Différentes formulations éléments finis poutres multifibres pour la modélisation des structures sous sollicitations statiques et sismiques

Ibrahim Bitar, Stéphane Grange, Panagiotis Kotronis, Nathan Benkemoun

▶ **To cite this version:**

Ibrahim Bitar, Stéphane Grange, Panagiotis Kotronis, Nathan Benkemoun. Différentes formulations éléments finis poutres multifibres pour la modélisation des structures sous sollicitations statiques et sismiques. 9ème Colloque National de l'Association Française du Génie Parasismique (AFPS), IFSTTAR, AFPS, Nov 2015, Marne-la-Vallée, France. hal-01300418

HAL Id: hal-01300418
https://hal.science/hal-01300418

Submitted on 20 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

9è Colloque National afps
Marne-la-Vallée 30/11-02/12/2015

Différentes formulations Élément Finis poutres multifibres pour la modélisation des structures sous sollicitations statiques et sismiques
Various finite elements multifibers beams for structure modeling under static and dynamic load

Ibrahim Bitar [1], **Stéphane Grange** [2], **Panagiotis Kotronis** [1], **Nathan Benkemoun** [3]

1. *Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), LUNAM, École Centrale de Nantes*
   1 rue de la Noë, BP 92101, 44321, Nantes, cedex 3, France
   ibrahim.bitar@ec-nantes.fr ; panagiotis.kotronis@ec-nantes.fr
2. *Laboratoire 3SR, Université Grenoble Alpes*
   F-38000, Grenoble, France
   stephane.grange@ujf-grenoble.fr
3. *Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), LUNAM, IUT Saint-Nazaire, Université de Nantes*
   58 rue Michel Ange, 44600 Saint-Nazaire, France
   nathan.benkemoun@univ-nantes.fr

RÉSUMÉ. *Des hypothèses cinématiques sont souvent adoptées dans l'analyse de structures en génie civil afin de simplifier les équations d'équilibres globales et de réduire le nombre de degrés de liberté. La théorie des poutres de Timoshenko considère que la section plane reste plane après déformation, mais pas nécessairement perpendiculaire à l'axe neutre. Elle est souvent choisie parce qu'elle peut prendre (approximativement) en compte l'influence des contraintes de cisaillement. Au contraire, la théorie des poutres d'Euler Bernoulli (sections restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre) néglige leur influence et fournit des résultats satisfaisants seulement pour le cas de structures poutres élancées. Ce travail est basé sur la théorie de Timoshenko dans le contexte de l'approche « multifibres ». La poutre est divisée en fibres, elle peut avoir une forme arbitraire et chaque fibre a une loi de comportement locale représentant un matériau spécifique. Différentes formulations en déplacements des éléments poutres Timoshenko multifibre sont revisitées. Après une présentation des fonctions de forme conduisant à la formation des matrices de rigidité et les forces nodales relatives à chaque formulation à travers le principe de travail virtuel, des comparaisons sont faites en utilisant des lois de comportement (élastique simple ou parfaitement plastique) sous différentes conditions de chargement statiques (monotones et cycliques). Les avantages et les inconvénients de chaque formulation sont mis en évidence et des conclusions générales sur l'utilisation des poutres multifibre Timoshenko en génie civil sont explicitées.*

ABSTRACT. *Specific kinematic assumptions are often adopted in structural analysis of civil engineering structures in order to simplify the global equilibrium equations and to reduce the required number of degrees of freedom. The classical Timoshenko beam hypothesis, considering that plane sections remain plane after deformation but not necessary normal to the beam axis, is often chosen because it can (approximately) take into account the influence of shear strains. On the contrary, the Euler-Bernoulli assumption (sections remain plane and perpendicular the beam axis) neglects their influence and provides therefore accurate results only for the case of slender beam structures. This work is focused on the Timoshenko beam theory in the context of a multi-fiber approach: The section is considered as multi-fiber, it can have an arbitrary shape and each fiber has a local constitutive law representing a specific material. Various formulations of displacement based multi-fiber straight Timoshenko beam finite elements are re-visited. After a presentation of the shape functions leading to the stiffness matrices and the consistent*

nodal forces relative to each formulation, comparisons are made using elastic or elastic perfectly plastic constitutive laws under static (monotonic and cyclic) loads. The advantages and disadvantages of each formulation are highlighted and general conclusions on the use of displacement based Timoshenko multi-fiber beams in engineering are drown.
MOTS-CLÉS : Timoshenko; multifibres; poutre
KEYWORDS: Timoshenko; Multi-fiber; beam.

Introduction

L'amélioration de la connaissance de comportement des ouvrages en génie civil nécessite l'optimisation de la stratégie de modélisation adoptée. La théorie des poutres définit la poutre comme un solide engendré par une surface plane, constante ou non le long de sa longueur. Des hypothèses cinématiques sont alors adoptées dans l'analyse des structures en génie civil afin de simplifier les équations d'équilibre globales et de réduire le nombre de degrés de liberté. La théorie des poutres de Timoshenko considère que la section plane reste plane après déformation, mais pas nécessairement perpendiculaire à l'axe neutre. Elle est souvent choisie parce qu'elle peut prendre (approximativement) en compte l'influence des contraintes de cisaillement. Au contraire, la théorie des poutres d'Euler Bernoulli (les sections restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre) néglige leur influence et fournit des résultats satisfaisants seulement pour le cas de structures poutres élancées. Ce travail est basé sur la théorie de Timoshenko et porte sur l'approche multifibre de la section de sorte que chaque fibre soit modélisée avec un matériau différent.

Dans cet article, nous revisitons la performance de trois formulations éléments finis en déplacement de la poutre Timoshenko avec l'hypothèses de petites perturbations (les éléments en force ne seront pas étudiés dans cet article - voir [Spacone et al., 1996]). Les formulations diffèrent par le choix des fonctions qui interpolent le champ de déplacement et de rotation. La première formulation, appelée **FLI** (Full-Linear-Independent), adopte des fonctions linéaires en considérant des interpolations indépendantes pour le champ de déplacement transversal et le champ de rotation, voir [Pegon, 1994] et [Guedes et al., 1994]. Le faible degré de ces polynômes induit un problème de blocage par cisaillement - voir [Stolarski and Belytschko, 1982], [De Ville de Goyet, 1989], [Crisfield, 1991], [Ibrahimbegović and Frey, 1993] - si aucune modification n'est prise en compte. L'une des méthodes pour éviter ce problème numérique est de calculer les contraintes de cisaillement d'une manière approximative comme proposé dans [Donea and Lamain, 1987] et adopté dans [Pegon, 1994] et [Guedes et al., 1994]. Dans la seconde formulation, appelée **FCQM** (Full-Cubic-Quadratic-Material), les fonctions de forme sont d'ordre plus élevé, soit trois (3) pour le déplacement transversal et deux (2) pour la rotation. Avec cette formulation, les déplacements et les rotations sont interdépendants et le problème de blocage par cisaillement n'existe plus. La particularité de cette formulation est que les fonctions de forme dépendent des propriétés du matériau. Son utilisation pour des calculs non linéaires peut donc être problématique. La troisième formulation, appelée **FCQ** (Full-Qubic-Quadratic) proposée dans [Caillerie et al., 2015] utilise des fonctions de forme d'ordre trois (3) pour le déplacement transversal, deux (2) pour la rotation et possède un noeud interne additionnel. Cela conduit à un élément libre de blocage par cisaillement et possédant des fonctions de forme indépendantes du matériau. D'autres articles sur les différents éléments finis poutres Timoshenko peuvent être trouvées dans [Nickel and Secor, 1972],[Thomas and Abbas, 1975] et [Tessler and Dong, 1981]. Pour plus de détails sur la comparaison entre les différentes formulations éléments finis, nous renvoyons le lecteur à [Bitar et al., 2015].

L'article est organisé comme suit : dans la première partie, nous présenterons la forme générale de la matrice de rigidité pour la poutre multifibre. Dans la deuxième partie, les équations spécifiques pour chaque formulation

FLI, **FCQM** et **FCQ** sont évoquées. La performance de chaque formulation est étudiée dans la troisième partie pour le cas d'un comportement élastique ou élasto-plastique sous un chargement monotone et cyclique. L'article se termine par des conclusions générales et quelques orientations.

1. Poutre Timoshenko multifibre

On considère une poutre de longueur Ł discrétisée en n éléments $e = [x_i; x_j]$ de longueur $L_e = x_j - x_i$ formée de deux noeuds externes i et j. Le vecteur déplacement généralisé est approximé par une équation de la forme $U = NU_e$, avec U_e le vecteur contenant les déplacements nodaux aux noeuds externes de l'élément e et N la matrice des fonctions de forme dépendante de x.

La formulation théorique, basée sur les équations d'équilibre ainsi que les hypothèses cinématiques et passant par le principe de travail virtuel, donne la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur forces nodales suivants :

$$K_{element} = \int_0^L B^T K_S B dx \quad F_{element} = \int_0^L B^T F_S dx \qquad [1]$$

avec B la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme, K_S la matrice représentant la rigidité de la section multifibre et F_S le vecteur des forces généralisées de la section comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}}_{F_S} = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_S E_f dS & 0 & -\int_S E_f y dS \\ 0 & \int_S k G_f dS & 0 \\ -\int_S E_f y dS & 0 & \int_S E_f y^2 dS \end{bmatrix}}_{K_S} . \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix}, \qquad [2]$$

où U'_x représente la déformation généralisée longitudinale, β_y la déformation de cisaillement et $\Theta'_z(x)$ la courbure de la section. E_f et G_f les modules de Young et de cisaillement respectivement (associés à la fibre f) et k le facteur de correction du cisaillement.

2. Formulations FLI, FCQM et FCQ

Les paragraphes suivants présentent les fonctions de forme des différentes formulations.

2.1. Formulation FLI

Les fonctions de forme sont linéaires et indépendantes pour le champ de déplacement généralisé [Pegon, 1994], [Guedes et al., 1994]. Le champ de déformation généralisé prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}, \qquad [3]$$

avec, selon la proposition de [Donea and Lamain, 1987], l'expression de β_y modifiée en éliminant les termes linéaires dans les fonctions de forme pour éviter le problème de blocage par cisaillement.

2.2. Formulation FCQM

Des polynômes quadratiques et cubiques dépendant des propriétés du matériau sont utilisés pour le champ de déplacement transversal et de rotation. Cette formulation est libre du blocage par cisaillement [Friedman and Kosmatka, 1993]. Le champ de déformation généralisé est :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 \\ 0 & N'_8 - N_{14} & N'_9 - N_{15} & 0 & N'_{11} - N_{17} & N'_{12} - N_{18} \\ 0 & N'_{14} & N'_{15} & 0 & N'_{17} & N'_{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}, \quad [4]$$

avec les fonctions de forme :

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{L} & N_4 = \frac{x}{L} \\ N_8 = \frac{1}{1+\phi}[2(\frac{x}{L})^3 - 3(\frac{x}{L})^2 - \phi(\frac{x}{L}) + 1 + \phi] & N_9 = \frac{L}{1+\phi}[(\frac{x}{L})^3 - (2 + \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L})^2 + (1 + \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L})] \\ N_{11} = -\frac{1}{1+\phi}[2(\frac{x}{L})^3 - 3(\frac{x}{L})^2 - \phi(\frac{x}{L})] & N_{12} = \frac{L}{1+\phi}[(\frac{x}{L})^3 - (1 - \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L})^2 - \frac{\phi}{2}(\frac{x}{L})] \\ N_{14} = \frac{6}{(1+\phi)L}[(\frac{x}{L})^2 - (\frac{x}{L})] & N_{15} = \frac{1}{1+\phi}[3(\frac{x}{L})^2 - (4 + \phi)(\frac{x}{L}) + 1 + \phi] \\ N_{17} = -\frac{6}{(1+\phi)L}[(\frac{x}{L})^2 - (\frac{x}{L})] & N_{18} = \frac{1}{1+\phi}[3(\frac{x}{L})^2 - (2 - \phi)(\frac{x}{L})] \end{cases} \quad [5]$$

et ϕ est le rapport entre la rigidité de flexion et celle de cisaillement (ν est coefficient de poisson) :

$$\phi = \frac{12}{L^2}(\frac{EI}{kGA}) = \frac{24}{L^2}(\frac{I}{kA})(1 + \nu). \quad [6]$$

2.3. Formulation FCQ

Des polynômes cubiques sont utilisés pour interpoler le champ de déplacement transversal et quadratiques pour la rotation. L'élément est libre de blocage par cisaillement et possède un noeud interne additionnel [Caillerie et al., 2015]. Dans le même article [Caillerie et al., 2015], les auteurs ont montré que l'élément **FCQM** peut être dérivé de la formulation **FCQM** et qu'un seul élément **FCQ** est capable de prédire les déplacements exacts aux noeuds pour des sollicitations quelconques (cisaillement/flexion) appliquées à une poutre élastique homogène.

Le champ de déplacement élémentaire prend la forme suivante :

$$U_e = \begin{bmatrix} U_{xi} & U_{yi} & \Theta_{zi} & \Delta U^1_{yi} & \Delta\Theta_i & \Delta U^2_{yi} & U_{xj} & U_{yj} & \Theta_{zj} \end{bmatrix}^T, \quad [7]$$

où ΔU^1_{yi}, $\Delta\Theta_i$ et ΔU^2_{yi} sont les degrés de liberté du noeud interne (pas de sens physique spécifique). Le champ de déformation généralisé devient :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 \\ 0 & N'_{11} & -N_{21} & N'_{13} & -N_{23} & N'_{15} & 0 & N'_{17} & -N_{27} \\ 0 & 0 & N'_{21} & 0 & N'_{23} & 0 & 0 & 0 & N'_{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ \Delta U^1_{yi} \\ \Delta\Theta_i \\ \Delta U^2_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}. \quad [8]$$

$$\text{avec} \begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{L} & N_7 = \frac{x}{L} & N_{11} = (1-\frac{x}{L})^2(1+2\frac{x}{L}) \\ N_{13} = 2(1-\frac{x}{L})^2(\frac{x}{L}) & N_{15} = -2(\frac{x}{L})^2(1-\frac{x}{L}) & N_{17} = (\frac{x}{L})^2(3-2\frac{x}{L}) \\ N_{21} = (1-\frac{x}{L})(1-3\frac{x}{L}) & N_{23} = 1-(1-2\frac{x}{L})^2 & N_{27} = -(\frac{x}{L})(2-3\frac{x}{L}) \end{cases} \quad [9]$$

La condensation statique peut être utilisée pour l'implémentation numérique de l'élément (voir [Caillerie et al., 2015] pour plus de détails sur les expressions analytiques des matrices et vecteurs condensés.)

3. Comparaison des formulations FLI, FCQ et FCQM

Les différents exemples numériques choisis pour illustrer la performance de chacune des formulations **FLI**, **FCQM** et **FCQ** sont donnés dans les paragraphes 3.1 , 3.2 et 3.3.
Remarque : Dans la formulation **FCQM** les fonctions de forme dépendent des propriétés du matériau [5]. Pour cette raison, la performance de la poutre Timoshenko multifibre conforme à cette formulation peut être imprévisible pour le cas de calculs non linéaires [Caillerie et al., 2015]. Dans la suite de l'article, la formulation **FCQM** ne sera donc pas testée avec des applications élasto-plastiques (voir 3.2 et 3.3).

3.1. Poutre Timoshenko multifibre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe

Les propriétés géométriques de la poutre et les paramètres du matériau utilisé sont donnés dans la figure 1 et le tableau 1. Un déplacement vertical $v_Ł$ est appliqué à $x = Ł$. Les expressions analytiques de la résultante de la

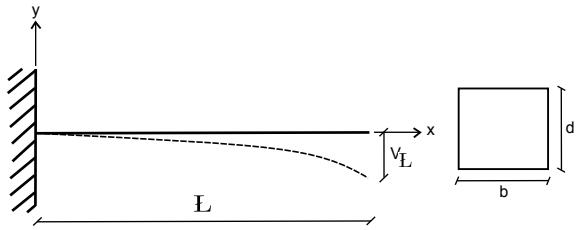


Figure 1: *Poutre encastrée*

force de cisaillement et du moment de flexion sont les suivantes [De Ville de Goyet, 1989] :

$$F_y^{ana} = \frac{v_Ł}{\frac{Ł^3}{3EI} + \frac{Ł}{kGS}} \quad , \quad M_z^{ana} = Ł \times F_y^{ana} \quad [10]$$

Geometrie		Propriétés du matériau		
Ł	$1.53m$	Module de Young	E	$210GPa$
b	$0.25m$	Coefficient de Poisson	ν	0.3
d	$0.25m$	Coefficient de correction de cisaillement	k	$\frac{5}{6}$

Table 1: Poutre encastrée - Caractéristiques géométriques et propriétés du matériau

La comparaison des performances de chacune de ces trois formulations est donnée dans les tableaux 2 et 3, où n est le nombre des éléments poutres utilisés pour la discrétisation spatiale. L'erreur relative sur la force de cisaillement $R_E(F_y)$ est définie comme :

$$R_E(F_y) = \left| \frac{F_y^{ana} - F_y^{num}}{F_y^{ana}} \right| \qquad [11]$$

avec F_y^{num} le résultat du calcul numérique et F_y^{ana} le résultat analytique.

	n	$v_Ł(m)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
Analytique	1	0.1	5609.1	8581.9	–
FLI	1	0.1	7428.3	11365.3	32%
FCQM	1	0.1	5609.1	8581.9	0%
FCQ	1	0.1	5609.1	8581.9	0%

Table 2: Poutre Timoshenko multifibre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Résultats des 3 formulations en considérant un seul (1) élément poutre Timoshenko multifibre

n	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$	n	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E\ (F_y)$
4	5696.3	8715.3	1.5%	20	5612.2	8587.2	0.053%
8	5630.6	8614.9	0.37%	31	5610.5	8584.1	0.025%
16	5614.5	8590.1	0.087%	51	5609.6	8582.73	0.009%

Table 3: Poutre Timoshenko multifibre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Résultats de la formulation **FLI** en considérant n éléments poutres Timoshenko multifibre

Un seul élément **FCQM** ou **FCQ** est capable de donner la solution exacte en termes de force et du moment tandis que la formulation **FLI** présente une erreur relative $R_E(F_y)$ de 32%, voir tableau 2. Cela est dû au fait que pour cette dernière formulation les fonctions de forme correspondant au déplacement transversal et à la rotation sont linéaires alors que les solutions analytiques de Θ_z et U_y sont des polynômes d'ordre deux et trois respectivement. En augmentant le nombre d'éléments, la précision de la formulation **FLI** s'améliore rapidement (voir tableau 3).

3.2. Poutre Timoshenko multifibre élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe

On considère ci-après un matériau élasto-plastique parfait [Simo and Hughes, 1998] en supposant que seule la composante normale σ_x de la contrainte peut entrer en plasticité. Aucune interaction entre les contraintes de

cisaillement et les contraintes normales n'est par conséquent considérée. La limite élastique de contrainte f_y est égale à $450MPa$, les autres paramètres sont donnés dans le tableau 1. Le moment plastique et la force de cisaillement plastique sont :

$$M_{pl} = W_{pl} f_y = \frac{bd^2}{4} f_y \quad , \quad F_{yp} = \frac{M_{pl}}{Ł} \tag{12}$$

Ces deux valeurs sont obtenues en considérant que toutes les fibres de la section sont plastifiées. Ceci est un état asymptotique du comportement de la section qui ne peut pas être en réalité atteint avec les hypothèses cinématiques adoptées (sections planes) car la déformation axiale au niveau de l'axe neutre est toujours nulle et donc les fibres correspondantes ne peuvent pas plastifier.

La poutre encastrée est soumise à un déplacement imposé $v_Ł$ à l'extrémité libre ($x = Ł$). La comparaison de la performance des deux formulations **FLI** et **FCQ** peut être observée dans les tableaux 4 et 5. Comme précédemment, un seul élément poutre **FLI** ne donne pas de bons résultats. Pourtant, l'augmentation du nombre d'éléments améliore considérablement sa performance. Les résultats sont meilleurs avec la formulation **FCQ** qui donne toujours une erreur plus faible lorsqu'elle est comparée à la formulation **FLI**.

	n	$v_Ł(m)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
Analytique	1	0.1	1148.9	1757.8	–
FLI	1	0.1	2263	3462	97%
FCQ	1	0.1	1581	2417	37.6 %

Table 4: Poutre Timoshenko multifibre élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Résultats des formulations **FLI** et **FCQ** en considérant un seul (1) élément poutre Timoshenko multifibre

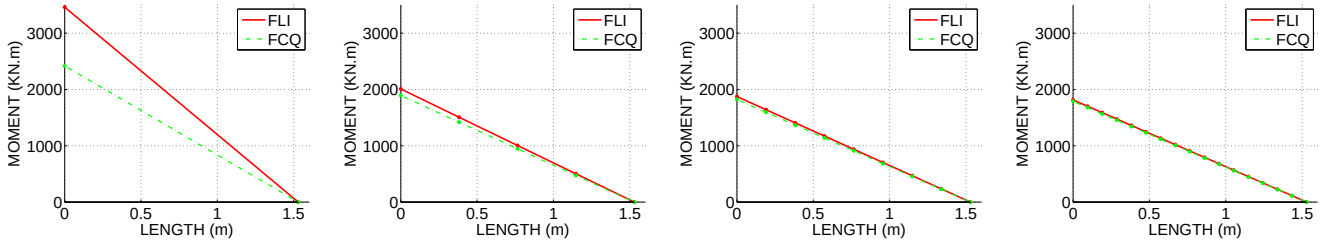
	FLI			**FCQ**		
n	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
4	1312	2006	14%	1236	1889	7.7%
8	1225	1872	7%	1191	1819	4.1%
16	1186	1811	3.2%	1169	1785	1.7%

Table 5: Poutre Timoshenko multifibre élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Résultats des formulations **FLI** et **FCQ** en considérant n éléments poutres Timoshenko multifibre

La figure 2 présente le diagramme du moment le long de la poutre pour les deux formulations **FLI** et **FCQ** et pour différent nombre d'éléments n. Les moments aux noeuds sont tracés et reliés par des lignes droites. En augmentant le nombre d'éléments poutres multifibres, les diagrammes de moment des deux formulations coïncident. Les conclusions dans la figure 2 sont similaires, elles montrent l'évolution de la force de cisaillement F_y par rapport au déplacement vertical $v_Ł$.

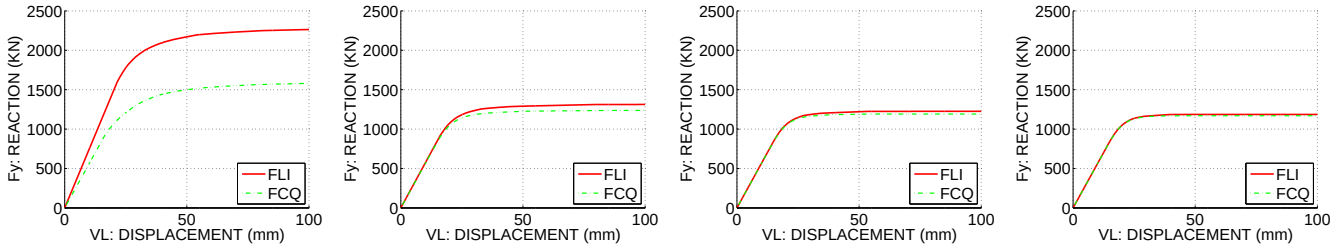
3.3. Poutre Timoshenko multifibe élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un chargement cyclique

On considère maintenant un chargement cyclique. Ce chargement est appliqué à $x = Ł$ sous la forme donnée dans la figure 4. On garde le même comportement élasto-plastique parfait pour le matériau. Les propriétés du matériau sont également inchangées. Les figures 5 montrent l'évolution de F_y en fonction du déplacement imposé



(a) $n = 1$ **(b)** $n = 4$ **(c)** $n = 8$ **(d)** $n = 16$

Figure 2: *Poutre Timoshenko multifibre élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Diagramme du moment le long de la poutre pour les formulations **FLI** et **FCQ** pour différents nombres d'éléments n*



(a) $n = 1$ **(b)** $n = 4$ **(c)** $n = 8$ **(d)** $n = 16$

Figure 3: *Poutre Timoshenko multifibre élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un déplacement transversal en pointe - Effort tranchant Vs. déplacement vertical pour les formulations **FLI** et **FCQ** pour différents nombres d'éléments n)*

pour les deux formulations **FLI** et **FCQ**. La formulation **FCQ** donne la meilleure performance avec un seul élément. L'utilisation d'un grand nombre d'éléments poutres pour discrétiser la structure poutre donne, pour les deux formulations, des résultats améliorés.

4. Conclusion

Trois formulations poutres Timoshenko multifibres différentes ont été présentées : la formulation **FLI** avec des fonctions de forme linéaires, la formulation **FCQM** avec des fonctions de forme d'ordre élevé dépendant des propriétés du matériau et la formulation **FCQ** avec des fonctions de forme d'ordre élevé avec un noeud interne additionnel. La comparaison entre ces trois formulations à travers des exemples numériques a montré que **FLI** ne donne pas de résultats exacts si on utilise un seul élément poutre pour la discrétisation spatiale. Les résultats s'améliorent néanmoins en utilisant un maillage plus fin. La formulation **FCQM** ne convient pas pour les calculs non linéaires mais sa performance est excellente pour les calculs linéaires. Enfin, la formulation **FCQ** donne les meilleurs résultats avec un minimum d'éléments finis.

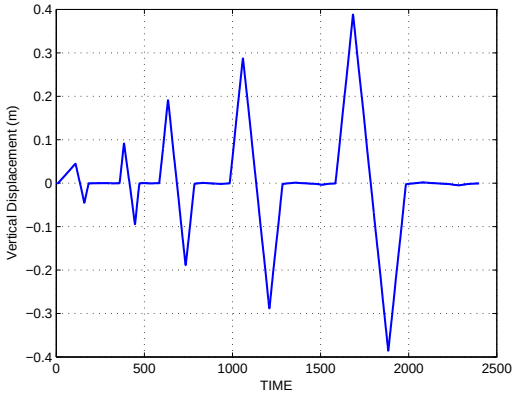
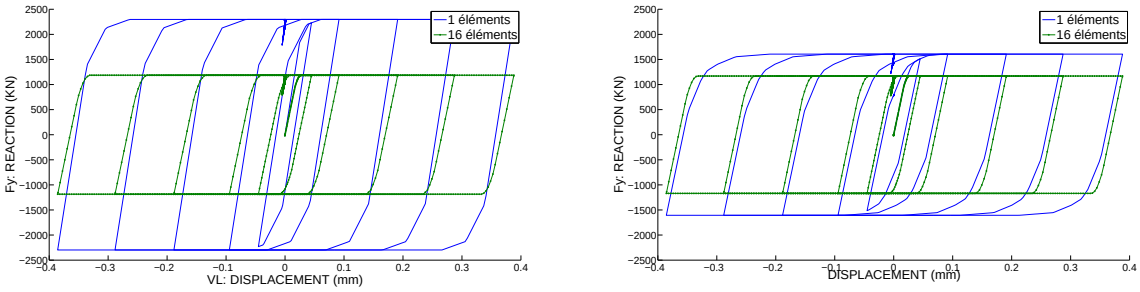


Figure 4: *Chargement cyclique imposé à $x = Ł$*



(a) ***FLI*** **(b)** ***FCQ***

Figure 5: *Poutre Timoshenko multifibe élasto-plastique parfaite encastrée soumise à un chargement cyclique - Effort tranchant Vs. déplacement vertical pour les formulations* ***FLI*** *et* ***FCQ*** *avec différentes discrétisations*

Remerciement

Ce travail réalisé au sein du projet SINAPS@ a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre du programme RSNR Investissements d?Avenir portant la référence n° ANR-11-RSNR-0022-04.

5. Références

References

[Bitar et al., 2015] Bitar, I., Grange, S., Kotronis, P., and Benkemoun, N. (2015). A review on Timoshenko multi-fiber beams finite element formulations and elasto-plastic applications. *European Journal of Environnemental and Civil Engineering (submitted) 2015*.

[Caillerie et al., 2015] Caillerie, D., Kotronis, P., and Cybulski, R. (2015). A new Timoshenko finite element beam with internal degrees of freedom. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics (early view)*.

[Crisfield, 1991] Crisfield, M. A. (1991). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials*. Wiley, New York, NY, United States.

[De Ville de Goyet, 1989] De Ville de Goyet, V. (1989). *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*. PhD thesis, Université de Liège.

[Donea and Lamain, 1987] Donea, J. and Lamain, L. (1987). A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63(2):183–207.

[Eurocode 2, 2001] Eurocode 2, . (2001). *Eurocode 2, design of concrete structures*. Comité Européen de normalisation.

[Friedman and Kosmatka, 1993] Friedman, Z. and Kosmatka, J. B. (1993). An improved two-node Timoshenko beam finite element. *Computers & Structures*, 47(3):473–481.

[Guedes et al., 1994] Guedes, J., Pegon, P., and Pinto, A. (1994). A fibre/Timoshenko beam element in Castem 2000. *Special publication Nr. I.94.31, Applied Mechanics Unit, Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA), Italy, (1994)*.

[Ibrahimbegović and Frey, 1993] Ibrahimbegović, A. and Frey, F. (1993). Finite element analysis of linear and non-linear planar deformations of elastic initially curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(19):3239–3258.

[Nickel and Secor, 1972] Nickel, R. and Secor, G. (1972). Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(2):243–252.

[Pegon, 1994] Pegon, P. (1994). A Timoshenko simple beam element in Castem 2000. *Special publication Nr. I.94.04, Applied Mechanics Unit, Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA), Italy, (1994)*.

[Simo and Hughes, 1998] Simo, J. and Hughes, T. (1998). *Computational inelasticity*. Springer.

[Spacone et al., 1996] Spacone, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. F. (1996). Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7):711–726.

[Stolarski and Belytschko, 1982] Stolarski, H. and Belytschko, T. (1982). Membrane locking and reduced integration for curved elements. *Journal of Applied Mechanics*, 49(1):172–176.

[Tessler and Dong, 1981] Tessler, A. and Dong, S. (1981). On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements. *Computers & Structures*, 14(3):335–344.

[Thomas and Abbas, 1975] Thomas, J. and Abbas, B. (1975). Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3):291–299.