaptive model reduction approach for 3D fatigue crack growth in small scale yielding conditions*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2011.
- [7] E. Pierres, M.C. Baietto, and A. Gravouil. A two-scale extended finite element method for modelling 3D crack growth with interfacial contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1165 – 1177, 2010.
- [8] C. H. Venner and A. A. Lubrecht. *Multilevel Methods in Lubrication*. Elsevier, 2000.
- [9] P. Cavin, A. Gravouil, A. A. Lubrecht, and A. Combescure. Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :1043–1055, 2005.
- [10] J. Rannou. *Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2008.
- [11] E. Biotteau, A. Gravouil, A. A. Lubrecht, and A. Combescure. Three dimensional automatic refinement method for transient small strain elastoplastic finite element computations. *Computational Mechanics*, 49 :123 – 136, 2012.
- [12] Christophe Heyberger, Pierre-Alain Boucard, and David Néron. Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, 49 :277–289, 2012.
- [13] H. Lemoussu, P.-A. Boucard, and P. Ladevèze. A 3D shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, 33 :517 – 526, 2002.
- [14] Francisco Chinesta, Amine Ammar, and Elías Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17 :327–350, 2010.
- [15] Francisco Chinesta, Pierre Ladevèze, and Elías Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18 :395–404, 2011.
- [16] L. Boucinha, A. Gravouil, and A. Ammar. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :67 – 88, 2013.