



HAL
open science

Deux méthodes de décomposition de domaine pour la dynamique des contacts et leurs formulations enrichies

Vincent Visseq, Pierre Alart, David Dureisseix

► **To cite this version:**

Vincent Visseq, Pierre Alart, David Dureisseix. Deux méthodes de décomposition de domaine pour la dynamique des contacts et leurs formulations enrichies. 11e Colloque National en Calcul des Structures - CSMA2013, May 2013, Giens, France. hal-01301239

HAL Id: hal-01301239

<https://hal.science/hal-01301239>

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Deux méthodes de décomposition de domaine pour la dynamique des contacts et leurs formulations enrichies

Vincent Visseq¹, Pierre Alart¹, David Dureisseix²

¹ LMGC – UMR 5508, Université Montpellier II / CNRS, Vincent.Visseq@univ-montp2.fr, Pierre.Alart@univ-montp2.fr

² LaMCoS – UMR 5259, Université de Lyon, INSA Lyon / CNRS, David.Dureisseix@insa-lyon.fr

Résumé — La simulation de la dynamique des systèmes discrets en présence d'impacts et de contacts frottants pose de nombreux défis, tant en termes de modélisation que de temps de calcul. Afin de traiter des échantillons réalistes de grande taille, des techniques de résolution ont été développées, en particulier des méthodes de décomposition de domaine. L'objectif de cette étude est de présenter deux méthodes (de type complément de Schur dual et Schwarz) adaptées au cadre de la dynamique des contacts. La prise en compte de la structure du réseau d'efforts sous-jacent mène respectivement à un problème d'interface enrichi et à des communications augmentées entre processeurs, dont les performances sont comparées.

Mots clés — Décomposition de domaine, dynamique des contacts, enrichissement de modèles

1 Introduction

La simulation numérique des systèmes discrets a pour caractéristique de devoir représenter l'évolution d'une collection de corps et de leurs interactions.

Les méthodes dites "smooth", mettant en œuvre des schémas d'intégration explicites, modélisent ces interactions par des lois régularisées (e.g. loi de Hertz), acceptant ainsi l'interpénétration des corps aux contacts. L'essentiel du temps de calcul est alors réparti entre la détection des contacts et l'évaluation des forces de contact.

La dynamique des contacts (ou NonSmooth Contact Dynamics – NSCD) consiste, à chaque pas de temps, à résoudre simultanément l'ensemble des interactions non régulières du système. Pour ce faire, les équations de Newton/Euler sont ré-exprimées en termes d'impulsions r et de vitesses relatives v aux contacts. La difficulté de résolution de ce problème est de deux types : d'une part, le nombre d'inconnues (nombre d'interactions r et v) devient rapidement conséquent (en 3D, de l'ordre de trois fois le nombre de corps de l'échantillon n bien plus ! Si n est le nb de corps, $3n$ est le nb de contacts et $3 \times 3n$ le nb d'inconnues en impulsion, et $2 \times 3 \times 3n$ le nb d'inconnues en impulsion et saut de vitesse v), et l'opérateur du système est a priori non inversible (non unicité de la solution). D'autre part, les relations de comportement au contact sont non régulières (e.g. non linéaires et non différentiables). Pour gérer le problème de non régularité, un solveur Gauss-Seidel non-linéaire (NLGS) est mis en œuvre. Pour gérer la taille du problème et réduire les temps de calcul, des techniques de résolution de type décomposition de domaine peuvent être introduites [2, 5, 8].

Dans cette étude, deux méthodes de décomposition de domaine adaptées à la dynamique des contacts sont comparées, ainsi que leurs formulations enrichies. Une première méthode, nommée NonSmooth Contact Domain Decomposition (NSCDD), est une méthode de type complément de Schur, où un problème de recollement d'interface est introduit. Cette méthode, mise en œuvre dans la plate forme de calcul LMGC90, a fait récemment ses preuves sur des simulations de milieux granulaires de grande dimensions ($2 \cdot 10^5$ sphères pour une moyenne de $2 \cdot 10^6$ inconnues de contacts n alors ?? A comparer à l'estimation d'avant n). Une seconde méthode, de type Schwarz, est présentée. Comme pour l'algorithme de Schwarz additif, cette méthode consiste à transférer une information d'interface entre les sous-domaines interconnectés.

Ces deux méthodes, constituant deux adaptations de techniques classiques de décomposition de domaine à la dynamique des contacts, héritent de propriétés particulières dues à la nature discrète du système traité. En effet, aucune condensation sur l'interface des propriétés des sous-domaines n'intervient.

De ce fait, le problème d'interface NSCDD, ainsi que les informations transmises dans la méthode de type Schwarz, ont un caractère local, partiellement indépendant de la dynamique globale des sous-domaines (cf. section 2).

Pour augmenter la vitesse de convergence, un enrichissement de la méthode NSCDD basé sur la prise en compte du réseau de contacts sous-jacent, a été proposé par [1]. Le problème d'interface obtenu couple alors fortement l'ensemble des sous-domaines entre eux. Sous certaines conditions, difficilement généralisables, il a été montré [1] que ce problème enrichi fournit des conditions aux limites absorbantes sur l'interface des sous-domaines. Une approche similaire est présentée pour la méthode de type Schwarz-NSCD, menant à une condensation locale sur les interfaces de chaque sous-domaine et à un transfert d'information enrichie, aux seuls sous-domaines interconnectés (cf. section 3).

Une première comparaison de ces quatre méthodes, sur des exemples académiques, est présentée section 4.1. Enfin, nous étudierons les propriétés mathématiques des différentes versions enrichies et leurs possibles méthodes de résolution (cf. section 4.2).

2 Méthodes de décomposition de domaine génériques

Les deux méthodes de décomposition de domaine présentées dans cette section concernent la méthode NonSmooth Contact Dynamics introduite par Moreau et Jean [7, 4]. Reformulant les équations de Newton/Euler (Principe Fondamental de la Dynamique) en termes d'inclusions différentielles mesurables (de sorte à prendre en compte les discontinuités en vitesses lors d'impacts entre corps), l'intégration temporelle de ces équations sur un intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ mène à une formulation en vitesse/impulsion de la dynamique d'une collection de corps rigides comme :

$$MV - R = R^d, \quad (1)$$

avec M la matrice des paramètres inertiels des solides, V le vecteur vitesse assemblé pour la collection de N_S corps considérés (degrés de libertés de translation et de rotation), R le vecteur assemblé des impulsions résultant des contacts entre corps et $R^d = MV^- + F^d$ l'impulsion imposée définie à partir des vitesses en début de pas de temps V^- et des forces imposées au système F^d .

Les lois de contact entre solides sont prises en compte dans les repères associés aux contacts, de sorte à formuler de façon naturelle les conditions de non-interpénétration, frottement sec, cohésion, etc. Pour ce faire, on utilise la formule de transport des vitesses et des forces sous les formes matricielles $v = H^T V$ et $R = Hr$ respectivement, avec v les vitesses relatives aux contacts et r les impulsions de contacts. L'équation (1) réduite aux contacts est alors :

$$\begin{cases} Wr - v = -v^d \\ \mathcal{R}(v, r) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

avec $W = H^T M^{-1} H$, $v^d = H^T M^{-1} R^d$ et $\mathcal{R}(v, r) = 0$ l'écriture formelle d'une loi de contact non régulière (e.g. condition de complémentarité et loi de Coulomb exacte). L'opérateur W étant a priori non inversible et les interactions de contact non-régulières un solveur Gauss-Seidel non-linéaire (NLGS) est mis en œuvre afin de résoudre l'équation (2).

2.1 Partitionnement en sous domaine

Du fait de l'absence de maillage, le partitionnement en sous domaines d'une collection d'éléments discrets consiste, à chaque pas de temps ou à une fréquence donnée, à décomposer le graphe constitué de corps (nœuds) et d'interactions (segments) en sous-graphes.

Deux méthodes de partitionnement de ce graphe corps/interactions sont envisagées ici. On définit tout d'abord une grille de partitionnement fixée arbitrairement par l'utilisateur. Cette grille forme un domaine spatial fictif Ω tel que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_E \cup \dots \cup \Omega_{N_{sd}}, \quad (3)$$

sans recouvrement entre les sous domaines spatiaux fictifs :

$$\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_E \cap \dots \cap \Omega_{N_{sd}} = O. \quad (4)$$

Partitionnement primal Une première approche consiste à répartir les corps dans des sous domaines : les corps dont le centre de gravité appartient à Ω_E seront nommés corps internes au sous domaine E . Une interaction entre corps sera :

- interne, si le candidat et l'antagoniste appartiennent à un même sous domaine,
- d'interface, si le candidat et l'antagoniste n'appartiennent pas au même sous domaine.

Ainsi, l'interface entre sous domaines peut être définie par l'ensemble des interactions (non régulières) dont le candidat et l'antagoniste n'appartiennent pas au même sous domaine.

Partitionnement dual L'approche duale de cette dernière consiste à répartir les interactions dans les différents sous domaines. Pour ce faire, on prend le point milieu du segment joignant les centres de gravité des corps candidat et antagoniste. Les interactions dont ce point appartient à Ω_E seront nommées interactions internes au sous domaine E . L'interface entre sous-domaines se trouve alors être constituée de corps. Le nombre de sous domaines dans lesquels un corps \mathcal{S}_i supporte des contacts est appelé son nombre de multiplicité, noté m_i . Les deux méthodes présentées ci-dessous s'appuient sur ce partitionnement dual.

2.2 Méthode de type complément de Schur

Dans l'esprit de la méthode FETI, un problème d'interface consiste à imposer (à convergence) un saut de vitesse nul des corps d'interface, par l'intermédiaire de variables additionnelles (multiplicateurs de Lagrange). Cette méthode de décomposition de domaine peut être caractérisée de méthode sans recouvrement. En effet, un corps d'interface \mathcal{S}_i est conceptuellement divisé en fonction de son nombre de multiplicité m_i . Dans un cadre élément fini, le maillage de ce corps supportant des contacts dans m_i sous domaines serait réparti parmi ceux-ci. La modélisation rigide des corps ne permettant pas une telle division géométrique, le caractère non recouvrant de la méthode est alors pris en compte par une partition de l'unité sur les paramètres d'inertie des corps.

Quantités par sous domaine Une fois le partitionnement dual réalisé, les vitesses et impulsions des corps par sous domaine sont reliées aux inconnues de contacts par :

$$R_E = H_E r_E, \quad (5)$$

$$v_E = H_E^T V_E. \quad (6)$$

La partition de l'unité sur les paramètres d'inertie des corps est définie (pour des raisons de simplicité), sous la forme :

$$\tilde{M}_E = B_E D M B_E^T, \quad (7)$$

avec :

$$D_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1/m_i & \text{si } k = l \end{cases}, \quad (8)$$

pour les entrées k correspondantes au corps \mathcal{S}_i . Concrètement, cette partition de l'unité consiste à affecter une proportion égale de la masse volumique des corps d'interface dans les sous domaines où ces corps supportent des contacts.

Formulation de type FETI Le problème à traiter pour chaque sous domaine (E) possède la même structure que problème global (mono domaine) (1), avec l'ajout d'un terme issu des contributions des sous domaines interconnectés. Ces termes proviennent du problème de recollement des vitesses des corps d'interface, avec $A_{\Gamma E}$ une matrice booléenne signée reliant les vitesses généralisées V_E du sous domaine E aux sauts de vitesse des corps de l'interface globale Γ tel que :

$$\sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} V_E = 0. \quad (9)$$

Bien que cette somme soit formellement écrite sur l'ensemble des sous domaines, le saut de vitesse pour un corps d'interface donné ne fait intervenir que seuls les sous domaines interconnectés au travers de ce corps.

On obtient alors une formulation de type FETI du problème (de structure similaire à ce proposé par [3] dans le cadre de la mécanique des milieux continus), avec le vecteur des multiplicateurs de Lagrange F_Γ associés aux conditions de sauts d'interface :

$$\begin{cases} \tilde{M}_E V_E = R_E + R_E^d - A_{\Gamma E}^T F_\Gamma, & E = 1, \dots, N_{sd} \\ \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} V_E = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Problème d'interface En exprimant la vitesse des corps par sous domaine à partir de l'équation (10) et en injectant cette expression dans l'équation (9), on obtient le problème d'interface linéaire, d'inconnues F_Γ :

$$X F_\Gamma = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_E^{-1} (R_E + R_E^d), \quad (11)$$

avec $X = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_E^{-1} A_{\Gamma E}^T$, l'opérateur d'interface du système.

Dynamique réduite Pour chaque sous domaine E , la projection aux contacts des impulsions d'interface F_Γ est notée :

$$v_E^\Gamma = H_E^T \tilde{M}_E^{-1} A_{\Gamma E}^T F_\Gamma, \quad (12)$$

$$(13)$$

la dynamique condensée aux contacts dans le cadre DDM de type FETI s'écrit alors :

$$\begin{cases} \tilde{W}_E r_E - v_E = -v_E^d + v_E^\Gamma, \\ \mathcal{R}(v_E, r_E) = 0 \end{cases} \Bigg\} E = 1, \dots, N_{sd} \quad (14)$$

$$X F_\Gamma = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_E^{-1} (R_E + R_E^d),$$

avec $\tilde{W}_E = H_E^T \tilde{M}_E^{-1} H_E$.

2.3 Méthode de type Schwarz additif

B_E étant l'opérateur de passage des quantités globales aux quantités du sous domaine E , défini par le partitionnement dual, prenons la restriction des équations de la dynamique formulées en vitesse (1) par sous domaine comme, $\forall E$:

$$B_E(MV) = B_E(Hr + R^d). \quad (15)$$

La matrice des paramètres d'inertie par sous-domaine (ici sans partition de l'unité) s'écrit :

$$M_E = B_E M B_E^T, \quad (16)$$

et comme, par construction, $V_E = B_E V$, le membre de gauche de l'équation (15) est :

$$B_E(MV) = M_E V_E. \quad (17)$$

De même, l'impulsion imposée R^d , provenant des vitesses des corps et des forces extérieures agissant sur les corps, dépend uniquement de quantités définies à l'échelle du sous domaine E , on a :

$$B_E R^d = R_E^d \quad (18)$$

Le couplage entre sous domaines intervient alors par l'intermédiaire des impulsions de contact. En effet, les corps d'interface supportant des contacts dans plus d'un sous domaine, l'impulsion assemblée R est :

$$R = \sum_{E^*=1}^{n_{sd}} B_{E^*}^T H_{E^*} r_{E^*} \quad (19)$$

Lors de la sélection par B_E de la composante relative au sous domaine E , $B_E R$ se décompose en un terme local et un terme de couplage :

$$B_E R = H_E r_E + R_E^{ddm}, \quad (20)$$

avec :

$$R_E^{ddm} = \sum_{E^* \neq E} B_E B_{E^*}^T R_{E^*} \quad (21)$$

$B_E B_{E^*}^T$ définissant un opérateur booléen de passage des quantités de E^* appartenant aussi au sous domaine E , et $B_E B_E^T$ la matrice identité de taille $N_E^{Sddl} \times N_E^{Sddl}$ (N_E^{Sddl} est le nombre de degrés de liberté des corps du sous domaine E).

La dynamique globale par sous domaine devient alors :

$$M_E V_E - H_E r_E = R_E^d + R_E^{ddm}, \quad (22)$$

et la dynamique réduite aux contacts, avec $v_E^{ddm} = H_E^T M_E^{-1} R_E^{ddm}$, peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} W_E r_E - v_E &= -v_E^d - v_E^{ddm} \\ \mathcal{R}(v_E, r_E) &= 0 \end{aligned} \right\} E = 1, \dots, n_{sd} \quad (23)$$

Comme on peut le constater, cette méthode ne fait pas intervenir de nouvelles inconnues d'interface, mais seulement des échanges entre processeurs. Les impulsions, agissant sur les corps d'interface d'un sous domaine, associées à des contacts de sous domaines interconnectés, sont considérées comme des conditions aux limites. On ne fait donc pas intervenir de problème de recollement global comme c'est le cas pour la méthode NSCDD. Cette structure algorithmique est à rapprocher des méthodes de décomposition de domaines de type Schwarz additif [6]. Cette méthode sera nommée Schwarz-NSCD par la suite.

3 Prise en compte du réseau de contacts sous-jacent

Les deux méthodes ci-dessus montrent de bonnes propriétés pour la parallélisation des calculs de milieux granulaires denses. Il a été montré [8] que le comportement global et micro mécanique d'un essai granulaire typique (compactage biaxial) n'était pas influencé par le nombre de sous domaines employés pour une simulation. De plus, le nombre d'itérations NLGS (pour une méthode séquentielle) ou DDM est sensiblement égal, i.e. que ces méthodes de décomposition de domaine sont extensibles et que la vitesse de convergence de ces algorithmes ne dépend pas du nombre de sous domaines. Cependant, lorsque le nombre de corps de l'échantillon croit fortement, le nombre d'itérations à convergence croit de même. Les travaux initiés par [1] tentent de surmonter cette difficulté par la prise en compte du treillis sous-jacent au milieu granulaire formé par le réseau des contacts.

Pour ce faire [1] propose d'introduire une direction de recherche tangente $(\tilde{r}_E, \tilde{v}_E)$, une fois obtenues les quantités (r_E, v_E) , satisfaisant les équations de la dynamique et vérifiant :

$$\tilde{R}_E = H_E \tilde{r}_E \text{ et } \tilde{v}_E = H_E^T \tilde{V}_E, \quad (24)$$

$$(\tilde{r}_E - \bar{r}_E) + l_E (\tilde{v}_E - \bar{v}_E) = 0, \quad (25)$$

avec l_E un paramètre numérique de la méthode.

3.1 NSCDD avec problème d'interface augmenté

Dans le cas de l'enrichissement de la méthode NSCDD, le couple $(\tilde{r}_E, \tilde{v}_E)$ doit aussi assurer la continuité des vitesses d'interface. La dynamique par sous domaine pour ces dernières quantités est :

$$\tilde{M}_E \tilde{V}_E - H_E \tilde{r}_E = R_E^d - A_{\Gamma E}^T F_{\Gamma}. \quad (26)$$

En substituant \tilde{r}_E par son expression issue de l'équation (25), on obtient :

$$\tilde{M}_{\eta, E} \tilde{V}_E - H_E (r_E + l_E) = R_E^d - A_{\Gamma E}^T F_{\Gamma}, \quad (27)$$

avec $\eta = 1/l_E$, $\tilde{M}_{\eta, E} = \tilde{M}_E + L_E$ et $L_E = H_E l_E H_E^T$, cette dernière matrice contenant les informations du réseau de contacts grâce aux matrices de connectivité H_E et H_E^T . Comme dans le cas de la méthode

NSCDD générique, l'équation de la dynamique est condensée sur l'interface et l'équation de continuité (9) permet d'exprimer les inter-efforts F_Γ :

$$X_\eta F_\Gamma = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta,E}^{-1} \left[R_E^d + H_E (r_E + l_E v_E) \right], \quad (28)$$

avec l'opérateur d'interface augmenté :

$$X_\eta = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta,E}^{-1} A_{\Gamma E}^T. \quad (29)$$

3.2 Schwarz-NSCD avec communications augmentées

La prise en compte de la direction de recherche numérique dans le contexte de l'algorithme Schwarz-NSCD, consiste, par analogie avec l'approche précédente, à considérer l'équation de la dynamique :

$$M_E \tilde{V}_E - \tilde{R}_E = R_E^d + R_E^{ddm}. \quad (30)$$

En exprimant \tilde{R}_E à partir de l'équation (25) :

$$\tilde{R}_E = R_E - L_E (\tilde{V}_E - V_E), \quad (31)$$

et en y substituant \tilde{V}_E à partir de l'équation (30), on obtient les impulsions de contact augmentées :

$$\tilde{R}_E = (I + L_E M_E^{-1})^{-1} \left(R_E - L_E [M_E^{-1} (R_E^d + R_E^{ddm}) - V_E] \right). \quad (32)$$

Les impulsions de contact assurant l'interconnexion des différents domaines sont alors exprimées à l'aide des opérateurs $B_E B_{E^*}^T$, pour un sous domaine E donné :

$$R_E^{ddm} = \sum_{E^* \neq E} B_E B_{E^*}^T \tilde{R}_{E^*}. \quad (33)$$

3.3 Discussion

Ces deux méthodes augmentées ont des structures très différentes. Pour la méthode NSCDD, l'enrichissement conduit à un problème d'interface couplant fortement l'ensemble des sous domaines, alors que l'enrichissement de la méthode Schwarz-NSCD ne présente que des communications augmentées entre sous domaines directement interconnectés. La résolution du problème d'interface NSCDD-EP (***) on n'a pas dit que que c'est **) se révèle coûteuse et suppose, soit une centralisation des différentes matrices $A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta,E}^{-1} A_{\Gamma E}^T$ sur un sous domaine hôte afin de résoudre de façon directe l'équation d'interface enrichie, soit la mise en œuvre d'une méthode itérative (e.g. de type gradient conjugué), s'apparentant aux méthodes de résolution employées pour la résolution du problème d'interface de type FETI. L'évaluation des quantités de couplage R_E^{ddm} de la méthode Schwarz-NSCD-EC (***) on n'a pas dit que que c'est **) est sans doute plus simple, puisque le système linéaire à résoudre est entièrement défini sous domaine par sous domaine, mais il est à remarquer que la matrice $I + L_E M_E^{-1}$ est a priori non symétrique et que l'absence de problème global ne permet pas, en l'état, un couplage fort des différents sous domaines.

4 Comparaison des méthodes et stratégie implémentation

4.1 Comparaison académique des quatre méthodes

On se propose ici de comparer les vitesses de convergence des méthodes de décomposition de domaine suivante :

- Schwarz-NSCD,
- Schwarz avec communications enrichies (Schwarz-NSCD-EC),
- NSCDD,

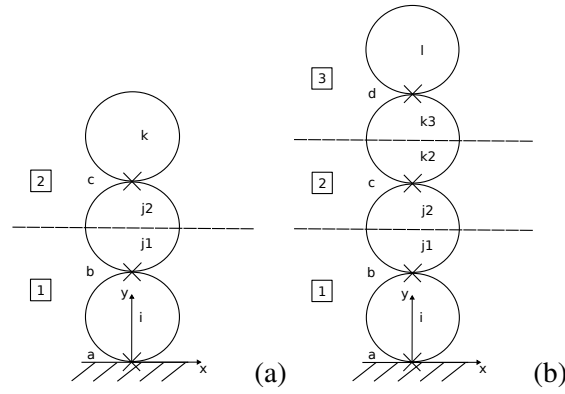


Fig. 1 – Problèmes d’équilibre considérés ; colonne de 3 disques sous-structurée en 2 sous-domaines (a) ; colonne de 4 disques sous-structurée en 3 sous-domaines (b).

– NSCDD avec problème d’interface enrichi (NSCDD-EP).

Deux problèmes 1D, donc sans mobilisation du frottement, et possédant une solution analytique unique sont envisagés. L’algorithme NSCD mono domaine est également mis en œuvre sur ces exemples afin de pouvoir classifier les méthodes.

Les deux problèmes académiques traités sont entièrement définis par les paramètres du tableau 1 et les données décrites figure 1.

Accélération	$g_y = -1 \text{ m.s}^{-2}$
Masse des disques	$M = 1 \text{ kg}$
Vitesse initiale	$V^- = 0 \text{ m.s}^{-1}$
Diamètre des disques	$\emptyset = 2 \text{ m}$
Pas de temps	$\Delta t = 1 \text{ s}$

Tableau 1 – Paramètres numériques des problèmes d’équilibre.

	Problème n°1	Problème n°2
Impulsions aux contacts	$r_a = -3 \text{ N.s}$ $r_b = -2 \text{ N.s}$ $r_c = -1 \text{ N.s}$	$r_a = -4 \text{ N.s}$ $r_b = -3 \text{ N.s}$ $r_c = -2 \text{ N.s}$ $r_d = -1 \text{ N.s}$
Vitesses des disques	$V_n = 0 \text{ m.s}^{-1}, n = i, j, k$	$V_n = 0 \text{ m.s}^{-1}, n = i, j, k, l$

Tableau 2 – Solutions des problèmes d’équilibre d’une colonne de 3 (Problème n°1) et 4 (Problème n°2) disques.

Les figures 2(a) et 2(b) montrent des comportements très différents des méthodes étudiées. Ces tendances sont tout de même à relativiser car les problèmes traités sont purement académiques et diffèrent de beaucoup des problèmes granulaires réalistes. Cependant on constate que la méthode NSCDD-EP assure un nombre constant d’itérations pour les deux problèmes, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus dans [1] : le problème d’interface augmenté permet ici de calculer des conditions aux limites absorbantes. L’enrichissement de la méthode de Schwarz est plus délicat à analyser, dans la mesure où des gains sont obtenus par rapport aux versions génériques, mais que la vitesse de convergence dépend du nombre d’inconnues du problème et du nombre de sous-domaines.

4.2 Stratégie de résolution du problème d’interface augmenté

Afin de résoudre efficacement le problème d’interface (28), une méthode itérative de type gradient conjugué est proposée, afin d’exploiter au mieux le caractère sous-structuré du problème. L’algorithme 1 présente une proposition générale de cette méthode sur un pas de temps. La résolution du problème consiste alors en deux méthodes de décomposition de domaine imbriquées : itérations globales de la

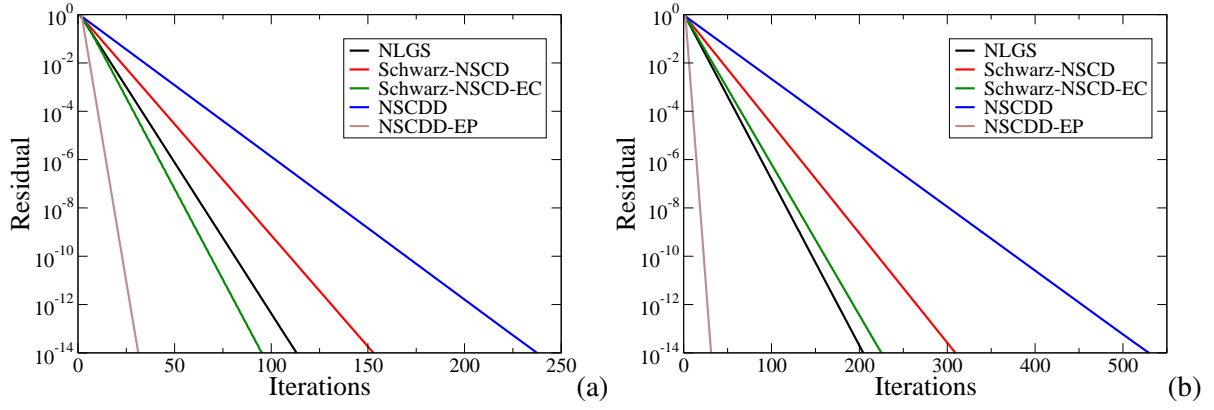


Fig. 2 – Exemples académiques de convergence des méthodes discutées.

méthode NSCDD et itérations du gradient conjugué parallèle sur le problème de recollement d'interface enrichi.

La résolution, locale pour chaque sous domaine, de l'équation :

$$A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta, E}^{-1} A_{\Gamma E}^T F_{\Gamma} = A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta, E}^{-1} \left[R_E^d + H_E (r_E + l_E v_E) \right], \quad (34)$$

peut de plus être mise en œuvre en exploitant le caractère creux de la matrice $\tilde{M}_{\eta, E}$, par l'appel à la bibliothèque de résolution de systèmes linéaires MUMPS. L'implémentation de cet algorithme est actuellement en cours de développement dans la plateforme de calcul LMG90.

Algorithm 1 NSCDD – version enrichie

while (critère de convergence n°1 non satisfait) **do**

En parallèle pour $E = 1, \dots, N_{sd}$: évaluation de v_E^d et v_E^{Γ}

Calcul de (r_E, v_E) avec n_{GS} non-linear Gauss-Seidel itérations sur :

$$\begin{cases} \tilde{W}_E r_E - v_E = -v_E^d + v_E^{\Gamma} \\ \mathcal{R}(v_E, r_E) = 0 \end{cases}$$

while (critère de convergence n°2 non satisfait) **do**

Itération du gradient conjugué parallèle sur F_{Γ} :

$$X_{\eta} F_{\Gamma} = \sum_{E=1}^{N_{sd}} A_{\Gamma E} \tilde{M}_{\eta, E}^{-1} \left[R_E^d + H_E (r_E + l_E v_E) \right]$$

end while

end while

Références

- [1] Alart, P., Iceta, D. and Dureisseix, A *nonlinear domain decomposition formulation with application to granular dynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 59–67, 2012.
- [2] Breitkopf, P. et Jean, M., *Modélisation parallèle des matériaux granulaires*, 4ème colloque national en calcul des structures, Giens, 1999.
- [3] D. Dureisseix and C. Farhat, *A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems*, 2643-2666, 2001.
- [4] M. Jean, *The non-smooth contact dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 235-257, 1999.
- [5] Koziara, T. and Bićanić, N., *A distributed memory parallel multibody Contact Dynamics code*, International Journal for Numerical Methods in Engineering , 437–456, 2011.
- [6] Lions, P.L., *On the Schwarz alternating method. I*, First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, 1–42, 1988.
- [7] J. J. Moreau, *Numerical aspects of sweeping process*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 329-349, 1999.

- [8] Visseq, V., Martin, A., Iceta, D., Azema, E., Dureisseix, D. and Alart, P., *Dense granular dynamics analysis by a domain decomposition approach*, Computational Mechanics , 709–723, 2012.