HAL open science

Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes

Gérald Tenenbaum

To cite this version:

Gérald Tenenbaum. Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes. 2017. hal-01300328v11

HAL Id: hal-01300328

https://hal.science/hal-01300328v11

Preprint submitted on 6 Jul 2017 (v11), last revised 6 Jul 2020 (v18)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

(6/7/2017, 12h24)

Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes

Gérald Tenenbaum

Abstract. We establish effective mean-value estimates for a wide class of multiplicative arithmetic functions, thereby providing (essentially optimal) quantitative versions of Wirsing's classical estimates and extending those of Halász. Several applications are derived, including: estimates for the difference of mean-values of so-called pretentious functions, local laws for the distribution of prime factors in an arbitrary set, and weighted distribution of additive functions.

Keywords. Quantitative estimates, multiplicative functions, effective mean-value theorems, weighted distribution of additive functions.

2010 AMS Classification. Primary 11N56, Secondary 11K65, 11N37, 11N60, 11N64.

Sommaire

1 Introduction et énoncé des résultats 1
2 Applications 5
3 Preuve du Théorème 1.1 10
3.1 Lemme de Gallagher 10
3.2 Réduction au cas exponentiellement multiplicatif 11
3.3 Preuve dans le cas exponentiellement multiplicatif 12
4 Preuve du Théorème 1.2 16
4.1 Lemmes 16
4.2 Preuve dans le cas exponentiellement multiplicatif 21
4.3 Complétion de l'argument 28
5 Preuve du Théorème 1.3 29
5.1 Inégalité de Turán-Kubilius pondérée 29
5.2 Complétion de l'argument 31
6 Preuve du Théorème 1.4 34
7 Preuves des corollaires 36
7.1 Preuve du Corollaire 2.1 36
7.2 Preuve du Corollaire 2.4 36
7.3 Preuve du Corollaire 2.5 38
7.4 Preuve du Corollaire 2.6 40

1. Introduction et énoncé des résultats

Les estimations de valeurs moyennes de fonctions multiplicatives constituent un outil privilégié de la théorie probabiliste des nombres. Elles permettent notamment d'appréhender la répartition des fonctions additives sur les N premiers entiers via leurs fonctions caractéristiques et, partant, d'obtenir des théorèmes de convergence avec contrôle de l'approximation. Les deux succès historiques de la théorie sont respectivement dus à Wirsing [37] et Halász [13].

Désignons par $\mathcal{M}(A,B)$ la classe des fonctions multiplicatives vérifiant

$$\max_p |f(p)| \leqslant A, \qquad \sum_{p,\,\nu\geqslant 2} \frac{|f(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu} \leqslant B. \tag{1·1}$$

Ici et dans la suite, nous réservons la lettre p pour désigner un nombre premier.

Dans son remarquable article [37], Wirsing établit notamment que, si $r \in \mathcal{M}(A,B)$, $r \geqslant 0$, et s'il existe $\varrho > 0$ tel que

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p)\log p}{p} \sim \varrho \log x \qquad (x\to\infty), \tag{1·2}$$

alors toute fonction multiplicative réelle f telle que $|f| \leqslant r$ vérifie, lorsque $x \to \infty$,

$$M(x;f) := \sum_{n\leqslant x} f(n) = \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho}}{\Gamma(\varrho)} \prod_p \frac{\sum_{\nu\geqslant 0} f(p^\nu)/p^\nu}{\sum_{\nu\geqslant 0} r(p^\nu)/p^\nu} + o(1) \right\} \frac{x}{\log x} \prod_p \sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{r(p^\nu)}{p^\nu}, \tag{1·3}$$

où le produit infini est considéré comme nul lorsqu'il diverge.[1] Ici et dans la suite, nous notons γ la constante d'Euler.

1. Le second produit est en fait fini.

Le cas $r = \mathbf{1}$ (la fonction constante égale à 1), $\varrho = 1$, confirme une célèbre conjecture d'Erdős selon laquelle une fonction multiplicative réelle à valeurs dans $[-1, 1]$ possède nécessairement une valeur moyenne.

Dans [13], Halász a élucidé le comportement asymptotique des fonctions multiplicatives complexes f à valeurs dans le disque unité. Son résultat principal établit une dichotomie : soit il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_p \frac{1 - \Re e\,\{f(p)/p^{i\tau}\}}{p} < \infty, \tag{1·4}$$

et nous avons alors

$$M(x; f) \sim \frac{x^{1+i\tau}}{1+i\tau} \prod_{p \leqslant x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1+i\tau)}} + o(x) \qquad (x \to \infty), \tag{1·5}$$

soit la série diverge pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, et l'on a $M(x; f) = o(x)$ lorsque $x \to \infty$. Une précision supplémentaire est que, sous l'hypothèse (1·4), le terme principal de (1·5) est de la forme $K_\tau x^{1+i\tau} L_\tau(\log x)$ où L_τ est une fonction de module unité à croissance lente au sens de Karamata [22], c'est-à-dire telle que $L_\tau(u)/L_\tau(v) \to 1$ lorsque u et v tendent vers l'infini sous la condition $u \asymp v$.

Une preuve alternative du cas de convergence a été obtenue par Delange via une méthode reposant, à partir d'une idée de Rényi, sur l'inégalité de Turán–Kubilius : voir [35], th. III.4.4, pour une démonstration de ce résultat non publiée par Delange.

Indlekofer, Kátai & Wagner [21] ont généralisé ces résultats[(2)] en établissant que, pour toutes fonctions multiplicatives r, f, telles que $r \in \mathcal{M}(A, B)$, f à valeurs complexe, $|f| \leqslant r$, et sous l'hypothèse (1·2), nous avons $M(x; f) = o\big(M(x; r)\big)$ lorsque $x \to \infty$ si la condition

$$\sum_p \frac{r(p) - \Re e\,\{f(p)/p^{i\tau}\}}{p} < \infty \tag{1·6}$$

n'est réalisée pour aucune valeur de $\tau \in \mathbb{R}$. Ils énoncent également que, sous la condition (1·6) nous avons, lorsque $x \to \infty$,

$$M(x; f) = \bigg\{ \prod_{p \leqslant x} \frac{\sum_{\nu \geqslant 0} f(p^\nu)/p^{\nu(1+i\tau)}}{\sum_{\nu \geqslant 0} r(p^\nu)/p^\nu} + o(1) \bigg\} \frac{x^{i\tau} M(x; r)}{1 + i\tau}. \tag{1·7}$$

Cette formule asymptotique résulte en fait implicitement, sous la même hypothèse (1·6), du le travail de Wirsing [37]. Notons également que les estimations de Wirsing impliquent l'équivalence de (1·7) et

$$M(x; f) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho} x^{1+i\tau}}{(1+i\tau)\Gamma(\varrho) \log x} \bigg\{ \prod_{p \leqslant x} \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1+i\tau)}} + o\big((\log x)^\varrho\big) \bigg\}. \tag{1·8}$$

De plus, le cas général se réduit aisément, par sommation d'Abel, au cas $\tau = 0$.

Les développements ultérieurs de la théorie ont principalement visé à rendre les résultats précédents effectifs, c'est-à-dire à expliciter les majorations dans le cas de divergence et les termes d'erreur dans le cas de convergence. La nécessité de telles estimations étant naturellement plus impérieuse dans le cas où le terme principal est nul, les recherches se sont d'abord orientées dans cette direction. Les travaux de Halász [14], précisés par Montgomery [28], Elliott [7], puis par l'auteur [35] (ch. III.4), fournissent ainsi des majorations explicites dans le cas de fonctions à valeurs dans le disque unité ou dont les valeurs sur les nombres premiers évitent un secteur fixe.[(3)]

2. Un résultat qualitatif antérieur, de même nature mais valide sous des hypothèses plus fortes, est dû à Levin & Timofeev [24].

3. Voir également [31] pour des variantes relatives à des sommes pondérées.

Lorsque les $f(p)$ sont confinés à une ellipse de diamètre 2 strictement incluse dans le disque unité, Hall & Tenenbaum [19] établissent la majoration effective

$$M(x;f) \ll x \exp\Big\{ -K \sum_{p\leqslant x} \frac{1-\Re e\, f(p)}{p} \Big\},$$

où la constante K est optimale. Ce résultat a été généralisé par Hall [18] au cas où les $f(p)$ sont confinés à sous-ensemble strict et fermé du disque unité évitant au moins un point de module 1. Des compléments et raffinements sont proposés dans l'article exhaustif de Granville et Soundararajan [11], qui contient également des développements relatifs au comportement local les moyennes $M(x;f)$.

Dans la voie d'une version quantitative des estimations de Wirsing, un résultat de Halász ([14], th. 3) fournit une formule asymptotique avec terme principal non nul lorsque les valeurs aux nombres premiers sont proches de 1. Une version relative aux fonctions à valeurs dans $[-1,1]$ a également été donnée par Indlekofer [20] — cf. le Corollaire 2.2 *infra*.

Nous nous proposons ici de préciser les résultats antérieurs dans deux directions : d'une part en étendant les majorations effectives aux fonctions des classes $\mathcal{M}(A,B)$, d'autre part en fournissant des versions quantitatives de l'ensemble des estimations de type Wirsing telles qu'établies sous forme qualitative par Indlekofer, Kátai & Wagner dans [21].

Un tel programme suppose que les fonctions multiplicatives considérées soient autorisées à dépendre du paramètre x gouvernant la taille de la moyenne prise en considération. Dans la suite, nous considérons donc, pour tous paramètres $A>0$, $B>0$, $x\geqslant 2$, la classe $\mathcal{M}(x;A,B)$ des fonctions multiplicatives complexes f vérifiant

$$\max_{p\leqslant x} |f(p)| \leqslant A, \qquad \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} \frac{|f(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu} \leqslant B. \tag{1·9}$$

Notre premier résultat étend aux fonctions de $\mathcal{M}(x;A,B)$ le théorème III.4.7 de [35]. Pour toute fonction multiplicative f dont la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} f(n)/n^s$ converge dans le demi-plan $\Re e\, s>1$, nous posons

$$\begin{aligned} v_f(s) = v_f(s;x) &:= \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p^s} \qquad (s\in\mathbb{C}),\\ H_T(\alpha)^2 &:= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\leqslant T}} \frac{1}{k^2+1} \max_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ |\tau-k|\leqslant 1/2}} |\mathrm{e}^{v_f(s;x)}|^2 \quad (\alpha>0,\ T\geqslant 1). \end{aligned} \tag{1·10}$$

Dans tout ce travail, nous définissons implicitement les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe s par la formule $s=\sigma+i\tau$.

Nous posons encore

$$Z(y;f) := \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)}{p} \qquad (2\leqslant y\leqslant x). \tag{1·11}$$

Théorème 1.1. *Soient $A>0$, $B>0$. Sous les hypothèses $x\geqslant 2$, $f,r\in\mathcal{M}(x;A,B)$, $|f|\leqslant r$, et $T\geqslant 1$, nous avons uniformément*

$$M(x;f) \ll \frac{x}{\log x}\Big\{ \int_{1/\log x}^1 \frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{T}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\log_2 x}{T} \Big\}. \tag{1·12}$$

De plus, pour tout $c>0$ fixé, et sous l'hypothèse supplémentaire

$$Z(x;r) - Z(y;r) \geqslant c\log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big) + O(1) \qquad (2\leqslant y\leqslant x), \tag{1·13}$$

le dernier terme dans l'accolade de (1·12) *peut être omis.*

Le résultat suivant fournit une version effective des formules asymptotiques (1·7) et (1·8). Conformément à une remarque effectuée plus haut, nous nous restreignons, sans perte de généralité, au cas $\tau = 0$.

Étant donnée une fonction arithmétique multiplicative complexe f, nous posons $w_f := 1$ si f est réelle, et $w_f := \frac{1}{2}$ dans le cas général.

Théorème 1.2. *Soient*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a} \in]0, \tfrac{1}{2}],\ \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}, 1[,\ A \geqslant 2\mathfrak{b},\ B > 0, \\ &x \geqslant 1,\ \varrho = \varrho_x \in [2\mathfrak{b}, A],\ \mathfrak{p} := \frac{\pi\varrho}{A},\ \beta := 1 - \frac{\sin\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{h} := \frac{1-\mathfrak{b}}{\min(1,\varrho) - \mathfrak{b}}\cdot \end{aligned} \tag{1·14}$$

Pour tout $\varepsilon = \varepsilon_x \in]1/\sqrt{\log x}, \frac{1}{2}]$, les assertions suivantes relatives aux fonctions multiplicatives f, r telles que $|f| \leqslant r$ sont vérifiées.

Sous les hypothèses

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p) - \Re e\, f(p)}{p} \leqslant \tfrac{1}{2}\beta\mathfrak{b}\log(1/\varepsilon), \tag{1·15}$$

$$\sum_{x^\varepsilon < p \leqslant y} \frac{\{r(p) - \Re e\, f(p)\}^{\mathfrak{h}} \log p}{p} \ll \varepsilon^{\delta_1 \mathfrak{h}} \log y \qquad (x^\varepsilon < y \leqslant x), \tag{1·16}$$

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\{r(p) - \varrho\}\log p}{p} \ll \varepsilon \log y \qquad (x^\varepsilon < y \leqslant x), \tag{1·17}$$

où $\delta_1 \in [\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\beta\mathfrak{b}]$, nous avons, uniformément pour $x \geqslant 2$, $r \in \mathcal{M}(x; A, B)$,

$$M(x; f) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho} x}{\Gamma(\varrho)\log x}\Big\{\prod_p \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + O\Big(\varepsilon^\delta\, \mathrm{e}^{Z(x;f)}\Big)\Big\}, \tag{1·18}$$

où l'on a posé $\delta := w_f \delta_1$.

La constante implicite dans (1·18) *dépend au plus de A, B, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et des constantes implicites de* (1·16) *et* (1·17).

Remarques. (i) Le Théorème 1.2 généralise bien le théorème de Wirsing.

(ii) On a $\mathfrak{h} = 1$, dès que $\varrho \geqslant 1$.

(iii) L'hypothèse (1·16) est trivialement impliquée par la condition

$$\sum_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \frac{\{r(p) - \Re e\, f(p)\}^{\mathfrak{h}}}{p} \ll \varepsilon^{\delta_1 \mathfrak{h}}, \tag{1·19}$$

et, bien entendu, également par la majoration uniforme

$$\max_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \{r(p) - \Re e\, f(p)\} \ll \varepsilon^{\delta_1}. \tag{1·20}$$

(iv) Les hypothèses du Théorème 1.2 impliquent

$$\prod_p \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \ll \mathrm{e}^{Z(x;f)}$$

alors que les deux membres sont du même ordre de grandeur dès que

$$\min_{p,x} \Big| \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant (\log x)/\log p} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big| \gg 1. \tag{1·21}$$

Sous cette condition génériquement vérifiée, la formule (1·18) devient

$$M(x; f) = \big\{1 + O(\varepsilon^\delta)\big\} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho} x}{\Gamma(\varrho)\log x} \prod_p \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\cdot \tag{1·22}$$

L'hypothèse (1·17) représente une contrainte significative pour la répartition des valeurs $r(p)$. Nous pouvons la remplacer par une minoration en moyenne sur de petits intervalles.

Nous posons

$$\beta_0 = \beta_0(\mathfrak{b}, A) := 1 - \frac{\sin(2\pi\mathfrak{b}/A)}{2\pi\mathfrak{b}/A}, \qquad \delta_0(\mathfrak{b}) = \delta_0(\mathfrak{b}, A) := \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}\beta_0. \tag{1·23}$$

Théorème 1.3. *Soient*

$$\mathfrak{a} \in]0, \tfrac{1}{4}], \quad \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}, \tfrac{1}{2}[, \quad A \geqslant 2\mathfrak{b}, \quad B > 0, \quad \beta := \beta_0(\mathfrak{b}, A), \quad x \geqslant 2, \quad 1/\sqrt{\log x} < \varepsilon \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Supposons que les fonctions multiplicatives f, r, telles que $r \in \mathcal{M}(x; 2A, B)$, $|f| \leqslant r$, vérifient les conditions (1·15), (1·16) *avec* $\mathfrak{h} := (1-\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, (1·19) *avec* $\mathfrak{h} = 1$, *et*

$$\sum_{y<p\leqslant y^{1+\varepsilon_1}} \frac{r(p)\log p}{p} \geqslant 4\mathfrak{b}\varepsilon_1 \log y \qquad \big(\mathrm{e}^{1/\varepsilon_1} \leqslant y \leqslant x^{1/(1+\varepsilon_1)}\big) \tag{1·24}$$

où l'on a posé $\varepsilon_1 := \sqrt{\varepsilon}$. *Supposons de plus que* $\delta_1 \in [\mathfrak{a}, \delta_0(\mathfrak{b})]$. *Nous avons alors*

$$M(x; f) = M(x; r) \prod_p \frac{\sum_{p^\nu \leqslant x} f(p^\nu)/p^\nu}{\sum_{p^\nu \leqslant x} r(p^\nu)/p^\nu} + O\bigg(\frac{x\,\varepsilon^\delta \mathrm{e}^{Z(x;r) - \mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x}\bigg) \tag{1·25}$$

où $\delta := w_f\delta_1$, *et* $\mathfrak{c} := \mathfrak{b}/A$. *La constante implicite de* (1·25) *dépend au plus de* A, B, $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$.

Remarques. (i) Le récent et très élégant article d'Elliott [8], finalisé simultanément au présent travail, fournit une condition suffisante pour la validité de (1·7) dans laquelle l'hypothèse (1·6) est remplacée par une minoration en moyenne de même nature que (1·24).

(ii) Les Théorèmes 1.2 et 1.3 précisent le théorème 2.6 de l'article [25], apparu en ligne postérieurement à la soumission du présent travail.

Il est possible de supprimer la condition (1·19) au prix d'un renforcement des hypothèses sur les nombres $r(p)$.

Théorème 1.4. *Dans les hypothèses du Théorème 1.3, la formule asymptotique* (1·25) *persiste sans la condition* (1·19) *avec* $\mathfrak{h} = 1$ *si l'hypothèse* (1·24) *est remplacée par* $\min_{x^\varepsilon < p \leqslant x} r(p) \geqslant 4\mathfrak{b}$.

Nous fournissons les détails au § 6.

Les méthodes développées dans le présent travail reposent principalement sur l'approche de Halász [13], assortie de raffinements introduits dans [28] et [35]. La preuve du Théorème 1.3 fait usage d'une version pondérée de l'inégalité de Turán–Kubilius (Lemme 5.1) et d'arguments de convolution des fonctions arithmétiques. Ainsi que l'attestent les formules asymptotiques obtenues aux Corollaires 2.4 et 2.5, les termes d'erreur effectifs des Théorèmes 1.2, 1.3 et 1.4 sont essentiellement optimaux sous les hypothèses effectuées.

Notation. Dans tout ce travail, nous employons la notation de Vinogradov $f \ll g$ pour signifier qu'il existe une constante C telle que $|f| \leqslant C|g|$ dans le domaine indiqué. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, selon une pratique largement répandue, nous étendons l'usage de cette notation au cas de quantités complexes.

2. Applications

Nous énonçons ici, de façon non exhaustive, quelques applications des résultats présentés plus haut.

La première est une conséquence simplifiée du Théorème 1.1 analogue à une majoration de Halász [16] valable pour les fonctions de module au plus 1, et dont une version optimale est établie au cor. III.4.12 de [35]. Lorsque $r \in \mathcal{M}(x; A, B)$ et f est une fonction multiplicative telle que $|f| \leqslant r$, nous posons

$$m_f(y; T) := \min_{|\tau|\leqslant T} \sum_{p\leqslant y} \frac{r(p) - \Re e\,\big(f(p)/p^{i\tau}\big)}{p} \qquad (y \geqslant 2). \tag{2·1}$$

Corollaire 2.1. *Soient $A > 0$, $B > 0$, $\mathfrak{b} > 0$. Sous les conditions $x \geqslant 2$, $f, r \in \mathcal{M}(x; A, B)$, $|f| \leqslant r$, $T \geqslant 1$, et*

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{r(p)}{p} \geqslant \mathfrak{b} \log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big) + O(1) \qquad (2 \leqslant y \leqslant x), \tag{2·2}$$

nous avons uniformément

$$M(x; f) \ll M(x; r)\bigg\{\frac{1 + m_f(x; T)}{\mathrm{e}^{m_f(x;T)}} + \frac{1}{\sqrt{T}}\bigg\}. \tag{2·3}$$

Une illustration simple du Théorème 1.2 peut être obtenue de la façon suivante. Soient A et B des constantes positives et f une fonction multiplicative complexe de $\mathcal{M}(A, B)$ telle que $\max_p |f(p)| \leqslant \varrho$. Supposons encore que l'analogue de (1·4) est satisfait avec $\tau = 0$, autrement dit

$$\sum_p \frac{\varrho - \Re e\, f(p)}{p} < \infty. \tag{2·4}$$

Il résulte alors de (1·8) et de la formule de Mertens que

$$M(x; f) = \bigg\{\prod_{p\leqslant x}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{\varrho} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + o(1)\bigg\}\frac{x(\log x)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}. \tag{2·5}$$

Nous pouvons à présent préciser le terme d'erreur en fonction de la vitesse de convergence de la série (2·4). En effet, l'hypothèse (2·4) implique immédiatement, par sommation d'Abel, que

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\{\varrho - \Re e\, f(p)\}\log p}{p} \leqslant \eta_x \log x \qquad (x \to \infty) \tag{2·6}$$

pour une fonction convenable η_x tendant vers 0 à l'infini. Choisissons $\mathfrak{b} := \frac{1}{2}\min(1, \varrho)$, $A := \varrho$, de sorte que $\mathfrak{p} = \pi$, $\beta = 1$, $\mathfrak{h} = 2/\min(1, \varrho) - 1$. Posant

$$\delta_1 := \tfrac{1}{3}\min(1, \varrho) \leqslant \tfrac{2}{3}\mathfrak{b}, \tag{2·7}$$

nous avons alors $\delta_1\mathfrak{h} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\min(1, \varrho)$ et

$$\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y} \frac{\{\varrho - \Re e\, f(p)\}^{\mathfrak{h}}\log p}{p} \ll \varepsilon^{\delta_1\mathfrak{h}}\log y \qquad (x^\varepsilon < y \leqslant x)$$

pour le choix $\varepsilon := \eta_x^{1/\delta_1\mathfrak{h}} + 1/\sqrt{\log x}$. Comme la condition (1·15) découle immédiatement de (2·4) pour x assez grand, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Corollaire 2.2. *Soient $A > 0$, $B > 0$, $\varrho > 0$, et $f \in \mathcal{M}(A, B)$ une fonction multiplicative complexe telle que $|f(p)| \leqslant \varrho$ pour tout nombre premier p. Sous l'hypothèse* (2·4) *et avec les notations* (2·6), (2·7), *nous avons*

$$M(x; f) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho}x}{\Gamma(\varrho)\log x}\bigg\{\prod_p \sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + O\bigg(\eta_x^a \mathrm{e}^{Z(x;f)} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\log x)^b}\bigg)\bigg\} \tag{2·8}$$

où l'on a posé $a := w_f/\mathfrak{h} = w_f\min(1, \varrho)/\{2 - \min(1, \varrho)\}$, $b := w_f\min(1, \varrho)/6$.
Remarque. Sous la condition (1·21), nous déduisons de (2·8) que l'on peut remplacer le terme d'erreur de (2·5) par $O\big(\eta_x^a + 1/(\log x)^b\big)$.

Lorsque f est réelle et $\varrho = 1$, nous avons donc $a = 1$. Cela précise un résultat, mentionné plus haut, de Indlekofer [20], qui obtient dans ce cas $a = \frac{1}{36}$ par une méthode reposant sur une technique de convolution des fonctions arithmétiques.

Dans le même esprit, nous pouvons énoncer le résultat suivant. Nous notons $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n \geqslant 1$ avec la convention $P^+(1) = 1$ et rappelons la notation $\delta_0(\mathfrak{b})$ définie en (1·23).

Corollaire 2.3. *Soient $x \geqslant 2$, r une fonction multiplicative positive ou nulle satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.3 et f, g deux fonctions multiplicatives telles que $|f|^2 \leqslant r$, $|g|^2 \leqslant r$. Supposons que, pour une fonction η_x tendant vers 0 lorsque $x \to \infty$ et telle que $\eta_x \sqrt{\log x} \gg 1$, les majorations*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{r(p) - h(p)}{p} \leqslant \tfrac{3}{8}\beta_0 \mathfrak{b} \log\Big(\frac{1}{\eta_x}\Big), \qquad \sum_{p \leqslant x} \frac{r(p) - h(p)}{p} \log p \leqslant \eta_x \log x, \tag{2·9}$$

où β_0 est défini en (1·23), aient lieu pour $h = |f|^2$, $h = |g|^2$ et $h = \Re e\, f\overline{g}$. Nous avons alors

$$M(x; |f-g|^2) = M(x; r)\bigg\{ \frac{\sum_{P^+(n) \leqslant x} |f(n) - g(n)|^2/n}{\sum_{P^+(n) \leqslant x} r(n)/n} + O\big(\eta_x^a\big) \bigg\} \tag{2·10}$$

avec $a := \frac{1}{2}\beta_0/\{3 + (1-\mathfrak{b})\beta_0\}$.

Pour établir cette assertion, il suffit d'observer que les fonctions r et $f\overline{g}$ (respectivement $|f|^2$, $|g|^2$) satisfont aux hypothèses du Théorème 1.3 pour le choix $\varepsilon := \eta_x^{1/(1+\delta_1\mathfrak{h})}$, $\delta_1 := \delta_0(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{h} := (1-\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, $\delta := \frac{1}{2}\delta_1$. Nous appliquons ensuite ce résultat aux couples $\big(r, f\overline{g}\big)$ et $\big(r, \overline{f}g\big)$ (respectivement $(r, |f|^2)$, $(r, |g|^2)$) en négligeant la contribution impliquant le paramètre $\mathfrak{c}$.

Le cas $r = \mathbf{1}$ du Corollaire 2.3 relève de la théorie des fonctions « simulatrices » (*pretentious* en anglais) telle que développée depuis quelques années par Granville, Soundararajan et d'autres auteurs — voir par exemple [4], [12], [23]. Si f et g sont des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité et si (2·9) est satisfaite avec $r = \mathbf{1}$ pour $h = |f|^2$, $|g|^2$ et $\Re e\, f\overline{g}$,[4] il résulte en particulier de (2·10) avec $\mathfrak{b} = \frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{2}$, que

$$M\big(x; |f-g|^2\big) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma} x}{\log x}\bigg\{ \sum_{P^+(n) \leqslant x} \frac{|f(n) - g(n)|^2}{n} + O\big(\eta_x^{2/15}\big) \bigg\}. \tag{2·11}$$

Le terme principal de (2·11) vaut alors

$$M(x; |f|^2) + M(x; |g|^2) - x\mathrm{e}^{-\mathbb{D}^2(x; f, g) + O(1)} \qquad (x \to \infty),$$

où $\mathbb{D}^2(x; f, g) := \Re e\, Z(x; 1 - f\overline{g})$ est la pseudo-norme de la théorie des fonctions simulatrices.

Au titre d'une autre illustration du Théorème 1.3, nous pouvons préciser un théorème de Halász [14], [15], relatif aux lois locales de la répartition des facteurs premiers d'un entier dans un ensemble quelconque. Étant donné un ensemble E de nombres premiers, notons $\Omega(n; E)$ le nombre des facteurs premiers appartenant à E, comptés avec multiplicité, d'un entier n, et posons

$$E(x) := \sum_{p \leqslant x,\, p \in E} \frac{1}{p}.$$

Halász a montré que, pour tout $\kappa \in]0, 1[$ fixé et uniformément pour

$$0 \leqslant m \leqslant (2 - \kappa)E(x), \tag{2·12}$$

le nombre $N_m(x; E)$ des entiers $n \leqslant x$ tels que $\Omega(n; E) = m$ vérifie

$$N_m(x; E) = x\mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!}\bigg\{1 + O\Big(\frac{|m - E(x)|}{E(x)} + \frac{1}{\sqrt{E(x)}}\Big)\bigg\}. \tag{2·13}$$

Sárközy [33] a ensuite établi que le terme principal de (2·13) fournit en fait l'ordre de grandeur du membre de gauche dans l'intervalle

$$\kappa E(x) \leqslant m \leqslant (2 - \kappa)E(x). \tag{2·14}$$

Autrement dit, sous la contrainte (2·14), nous avons, pour x assez grand,

$$N_m(x; E) \asymp x\mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!} \tag{2·15}$$

dès que $E(x)$ tend vers l'infini avec x.[5] Cet encadrement a été ultérieurement précisé et

4. Cette hypothèse est en particulier impliquée, pour une valeur convenable de η_x, par la convergence des trois séries $\sum_p \{1 - \Re e\, h(p)\}/p$.

5. Le cas où $E(x)$ est borné relève de techniques de crible élémentaires.

généralisé par Balazard [2].

Soit $\kappa \in]0,1[$. Un argument de convolution standard fournit

$$S(x;r,E) := \sum_{n\leqslant x} r^{\Omega(n;E)} = x\mathrm{e}^{(r-1)E(x)}\bigg\{1+O\bigg(|r-1|+\frac{1}{(\log x)^{1/2}}\bigg)\bigg\}, \tag{2·16}$$

uniformément pour $\kappa \leqslant r \leqslant 2-\kappa$.[6] De plus, il résulte par exemple du théorème 1.1 de [36] que, dans les mêmes conditions,

$$S(x;r,E) \asymp x\mathrm{e}^{(r-1)E(x)}. \tag{2·17}$$

Nous obtenons le résultat suivant, qui précise (2·13) lorsque $m-E(x) \gg \sqrt{E(x)}$ et implique (2·15). Nous posons

$$F(z;E) := \sum_{n\in\mathbb{N}(E)} \frac{z^{\Omega(n)}}{n} = \prod_{p\in E}\bigg(1-\frac{z}{p}\bigg)^{-1} \qquad (z\in\mathbb{C},\ |z|<2), \tag{2·18}$$

et $\mathfrak{t}(x;E) := \sqrt{\{\log E(x)\}/E(x)}$.

Corollaire 2.4. *Soient E un ensemble de nombres premiers tel que $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$, $\kappa \in]0,1[$, et $K>0$.*

(i) *Sous l'hypothèse $\kappa \leqslant r \leqslant 2-\kappa$, $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, nous avons, uniformément pour x assez grand,*

$$S(x;z,E) \ll x\,\mathrm{e}^{(r-1-\kappa\vartheta^2/180)E(x)}. \tag{2·19}$$

(ii) *Sous l'hypothèse $\kappa \leqslant r \leqslant 2-\kappa$, $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $|\vartheta| \leqslant K\mathfrak{t}(x;E)$, nous avons, uniformément pour x assez grand,*

$$S(x;z,E) = S(x;r,E)\bigg\{\frac{F(z;E)}{F(r;E)} + O\bigg(|\vartheta|\mathrm{e}^{-c\vartheta^2E(x)} + \frac{1}{(\log x)^c}\bigg)\bigg\}, \tag{2·20}$$

où $c = c(\kappa,K) > 0$.

(iii) *Nous avons, uniformément pour x assez grand,*

$$N_m(x;E) \ll x\mathrm{e}^{-E(x)}\frac{E(x)^m}{m!} \qquad (0\leqslant m \leqslant (2-\kappa)E(x)). \tag{2·21}$$

De plus, sous la condition $\kappa E(x) \leqslant m \leqslant (2-\kappa)E(x)$ et avec $r := m/E(x)$, nous avons

$$N_m(x;E) = S(x;r,E)\frac{E(x)^m}{m!\mathrm{e}^m}\bigg\{1+O\bigg(\frac{1}{\sqrt{E(x)}}\bigg)\bigg\}. \tag{2·22}$$

Nous donnons la démonstration au paragraphe 7.2. Les assertions (i) et (ii) impliquent immédiatement (2·22) en appliquant la formule de Cauchy sur le cercle $|z| = r := m/E(x)$ et en observant que $F(z;E)/F(r;E) = \mathrm{e}^{(z-r)E(x)}\{1+O(\vartheta)\}$. Compte tenu de (2·21), on obtient (2·13) en évaluant $S(x;r,E)$ par (2·16). Enfin, l'estimation (2·15) résulte immédiatement de (2·17) et (2·22).

Halász a annoncé la possibilité de prouver (2·22) — voir [7], p. 312 — en utilisant une variante du théorème 3 de [14] dans laquelle les hypothèses incluent une condition de type (1·20), mais valable pour tous les nombres premiers n'excédant pas x. Notre approche ne nécessite qu'une majoration en moyenne de type (1·16).

Notons encore que le Corollaire 2.4 demeure valable, *mutatis mutandis*, lorsque l'on remplace $\Omega(n;E)$ par la fonction fortement additive $\omega(n;E) = \sum_{p|n,\,p\in E} 1$. La borne supérieure $2-\kappa$ peut alors être remplacée par $1/\kappa$.

6. Une estimation essentiellement équivalente découle d'ailleurs du Théorème 1.2 appliqué aux fonctions $f(n) := r^{\Omega(n;E)}$, $r(n) := \{\max(1,r)\}^{\Omega(n)}$. On peut en effet supposer $\sigma := 1-\kappa$ arbitrairement petit et choisir alors $\mathfrak{b} := \frac{1}{2}$, $A := 1+\sigma$, $\varrho := \max(1,r)$, $\mathfrak{h} := 1$, $\varepsilon := \sigma^4/\{1+\sigma^4(\log x)^{5\sigma}\}$, et $\delta := \log(1/\sigma)/\log(1/\varepsilon) \leqslant \frac{1}{4}$.

De même, l'extension à l'approximation des lois locales conjointes des fonctions $\Omega(n;E_j)$ ou $\omega(n;E_j)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ relatives à des ensembles fixés de nombres premiers disjoints tels que $\min_j E_j(x)\to\infty$ est immédiate. En appliquant à la fonction $f(n):=\prod_{1\leqslant j\leqslant k} z_j^{\omega(n;E_j)}$ le traitement détaillé au paragraphe 7.2, nous obtenons ainsi

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n;E_j)=m_j\ (1\leqslant j\leqslant k)}} 1=\bigg\{1+O\bigg(\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{1}{\sqrt{E_j(x)}}\bigg)\bigg\}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{E_j(x)^{m_j}}{m_j!\,\mathrm{e}^{m_j}}\sum_{n\leqslant x}\prod_{1\leqslant j\leqslant k} r_j^{\omega(n;E_j)} \tag{2·23}$$

uniformément pour $\kappa\leqslant r_j:=m_j/E_j(x)\leqslant 1/\kappa$ $(1\leqslant j\leqslant k)$. De plus, le membre de gauche de (2·23) est égal à

$$x\mathrm{e}^{O(\mathfrak{T})}\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{E_j(x)^{m_j}}{m_j!\,\mathrm{e}^{E_j(x)}}$$

uniformément pour $\max_j r_j\leqslant 1/\kappa$, avec $\mathfrak{T}:=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\big\{|r_j-1|+1/\sqrt{E_j(x)}\,\big\}$. Ces estimations précisent le théorème 1.3 de l'article [26], également mis en ligne postérieurement à la complétion et la soumission du présent travail.

Nos deux dernières applications concernent la répartition des fonctions additives réelles relativement à des mesures pondérées sur l'ensemble des entiers n'excédant pas x. Nous nous restreignons ici au cas standard d'une loi limite gaussienne, mais nos résultats sont susceptibles de fournir des estimations analogues dans des situations significativement plus générales.

Étant données une fonction positive ou nulle $r\in\mathcal{M}(x;A,B)$ et une fonction additive réelle h, nous notons $z\mapsto F_x(z;h,r)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $h(n)$ sur l'ensemble des entiers n'excédant pas x, équipé de la mesure associant à chaque entier n le poids $r(n)/M(x;r)$, autrement dit

$$F_x(z;h,r):=\frac{1}{M(x;r)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ h(n)\leqslant z}} r(n).$$

Nous posons

$$E_h(x;r):=\sum_{p\leqslant x}\frac{r(p)h(p)}{p},\quad D_h(x;r)^2:=\sum_{p\leqslant x}\frac{r(p)h(p)^2}{p},$$

rappelons la notation $\delta_0(\mathfrak{b})$ définie en (1·23), et notons $\Phi(z):=\big(1/\sqrt{2\pi}\big)\int_{-\infty}^z \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ la fonction de répartition de la loi normale.

Corollaire 2.5. *Soient A, B, des constantes positives, $x\geqslant 2$, $r\in\mathcal{M}(x;A,B)$, et h une fonction additive réelle. Supposons que :*

(i) $\displaystyle\min_{\exp\sqrt{\log x}<p\leqslant x} r(p)\gg 1$; (ii) $D_h(x;r)\gg 1$;

(iii) $\displaystyle\max_{p\leqslant x}\frac{|h(p)|}{D_h(x;r)}\leqslant\mu_x\leqslant 1$; (iv) $\displaystyle\sum_{p^\nu\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{r(p^\nu)|h(p^\nu)|}{p^\nu}\ll 1.$

Alors

$$F_x\Big(E_h(x;r)+zD_h(x;r);h,r\Big)=\Phi(z)+O\bigg(\mu_x+\frac{1}{D_h(x;r)}\bigg). \tag{2·24}$$

De plus, si l'hypothèse (i) est remplacée par (1·24) *avec $\varepsilon_1:=1/(\log x)^{1/4}$ et $\mathfrak{b}>0$ arbitraire, l'estimation* (2·24) *persiste à condition de remplacer μ_x par $\mu_x\sqrt{\log(1+1/\mu_x)}$.*

Le théorème 20.1 de [7] fournit, dans le cas $r=\mathbf{1}$, une évaluation de même type que (2·24) pour une combinaison linéaire finie de fonctions $h_j(n+a_j)$ où les h_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ sont fortement additives et les a_j des entiers fixés. Pour $k=1$, le terme d'erreur de (2·24) est un peu plus précis que celui de [7] lorsque, par exemple, z est borné et $D_h(x;r)\mu_x\gg 1$. Cette dernière condition est certainement remplie dès que $\max_{p\leqslant x}|h(p)|\gg 1$.

Notons φ la fonction indicatrice d'Euler et désignons par $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs premiers d'un entier naturel n, comptés avec multiplicité. Comme conséquence spécifique du résultat précédent, nous pouvons déduire facilement une extension d'un théorème d'Erdős & Pomerance [9] concernant la répartition des nombres $\Omega(\varphi(n))$ et obtenir un terme d'erreur identique à celui de Balazard & Smati [3]. Pour la simplicité de l'énoncé, nous restreignons plus qu'il n'est nécessaire les hypothèses concernant la fonction pondérale r.

Corollaire 2.6. *Soient A, B des constantes positives, $x \geqslant 2$, $\varrho := \varrho_x > 0$, $\varepsilon_1 := 1/(\log x)^{1/4}$, $r \in \mathcal{M}(x; A, B)$. Supposons que :*

$$\text{(i)} \quad \min_{\exp\sqrt{\log x} < p \leqslant x} r(p) \gg 1\,; \qquad \text{(ii)} \sum_{p \leqslant y} \frac{r(p)\log p}{p} = \varrho \log y + O\big(\varepsilon_1 \log y\big) \qquad (\mathrm{e}^{1/\varepsilon_1} \leqslant y \leqslant x).$$

Alors, notant $h := \Omega \circ \varphi$, nous avons

$$F_x\bigg(\tfrac{1}{2}\varrho(\log_2 x)^2 + \frac{z\varrho(\log_2 x)^{3/2}}{\sqrt{3}}; h, r\bigg) = \Phi(z) + O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\bigg). \tag{2·25}$$

De plus, si l'hypothèse (i) est remplacée par (1·24) *avec $\varepsilon_1 := 1/(\log x)^{1/4}$ et $\mathfrak{b} > 0$ arbitraire, l'estimation* (2·25) *persiste à condition de multiplier le terme d'erreur par $\sqrt{\log_3 x}$.*

Le terme d'erreur de (2·25) pose un intéressant problème ouvert : en accord avec l'estimation de concentration obtenue par Marie-Jeanne & Tenenbaum [27], on attend $\ll 1/(\log_2 x)^{3/2}$, une majoration qui demeure pour l'instant hors d'atteinte des techniques disponibles.

3. Preuve du Théorème 1.1

3·1. Lemme de Gallagher

Un résultat de Gallagher [10] (th. 1), tel qu'énoncé, par exemple, au lemme III.4.9 de [35] fournit une majoration générique pour la norme quadratique d'un polynôme de Dirichlet. Une inégalité bien connue de Montgomery et Vaughan ([30], cor. 2) en constitue une forme plus précise. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la majoration initiale de Gallagher. Le lemme 2.1 de [6] étend le résultat de Gallagher dans une autre direction.

Nous notons $\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2\pi i x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lemme 3.1. *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ une suite finie de nombres réels distincts. Pour tous $\{a_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $1 \leqslant r < N$, $T > 0$, nous avons*

$$\int_{-T}^{T} \bigg| \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \mathrm{e}(\lambda_n t) \bigg|^2 \mathrm{d}t \ll T \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |a_n|^2 \sum_{|\lambda_m - \lambda_n| \leqslant 1/T} 1, \tag{3·1}$$

où la constante implicite est absolue.

Remarque. La forme usuelle sous laquelle est utilisée la majoration de Gallagher est

$$\int_{-T}^{T} \bigg| \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \mathrm{e}(\lambda_n t) \bigg|^2 \mathrm{d}t \ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |a_n|^2 \Big\{ T + \frac{1}{\delta_n} \Big\} \tag{3·2}$$

où l'on a posé $\delta_n := \min_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n|$. Comme on a trivialement

$$\sum_{|\lambda_m - \lambda_n| \leqslant 1/T} 1 \leqslant 1 + \frac{2}{T\delta_n},$$

la majoration (3·1) est bien génériquement plus précise.

Démonstration. Pour établir (3·1), nous observons que, posant

$$A(x) := T \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ |x-\lambda_n|\leqslant 1/4T}} a_n, \qquad S(t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \mathrm{e}(\lambda_n t),$$

nous avons

$$\widehat{A}(t) := \int_{\mathbb{R}} A(x)\mathrm{e}(-tx)\,\mathrm{d}x = S(-t)\frac{\sin(\pi t/2T)}{\pi t/2T}.$$

D'après la formule de Plancherel, nous pouvons donc écrire

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\,\mathrm{d}t \ll \int_{\mathbb{R}} \left|S(-t)\frac{\sin(\pi t/2T)}{\pi t/2T}\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |A(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Posons alors $N_k := \sum_{|2T\lambda_n-k|\leqslant 1} |a_n|$ $(k \in \mathbb{Z})$ et observons que $|A(x)| \leqslant TN_k$ lorsque $|x-k/2T| \leqslant 1/4T$. Il suit

$$\int_{\mathbb{R}} |A(x)|^2\,\mathrm{d}x \ll T\sum_{k\in\mathbb{Z}} N_k^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$N_k^2 \leqslant \sum_{|2T\lambda_n-k|\leqslant 1} |a_n|^2 \sum_{|2T\lambda_m-k|\leqslant 1} 1 \leqslant \sum_{|2T\lambda_n-k|\leqslant 1} |a_n|^2 \sum_{|\lambda_m-\lambda_n|\leqslant 1/T} 1.$$

En sommant sur k, nous obtenons bien l'inégalité annoncée. □

3·2. Réduction au cas exponentiellement multiplicatif

Soit g la fonction exponentiellement multiplicative coïncidant avec f sur l'ensemble des nombres premiers n'excédant pas x et nulle sur les nombres premiers $> x$, autrement dit

$$g(p^\nu) := \begin{cases} f(p)^\nu/\nu! & \text{si } p\leqslant x,\ \nu\geqslant 1,\\ 0 & \text{si } p > x. \end{cases} \tag{3·3}$$

Nous avons donc, avec la notation (1·10),

$$G(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \mathrm{e}^{v_f(s;x)}. \tag{3·4}$$

Supposons la majoration (1·12) acquise pour la fonction g. Nous allons montrer qu'elle vaut encore pour f.

Nous avons $f = g * h$ avec

$$h(p^\nu) = \sum_{j+k=\nu} (-1)^j \frac{f(p)^j}{j!} f(p^k) \qquad (p\leqslant x,\ \nu\geqslant 1), \tag{3·5}$$

de sorte que $h(p) = 0$ pour tout p, $h(p^\nu) = 0$ si $p > x$, et

$$\begin{aligned} \sum_{p,\,\nu\geqslant 2} \frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} &\leqslant \sum_p \sum_{k\geqslant 0} \frac{|f(p^k)|}{p^k} \sum_{j\geqslant \max(0,2-k)} \frac{|f(p)|^j}{j!p^j}\\ &\ll \sum_p \frac{|f(p)|^2}{p^2} + \sum_{p,\,k\geqslant 2} \frac{|f(p^k)|}{p^k} \ll 1. \end{aligned} \tag{3·6}$$

Cela implique

$$\prod_p \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} \ll 1, \tag{3·7}$$

$$\prod_p \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{h(p^\nu)}{p^\nu} = \prod_{p\leqslant x} \mathrm{e}^{-f(p)/p} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}. \tag{3·8}$$

De plus, pour $2 \leqslant y \leqslant x$, nous pouvons écrire d'une part

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leqslant x} \frac{|h(n)|}{n} &\leqslant \frac{1}{\log y} \sum_{n\leqslant x} \frac{|h(n)|\log n}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{\log y} \sum_{mp^\nu\leqslant x} \frac{|h(m)h(p^\nu)|\log p^\nu}{mp^\nu} \ll \frac{1}{\log y} \sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{|h(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu},\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{|h(p^\nu)|\log p^\nu}{p^\nu} &\leqslant \sum_{\substack{p^{j+k}\leqslant x\\ j+k\geqslant 2}} \frac{|f(p)|^j|f(p^k)|(k+j)\log p}{j!p^{k+j}} \\ &\leqslant 2\sum_{p^k\leqslant x} \frac{|f(p^k)|\log p^k}{p^k} \sum_{j\geqslant \max(0,2-k)} \frac{(j+1)|f(p)|^j}{j!p^j} \ll 1,\end{aligned}$$

d'après (1·9) avec $j = 0$. Donc

$$Q(y) := \sum_{n>y} \frac{|h(n)|}{n} \ll \frac{1}{\log y} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x). \tag{3·9}$$

Cela dit, nous avons

$$M(x; f) = \sum_{n\leqslant x} h(n) M\Big(\frac{x}{n}; g\Big).$$

Il suit

$$\begin{aligned}&M(x; f) \\ &\ll \sum_{n\leqslant x} \frac{x|h(n)|}{n\log(2x/n)} \bigg\{ \int_{1/\log(3x/n)}^1 \frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{T}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x/n;r)}\log_2(3x/n)}{T} \bigg\} \\ &\ll x\int_{1/\log(3x)}^1 \frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\Theta(3x\mathrm{e}^{-1/\alpha})\,\mathrm{d}\alpha + \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}\Theta(x)}{\sqrt{T}} + \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}\Theta(x)\log_2 x}{T},\end{aligned} \tag{3·10}$$

où l'on a posé

$$\Theta(y) := \sum_{n\leqslant y} \frac{|h(n)|}{n\log(2x/n)} \quad (y \geqslant 2).$$

En scindant la somme à $\sqrt{x}$, nous déduisons de (3·9) que

$$\Theta(y) \ll \frac{1}{\log x} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x).$$

Cela implique bien l'estimation requise.

Si nous adjoignons l'hypothèse (1·13), l'assertion relative au cas exponentiellement multiplicatif nous permet d'omettre dans (3·10) le dernier terme de l'accolade.

3·3. Preuve dans le cas exponentiellement multiplicatif

Soit g la fonction multiplicative définie par (3·3). La première étape consiste à majorer

$$K(x) := \sum_{n\leqslant x} g(n)\log n$$

en fonction d'une moyenne sur $[1, x]$ de $t \mapsto M(t; g)$.

Lemme 3.2. *Soient $A > 0$, $B > 0$. Uniformément pour $x \geqslant 2$, $f, r \in \mathcal{M}(x; A, B)$, $|f| \leqslant r$, nous avons*

$$|K(x)| \leqslant Ax\int_1^x \big|M(t; g)\big|\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big). \tag{3·11}$$

Démonstration. Nous avons

$$K(x) = \sum_{n\leqslant x} g(n) \sum_{p^\nu|n} \log p = \sum_{p^\nu\leqslant x} (\log p) \sum_{m\leqslant x/p^\nu} g(mp^\nu). \tag{3·12}$$

La somme intérieure vaut

$$\sum_{\substack{m\leqslant x/p^\nu\\ p\nmid m}} g(p^\nu)g(m) + \sum_{m\leqslant x/p^{\nu+1}} g(mp^{\nu+1}) = g(p^\nu)M\Big(\frac{x}{p^\nu};g\Big) - R_\nu(p)$$

avec

$$\begin{aligned} R_\nu(p) &:= \sum_{m\leqslant x/p^{\nu+1}} \big\{g(p^\nu)g(mp) - g(mp^{\nu+1})\big\} \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \big\{g(p^\nu)g(p^{k+1}) - g(p^{\nu+k+1})\big\} M\Big(\frac{x}{p^{\nu+k+1}};g_p\Big) \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+\nu+1)!}\Big\{\binom{\nu+k+1}{k} - 1\Big\} g(p)^{\nu+k+1} M\Big(\frac{x}{p^{\nu+k+1}};g_p\Big), \end{aligned}$$

où g_p désigne la fonction multiplicative coïncidant avec g sur l'ensemble des entiers premiers à p et nulle sur l'ensemble des multiples de p.

Compte tenu de la majoration de Halberstam–Richert [17][(7)]

$$M(y;|g|) \ll \frac{y\,\mathrm{e}^{Z(y;r)}}{\log y} \qquad (2\leqslant y\leqslant x), \tag{3·13}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{p^\nu\leqslant x} R_\nu(p)\log p &\ll \sum_{j\geqslant 2}\sum_{p^j\leqslant x} \frac{(1+|g(p)|)^j \log p}{j!} M\Big(\frac{x}{p^j};g_p\Big) \\ &\ll x\mathrm{e}^{Z(x;r)} \sum_{j\geqslant 2}\sum_{p^j\leqslant x} \frac{(1+|g(p)|)^j \log p}{j!\,p^j \log(2x/p^j)} \\ &\ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} + x\mathrm{e}^{Z(x;r)} \sum_{p>\sqrt{x}} \frac{(\log p)^2}{p^{3/2}x^{1/4}} \ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}. \end{aligned}$$

En reportant dans (3·12), nous obtenons donc

$$K(x) = \sum_{d\leqslant x} \Lambda(d)g(d)M\Big(\frac{x}{d};g\Big) + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big). \tag{3·14}$$

La contribution au terme principal des entiers $d = p^\nu$ avec $\nu\geqslant 2$ n'excède pas

$$\ll x\mathrm{e}^{Z(x;r)} \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} \frac{|f(p)|^\nu \log p}{\nu!\,p^\nu \log(2x/p^\nu)} \ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x},$$

où nous avons de nouveau fait appel à (3·13) et estimé la somme en p^ν en la scindant à $\sqrt{x}$. Introduisant la fonction de Tchébychev $\vartheta(t) := \sum_{p\leqslant t}\log p$ et notant $R(t) := \vartheta(t) - t$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} |K(x)| &\leqslant A\int_1^x \Big|M\Big(\frac{x}{t};g\Big)\Big|\,\mathrm{d}\vartheta(t) + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big) \\ &= A\int_1^x \Big|M\Big(\frac{x}{t};g\Big)\Big|\,\mathrm{d}t + A\int_{1-}^x \Big|M\Big(\frac{x}{t};g\Big)\Big|\,\mathrm{d}R(t) + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big) \\ &= Ax\int_1^x |M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + A\int_{1-}^x \Big|M\Big(\frac{x}{t};g\Big)\Big|\,\mathrm{d}R(t) + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big). \end{aligned}$$

7. Voir le th. III.3.5 de [35] pour une version simplifiée suffisante ici.

La dernière intégrale peut être évaluée par sommation d'Abel en notant que

$$|\,\mathrm{d}|M(t;g)|| \leqslant \mathrm{d}M(t;|g|).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{1-}^{x}\Big|M\Big(\frac{x}{t};g\Big)\Big|\,\mathrm{d}R(t) &= |M(x;g)| - \int_1^x R\Big(\frac{x}{t}\Big)\,\mathrm{d}M(t;g)\\ &\ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} + \sum_{n\leqslant x}\frac{x|g(n)|}{n(\log 2x/n)^2}\\ &\ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} + \sum_{2^k\leqslant x}\frac{2^k}{k^2+1}\sum_{n/2^{k+1}<n\leqslant x/2^k}|g(n)|\\ &\ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} + \sum_{2^k\leqslant x}\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(k^2+1)\log(2x/2^k)} \ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}.\end{aligned}$$

Cela complète la preuve de (3·11). □

Lemme 3.3. *Soient $A>0$, $B>0$. Pour $x\geqslant 2$, $f,r\in\mathcal{M}(x;A,B)$, $|f|\leqslant r$, nous avons uniformément*

$$|M(x;g)| \leqslant \frac{Ax}{\log x}\int_1^x |M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\log x)^2}\Big), \tag{3·15}$$

$$\int_1^x \frac{|M(t;g)|\log t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_1^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + O(1). \tag{3·16}$$

Démonstration. Nous avons

$$M(x;g)\log x - K(x) = \sum_{n\leqslant x} g(n)\int_n^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x M(t;g)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ll \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{Z(t;r)}}{\log 2t}\,\mathrm{d}t \ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x},$$

où l'avant-dernière majoration résulte de (3·13). Cela implique (3·15) en reportant dans (3·11). De plus, pour $x>\mathrm{e}^2$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{|M(t;g)|\log t}{t^2}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\int_1^t \frac{|M(u;g)|}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{|M(u;g)|}{u}\int_{\max(u,\mathrm{e}^2)}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}^2}^x \frac{|M(u;g)|}{u^2}\,\mathrm{d}u + O(1).\end{aligned}$$

Cela implique bien (3·16). □

Lemme 3.4. *Soient $A>0$, $B>0$. Sous les conditions $x\geqslant 2$, $f\in\mathcal{M}(x;A,B)$, $T\geqslant 1$, $1/\log x\leqslant\alpha\leqslant\frac12$, nous avons uniformément*

$$H_T(\alpha) \gg 1. \tag{3·17}$$

Démonstration. Nous avons

$$\int_{-1/2}^{1/2}|v_f(1+\alpha+i\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \ll \sum_p \frac{|g(p)|^2}{p^{2+2\alpha}}\sum_{|\log(p'/p)|\leqslant 1/2} 1 \ll \sum_p \frac{1}{p\log p} \ll 1,$$

où la première majoration résulte du Lemme 3.1, et la seconde du théorème de Brun–Titchmarsh. Il s'ensuit que $\max_{\substack{\sigma=1+\alpha\\|\tau|\leqslant 1/2}}|\mathrm{e}^{v_f(s)}|\gg 1$. □

Nous sommes à présent en mesure d'aborder la phase finale de la démonstration. L'argument repose essentiellement sur la technique élaborée par Halász [13], avec, ainsi qu'il a été mentionné dans l'introduction, certains raffinements issus de [28] et [35].

Nous observons d'abord que l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$\int_1^x \frac{|K(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(\int_1^x \frac{|K(t)|^2}{t^3}\,\mathrm{d}t\log x\Big)^{1/2} \tag{3·18}$$

et que la formule de Plancherel permet d'écrire, pour tout $\alpha > 0$, avec la notation (3·4),

$$\int_1^x \frac{|K(t)|^2}{t^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{G'(1+\alpha+i\tau)}{1+\alpha+i\tau}\Big|^2\,\mathrm{d}\tau. \tag{3·19}$$

La dernière intégrale peut être estimée grâce au Lemme 3.1. En notant que $G'(s) = v_f'(s)\mathrm{e}^{v_f(s)}$ et que

$$G(s) \ll \mathrm{e}^{Z(\exp(1/\{\sigma-1\});r)} \qquad (\sigma > 1), \tag{3·20}$$

il suit, dans un premier temps,

$$\begin{aligned}\int_{-T}^T \Big|\frac{G'(1+\alpha+i\tau)}{1+\alpha+i\tau}\Big|^2\,\mathrm{d}\tau &\ll \sum_{|k|\leqslant T}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|G'(1+\alpha+ik+i\tau)|^2}{k^2+1}\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \sum_{|k|\leqslant T}\frac{1}{k^2+1}\max_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ |\tau-k|\leqslant\frac12}}\big|\mathrm{e}^{2v_f(s)}\big|\sum_p \frac{|g(p)|^2(\log p)^2}{p^{2+2\alpha}}\sum_{|\log(p'/p)|\leqslant 1/2} 1.\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Brun–Titchmarsh, la somme intérieure en p' est $\ll p/\log p$. La somme en p est donc

$$\ll \sum_p \frac{\log p}{p^{1+2\alpha}} \ll \frac{1}{\alpha}\cdot$$

D'où

$$\int_{-T}^T \Big|\frac{G'(1+\alpha+i\tau)}{1+\alpha+i\tau}\Big|^2\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{H_T(\alpha)^2}{\alpha}\cdot$$

Nous traitons l'intégrale complémentaire de manière similaire en faisant appel à la majoration triviale (3·20). Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{|\tau|>T} \Big|\frac{G'(1+\alpha+i\tau)}{1+\alpha+i\tau}\Big|^2\,\mathrm{d}\tau &\ll \sum_{k\neq 0,-1}\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|G'(1+\alpha+i\tau)|^2}{k^2T^2}\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \sum_{k\neq 0,-1}\frac{\mathrm{e}^{2Z(\exp(1/\alpha);r)}}{k^2T}\sum_p \frac{|g(p)|^2(\log p)^2}{p^{2+2\alpha}}\sum_{|\log(p'/p)|\leqslant 1/T} 1.\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Brun–Titchmarsh, la somme intérieure en p' est

$$\ll (1+p/T)/\log(2+p/T).$$

La somme en p est donc

$$\ll \sum_{p\leqslant T}\frac{(\log p)^2}{p^2} + \sum_{T<p\leqslant T^2}\frac{(\log p)^2}{Tp} + \sum_p \frac{\log p}{Tp^{1+2\alpha}} \ll 1 + \frac{1}{\alpha T}\cdot$$

En rassemblant nos estimations nous pouvons donc énoncer que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{G'(1+\alpha+i\tau)}{1+\alpha+i\tau}\Big|^2\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{H_T(\alpha)^2}{\alpha} + \frac{\mathrm{e}^{2Z(\exp(1/\alpha);r)}}{T}\Big(1+\frac{1}{\alpha T}\Big).$$

Choisissons $\alpha := 1/\log x$ et reportons successivement dans (3·19), (3·18) et (3·16). Nous obtenons

$$\int_1^x \frac{|M(t;g)|\log t}{t^2}\,\mathrm{d}t \ll H_T\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\log x + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\sqrt{\log x}}{\sqrt{T}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\log x}{T},$$

puisque, en vertu de (3·17), le terme d'erreur de (3·16) est dominé par le premier terme du majorant. Nous exploitons cette estimation sous la forme

$$\int_{\sqrt{y}}^{y} |M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \ll H_T\Big(\frac{1}{\log y}\Big) + \frac{\mathrm{e}^{Z(y;r)}}{\sqrt{T\log y}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(y;r)}}{T} \qquad (\mathrm{e} \leqslant y \leqslant x). \tag{3·21}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{x} |M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &\ll \int_{\mathrm{e}}^{x} |M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\int_{\sqrt{t}}^{t}\frac{\mathrm{d}y}{y\log y} = \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{y\log y}\int_{y}^{\min(x,y^2)}|M(t;g)|\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\ &\ll \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{x} H_T\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\frac{\mathrm{d}y}{y\log y} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{T}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\log_2 x}{T}\\ &\ll \int_{1/\log x}^{1}\frac{H_T(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{T}} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\log_2 x}{T}.\end{aligned}$$

En reportant dans (3·15), nous obtenons bien (1·12).

Sous l'hypothèse supplémentaire (1·13), le dernier terme de (3·21) est

$$\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{T}\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^c.$$

En reportant dans les calculs, nous constatons alors que la contribution de cette quantité est bien dominée par celle du second terme de la majoration (3·21).

4. Preuve du Théorème 1.2

4·1. Lemmes

Nous aurons plusieurs fois l'usage du résultat auxiliaire suivant.

Lemme 4.1. *Dans les hypothèses du Théorème 1.2, nous avons*

$$\mathrm{e}^{Z(y;r)} \ll \mathrm{e}^{Z(x;r)}\Big\{\varepsilon^{\varrho} + \Big(\frac{\log y}{\log 2x}\Big)^{\varrho}\Big\} \qquad (1 \leqslant y \leqslant x). \tag{4·1}$$

Démonstration. Posons

$$Z_1(t) := \sum_{p\leqslant t}\frac{r(p)\log p}{p} \qquad (t \geqslant 2), \tag{4·2}$$

de sorte que, par (1·17), nous avons, pour une constante positive c_1 convenable,

$$Z_1(t) \geqslant \big(\varrho - c_1\varepsilon\big)\log t \qquad (t > x^{\varepsilon}).$$

De plus,

$$Z(x;r) - Z(y;r) = \int_{y}^{x}\frac{Z_1(t)}{t(\log 2t)^2}\,\mathrm{d}t + O(1) \qquad (2 \leqslant y \leqslant x). \tag{4·3}$$

Pour $x^{\varepsilon} < y \leqslant x$, nous pouvons donc écrire

$$Z(x;r) - Z(y;r) \geqslant \big(\varrho - c_1\varepsilon\big)\log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big) + O(1) = \varrho\log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big) + O(1). \tag{4·4}$$

Or, si $y \leqslant x^{\varepsilon}$, nous avons

$$Z(x;r) - Z(y;r) \geqslant Z(x;r) - Z\big(x^{\varepsilon};r\big) \geqslant \varrho\log(1/\varepsilon) + O(1). \tag{4·5}$$

Cela implique bien le résultat annoncé. □

Le résultat qui suit est une conséquence immédiate du théorème II.5.2 ou du théorème II.5.4 de [35].

Lemme 4.2. *Soient A, $\mathfrak{b}$ des constantes positives. Pour $\mathfrak{b} \leqslant \varrho \leqslant A$, $y \geqslant 2$, nous avons uniformément*

$$T_\varrho(y) := \sum_{n\leqslant y} \tau_\varrho(n) = \frac{y}{\Gamma(\varrho)}(\log y)^{\varrho-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{4·6}$$

Soient f et r des fonctions multiplicatives satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.2 et g la fonction exponentiellement multiplicative définie par

$$g(p^\nu) = \begin{cases} f(p)^\nu/\nu! & \text{si } p \leqslant x, \\ \varrho^\nu/\nu! & \text{si } p > x, \end{cases} \qquad (p \geqslant 2,\ \nu \geqslant 1). \tag{4·7}$$

Nous posons

$$Z(y; g) := \sum_{p\leqslant y} \frac{g(p)}{p} \qquad (y \geqslant 2). \tag{4·8}$$

Ainsi, $Z(y; g) = Z(y; f)$ tel que défini en (1·11) pour $y \leqslant x$. Nous définissons en outre

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_x^* &:= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho + Z(x;f)}}{(\log x)^\varrho} \qquad (x \geqslant 2), \\ G(s) &:= \sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \exp\Big\{\sum_p \frac{g(p)}{p^s}\Big\} \qquad (\sigma > 1), \\ g_x(n) &:= g(n) - \mathscr{L}_x^* \tau_\varrho(n) \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned} \tag{4·9}$$

de sorte que, par (4·6),

$$M(x; g_x) = M(x; g) - \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho} x\, \mathrm{e}^{Z(x;f)}}{\Gamma(\varrho)\log x} + O\Big(\frac{\varepsilon^2 x\, \mathrm{e}^{Z(x;f)}}{\log x}\Big). \tag{4·10}$$

Rappelons encore la notation $\delta := w_f \delta_1 \leqslant \frac{1}{3}\min(2, \varrho)$.

Lemme 4.3. *Pour $x \geqslant 2$, nous avons*

$$M(x; g_x) \ll \frac{x}{\log x}\Big\{\int_1^x \frac{|M(y; g_x)|}{y^2}\,\mathrm{d}y + \varepsilon^\delta \mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}\Big\}. \tag{4·11}$$

Démonstration. Posons $\varrho_0 := \min(1, \varrho)/3$. Observons d'abord qu'il résulte de (3·13), (4·1), et (4·6), que

$$\begin{aligned} M(y; |g_x|) &\ll \frac{y\, \mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log y}\Big\{\varepsilon^\varrho + \Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^\varrho\Big\} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x), \\ &\ll y\varepsilon^{\min(2,\varrho)}\mathrm{e}^{Z(x;r)} \ll y\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)} \end{aligned} \tag{4·12}$$

où la seconde estimation résulte d'un calcul d'extremum et la dernière de (1·15).

Posons ensuite

$$N_x(y) := \sum_{n\leqslant y} g_x(n)\log n \qquad (2 \leqslant y \leqslant x). \tag{4·13}$$

Nous avons

$$M(y; g_x)\log y - N_x(y) = \sum_{n\leqslant y} g_x(n)\log\Big(\frac{y}{n}\Big) = \int_1^y \frac{M(z; g_x)}{z}\,\mathrm{d}z \ll y\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)},$$

et donc

$$M(y; g_x) \ll \frac{|N_x(y)|}{\log y} + \frac{y\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}}{\log y} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x). \tag{4·14}$$

Nous allons estimer $N_x(y)$ pour $2 \leqslant y \leqslant x$ en utilisant l'identité

$$g_x(ab) = g(a)g_x(b) + \mathscr{L}_x^* \widetilde{g}(a)\tau_\varrho(b) \qquad \big((a,b)=1\big),$$

où nous avons posé $\widetilde{g}(n) := g(n) - \tau_\varrho(n)$ $(n \geqslant 1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} N_x(y) &= \sum_{\substack{mp^\nu \leqslant y \\ p \nmid m}} g_x(mp^\nu)\log p^\nu \\ &= \sum_{p^\nu \leqslant y} g(p^\nu)\log p^\nu \sum_{\substack{m \leqslant y/p^\nu \\ p \nmid m}} g_x(m) + \mathscr{L}_x^* \sum_{p^\nu \leqslant y} \widetilde{g}(p^\nu)\log p^\nu \sum_{\substack{m \leqslant y/p^\nu \\ p \nmid m}} \tau_\varrho(m). \end{aligned} \tag{4·15}$$

Ici et dans la suite, une somme portant sur des puissances de nombres premiers p^ν est entendue comme une somme double où l'exposant satisfait systématiquement $\nu \geqslant 1$. La contribution au membre de droite de (4·15) des puissances p^ν avec $\nu \geqslant 2$ est estimée en faisant appel à (4·6) et (4·12). Elle est

$$\begin{aligned} &\ll y\mathrm{e}^{Z(x;r)}\Big\{\varepsilon^\varrho + \Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^\varrho\Big\} \sum_{\substack{p^\nu \leqslant y \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\{|g(p^\nu)| + \tau_\varrho(p^\nu)\}\log p^\nu}{p^\nu \log(2y/p^\nu)} \\ &\ll \frac{y\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log y}\Big\{\varepsilon^\varrho + \Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^\varrho\Big\} \ll y\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}, \end{aligned}$$

où la seconde estimation découle, par sommation d'Abel, de l'hypothèse de multiplicativité exponentielle effectuée sur g.

Nous pouvons donc écrire

$$N_x(y) = W_1 + W_2 + O\Big(y\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}\Big) \qquad (2 \leqslant y \leqslant x), \tag{4·16}$$

avec

$$W_1 := \sum_{p \leqslant y} g(p)\log p \sum_{\substack{m \leqslant y/p \\ p \nmid m}} g_x(m), \qquad W_2 := \mathscr{L}_x^* \sum_{p \leqslant y} \widetilde{g}(p)\log p \sum_{\substack{m \leqslant y/p \\ p \nmid m}} \tau_\varrho(m).$$

La somme intérieure de W_1 vaut $M(y/p; g_x) - U_p(y/p)$ avec, pour $p \leqslant z \leqslant y$,

$$\begin{aligned} U_p(z) := \sum_{\substack{m \leqslant z \\ p \mid m}} g_x(m) &\ll \sum_{\nu \leqslant (\log z)/\log p} \Big\{|g(p^\nu)| M\Big(\frac{z}{p^\nu}; |g_x|\Big) + \mathscr{L}_x^* \tau_\varrho(p^\nu) T_\varrho\Big(\frac{z}{p^\nu}\Big)\Big\} \\ &\ll \frac{z\,\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{p\log(2z/p)}\Big\{\varepsilon^\varrho + \Big(\frac{\log 2z/p}{\log x}\Big)^\varrho\Big\} \ll \frac{z\,\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{p}, \end{aligned}$$

où l'on a fait appel à (4·12) et (4·6).[8] La contribution à W_1 des termes impliquant $U_p(y/p)$ est donc

$$\ll \sum_{p \leqslant \sqrt{y}} \frac{y\,\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}\log p}{p^2} \ll y\,\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}.$$

Une variante de (4·6) prouvée par la même méthode d'intégration complexe (cf. [35], théorème III.5.2), fournit par ailleurs, uniformément pour $2 \leqslant p \leqslant z$, $2\mathfrak{b} \leqslant \varrho \leqslant A$,

$$\sum_{\substack{m \leqslant z \\ p \nmid m}} \tau_\varrho(m) = \frac{z}{\Gamma(\varrho)}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^\varrho (\log 2z)^{\varrho-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log 2z}\Big)\Big\}.$$

8. Nous avons également utilisé ici l'inégalité élémentaire

$$\sum_{1 \leqslant \nu \leqslant (\log z)/\log p} \frac{z}{p^\nu}\log^{\varrho-1}\Big(\frac{2z}{p^\nu}\Big) \ll \frac{z}{p}\log^{\varrho-1}\Big(\frac{2z}{p}\Big) \qquad (2 \leqslant p \leqslant z),$$

valable uniformément pour $0 \leqslant \varrho \ll 1$, et dont nous omettons la démonstration.

On en déduit que l'on peut remplacer la somme intérieure de W_2 par

$$\frac{y}{\Gamma(\varrho)p}\Big(\log\frac{2y}{p}\Big)^{\varrho-1},$$

avec une erreur englobée par le terme résiduel de (4·16). Nous avons donc obtenu jusqu'ici

$$N_x(y)=S_x(y)+W_2^*+O\Big(y\,\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}\Big)\qquad(2\leqslant y\leqslant x),\tag{4·17}$$

où l'on a posé

$$S_x(y):=\sum_{p\leqslant y}g(p)(\log p)M\Big(\frac{y}{p};g_x\Big),\qquad W_2^*:=\frac{y\mathscr{L}_x^*}{\Gamma(\varrho)}\sum_{p\leqslant y}\frac{\widetilde{g}(p)\log p}{p}\Big(\log\frac{2y}{p}\Big)^{\varrho-1}.\tag{4·18}$$

Nous allons établir l'estimation

$$W_2^*\ll\varepsilon^\delta y\,\mathrm{e}^{Z(x;f)}\Big\{\varepsilon^{\varrho_0}+\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\Big\}\qquad(2\leqslant y\leqslant x).\tag{4·19}$$

Pour cela, nous observons d'abord que la majoration triviale $g(p)\ll 1$ fournit

$$W_2^*\ll y\mathrm{e}^{Z(x;f)}\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho},$$

et donc (4·19) si $y\leqslant x^{2\varepsilon}$. La même majoration $g(p)\ll 1$ permet d'écrire, lorsque $y>x^{2\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\log x)^{\varrho}}\sum_{p\leqslant x^\varepsilon}\frac{\widetilde{g}(p)\log p}{p}\Big(\log\frac{2y}{p}\Big)^{\varrho-1}&\ll\varepsilon\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho-1}\ll\varepsilon\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{3\varrho_0-1}\\&\ll\varepsilon^{2\varrho_0}\Big(\frac{\log y}{\varepsilon\log x}\Big)^{2\varrho_0-1}\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\ll\varepsilon^\delta\Big\{\varepsilon^{\varrho_0}+\Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\Big\},\end{aligned}$$

puisque $2\varrho_0\geqslant\delta$. Cette estimation est bien compatible avec (4·19). Il reste à évaluer la contribution complémentaire, relative aux nombres premiers de l'intervalle $]x^\varepsilon,y]$. À cette fin, nous employons l'inégalité $|\Im m\,g(p)|^2\leqslant 2A\{r(p)-\Re e\,g(p)\}$ sous la forme

$$\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant z}\frac{\widetilde{g}(p)\log p}{p}=\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant z}\frac{\{r(p)-\varrho\}\log p}{p}+O\Big(\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant z}\frac{\{r(p)-\Re e\,g(p)\}^{w_f}\log p}{p}\Big).\tag{4·20}$$

Il résulte alors des relations (1·16) et (1·17) que le membre de droite est $\ll\varepsilon^\delta\log z$. Nous utiliserons également le fait que la dernière somme en p est à termes positifs ou nuls.

Reportons (4·20) dans l'expression

$$\mathfrak{G}(y):=\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y}\frac{\widetilde{g}(p)\log p}{p}\Big(\log\frac{2y}{p}\Big)^{\varrho-1}\qquad(x^{2\varepsilon}<y\leqslant x).$$

Compte tenu de (1·17), nous pouvons traiter la contribution du terme principal de (4·20), disons $\mathfrak{G}^+(y)$, par sommation d'Abel. Notant $a_p:=r(p)-\varrho$, nous avons en effet, si $\varrho>1$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^+(y)&=(\varrho-1)\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y}\frac{a_p\log p}{p}\int_1^{2y/p}(\log t)^{\varrho-2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=(\varrho-1)\int_1^{2y/x^\varepsilon}(\log t)^{\varrho-2}\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant 2y/t}\frac{a_p\log p}{p}\frac{\mathrm{d}t}{t}\ll\varepsilon(\log y)^{\varrho}\ll\varepsilon^\delta(\log y)^{\varrho},\end{aligned}$$

et, si $\varrho<1$, puisque $\delta\leqslant\varrho$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^+(y)&=(1-\varrho)\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y}\frac{a_p\log p}{p}\int_{2y/p}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^{2-\varrho}}\\&=(1-\varrho)\int_2^{2y/x^\varepsilon}\sum_{2y/t<p\leqslant y}\frac{a_p\log p}{p}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^{2-\varrho}}+\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y}\frac{a_p\log p}{p}\Big(\log\frac{2y}{x^\varepsilon}\Big)^{\varrho-1}\\&\ll\int_2^{y^\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^{1-\varrho}}+(1-\varrho)\int_{y^\varepsilon}^{2y/x^\varepsilon}\varepsilon(\log y)\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^{2-\varrho}}+\varepsilon(\log y)^{\varrho}\\&\ll\varepsilon^{\varrho}(\log y)^{\varrho}\ll\varepsilon^\delta(\log y)^{\varrho}.\end{aligned}$$

Le cas $\varrho = 1$ étant trivial, nous avons donc $\mathfrak{G}^+(y) \ll \varepsilon^\delta (\log y)^\varrho$ en toute circonstance.

Considérons à présent la contribution $\mathfrak{G}^-(y)$ du terme d'erreur de (4·20) à la quantité $\mathfrak{G}(y)$. Nous avons trivialement $\mathfrak{G}^-(y) \ll \varepsilon^\delta (\log y)^\varrho$ si $\varrho \geqslant 1$. Lorsque $2\mathfrak{b} \leqslant \varrho < 1$, nous employons l'inégalité de Hölder avec exposants $\mathfrak{h}/w_f$ et $\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} - w_f)$. Nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned}
&\ll \Big\{ \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant y} \frac{\{r(p) - \Re e\, g(p)\}^{\mathfrak{h}} \log p}{p} \Big\}^{w_f/\mathfrak{h}} \Big\{ \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant y} \frac{\log p}{p} \Big(\log \frac{2y}{p} \Big)^{(\varrho-1)\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}-w_f)} \Big\}^{1-w_f/\mathfrak{h}} \\
&\ll \varepsilon^\delta (\log y)^\varrho,
\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{(\varrho-1)\mathfrak{h}}{\mathfrak{h} - w_f} = -\frac{(1-\mathfrak{b})(1-\varrho)}{1 - \mathfrak{b} - w_f(\varrho - \mathfrak{b})} \geqslant \mathfrak{b} - 1.$$

Cela achève la preuve de (4·19).

En reportant (4·19) dans (4·17), il vient donc

$$N_x(y) \ll |S_x(y)| + \varepsilon^\delta y\, \mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)} \Big\{ \varepsilon^{\varrho_0} + \Big(\frac{\log y}{\log x} \Big)^{\varrho_0} \Big\} \qquad (2 \leqslant y \leqslant x). \tag{4·21}$$

À ce stade, nous observons que lorsque $|y - x| \leqslant h$ avec $\sqrt{x} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}x$, on a

$$|N_x(x) - N_x(y)| \ll (\log x) \sum_{x-h \leqslant n \leqslant x+h} \{|g(n)| + \mathscr{L}_x^* \tau_\varrho(n)\} \ll h \mathrm{e}^{Z(x;r)},$$

d'après le théorème de Shiu [34]. Nous pouvons donc écrire, compte tenu de (4·21),

$$N_x(x) \ll \frac{1}{h} \int_{x-h}^x |S_x(y)|\, \mathrm{d}y + h\, \mathrm{e}^{Z(x;r)} + \varepsilon^\delta x\, \mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}. \tag{4·22}$$

Choisissons $h := x/\log x \leqslant \varepsilon^2 x$. Au vu de (1·15), le second terme du membre de droite de (4·22) est donc dominé par le troisième. De plus, d'après (4·18), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{x-h}^x |S_x(y)|\, \mathrm{d}y &\ll \int_{x-h}^x \sum_{p \leqslant y} \log p \Big| M\Big(\frac{y}{p}; g_x\Big) \Big|\, \mathrm{d}y \ll \sum_{p \leqslant x} \log p \int_{x-h}^x \Big| M\Big(\frac{y}{p}; g_x\Big) \Big|\, \mathrm{d}y \\
&= \sum_{p \leqslant x} p \log p \int_{(x-h)/p}^{x/p} |M(y; g_x)|\, \mathrm{d}y \\
&= \int_1^x |M(y; g_x)| \sum_{(x-h)/y < p \leqslant x/y} p \log p\, \mathrm{d}y \\
&\leqslant x \int_1^x \frac{|M(y; g_x)|}{y} \sum_{(x-h)/y < p \leqslant x/y} \log p\, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Brun–Titchmarsh, la somme intérieure est

$$\ll \frac{h \log(2x/y)}{y \log(h/y)}$$

dès que $h \geqslant 2y$. Nous utilisons cette majoration lorsque $y \leqslant h/\log x = x/(\log x)^2$. La contribution correspondante à la dernière intégrale est donc

$$\ll h \int_1^x \frac{|M(y; g_x)|}{y^2}\, \mathrm{d}y.$$

Lorsque $h/\log x < y \leqslant x$, nous majorons trivialement $|M(y;g_x)|$ par (4·12). La contribution correspondante est

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} \sum_{p\leqslant x/(h/\log x)} \log p \int_{(x-h)/p}^{x/p} \mathrm{d}y \\
&\ll \frac{h\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} \sum_{p\leqslant \log^2 x} \frac{\log p}{p} \ll \frac{h\mathrm{e}^{Z(x;r)}\log_2 x}{\log x} \\
&\ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x} \ll x\varepsilon^{2-\beta\mathfrak{b}/2}\mathrm{e}^{Z(x;f)} \ll x\varepsilon^{\delta}\mathrm{e}^{Z(x;f)}.
\end{aligned}$$

En reportant nos estimations dans (4·22) puis (4·14) avec $y = x$, nous obtenons bien (4·11). □

4·2. Preuve dans le cas exponentiellement multiplicatif

Sous l'hypothèse supplémentaire de multiplicativité exponentielle, nous établirons le Théorème 1.2 en trois étapes. La première consiste à étudier la valeur moyenne de la fonction exponentiellement multiplicative g définie en (4·7). Avec les notations $G(s)$ et $\mathscr{L}_x^*$ définies en (4·9), nous posons

$$\mathcal{H}_x(\alpha)^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+1} \sup_{s\in I_k(\alpha)} \big|G(s) - \mathscr{L}_x^*\zeta(s)^{\varrho}\big|^2, \tag{4·23}$$

où, ici et dans la suite, $I_k(\alpha)$ désigne le segment $1+\alpha+ik+i[-\frac12,\frac12]$. Par ailleurs, nous conservons la notation $\varrho_0 := \min(1,\varrho)/3$ introduite dans la preuve du Lemme 4.3.

Proposition 4.4. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, nous avons*

$$\Big|M(x;g) - \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho}x\,\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{\Gamma(\varrho)\log x}\Big| \ll \frac{x}{\log x}\bigg\{\int_{1/\log x}^{1/(\varepsilon\log x)} \frac{\mathcal{H}_x(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \varepsilon^{\delta}\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}\bigg\}. \tag{4·24}$$

Démonstration. Observons d'emblée que, grâce à (4·10), nous pouvons remplacer le membre de gauche de (4·24) par $|M(x;g_x)|$. Nous déduirons (4·24) de (4·11). À cette fin, nous prouvons en premier lieu que, pour $x^{\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\log y)^{3/2}}\int_1^y \frac{|M(z;g_x)|(\log z)^{3/2}}{z^2}\,\mathrm{d}z \\
&\qquad \ll \mathcal{H}_x\Big(\frac{1}{\log y}\Big) + \varepsilon^{\delta}\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}\Big\{\varepsilon^{\varrho_0} + \Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\Big\}.
\end{aligned} \tag{4·25}$$

Il est suffisant d'établir cette majoration lorsque $|M(z;g_x)|(\log z)^{3/2}$ est remplacé dans l'intégrande par $|N_x(z)|\sqrt{\log z}$: en vertu de (4·14), l'erreur impliquée est

$$\ll \frac{\varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\log y)^{3/2}}\int_1^y \frac{\sqrt{\log 2z}}{z}\,\mathrm{d}z \ll \varepsilon^{\delta+\varrho_0}\mathrm{e}^{Z(x;f)}.$$

Au vu de (4·21), nous pouvons encore remplacer $N_x(z)$ par $S_x(z)$ (cf. (4·18)) avec une erreur acceptable. Maintenant, l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\int_1^y \frac{|S_x(z)|\sqrt{\log z}}{z^2}\,\mathrm{d}z \leqslant \bigg\{\int_1^y \frac{|S_x(z)|^2}{z^3}\,\mathrm{d}z \int_1^y \frac{\log z}{z}\,\mathrm{d}z\bigg\}^{1/2}$$

nous permet de ramener la preuve de (4·25) à celle de

$$\int_1^{\infty} \frac{|S_x(z)|^2}{z^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}z \ll \frac{\mathcal{H}_x(\alpha)^2}{\alpha} \qquad (\alpha > 0). \tag{4·26}$$

En effet, la majoration souhaitée découlera alors du choix $\alpha = 1/\log y$.

La fonction G étant définie en (4·9), posons

$$\Phi(s) := G(s) - \mathscr{L}_x^*\zeta(s)^\varrho.$$

La relation

$$\int_0^{+\infty} S_x(\mathrm{e}^v)\mathrm{e}^{-v\sigma}\mathrm{e}^{-iv\tau}\,\mathrm{d}v = -\frac{G'(s)}{G(s)}\frac{\Phi(s)}{s} \qquad (\sigma > 1)$$

nous permet d'écrire la formule de Plancherel

$$\begin{aligned}(4\cdot27)\qquad \int_1^\infty \frac{|S_x(z)|^2}{z^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}z &= \int_0^\infty \frac{|S_x(\mathrm{e}^v)|^2}{\mathrm{e}^{2v(1+\alpha)}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+\alpha-i\infty}^{1+\alpha+i\infty}\Big|\frac{G'(s)}{G(s)}\frac{\Phi(s)}{s}\Big|^2\,\mathrm{d}s\\ &\ll \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\max_{s\in I_k(\alpha)}|\Phi(s)|^2}{k^2+1}\int_{I_k(\alpha)}\Big|\frac{G'(s)}{G(s)}\Big|^2|\mathrm{d}s|.\end{aligned}$$

En vertu de la multiplicativité exponentielle de g, nous avons

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = -\sum_p \frac{g(p)\log p}{p^s},$$

et donc, par le Lemme 3.1,

$$\int_{k-\frac12}^{k+\frac12}\Big|\frac{G'}{G}(1+\alpha+i\tau)\Big|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\frac12}^{\frac12}\Big|\frac{G'}{G}(1+\alpha+ik+i\tau)\Big|^2\,\mathrm{d}\tau \ll \sum_p\frac{\log p}{p^{1+2\alpha}} \ll \frac{1}{\alpha}\cdot$$

En reportant dans (4·27), il suit

$$(4\cdot28)\qquad \int_1^\infty \frac{|S_x(z)|^2}{z^{3+2\alpha}}\,\mathrm{d}z \ll \frac{\mathcal{H}_x(\alpha)^2}{\alpha}\cdot$$

Nous avons ainsi établi (4·26) et donc (4·25).

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la preuve de (4·24). Nous utilisons (4·25) sous la forme

$$\int_{\sqrt{y}}^y \frac{|M(z;g_x)|}{z^2}\,\mathrm{d}z \ll \mathcal{H}_x\Big(\frac{1}{\log y}\Big) + \varepsilon^\delta \mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}\Big\{\varepsilon^{\varrho_0} + \Big(\frac{\log y}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\Big\} \qquad (x^\varepsilon \leqslant y \leqslant x).$$

Il suit

$$\begin{aligned}\int_{x^{2\varepsilon}}^x \frac{|M(y;g_x)|}{y^2}\,\mathrm{d}y &\ll \int_{x^{2\varepsilon}}^x \frac{|M(y;g_x)|}{y^2}\int_{\sqrt{y}}^y\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\,\mathrm{d}y \ll \int_{x^\varepsilon}^x\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\int_t^{\min(t^2,x)}\frac{|M(y;g_x)|}{y^2}\,\mathrm{d}y\\ &\ll \int_{x^\varepsilon}^x\Big\{\mathcal{H}_x\Big(\frac{1}{\log t}\Big) + \varepsilon^\delta\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}\Big[\varepsilon^{\varrho_0} + \Big(\frac{\log t}{\log x}\Big)^{\varrho_0}\Big]\Big\}\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\\ &\ll \int_{1/\log x}^{1/(\varepsilon\log x)}\frac{\mathcal{H}_x(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha + \varepsilon^\delta\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la majoration triviale

$$\begin{aligned}\int_1^{x^{2\varepsilon}}\frac{|M(y;g_x)|}{y^2}\,\mathrm{d}y &\leqslant \sum_{n\leqslant x^{2\varepsilon}}\frac{|g_x(n)|}{n}\\ &\ll \mathrm{e}^{Z(x^{2\varepsilon};r)} + \varepsilon^\varrho\,\mathrm{e}^{Z(x;r)} \ll \varepsilon^\varrho\mathrm{e}^{Z(x;r)} \ll \varepsilon^\delta\mathrm{e}^{Z(x;f)}\end{aligned}$$

découle de (4·6), (4·1) et (1·15). En reportant dans (4·11), nous obtenons bien (4·24). □

Nous devons maintenant estimer l'intégrale figurant au membre de gauche de (4·24). Une majoration de $G(s)$ est à cet égard essentielle. Nous rappelons les notations $\mathfrak{p} := \pi\varrho/A$ et $\beta := 1 - (\sin\mathfrak{p})/\mathfrak{p}$ introduites dans l'énoncé du Théorème 1.2.

Proposition 4.5. *Sous les conditions $s = 1 + \alpha + i\tau$, $1 \leqslant \alpha \log x \leqslant 1/\varepsilon$, $x \geqslant 2$, nous avons uniformément*

$$G(s) \ll \begin{cases} \Big(\dfrac{\alpha}{\alpha + |\tau|}\Big)^{\beta\varrho} \dfrac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha \log x)^{\varrho}}, & \textit{si} \quad |\tau| \leqslant 1/(\varepsilon \log x), \\ \dfrac{\varepsilon^{\beta\varrho - \beta\mathfrak{b}/2}\, \mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha \log x)^{(1-\beta)\varrho}}, & \textit{si} \quad 1/(\varepsilon \log x) < |\tau| \leqslant 1/\varepsilon^{2\varrho}. \end{cases} \tag{4·29}$$

Démonstration. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer $\tau > 0$. Nous avons

$$G(s) = \exp\Big\{ \sum_p \frac{g(p)}{p^{1+\alpha+i\tau}} \Big\} \ll \mathrm{e}^{S(\alpha,\tau)} \tag{4·30}$$

où l'on a posé

$$S(\eta, \tau) := \Re e \sum_{p \leqslant \exp(1/\eta)} \frac{g(p)}{p^{1+i\tau}} \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1).$$

L'approximation $p^{i\tau} = 1 + O(\tau \log p)$ implique clairement $S(\eta, \tau) = S(\eta, 0) + O(\tau/\eta)$, et en particulier

$$S(\alpha, \tau) = S(\alpha, 0) + O(1) = \Re e\, Z\big(\mathrm{e}^{1/\alpha}; f\big) + O(1) \qquad (|\tau| \leqslant \alpha). \tag{4·31}$$

De plus, par sommation d'Abel, l'hypothèse (1·16) implique pour $x^{\varepsilon} \leqslant v \leqslant w \leqslant x$,

$$\begin{aligned} \Re e\, Z(w; f) - \Re e\, Z(v; f) &= Z(w; r) - Z(v; r) + O(1) \\ &\geqslant \varrho \log\Big(\frac{\log w}{\log v}\Big) + O(1), \end{aligned} \tag{4·32}$$

où la dernière inégalité découle de (1·17) par une seconde sommation d'Abel.[9]

Appliquons (4·32) avec $v = \exp(1/\alpha)$, $w = x$,[10] et reportons dans (4·31) puis (4·30). Il suit

$$G(s) \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha \log x)^{\varrho}} \qquad (|\tau| \leqslant \alpha),$$

ce qui établit bien (4·29) lorsque $|\tau| \leqslant \alpha$.

Supposons maintenant

$$\alpha < \tau \leqslant 1/(\varepsilon \log x). \tag{4·33}$$

Grâce aux remarques énoncées plus haut concernant la quantité $S(\eta, \tau)$, nous pouvons écrire

$$S(\alpha, \tau) = S(\tau, \tau) + D = S(\tau, 0) + D + O(1) \tag{4·34}$$

avec

$$D := \sum_{\exp(1/\tau) < p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{\Re e\, (g(p)/p^{i\tau})}{p}.$$

Pour majorer D, nous observons que, pour tous $z \in \mathbb{C}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\Re e\, \big(z\mathrm{e}^{i\vartheta}\big) \leqslant |z| \cos\vartheta + \sqrt{2|z|(|z| - \Re e\, z)}. \tag{4·35}$$

En effet, $\Re e\, \big(z\mathrm{e}^{i\vartheta}\big) = |z| \cos\vartheta - (|z| - \Re e\, z) \cos\vartheta - \sin\vartheta\, \Im m\, z$ et, notant $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} -(|z| - \Re e\, z) \cos\vartheta - \sin\vartheta\, \Im m\, z &= -r\big\{(1 - \cos\varphi)\cos\vartheta + \sin\varphi \sin\vartheta\big\} \\ &= -2r \sin\tfrac{1}{2}\varphi \big\{ \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\vartheta + \cos\tfrac{1}{2}\varphi \sin\vartheta \big\} \\ &= -2r \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin(\tfrac{1}{2}\varphi + \vartheta) \leqslant 2r|\sin\tfrac{1}{2}\varphi| = \sqrt{2r(|z| - \Re e\, z)}. \end{aligned}$$

9. Nous omettons les détails qui sont essentiellement identiques à ceux de la preuve de (4·4).
10. Ce choix est licite puisque $1 \leqslant \alpha \log x \leqslant 1/\varepsilon$.

En appliquant (4·35) avec $z = g(p)$, $\vartheta = -\tau\log p$, et en notant que $|z| \leqslant r(p) \leqslant A$, nous déduisons de (4·35) et (1·19) que, dans le domaine (4·33), nous avons

$$D \leqslant D_0 + \sqrt{2A}U + O(1)$$

où, notant $\mathcal{D}(\alpha,\tau) :=]\exp(1/\tau), \exp(1/\alpha)]$, nous avons posé

$$\begin{aligned} D_0 &:= \sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{|g(p)|\cos(\tau\log p)}{p} \\ &= S(\alpha,0) - S(\tau,0) + \sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{|g(p)| - \Re e\, g(p)}{p} - \sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{|g(p)|\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p} \\ &\leqslant S(\alpha,0) - S(\tau,0) - D_1 + O(1), \end{aligned}$$

avec

$$D_1 := \sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{r(p)\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p},$$

et

$$\begin{aligned} U &:= \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant\exp(1/\alpha)} \frac{\sqrt{|g(p)| - \Re e\, g(p)}}{p} \\ &\ll \Big\{ \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant x} \frac{1}{p} \Big\}^{1-1/2\mathfrak{h}} \Big\{ \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant x} \frac{\{r(p) - \Re e\, g(p)\}^{\mathfrak{h}}}{p} \Big\}^{1/2\mathfrak{h}} \ll \varepsilon^{\delta_1/2}\log(1/\varepsilon). \end{aligned} \tag{4·36}$$

En reportant dans (4·34) et en faisant de nouveau appel à (4·32) sous la forme

$$S(\alpha,0) \leqslant \Re e\, Z(x;f) - \varrho\log(\alpha\log x) + O(1),$$

nous obtenons que, toujours sous l'hypothèse (4·33),

$$S(\alpha,\tau) \leqslant \Re e\, Z(x;f) - \varrho\log(\alpha\log x) - D_1 + O(1). \tag{4·37}$$

Cela étant, posons $\lambda := \cos\mathfrak{p}$. Il est facile de vérifier que l'on a

$$\begin{aligned} r(1-\cos\vartheta) &\geqslant (1-\lambda)r - (\cos\vartheta-\lambda)^+ r \\ &\geqslant (1-\lambda)r - A(\cos\vartheta-\lambda)^+ \end{aligned} \qquad (0\leqslant r\leqslant A,\ \vartheta\in\mathbb{R}).$$

D'où

$$D_1 \geqslant (1-\lambda)\sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{r(p)}{p} - A\sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{(\cos(\tau\log p)-\lambda)^+}{p}. \tag{4·38}$$

Par (4·32), nous avons

$$\sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{r(p)}{p} \geqslant \varrho\log\Big(\frac{\tau}{\alpha}\Big) + O(1).$$

La seconde somme de (4·38) peut être évaluée par sommation d'Abel à l'aide du théorème des nombres premiers (cf., par exemple, [35], Lemme III.4.13). Nous obtenons

$$\sum_{p\in\mathcal{D}(\alpha,\tau)} \frac{(\cos(\tau\log p)-\lambda)^+}{p} = m\log\Big(\frac{\tau}{\alpha}\Big) + O(1),$$

avec

$$m := \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}} (\cos\vartheta-\lambda)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\sin\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\lambda}{\pi} = (1-\beta-\lambda)\frac{\varrho}{A}.$$

En reportant dans (4·38), il vient

$$D_1 \geqslant \beta\varrho\log(\tau/\alpha) + O(1),$$

ce qui, compte tenu de (4·37) et (4·30), établit bien (4·29) pour l'intervalle (4·33).[11]

11. Notons que cette minoration de D_1 est optimale : lorsque $\varrho = 2\mathfrak{b}$, elle devient une égalité pour
$$r(p) := \begin{cases} A & \text{si } \cos(\tau\log p) \geqslant \cos\mathfrak{p}, \\ 0 & \text{si } \cos(\tau\log p) < \cos\mathfrak{p}. \end{cases}$$

Examinons à présent le cas

$$1/(\varepsilon \log x) < \tau \leqslant 1/\varepsilon^{2\varrho}. \tag{4·39}$$

Nous devons estimer $S(\alpha,\tau)$. À cette fin, nous majorons $\Re e\,(g(p)/p^{i\tau})$ par $r(p)$ si $p \leqslant x^\varepsilon$ et par (4·35) lorsque $x^\varepsilon < p \leqslant \exp(1/\alpha)$. En employant la majoration (4·36) pour U, il vient

$$\begin{aligned} S(\alpha,\tau) &\leqslant \sum_{p\leqslant x^\varepsilon} \frac{r(p)}{p} + \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant \mathrm{e}^{1/\alpha}} \frac{|g(p)|\cos(\tau\log p)}{p} + O(1) \\ &\leqslant Z\big(\mathrm{e}^{1/\alpha};r\big) - D_2 + O(1) \end{aligned} \tag{4·40}$$

avec

$$D_2 := \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{r(p)\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p}.$$

Nous appliquons à D_2 la méthode de minoration utilisée pour D_1, en observant que l'hypothèse $\varepsilon\log x > \sqrt{\log x}$ implique, pour x assez grand, $|\tau| \leqslant 1/\varepsilon^{2\varrho} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon\log x}}$ d'où, grâce au lemme III.4.13 de [35],

$$\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{(\cos(\tau\log p)-\lambda)^+}{p} = -m\log(\alpha\varepsilon\log x) + O(1).$$

Nous obtenons ainsi

$$D_2 \geqslant -\beta\varrho\log(\alpha\varepsilon\log x) + O(1).$$

Maintenant, nous déduisons de (4·32) et de (1·15) que

$$Z(\mathrm{e}^{1/\alpha};r) \leqslant \Re e\, Z(x;f) - \varrho\log(\alpha\log x) + \tfrac12\beta\mathfrak{b}\log(1/\varepsilon) + O(1).$$

En reportant les deux dernières inégalités dans (4·40) puis (4·30), nous obtenons bien la seconde majoration de (4·29). □

Nous sommes maintenant en mesure de fournir un premier jeu d'estimations pour la fonction $\mathcal{H}_x(\alpha)$ définie par (4·23). Nous posons

$$W(s) := \sum_p \frac{g(p)}{p^s} - \varrho\log\zeta(s) - \sum_{p\leqslant x}\frac{g(p)}{p} + \varrho\log_2 x + \gamma\varrho \qquad (\Re e\, s>1) \tag{4·41}$$

et, pour $0\leqslant u\leqslant 1$,

$$\mathcal{I}_x(\alpha,u) := \sup_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ |\tau|\leqslant\alpha/\varepsilon^u}} \frac{\big|\mathrm{e}^{W(s)}-1\big|}{(1+|\tau|/\alpha)^\varrho}, \qquad \mathcal{J}_x(\alpha,u) := \min\big(1,\mathcal{I}_x(\alpha,u)\big). \tag{4·42}$$

Proposition 4.6. *Pour $1\leqslant\alpha\log x\leqslant 1/\varepsilon$, $0\leqslant u\leqslant 1$, nous avons*

$$\mathcal{H}_x(\alpha) \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^\varrho}\Big\{\mathcal{J}_x(\alpha,u) + \varepsilon^{\beta u\varrho} + \frac{(\alpha\varepsilon\log x)^{\beta\varrho}}{\varepsilon^{\beta\mathfrak{b}/2}}\Big\}. \tag{4·43}$$

Démonstration. L'estimation classique

$$\zeta(s) \ll \frac{1}{|s-1|} + \log(1+|s|) \qquad (\sigma>1) \tag{4·44}$$

implique

$$\sup_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ \alpha/\varepsilon^u\leqslant|\tau|\leqslant 1}} \big|\mathscr{L}_x^*\zeta(s)^\varrho\big|^2 + \sum_{|k|\geqslant 1}\frac{\sup_{s\in I_k(\alpha)}\big|\mathscr{L}_x^*\zeta(s)^\varrho\big|^2}{k^2+1} \ll \frac{\mathrm{e}^{2Z(x;f)}}{(\log x)^{2\varrho}}\Big\{\frac{\varepsilon^{2u\varrho}}{\alpha^{2\varrho}}+1\Big\}. \tag{4·45}$$

Par ailleurs, la majoration triviale

$$G(s) \ll \mathrm{e}^{Z(\exp(1/\alpha);r)} \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\alpha\log x)^\varrho} \ll \frac{\varepsilon^{-\beta\mathfrak{b}/2}\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^\varrho} \qquad (\sigma=1+\alpha)$$

fournit

$$\sum_{|k|>1/\varepsilon^{2\varrho}} \frac{\sup_{s\in I_k(\alpha)}|G(s)|^2}{k^2+1} \ll \frac{\varepsilon^{2\varrho-\beta\mathfrak{b}}\mathrm{e}^{2Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^{2\varrho}} \tag{4·46}$$

alors que (4·29) implique

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ \alpha/\varepsilon^u\leqslant|\tau|\leqslant 1}} \big|G(s)\big|^2 + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant 1/\varepsilon^{2\varrho}} \frac{\sup_{s\in I_k(\alpha)}\big|G(s)\big|^2}{k^2+1} \\ \ll \frac{\mathrm{e}^{2Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^{2\varrho}}\Big\{\varepsilon^{2\beta\varrho u} + \frac{(\alpha\varepsilon\log x)^{2\beta\varrho}}{\varepsilon^{\beta\mathfrak{b}}}\Big\}.\end{aligned} \tag{4·47}$$

On constate facilement que les membres de droite de (4·45) et (4·46) sont dominés par celui de (4·47). Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{H}_x(\alpha) \ll \sup_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ |\tau|\leqslant\min(1,\alpha/\varepsilon^u)}} \big|G(s)-\mathscr{L}_x^*\zeta(s)^\varrho\big| + \frac{\mathrm{e}^{\Re e\, Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^\varrho}\Big\{\varepsilon^{\beta\varrho u} + \frac{(\alpha\varepsilon\log x)^{\beta\varrho}}{\varepsilon^{\beta\mathfrak{b}/2}}\Big\}.$$

Lorsque $\sigma=1+\alpha$, $|\tau|\leqslant\min(1,\alpha/\varepsilon^u)$, nous avons

$$G(s)-\mathscr{L}_x^*\zeta(s)^\varrho = \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)-\gamma\varrho}\zeta(s)^\varrho}{(\log x)^\varrho}\Big\{\mathrm{e}^{W(s)}-1\Big\} \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}\mathcal{J}_x(\alpha,u)}{(\alpha\log x)^\varrho}.$$

De plus, (4·29) et (4·44) impliquent également que le membre de gauche est

$$\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}}{(\alpha\log x)^\varrho}\Big\{1+\frac{(\alpha\varepsilon\log x)^{\beta\varrho}}{\varepsilon^{\beta\mathfrak{b}/2}}\Big\}.$$

Cela termine la preuve de (4·43). □

Il nous faut à ce stade disposer d'estimations pour la quantité $\mathcal{J}_x(\alpha,u)$ définie en (4·42).

Proposition 4.7. *Pour $0\leqslant u\leqslant 1-\delta$, $1\leqslant\alpha\log x\leqslant\varepsilon^{u+\delta-1}$, nous avons*

$$\mathcal{J}_x(\alpha,u) \ll \varepsilon^\delta\big\{1+\log(\alpha\log x)\big\}. \tag{4·48}$$

Démonstration. La fonction $\zeta(s)\exp\big\{-\sum_p 1/p^s\big\}$ est analytique en $s=1$. On a donc, au voisinage de $s=1$,

$$\log\zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} - b + O(s-1) \quad \text{avec} \quad b = \sum_p\Big\{\frac{1}{p}+\log\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\}.$$

D'après la formule de Mertens, nous avons également

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log_2 x + b + \gamma + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big) \qquad (x\geqslant 2).$$

Soit alors $s=1+\alpha+i\tau$ où α et τ satisfont aux conditions de l'énoncé. Comme nous avons $1/\log x\leqslant|s-1|$ dans le domaine de variation en α considéré, nous obtenons, pour $|\tau|\leqslant\alpha/\varepsilon^u\leqslant\varepsilon^{1+\delta}\ll 1$,

$$W(s) = \sum_p\frac{g(p)-\varrho}{p^s} - \sum_{p\leqslant x}\frac{g(p)-\varrho}{p} + O(s-1). \tag{4·49}$$

Posons $a_p := \varrho - g(p)$, de sorte que $a_p=0$ pour $p>x$, et désignons par $W_1(s)$ le terme principal de (4·49), soit

$$W_1(s) := \sum_{p\leqslant x}\frac{a_p}{p}\Big(1-\frac{1}{p^{s-1}}\Big).$$

Nous scindons la somme en p sous la forme $W_1(s)=W_{11}(s)+W_{12}(s)$, correspondant aux domaines de sommation respectifs $p\leqslant x^\varepsilon$ et $x^\varepsilon<p\leqslant x$.

Nous estimons $W_{11}(s)$ en employant la majoration triviale $a_p \ll 1$ et l'inégalité

$$|1-p^{1-s}| \leqslant |s-1|\log p.$$

Il suit

$$\begin{aligned} W_{11}(s) &\ll |s-1| \sum_{p\leqslant x^\varepsilon} \frac{\log p}{p} \ll |s-1|\varepsilon \log x \\ &\ll (\varepsilon\alpha\log x)(1+|\tau|/\alpha) \ll \varepsilon^\delta. \end{aligned} \tag{4·50}$$

Par (4·20), (1·16) et (1·17), nous disposons d'une décomposition canonique $a_p = b_p + O(c_p)$ $(p \leqslant x)$, avec $c_p \geqslant 0$, et

$$\begin{aligned} B(y) &:= \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant \exp y} \frac{b_p \log p}{p} \ll \varepsilon y, \\ C(y) &:= \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant \exp y} \frac{c_p \log p}{p} \ll \varepsilon^\delta y \end{aligned} \qquad (\varepsilon \log x < y \leqslant \log x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon\log x}^{\log x} \frac{1-\mathrm{e}^{(1-s)y}}{y}\,\mathrm{d}B(y) \\ &\quad \ll \varepsilon + \varepsilon \int_{\varepsilon\log x}^{\log x} \left| \frac{(s-1)y\mathrm{e}^{(1-s)y} + \mathrm{e}^{(1-s)y} - 1}{y} \right| \mathrm{d}y \\ &\quad \ll \varepsilon\Big\{1 + |s-1|^2 \int_{\varepsilon\log x}^{1/|s-1|} y\,\mathrm{d}y + \int_{1/|s-1|}^{\log x} \left(\frac{|s-1|}{\mathrm{e}^{\alpha y}} + \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y \Big\} \\ &\quad \ll \varepsilon\Big\{1 + \frac{|\tau|}{\alpha} + \log(\alpha\log x)\Big\} \ll \varepsilon^{1-u} \ll \varepsilon^\delta\{1+\log(\alpha\log x)\}, \end{aligned} \tag{4·51}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \frac{c_p}{p} \left| 1 - \frac{1}{p^{s-1}} \right| &\ll |s-1| \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant \exp(1/|s-1|)} \frac{c_p \log p}{p} + \sum_{\exp(1/|s-1|) < p \leqslant x} \frac{c_p}{p} \\ &\ll \varepsilon^\delta + \varepsilon^\delta \log(|s-1|\log x). \end{aligned} \tag{4·52}$$

En regroupant les estimations (4·49), (4·50),(4·51) et (4·52), nous pouvons donc énoncer que, sous les hypothèses effectuées, nous avons

$$W(s) \ll \varepsilon^\delta\{1+\log(1+|\tau|/\alpha)+\log(\alpha\log x)\}, \tag{4·53}$$

puisque le terme d'erreur de (4·49) est $\ll \alpha + |\tau| \ll \alpha/\varepsilon^u \ll \varepsilon^{1+\delta}$.

En reportant dans (4·42), nous obtenons bien l'estimation (4·48) annoncée. □

Proposition 4.8. *Nous avons*

$$\int_{1/\log x}^{1/(\varepsilon\log x)} \frac{\mathcal{H}_x(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \ll \varepsilon^\delta \mathrm{e}^{Z(x;f)}. \tag{4·54}$$

Démonstration. Fixons une fois pour toutes $u := \frac{1}{3} \leqslant 1-\delta$.

Désignons par $\mathcal{K}(\varepsilon, x)$ l'intégrale figurant au membre de gauche de (4·54). La relation (4·43) fournit d'abord

$$\mathcal{K}(\varepsilon,x) \ll \mathrm{e}^{Z(x;f)} \Big\{ \int_{1/\log x}^{1/(\varepsilon\log x)} \frac{\mathcal{J}_x(\alpha,u)}{(\alpha\log x)^\varrho} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} + \varepsilon^{\beta\varrho/3} + \varepsilon^{\beta\varrho-\beta\mathfrak{b}/2}\log(1/\varepsilon) \Big\}.$$

Les deux derniers termes dans l'accolade sont $\ll \varepsilon^\delta$ puisque nos hypothèses impliquent $\beta\varrho/3 \geqslant 2\mathfrak{b}\beta/3 \geqslant \delta$ et $\beta\varrho - \beta\mathfrak{b}/2 \geqslant 2\delta$.

En majorant $\mathcal{J}_x(\alpha,u)$ par $O(1)$ dans le domaine $\varepsilon^{-1/3} < \alpha\log x \leqslant 1/\varepsilon$, nous obtenons de plus

$$\int_{\varepsilon^{-1/3}/\log x}^{1/\varepsilon\log x} \frac{\mathcal{J}_x(\alpha,u)}{(\alpha\log x)^\varrho}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \ll \varepsilon^{\varrho/3} \ll \varepsilon^\delta.$$

Pour estimer l'intégrale complémentaire, relative au domaine $1 \leqslant \alpha\log x \leqslant \varepsilon^{-1/3}$, nous appliquons (4·48) avec $u=\frac{1}{3}$. Cela complète la preuve de (4·54). □

En concaténant les Propositions 4.4 et 4.8, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 4.9. *Dans les hypothèses du Théorème 1.2, la fonction exponentiellement multiplicative g définie en* (4·7) *vérifie*

$$M(x;g) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho+Z(x;f)}x}{\Gamma(\varrho)\log x}\big\{1+O\big(\varepsilon^\delta\big)\big\}.$$

4·3. Complétion de l'argument

Soit f une fonction multiplicative satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.2. Considérons la fonction exponentiellement multiplicative g définie en (4·7). Nous pouvons, sans affecter la généralité, supposer que $f(p^\nu)=g(p^\nu)=\varrho^\nu/\nu!$ pour $p>x$ et $f(p^\nu)=0$ si $p\leqslant x$, $p^\nu>x$. Nous avons alors $f=g*h$ où h est définie par (3·5). Notons que, bien que les définitions (3·3) et (4·7) ne coïncident pas, la relation de convolution définit bien la même fonction h. Ainsi, $h(p)=0$ pour tout nombre premier p, $h(p^\nu)=0$ si $p>x$, et la majoration (3·9) demeure valide.

Nous avons

$$M(x;f) = \sum_{n\leqslant x} h(n)M\Big(\frac{x}{n};g\Big). \tag{4·55}$$

Appliquons le Corollaire 4.9 à $M(x/n;g)$ pour $n\leqslant\sqrt{x}$. Nous obtenons

$$M\Big(\frac{x}{n};g\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho+Z(x;f)}x}{\Gamma(\varrho)n\log x}\Big\{1+O\Big(\varepsilon^\delta+\frac{\log n}{\log x}\Big)\Big\} \qquad (n\leqslant\sqrt{x}),$$

où l'on a utilisé l'estimation

$$Z(x;f)-Z(x/n;f) \ll \sum_{x/n<p\leqslant x}\frac{1}{p} \ll \frac{\log n}{\log x} \qquad (n\leqslant\sqrt{x}).$$

Grâce à (4·55) et (4·12), il suit

$$M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\varrho+Z(x;f)}x}{\Gamma(\varrho)\log x}\Big\{\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{h(n)}{n}+Y_1+Y_2+Y_3\Big\} \tag{4·56}$$

avec, compte tenu de (3·7) et (4·32),

$$\begin{aligned}
Y_1 &\ll \varepsilon^\delta\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{|h(n)|}{n} \ll \varepsilon^\delta,\\
Y_2 &\ll \frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{|h(n)|\log n}{n},\\
Y_3 &\ll \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x}\frac{|h(n)|}{n}\Big\{\frac{\varepsilon^\varrho\log x}{\log(2x/n)}+\Big(\frac{\log 2x/n)}{\log x}\Big)^{\varrho-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

En vertu de (3·9), nous pouvons écrire

$$Y_2 \ll \frac{1}{\log x}\int_1^{\sqrt{x}}\log y\,\mathrm{d}Q(y) \ll Q\big(\sqrt{x}\big)+\frac{1}{\log x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{Q(y)}{y}\,\mathrm{d}y \ll \frac{\log_2 x}{\log x} \ll \varepsilon.$$

De même

$$\begin{aligned}
Y_3 &\ll \int_{\sqrt{x}}^{x} \Big\{ \frac{\varepsilon^{\varrho}\log x}{\log(2x/y)} + \Big(\frac{\log 2x/y)}{\log x}\Big)^{\varrho-1} \Big\}\,\mathrm{d}Q(y) \\
&\ll \varepsilon^{\varrho} + \varepsilon^{\varrho}\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{Q(y)\log x}{y(\log 2x/y)^2}\,\mathrm{d}y + |\varrho-1|\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{(\log 2x/y)^{\varrho-2}Q(y)}{y(\log x)^{\varrho-1}}\,\mathrm{d}y \\
&\ll \varepsilon^{\varrho} + \frac{1}{\log x} \ll \varepsilon^{\min(\varrho,2)}.
\end{aligned}$$

En reportant dans (4·56) où la somme en n est étendue jusqu'à l'infini au prix d'un terme d'erreur supplémentaire $\ll 1/\log x \ll \varepsilon$ et en tenant compte de (3·8), nous obtenons bien (1·18).

5. Preuve du Théorème 1.3

5·1. Inégalité de Turán-Kubilius pondérée

Le résultat suivant, qui possède un intérêt propre, n'est pas *stricto sensu* indispensable à la démonstration. Il permettra cependant de simplifier la présentation. Un résultat de même nature, mais relatif à des hypothèses sensiblement différentes des nôtres, a été établi par Biró & Szamuely [5].

Lemme 5.1. *Soient A, B des constantes positives, $x \geqslant 1$, λ une fonction multiplicative positive ou nulle de la classe $\mathcal{M}(x; A, B)$, et ϑ une fonction additive complexe. Posons*

$$\Theta(x) := \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)}{p^\nu}, \qquad \mathfrak{S}(x) := \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)|\vartheta(p^\nu)|^2}{p^\nu}. \tag{5·1}$$

Nous avons alors

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n}\big|\vartheta(n) - \Theta(x)\big|^2 \ll \sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n}\mathfrak{S}(x). \tag{5·2}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que ϑ est à valeurs réelles positives. Le résultat général s'en déduit en introduisant classiquement les parties positives et négatives des parties réelle et imaginaire de ϑ.

Observons d'abord qu'il résulte du théorème 1.1 de [36] que

$$L := \sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n} \asymp \prod_{p\leqslant x}\Big(1 + \frac{\lambda(p)}{p}\Big). \tag{5·3}$$

Ensuite, nous développons le membre de gauche de (5·2) sous la forme

$$M_2 - 2\Theta(x)M_1 + \Theta(x)^2 L, \tag{5·4}$$

où l'on a posé

$$M_j := \sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n)\vartheta(n)^j}{n} \quad (j = 1, 2).$$

Nous avons

$$M_1 = \sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{\substack{m\leqslant x/p^\nu \\ p\nmid m}} \frac{\lambda(m)}{m} = \Theta(x)L - \sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)}{p^\nu}\big\{R_1(p^\nu) + R_2(p^\nu)\big\},$$

avec

$$R_1(p^\nu) := \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda(p^k)}{p^k} \sum_{n\leqslant x/p^{\nu+k}} \frac{\lambda(n)}{n}, \qquad R_2(p^\nu) := \sum_{x/p^\nu < n\leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n}.$$

Nous estimons $R_1(p^\nu)$ en majorant trivialement la somme intérieure par L. Il suit

$$R_1(p^\nu) \leqslant L\Big(\frac{\lambda(p)}{p} + \varepsilon_p\Big),$$

où $\varepsilon_p \geqslant 0$ est le terme général d'une série convergente. La contribution à (5·4) est donc

$$\begin{aligned}
&\ll L \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{p^\mu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\mu)\vartheta(p^\mu)}{p^\mu} \Big(\frac{\lambda(p)}{p} + \varepsilon_p\Big) \\
&\ll L \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)^2}{p^\nu} \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)}{p^\nu} \Big(\frac{\lambda(p)}{p} + \varepsilon_p\Big) \ll L \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)^2}{p^\nu}.
\end{aligned}$$

Pour évaluer $R_2(p^\nu)$, nous utilisons (3·13) et (5·3) sous la forme

$$\sum_{x/\mathrm{e}^{k+1} < n \leqslant x/\mathrm{e}^k} \lambda(n) \ll \frac{xL}{\mathrm{e}^k\{\log(2x) - k\}} \qquad \big(0 \leqslant k \leqslant \log p^\nu\big).$$

Par sommation sur k, nous obtenons

$$R_2(p^\nu) \ll L \log\Big(\frac{\log 2x}{\log(2x/p^\nu)}\Big).$$

Pour les petites valeurs de p^ν, cette majoration est moins précise que l'inégalité triviale $R_2(p^\nu) \leqslant L$; elle sera néanmoins suffisante pour la suite. Posant $\nu_p := \lfloor (\log x)/\log p \rfloor$, nous obtenons en effet que la contribution globale correspondante, disons S_2, à (5·4) vérifie

$$S_2 \ll L\Theta(x) \sum_{p \leqslant x} \sum_{\nu \leqslant \nu_p} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{\mu \leqslant \nu_p} \frac{\lambda(p^\mu)\vartheta(p^\mu)}{p^\mu} \log\Big(\frac{\log 2x}{\log(2x/p^\mu)}\Big).$$

En observant que

$$\log\Big(\frac{\log 2x}{\log(2x/p^\mu)}\Big) \ll \frac{\log_2 x}{\log x} \log p^\mu \qquad (p^\mu \leqslant x),$$

et en traitant les deux sommes intérieures par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
S_2 &\ll L \frac{\log_2 x}{\log x} \sum_{p \leqslant x} \sum_{\nu \leqslant \nu_p} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)^2}{p^\nu} \bigg\{ \sum_{\nu \leqslant \nu_p} \frac{\lambda(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{\mu \leqslant \nu_p} \frac{\lambda(p^\mu)(\log p^\mu)^2}{p^\mu} \bigg\}^{1/2} \\
&\ll L \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)^2}{p^\nu} = L\mathfrak{S}(x),
\end{aligned}$$

puisque la quantité entre accolades est $\ll \log x$.

Nous déduisons de ce qui précède que le membre de gauche de (5·2) vaut

$$M_2 - \Theta(x)^2 L + O\big(L\mathfrak{S}(x)\big).$$

Or

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n} \bigg\{ \sum_{p^\nu \| n} \vartheta(p^\nu)^2 + \sum_{\substack{p^\nu \| n,\, p^\mu \| n \\ p \neq q}} \vartheta(p^\nu)\vartheta(q^\mu) \bigg\} \\
&\ll \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{\lambda(p^\nu)\vartheta(p^\nu)^2}{p^\nu} \sum_{\substack{n \leqslant x/p^\nu \\ p \nmid n}} \frac{\lambda(n)}{n} + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x,\, p^\mu \leqslant x \\ p \neq q}} \frac{\lambda(p^\nu)\lambda(q^\mu)\vartheta(p^\nu)\vartheta(q^\mu)}{p^\nu q^\mu} \sum_{\substack{n \leqslant x/p^\nu q^\mu \\ (n,pq)=1}} \frac{\lambda(n)}{n} \\
&\leqslant \mathfrak{S}(x)L + \Theta(x)^2 L.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

5·2. Complétion de l'argument

Nous pouvons supposer ε arbitrairement petit. En effet, dans le cas contraire, le résultat découle de l'inégalité $|f| \leqslant r$ et de la majoration de Halberstam–Richert [17].

Par ailleurs, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $f(p^\nu) = 0$ si $p^\nu > x$.

Soit

$$\mathcal{K} := \left]\frac{\log(1/\varepsilon_1)}{\log(1+\varepsilon_1)}, \frac{\log x}{\log(1+\varepsilon_1)} - 1\right] \cap \mathbb{N}.$$

Appliquons (1·24) avec $y = y_k := \exp\{(1+\varepsilon_1)^k\}$ pour $k \in \mathcal{K}$. Nous obtenons

$$\sum_{y_k < p \leqslant y_{k+1}} \frac{r(p)\log p}{p} = \mathfrak{b}_k \varepsilon_1 \log y_k \qquad \Big(\mathrm{e}^{1/\varepsilon_1} \leqslant y \leqslant x^{1/(1+\varepsilon_1)}\Big) \tag{5·5}$$

avec

$$4\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_k \leqslant 2A + O\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y_k}}\Big).$$

Nous posons alors $s(p) := 2\mathfrak{b} r(p)/\mathfrak{b}_k$ pour $y_k < p \leqslant y_{k+1}$, $k \in \mathcal{K}$, et $s(p) := 0$ pour $p \in [2, x] \smallsetminus \cup_{k\in\mathcal{K}}]y_k, y_{k+1}]$. De plus, puisque ε est supposé arbitrairement petit, nous avons clairement $0 \leqslant s(p) \leqslant \frac{1}{2} r(p)$ pour $p \leqslant x$. Par sommation, il suit

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\{s(p) - 2\mathfrak{b}\}\log p}{p} \ll \varepsilon_1 \log y \qquad (\mathrm{e}^{1/\varepsilon} < y \leqslant x). \tag{5·6}$$

Introduisons alors $\vartheta(p^\nu) := \arg f(p^\nu) \in]-\pi, \pi]$, avec la convention $\vartheta(p^\nu) = 0$ si $f(p^\nu) = 0$, et définissons trois fonctions arithmétiques multiplicatives t, ψ, et φ, par les formules

$$t(p^\nu) := \begin{cases} r(p) - s(p) & \text{si } \nu = 1 \\ r(p^\nu) & \text{si } \nu \geqslant 2 \end{cases}, \quad \psi(p^\nu) := \begin{cases} f(p) - s(p)\mathrm{e}^{i\vartheta(p)} & \text{si } \nu = 1 \\ t(p^\nu)\mathrm{e}^{i\vartheta(p^\nu)} & \text{si } \nu \geqslant 1 \end{cases}, \quad \varphi * \psi = f.$$

Nous prolongeons alors s en une fonction multiplicative par la formule $s * t = r$.

Notons d'emblée que l'inégalité $s(p) \leqslant \frac{1}{2} r(p)$ implique que $s(p) \leqslant t(p)$ pour tout nombre premier p. En particulier, nous avons donc $|\psi| \leqslant t$. De plus, il résulte de la relation $\varphi(p) = s(p)\mathrm{e}^{i\vartheta(p)}$, valable pour tout nombre premier p, que, notant $\mathfrak{h} := (1-\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, nous avons, pour $x^\varepsilon < y \leqslant x$,

$$\begin{aligned} \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \frac{\{s(p) - \Re e\, \varphi(p)\}^{\mathfrak{h}} \log p}{p} &= \sum_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \frac{s(p)^{\mathfrak{h}}\{1 - \cos\vartheta(p)\}^{\mathfrak{h}} \log p}{p} \\ &\ll \varepsilon^{\delta_1 \mathfrak{h}} \log y = \varepsilon_1^{2\delta_1 \mathfrak{h}} \log y. \end{aligned} \tag{5·7}$$

Notant s^* la fonction multiplicative définie par $s^*(p) = s(p)$, $s^*(p^\nu) = |\varphi(p^\nu)|$ $(\nu \geqslant 2)$, il résulte de (5·6) que, quitte à altérer la constante B, le couple (φ, s^*) satisfait pour tout $y \in [x^{\varepsilon_1}, x]$, aux hypothèses du Théorème 1.2 avec ε_1 au lieu de ε, $2\delta_1$ au lieu de δ_1, $\varrho := 2\mathfrak{b}$. En effet, nous avons bien $2\delta_1 \leqslant 2\delta_0(\mathfrak{b}) = \frac{2}{3}\beta\mathfrak{b}$ où β est défini par (1·14) avec $\varrho = 2\mathfrak{b}$, et $\varepsilon_1 \geqslant 1/\sqrt{\varepsilon \log x} \geqslant 1/\sqrt{\log y}$. Nous pouvons donc écrire

$$M(y;\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}} y}{\Gamma(2\mathfrak{b})\log y}\Big\{\prod_p \sum_{p^\nu \leqslant y} \frac{\varphi(p^\nu)}{p^\nu} + O\big(\varepsilon^\delta \mathrm{e}^{Z(y;\varphi)}\big)\Big\} \qquad (x^{\varepsilon_1} \leqslant y \leqslant x)$$

avec $\delta := w_f \delta_1$. Rappelons la notation $\mathfrak{c} := \mathfrak{b}/A$. En notant que

$$s(p) - \Re e\, \varphi(p) \geqslant \mathfrak{c}\{|f(p)| - \Re e\, f(p)\} \qquad (p \leqslant x),$$

il suit

$$\begin{aligned} M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}} x}{\Gamma(2\mathfrak{b})} &\sum_{x^{\varepsilon_1} < d \leqslant x^{1-\varepsilon_1}} \Big\{\prod_p \sum_{p^\nu \leqslant x/d} \frac{\varphi(p^\nu)}{p^\nu}\Big\} \frac{\psi(d)}{d\log(x/d)} \\ &+ \varepsilon^\delta \mathrm{e}^{-\mathfrak{c} Z(x;|f|-f)} x\, \mathfrak{R}_0 + x\, \mathfrak{R}_1 + x\, \mathfrak{R}_2 \end{aligned} \tag{5·8}$$

avec

$$\mathfrak{R}_0 \ll \sum_{x^{\varepsilon_1}<d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{e}^{Z(x/d;s)}t(d)}{\log(x/d)},$$

$$\mathfrak{R}_1 \ll \sum_{d\leqslant x^{\varepsilon_1}} \frac{t(d)\,\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{d\log x}, \quad \mathfrak{R}_2 \ll \sum_{x^{1-\varepsilon_1}<d\leqslant x} \frac{t(d)\,\mathrm{e}^{Z(x/d;s)}}{d\log(2x/d)}.$$

À ce stade, observons que la formule (5·6) et l'inégalité $t(p)\geqslant s(p)$ impliquent, par sommation d'Abel,

$$\begin{aligned} Z(x;s)-Z(y;s) &= \{2\mathfrak{b}+O(\varepsilon_1)\}\log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big) \\ Z(x;t)-Z(y;t) &\geqslant \{2\mathfrak{b}+O(\varepsilon_1)\}\log\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big)+O(1) \end{aligned} \qquad (\mathrm{e}^{1/\varepsilon}<y\leqslant x). \tag{5·9}$$

De plus

$$M(y;t)\ll \frac{y\,\mathrm{e}^{Z(y;t)}}{\log 2y} \qquad (1\leqslant y\leqslant x). \tag{5·10}$$

Une sommation d'Abel tenant compte de (5·9) et (5·10) permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{(\log x)^{2\mathfrak{b}}} \sum_{x^{\varepsilon_1}<d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}} \frac{t(d)}{d(\log x/d)^{1-2\mathfrak{b}}} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\log x)^{4\mathfrak{b}}} \int_{x^{\varepsilon_1}}^{x^{1-\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{d}y}{y(\log y)^{1-2\mathfrak{b}}(\log x/y)^{1-2\mathfrak{b}}} \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons d'une part, grâce à (5·9),

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{\log x} \int_1^{x^{\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{e}^{Z(y;t)}}{y\log(2y)}\,\mathrm{d}y \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;s)+Z(\exp(1/\varepsilon);t)}\log(1/\varepsilon)}{\log x} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{\log x}\int_{\exp(1/\varepsilon)}^{x^{\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{e}^{Z(y;t)}}{y\log y}\,\mathrm{d}y \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\log x}\Big(\frac{1}{\varepsilon\log x}\Big)^{3\mathfrak{b}/2}\log(1/\varepsilon) + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\log x)^{1+3\mathfrak{b}/2}}\int_{\exp(1/\varepsilon)}^{x^{\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{d}y}{y(\log y)^{1-3\mathfrak{b}/2}} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}\varepsilon^{3\mathfrak{b}/2}\log(1/\varepsilon)}{\log x} \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;f)}\varepsilon^{\mathfrak{b}/2}}{\log x}, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (1·15), et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_2 &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{(\log x)^{2\mathfrak{b}}} \sum_{x^{1-\varepsilon_1}<d\leqslant x} \frac{t(d)}{d(\log 2x/d)^{1-2\mathfrak{b}}} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\log x)^{1+2\mathfrak{b}}} \int_{x^{1-\varepsilon_1}}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y(\log 2x/y)^{1-2\mathfrak{b}}} \ll \frac{x\mathrm{e}^{Z(x;f)}\varepsilon^{\mathfrak{b}/2}}{\log x}. \end{aligned}$$

Ces majorations sont bien compatibles avec l'estimation annoncée (1·25).

Il reste à évaluer le terme principal de (5·8).

Commençons par observer que la condition (1·19) avec $\mathfrak{h}=1$ permet, sans altérer les termes d'erreur, de remplacer dans (5·8) le produit en p par

$$\prod_{p\leqslant x^\varepsilon} \sum_{p^\nu\leqslant x/d} \frac{\varphi(p^\nu)}{p^\nu} \prod_{p>x^\varepsilon} \sum_{p^\nu\leqslant x/d} \frac{s(p^\nu)}{p^\nu}. \tag{5·11}$$

De plus, lorsque $d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}$, la seconde condition (1·1) permet de supprimer la contrainte $p^\nu\leqslant x/d$ dans le produit de gauche de (5·11). Par ailleurs, nous pouvons également, toujours

sans détérioration des termes résiduels, substituer l'expression $\mathrm{e}^{Z(x/d;s)-Z(x^\varepsilon;s)}$ au produit de droite. Introduisant la notation

$$\mathfrak{E}(p;g) := \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu}$$

pour le facteur eulérien d'indice p d'une fonction multiplicative générique g, nous avons donc établi que

$$\begin{aligned} M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}}x}{\Gamma(2\mathfrak{b})} \prod_{p\leqslant x^\varepsilon} \mathfrak{E}(p;\varphi) \sum_{x^{\varepsilon_1}<d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}} \frac{\psi(d)\mathrm{e}^{Z(x/d;s)-Z(x^\varepsilon;s)}}{d\log(x/d)} \\ + O\Big(\frac{\varepsilon^\delta x\mathrm{e}^{Z(x;r)-\mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x}\Big). \end{aligned} \tag{5·12}$$

Pour estimer la somme intérieure en d, nous observons que l'on a, pour une constante convenable c_0,

$$Z(x/d;s) = 2\mathfrak{b}\log_2(x/d) + c_0\mathfrak{b} + O(\varepsilon). \tag{5·13}$$

Par sommation d'Abel et en utilisant (5·10), on vérifie aisément que la contribution du terme d'erreur est acceptable.

Désignons ensuite par a (resp. b) un entier générique dont les facteurs premiers ne dépassent pas x^ε (resp. excèdent tous x^ε), de sorte que chaque entier d possède une décomposition unique sous la forme $d = ab$. Soit alors $\varepsilon_2 := \varepsilon^{3/4}$. La majoration de Rankin

$$\sum_{a>x^{\varepsilon_2}} \frac{t(a)}{a} \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon_2/\varepsilon} \sum_{a\leqslant y} \frac{t(a)}{a^{1-1/(\varepsilon\log x)}} \ll \mathrm{e}^{-\varepsilon^{-1/4}+Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}, \tag{5·14}$$

permet de montrer que la contribution au terme principal de (5·12) des entiers $d = ab$ tels que $a > x^{\varepsilon_2}$ est également négligeable. Cela permet, toujours au prix d'une erreur acceptable, de remplacer x/d par x/b dans la sommation. On utilise ensuite la majoration

$$\sum_{b\leqslant v} \psi(b) \ll \frac{v\mathrm{e}^{Z(v;t)-Z(x^\varepsilon;t)}}{\log v} \qquad (x^\varepsilon < v \leqslant y).$$

pour établir que l'on peut remplacer le domaine de sommation par $x^{\varepsilon_1} < b \leqslant x^{1-\varepsilon_1}$, et enfin (5·14) pour étendre la sommation en a à toutes les valeurs possibles.

Puisque $\varphi * \psi = f$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}}x}{\Gamma(2\mathfrak{b})} \prod_{p\leqslant x^\varepsilon} \mathfrak{E}(p;f) \sum_{x^{\varepsilon_1}<b\leqslant x^{1-\varepsilon_1}} \frac{\psi(b)\mathrm{e}^{Z(x/b;s)-Z(x^\varepsilon;s)}}{b\log(x/b)} \\ + O\Big(\frac{\varepsilon^\delta x\mathrm{e}^{Z(x;r)-\mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x}\Big). \end{aligned} \tag{5·15}$$

Prolongeons la fonction ϑ précédemment définie sur les puissances de nombres premiers en une fonction additive. Nous avons ainsi

$$\psi(n) = |\psi(n)|\mathrm{e}^{i\vartheta(n)+i\pi\kappa(n)} \qquad (n \geqslant 1)$$

où l'on a posé

$$\kappa(n) := \sum_{\substack{p\|n \\ |f(p)|<s(p)}} 1.$$

Notons encore

$$\Theta(y) := \sum_{p>x^\varepsilon,\, p^\nu\leqslant y} \frac{t(p^\nu)\{\vartheta(p^\nu)+\pi\kappa(p^\nu)\}}{p^\nu}.$$

Comme $\kappa(p)t(p) \leqslant r(p) - |f(p)|$, nous déduisons de la validité de (1·19) avec $\mathfrak{h} = 1$ que

$$\Theta(y) \ll \varepsilon^\delta \qquad (x^\varepsilon < y \leqslant x). \tag{5·16}$$

Posons

$$\Psi(y) := \sum_{b\leqslant y} \frac{\psi(b)}{b}\cdot$$

Il suit, pour tout $y \in [x^{\varepsilon_1}, x^{1-\varepsilon_1}]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-i\Theta(y)}\Psi(y) &= \sum_{\substack{b\leqslant y\\ t(b)\neq 0}} \frac{t(b)}{b}\Big\{1-\Big(1-\frac{|\psi(b)|}{t(b)}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{i\vartheta(b)+i\pi\kappa(b)-i\Theta(y)}\\ &= \sum_{b\leqslant y}\frac{t(b)}{b} + O\big(\mathfrak{R}_3+\mathfrak{R}_4\big).\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{R}_3 := \sum_{\substack{b\leqslant y\\ t(b)\neq 0}} \frac{t(b)}{b}\sum_{p^\nu\|b}\Big(1-\frac{|\psi(p^\nu)|}{t(p^\nu)}\Big), \quad \mathfrak{R}_4 := \sum_{b\leqslant y}\frac{t(b)|\vartheta(b)+\pi\kappa(b)-\Theta(y)|}{b}\cdot$$

Nous estimons $\mathfrak{R}_3$ par interversion de sommation en notant que, pour tout p,

$$t(p)-|\psi(p)| = r(p)-s(p)+||f(p)|-s(p)| \leqslant 2\{r(p)-|f(p)|\}.$$

Nous obtenons $\mathfrak{R}_3 \ll \varepsilon^{\delta_1}\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}$. Nous majorons ensuite $\mathfrak{R}_4$ en faisant appel au Lemme 5.1 après application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Au vu de (5·16), nous obtenons ainsi

$$\Psi(y) = \sum_{b\leqslant y}\frac{t(b)}{b} + O\Big(\varepsilon^\delta \mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\Big) \qquad (x^{\varepsilon_1}\leqslant y\leqslant x^{1-\varepsilon_1}).$$

Reportons à présent dans (5·15) en effectuant une nouvelle sommation d'Abel pour substituer t à ψ dans le terme principal. Compte tenu de (5·13), cette manipulation n'altère pas les termes d'erreur. Nous obtenons

$$\begin{aligned}M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}}x}{\Gamma(2\mathfrak{b})}\prod_{p\leqslant x^\varepsilon}\mathfrak{E}(p;f)\sum_{x^{\varepsilon_1}<b\leqslant x^{1-\varepsilon_1}}\frac{t(b)\mathrm{e}^{Z(x/b;s)-Z(x^\varepsilon;s)}}{b\log(x/b)}\\ + O\Big(\frac{\varepsilon^\delta x\mathrm{e}^{Z(x;r)-\mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x}\Big).\end{aligned}$$

En appliquant cette évaluation pour $f=r$, nous obtenons bien l'estimation annoncée (1·25).

6. Preuve du Théorème 1.4

Nous indiquons brièvement ici comment modifier la démonstration du Théorème 1.3 sous les hypothèses indiquées dans l'énoncé du Théorème 1.4.

En application du Théorème 1.2 avec l'hypothèse (1·16), la formule (5·8) demeure valable. Il en va de même de la majoration des termes d'erreur $\mathfrak{R}_j$ $(0\leqslant j\leqslant 2)$.

La substitution indiquée en (5·11) produit à présent des termes d'erreur

$$\begin{aligned}&\ll \varepsilon^\delta x\prod_{p\leqslant x^\varepsilon}\mathfrak{E}(p;\varphi)\sum_{x^{\varepsilon_1}<d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}}\frac{t(d)\mathrm{e}^{Z(x/d;s)-Z(x^\varepsilon;s)}}{d\log(x/d)}\log\Big(\frac{\log x}{\log(x/d)}\Big)\\ &\ll \varepsilon^\delta x\,\mathrm{e}^{Z(x;\varphi)}\sum_{x^{\varepsilon_1}<d\leqslant x^{1-\varepsilon_1}}\frac{t(d)\mathrm{e}^{Z(x;s)}}{d\{\log(x/d)\}^{1-2\mathfrak{b}}(\log x)^{2\mathfrak{b}}}\log\Big(\frac{\log x}{\log(x/d)}\Big)\\ &\ll \frac{\varepsilon^\delta x\,\mathrm{e}^{Z(x;r)-\mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x},\end{aligned}$$

ce qui est acceptable.

On vérifie également que la formule (5·15) demeure valable.

Le point le plus délicat consiste à introduire la fonction t dans la somme en b de (5·15). À cette fin, nous évaluons

$$\mathcal{R}(y) := \sum_{b\leqslant y} \frac{\psi(b)}{b} - \sum_{b\leqslant y} \frac{t(b)}{b} \qquad (x^{\varepsilon_1} < y \leqslant x^{1-\varepsilon_1}) \tag{6·1}$$

avec pour objectif la majoration

$$\mathcal{R}(y) \ll \varepsilon^\delta \sum_{b\leqslant y} \frac{t(b)}{b}\cdot \tag{6·2}$$

Cela sera rendu possible grâce à l'hypothèse additionnelle concernant les nombres $r(p)$, qui implique $t(p) \geqslant 2\mathfrak{b}$ pour tous les nombres premiers considérés. Nous pouvons clairement restreindre les deux sommations de (6·1) aux entiers sans facteur carré avec une erreur acceptable. Comme l'hypothèse (1·16) fournit la borne $\ll \varepsilon^\delta \log(1/\varepsilon)$ pour la contribution des nombres premiers, nous pouvons également convenir que la sommation ne porte que sur des entiers b composés. Posons donc $w(n) := \{\psi(n) - t(n)\}\mu(n)^2$ et introduisons les fonctions sommatoires

$$\mathfrak{W}(y) := \sum_{b\leqslant y}^{*} w(b), \qquad \mathfrak{T}(y) := \sum_{b\leqslant y}^{*} t(b),$$

où l'astérisque indique que les entiers sommés ont au moins deux facteurs premiers. Pour tout $z \in [x^\varepsilon, y]$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{b\leqslant y}^{*} w(b)\log(y/b) &\ll \mathfrak{T}(z)\log y + \mathfrak{T}(y)\log(y/z)\\ &\ll \frac{z\mathrm{e}^{Z(z;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\log y}{\log z} + \frac{y\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\log(y/z)}{\log y}.\end{aligned}$$

En choisissant $z := y/(\log x)^3$, nous obtenons

$$\sum_{b\leqslant y}^{*} w(b)\log(y/b) \ll \frac{y\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\log_2 y}{\log y}$$

et donc

$$\mathfrak{W}(y) = \frac{\mathfrak{V}(y)}{\log y} + O\Big(\frac{y\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\log_2 y}{(\log y)^2}\Big) \tag{6·3}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(y) := \sum_{b\leqslant y}^{*} w(b)\log b &\ll \sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y/x^\varepsilon} \frac{y|w(p)|\log p}{p\log(y/p)}\mathrm{e}^{Z(y/p;t)-Z(x^\varepsilon;t)}\\ &\ll \frac{y\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)}}{\log y}\sum_{x^\varepsilon<p\leqslant y/x^\varepsilon}\frac{|w(p)|\log p}{p}\Big(\frac{\log y}{\log(y/p)}\Big)^{1-2\mathfrak{b}}\\ &\ll \varepsilon^\delta y\mathrm{e}^{Z(y;t)-Z(x^\varepsilon;t)},\end{aligned}$$

la dernière somme en p ayant été estimée par l'inégalité de Hölder avec exposants $1/\mathfrak{h}$ et $(\mathfrak{h}-1)/\mathfrak{h}$, puis recours à (1·16) et sommation d'Abel.

En reportant dans (6·3), nous obtenons bien l'estimation annoncée (6·2).

Cela permet d'opérer une sommation d'Abel dans (5·15) pour obtenir

$$\begin{aligned}M(x;f) = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma\mathfrak{b}}x}{\Gamma(2\mathfrak{b})}\prod_{p\leqslant x^\varepsilon}\mathfrak{E}(p;f)\prod_{x^\varepsilon<p\leqslant x}\sum_{x^{\varepsilon_1}<b\leqslant x^{1-\varepsilon_1}}\frac{t(b)\mathrm{e}^{Z(x/b;s)-Z(x^\varepsilon;s)}}{b\log(x/b)}\\ + O\Big(\frac{\varepsilon^\delta x\mathrm{e}^{Z(x;r)-\mathfrak{c}Z(x;|f|-f)}}{\log x}\Big).\end{aligned} \tag{6·4}$$

En appliquant cette relation pour $f = r$, nous obtenons bien (1·25), comme souhaité.

7. Preuves des corollaires

7·1. Preuve du Corollaire 2.1

Observons d'emblée que l'insertion de l'hypothèse (2·2) dans la démonstration du théorème 1.1 de [36][12] fournit sans autre modification l'évaluation

$$M(x;r) \asymp \frac{x}{\log x}\mathrm{e}^{Z(x;r)}. \tag{7·1}$$

Le même résultat découle du théorème 2 de [8].

Comme au corollaire III.4.12 de [35], l'hypothèse $r(p) \ll 1$ implique

$$Z(y;r) - m_f(y;T) \leqslant Z(x;r) - m_f(x;T) + O(1) \qquad (2 \leqslant y \leqslant x).$$

Il s'ensuit que, pour $s = 1+\alpha+i\tau$, $1/\log x \leqslant \alpha \leqslant 1$, $|\tau| \leqslant T$, nous pouvons écrire, avec la notation (1·10),

$$\Re e\, v_f(s) \leqslant Z(\mathrm{e}^{1/\alpha};r) - m_f\big(\mathrm{e}^{1/\alpha};T\big) + O(1) \leqslant Z(x;r) - m_f(x;T) + O(1). \tag{7·2}$$

Nous utilisons cette majoration pour $\alpha \leqslant \alpha_0 := \mathrm{e}^{m_f(x;T)/\mathfrak{b}}/\log x$ et employons la majoration triviale

$$\Re e\, v_f(s) \leqslant Z(\mathrm{e}^{1/\alpha};r) + O(1) \leqslant Z(x;r) - \mathfrak{b}\log(\alpha\log x) + O(1)$$

lorsque $\alpha_0 < \alpha \leqslant 1$. Il suit

$$H_T(\alpha) \ll \begin{cases} \mathrm{e}^{Z(x;r)-m_f(x;T)} & (\alpha \leqslant \alpha_0) \\ \dfrac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{(\alpha\log x)^{\mathfrak{b}}} & (\alpha_0 < \alpha \leqslant 1). \end{cases}$$

L'intégrale de (1·12) est donc

$$\ll \frac{\{1+m_f(x;T)\}\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\mathrm{e}^{m_f(x;T)}}.$$

Cela implique bien la majoration annoncée en reportant dans (1·12) compte tenu de (7·1).

7·2. Preuve du Corollaire 2.4

Considérons la fonction multiplicative $f(n) := z^{\Omega(n;E)}$. Commençons par une minoration de la quantité $m_f(x;T)$ définie en (2·1) avec $T := \log x$. Nous avons, pour une certaine valeur de $\tau \in [0,T]$,

$$m_f(x;T) \geqslant r_1 \sum_{p\leqslant x} \frac{1-\cos(\vartheta_p - \tau\log p)}{p},$$

où l'on a posé $r_1 := \min(r,1)$, $\vartheta_p := \mathbf{1}_E(p)\vartheta$. Notant h_ϑ la fonction indicatrice de

$$[-\pi,\pi] \smallsetminus ([-\tfrac13\pi,\tfrac13\pi] \cup [\vartheta-\tfrac13\pi,\vartheta+\tfrac13\pi]) \pmod{2\pi},$$

nous pouvons donc écrire

$$m_f(x;T) \geqslant \tfrac12 r_1 \sum_{p\leqslant x} \frac{h_\vartheta(\tau\log p)}{p}.$$

Le membre de droite relève du théorème des nombres premiers via une sommation d'Abel dont les détails sont explicités par exemple au lemme III.4.13 de [35]. Pour tout $w \in [2,x]$, nous avons

$$\sum_{w<p\leqslant x} \frac{h_\vartheta(\tau\log p)}{p} \geqslant \tfrac16 \log\Big(\frac{\log x}{\log w}\Big) + O\Big(\frac{1}{|\tau|\log w} + \frac{1+|\tau|}{\mathrm{e}^{\sqrt{\log w}}}\Big). \tag{7·3}$$

Si $1 \leqslant |\tau| \leqslant T := \log x$, nous choisissons $w := \exp\{(\log_2 x)^2\}$ et obtenons pour x assez grand

$$m_f(x;T) \geqslant \tfrac{1}{12} r_1 \log_2 x + O(r_1 \log_3 x).$$

12. Plus précisément, la conclusion du théorème 1.1 de [36] est inchangée si l'on remplace la condition (v) par $\sum_{y<p\leqslant(1+\lambda)y} f(p)\log p \gg y$ $(x^\tau < y \leqslant x^{1-\sigma})$, avec les notations de [36].

Définissons ensuite v par $\log v = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(1-\cos\vartheta)E(x)}\log x$. Si $1/\log v < |\tau| \leqslant 1$, nous choisissons $w = v$ dans (7·3) et obtenons

$$\sum_{v<p\leqslant x} \frac{h_\vartheta(\tau\log p)}{p} \geqslant \tfrac{1}{18}(1-\cos\vartheta)E(x) + O(1) \geqslant \frac{\vartheta^2}{9\pi^2}E(x) + O(1).$$

Enfin, si $|\tau| \leqslant 1/\log v$, nous avons trivialement

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant v} \frac{1-\cos(\vartheta_p - \tau\log p)}{p} &\geqslant \sum_{\substack{p\leqslant v\\ p\in E}} \frac{1-\cos\vartheta + O(\tau\log p)}{p}\\ &\geqslant (1-\cos\vartheta)E(x) + O(1) - \sum_{\substack{v<p\leqslant x\\ p\in E}} \frac{1-\cos\vartheta}{p}\\ &\geqslant \tfrac{2}{3}(1-\cos\vartheta)E(x) + O(1) \geqslant \frac{4\vartheta^2}{3\pi^2}E(x) + O(1).\end{aligned}$$

En rassemblant nos résultats, nous obtenons

$$m_f(x;T) \geqslant \min\Big(\tfrac{1}{12}r_1\log_2 x + O(r_1\log_3 x), \frac{\vartheta^2 r_1}{18\pi^2}E(x)\Big) + O(1)$$

et finalement

$$m_f(x;T) \geqslant \frac{\vartheta^2 r_1}{18\pi^2}E(x) + O(1). \tag{7·4}$$

En reportant dans (2·3), nous obtenons bien (2·19). Cela établit l'assertion (i).

Prouvons l'assertion (ii). Soit K une constante positive. Nous appliquons le Théorème 1.4 sous la forme de la validité de (1·25) pour la fonction $f(n) := z^{\Omega(n;E)}$ lorsque $|\vartheta| \leqslant K\mathfrak{t}(x;E)$, avec $r(n) := r^{\Omega(n;E)}$, $A := 1$, $\delta_1 := \eta\delta_0(\mathfrak{b})$, $\delta := \frac{1}{2}\delta_1$, $\mathfrak{b} := \frac{1}{8}\kappa$, $\varepsilon := |\vartheta|^{1/\delta} + 1/\sqrt{\log x}$, où $\eta = \eta(\kappa, K)$ est une constante assez petite. Comme

$$r(p) - \Re e\, f(p) \leqslant r(1-\cos\vartheta) \ll \vartheta^2 \ll \varepsilon^{2\delta},$$

la condition (1·20) est bien satisfaite.

Nous avons de même, toujours pour $|\vartheta| \leqslant K\mathfrak{t}(x;E)$,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p) - \Re e\, f(p)}{p} = (1-\cos\vartheta)E(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\vartheta^2 E(x) \leqslant \tfrac{1}{2}K^2\log E(x) \ll \eta K^2\log(1/\varepsilon).$$

La condition (1·15) est donc également satisfaite pour un choix convenable de η. La formule (1·25) fournit alors l'évaluation

$$S(x;z;E) = S(x;r,E)\prod_{p\in E}\frac{1-r/p}{1-z/p} + O\Big(x\,\mathrm{e}^{(r-1)E(x) - \mathfrak{c}(r-z)E(x)}\varepsilon^\delta\Big). \tag{7·5}$$

Cela implique bien (2·20) puisque $S(x;r,E) \asymp x\,\mathrm{e}^{(r-1)E(x)}$. Comme indiqué dans l'introduction, nous obtenons (2·22) par intégration sur le cercle $|z| = r = m/E(x)$.

Pour achever la démonstration du point (iii), il reste à établir (2·21). Nous pouvons supposer $r \leqslant \kappa \leqslant \frac{1}{2}$. Nous utilisons la majoration de Montgomery & Vaughan [31]

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} \ll \frac{1}{\log x}\int_{1/\log x}^1 \frac{H_1(\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \tag{7·6}$$

où l'on a posé

$$H_1(\alpha)^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \max_{\substack{\sigma=1+\alpha\\ |\tau-k|\leqslant 1/2}} \left|\frac{\mathrm{e}^{v_f(s)}}{s-1}\right|^2.$$

D'après (7·2) et (7·4), nous avons

$$\max_{|\tau|\leqslant \log x} \Re e\, v_f(s) \leqslant Z(x;r) - \vartheta^2 r E(x)/180 + O(1),$$

donc

$$H_1(\alpha) \ll \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)-r\vartheta^2 E(x)/180}}{\alpha} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{\log x}} \qquad (1/\log x \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Il résulte alors de (7·6) que

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{z^{\Omega(n;E)}}{n} \ll \mathrm{e}^{Z(x;r)-r\vartheta^2 E(x)/180} + \frac{\mathrm{e}^{Z(x;r)}}{\sqrt{\log x}}.$$

Comme $Z(x;r) = (r-1)E(x) + \log_2 x + O(1)$, nous obtenons, par intégration sur le cercle $|z| = r = (m+1)/E(x) \leqslant \kappa + 1/E(x)$,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n;E)=m}} \frac{1}{n} \ll \mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!} \log x. \tag{7·7}$$

La suite de la preuve est essentiellement identique à celle de Halász [15]. Nous reproduisons les détails pour la commodité du lecteur.

Nous avons

$$\begin{aligned} N_m(x;E) &= \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n;E)=m}} \log n + O\Big(\frac{x}{\log x} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \Omega(n;E)=m}} \frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{dp\leqslant x\\ \Omega(dp;E)=m}} \log p + O\Big(x\mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!}\Big) \\ &\ll \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{d\leqslant x\\ \Omega(d;E)=m \text{ ou } m-1}} \frac{x}{d} + x\mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!} \ll x\mathrm{e}^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!} \end{aligned}$$

où nous avons appliqué (7·7) pour m et $m-1$, ce dernier terme n'étant présent que si $m \geqslant 1$.

7·3. Preuve du Corollaire 2.5

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que μ_x est arbitrairement petit. Avec la perspective de recourir à l'inégalité de Berry-Esseen, nous évaluons la fonction caractéristique

$$\varphi(t) := \frac{1}{M(x;r)} \sum_{n\leqslant x} r(n)\mathrm{e}^{it\{h(n)-E\}/D} \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons posé $E := E_h(x;r)$, $D := D_h(x;r)$.

Appliquons d'abord le Théorème 1.4 à la fonction $f(n) := r(n)\mathrm{e}^{ith(n)/D}$. Nous avons

$$\max_{p\leqslant x}\{r(p) - \Re e\, f(p)\} \ll t^2\mu_x^2 \qquad (|t| \leqslant 1/\mu_x), \tag{7·8}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p) - \Re e\, f(p)}{p} \leqslant \tfrac12 t^2 \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{7·9}$$

Soit alors η une constante absolue suffisamment petite. Il résulte de ce qui précède que les conditions (1·15) et (1·16) sont satisfaites pour le choix $\delta := \eta\delta_0(\mathfrak{b})$ et $\varepsilon^\delta = |t|\mu_x$ si $\mathfrak{b}$ est assez petit et

$$\frac{1}{(\log x)^{\eta\delta_0(\mathfrak{b})/2}} < |t|\mu_x \leqslant \mu_x\sqrt{\frac{2}{\eta}\log\frac{2}{\mu_x}}. \tag{7·10}$$

Nous pouvons donc utiliser l'estimation (1·25) dans ce domaine.

La contribution des puissances p^ν avec $\nu \geqslant 2$ au produit apparaissant au membre de droite de (1·25) étant trivialement $1+O\big(t/D\big)$, nous obtenons, dans le domaine (7·10), en développant $\mathrm{e}^{ith(p)}$ à l'ordre 3,

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\Big\{1 + O\Big(t^3\mu_x + \frac{t}{D}\Big)\Big\}.$$

Lorsque $|t|\mu_x \leqslant (\log x)^{-\eta\delta_0(\mathfrak{b})/2}$, observant que $E \ll D\mu_x \log_2 x$, nous employons la majoration triviale

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2} &\ll t^2 + \frac{|t|}{DM(x;r)} \sum_{n\leqslant x} r(n)\{|h(n)| + |E|\}\\ &\ll t^2 + |t|\mu_x \log_2 x + \frac{|t|}{D} \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{r(p^\nu)|h(p^\nu)|M(x/p^\nu;r)}{M(x;r)}\\ &\ll t^2 + |t|\mu_x \log_2 x + \frac{|t|}{D} \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{r(p^\nu)|h(p^\nu)|}{p^\nu}\Big(\frac{\log x}{\log(2x/p^\nu)}\Big)^{1-\mathfrak{c}},\end{aligned}$$

où $\mathfrak{c}$ est une constante positive convenable : cela résulte du th. 1.1 de [36] sous la forme $M(x;r) \asymp x\mathrm{e}^{Z(x;r)}/\log x$, de la majoration de Halberstam–Richert [17] pour $M(x/p^\nu;r)$, et de (4·1) avec $\varepsilon := (\log x)^{-1/4}$. Compte tenu des hypothèses (ii) et (iv), nous obtenons $\varphi(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2} \ll t^2 + |t|\mu_x \log_2 x$.

Lorsque $\sqrt{(2/\eta)\log(2/\mu_x)} \leqslant |t| \leqslant 1/\mu_x$, nous majorons $\varphi(t)$ grâce au Corollaire 2.1. À cette fin observons d'abord que

$$\mu_x \gg 1/\sqrt{\log_2 x} \tag{7·11}$$

en vertu de l'inégalité

$$D^2 = \sum_{p\leqslant x} \frac{r(p)h(p)^2}{p} \leqslant \mu_x^2 D^2 \sum_{p\leqslant x} \frac{r(p)}{p},$$

qui résulte de l'hypothèse (iii). Donnons-nous alors une constante absolue $\lambda_0 > 0$ assez petite pour que $\tau_0 := \mathrm{e}^{\lambda_0/\mu_x^2}/\log x < 1/\sqrt{\log x}$. Nous avons

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p) - \Re e\,\{f(p)/p^{i\tau}\}}{p} = \sum_{p\leqslant x} \frac{r(p)\{1 - \cos(th(p)/D - \tau\log p)\}}{p} \gg \frac{1}{\mu_x^2}$$

uniformément pour $\tau_0 < |\tau| \leqslant T_x := \exp\{(\log x)^{1/4}\}$: cela résulte du théorème des nombres premiers (cf., par exemple, le lemme III.4.13 de [35]) en restreignant par exemple la sommation aux nombres premiers $p > \exp(1/\tau_0)$ tels que $\tau\log p \in [\frac12\pi - \frac{1}{10}, \frac12\pi + \frac{1}{10}]\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$. De plus, lorsque $|\tau| \leqslant \tau_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x} \frac{r(p) - \Re e\,\{f(p)/p^{i\tau}\}}{p} &\geqslant \sum_{p\leqslant \exp(1/\tau_0)} \frac{r(p)(1 - \cos\{th(p)/D\})}{p} + O(1)\\ &\geqslant \frac{2t^2}{\pi^2 D^2} \sum_{p\leqslant \exp(1/\tau_0)} \frac{r(p)h(p)^2}{p} + O(1)\\ &\geqslant \frac{2t^2}{\pi^2} + O\Big(1 + \frac{t^2}{D^2} \sum_{\exp(1/\tau_0)<p\leqslant x} \frac{\mu_x^2 D^2}{p}\Big) \geqslant \tfrac{1}{10}t^2\end{aligned}$$

pour un choix convenable de λ_0. Dans le domaine considéré, nous avons donc, avec la notation (2·1),

$$m_f(x;T_x) \geqslant \frac{1}{5\eta}\log\Big(\frac{2}{\mu_x}\Big).$$

Compte tenu de (7·11), nous pouvons donc fixer η de sorte que

$$\varphi(t) \ll \mu_x^2 \qquad \big(\sqrt{(2/\eta)\log(2/\mu_x)} \leqslant |t| \leqslant 1/\mu_x\big).$$

L'inégalité de Berry–Esseen (cf., e.g., [35], th. II.7.16) sur l'intervalle $-T \leqslant t \leqslant T$ avec $T := 1/\mu_x$ fournit donc

$$\begin{aligned} F_x(E+zD;f,r) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u &\ll \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t}\right|\mathrm{d}t \\ &\ll \mu_x + \frac{\log_2 x}{(\log x)^{\eta\delta_0(\mathfrak{b})/2}} + \frac{1}{D}. \end{aligned} \tag{7·12}$$

Compte tenu de (7·11), on voit que le second terme du membre de droite de (7·12) est dominé par le premier.

Lorsque l'hypothèse (i) est remplacée par la condition en moyenne (1·24), nous devons choisir $\varepsilon^{2\delta} := t^2\mu_x^2 \log(1+1/|t|\mu_x)$ pour que la condition (1·19) avec $\mathfrak{h} = 1$ soit satisfaite et pouvoir ainsi appliquer le Théorème 1.3. Les calculs précédents demeurent alors valides, *mutatis mutandis* et fournissent le résultat indiqué.

Cela achève la démonstration.

7·4. Preuve du Corollaire 2.6

La fonction $h(n) := \Omega(\varphi(n))$ est additive. Le théorème de Bombieri–Vinogradov et les estimations de moments centrés pour la fonction $p \mapsto \Omega(p-1)$, telles qu'établies par Alladi [1] dans un énoncé très général, permettent aisément de montrer que, pour $x \geqslant 3$, nous avons

$$\begin{aligned} E_h(x;r) &:= \sum_{p\leqslant x}\frac{r(p)\Omega(p-1)}{p} = \tfrac{1}{2}\varrho(\log_2 x)^2 + O(\log_2 x), \\ D_h(x;r)^2 &:= \sum_{p\leqslant x}\frac{r(p)\Omega(p-1)^2}{p} = \tfrac{1}{3}\varrho(\log_2 x)^3 + O\big((\log_2 x)^2\big). \end{aligned}$$

Cependant, le Corollaire 2.5 n'est pas applicable directement car la condition (iii) n'est pas satisfaite. Cette difficulté peut être contournée en introduisant la fonction additive

$$h_1(n) := \sum_{\substack{p^\nu \| n \\ \Omega(p-1)\leqslant 5\log_2 x}} \Omega\big(\varphi(p^\nu)\big).$$

Nous verrons que $h(n) = h_1(n)$ sauf peut-être pour au plus $\ll x/\sqrt{\log x}$ entiers $n \leqslant x$. Admettons cela un instant. Au vu du terme d'erreur de (2·25), il suffit donc d'évaluer la fonction de répartition relative à h_1, qui relève du Corollaire 2.5 avec $\mu_x \asymp 1/\sqrt{\log_2 x}$, puisque la condition (iv) de cet énoncé résulte trivialement de la seconde hypothèse (1·9) avec $j = 0$. Cela implique bien le résultat annoncé.

Pour estimer le cardinal $U(x)$ de l'ensemble des entiers $n \leqslant x$ tels que $h_1(n) < h(n)$, nous majorons sa fonction sommatoire par

$$\sum_{p|n} \big(\tfrac{3}{2}\big)^{\Omega(p-1)-5\log_2 x}.$$

Il suit

$$\begin{aligned} U(x) &\leqslant \frac{x}{(\log x)^{5\log(3/2)}}\sum_{p\leqslant x}\frac{(3/2)^{\Omega(p-1)}}{p} \leqslant \frac{x}{(\log x)^{5\log(3/2)}}\sum_{n\leqslant x}\frac{(3/2)^{\Omega(n)}}{n} \\ &\ll x(\log x)^{3/2-5\log(3/2)} \ll \frac{x}{\sqrt{\log x}}. \end{aligned}$$

Remerciements. L'auteur tient à exprimer sa gratitude à Régis de la Bretèche pour son aide lors de la préparation de cet article.

Bibliographie

[1] K. Alladi, Moments of additive functions and the sequence of shifted primes, *Pacific J. Math.* **118**, n° 2 (1985), 261–275.

[2] M. Balazard, Remarques sur un théorème de G. Halász et A. Sárközy, *Bull. Soc. Math. France* **117**, n° 4 (1989), 389–413.

[3] M. Balazard et A. Smati, Travaux de Pomerance sur la fonction φ d'Euler, *Publ. Math. d'Orsay* **87**, (1989/1990), 5–36.

[4] A. Balog, A. Granville, & K. Soundararajan, Multiplicative functions in arithmetic progressions, *Ann. Math. Qué.* **37**, n° 1 (2013), 3–30.

[5] A. Biró & T. Szamuely, A Turán–Kubilius inequality with multiplicative weights, *Acta Math. Hung.* **70** (1996), n° 1-2, 39–56.

[6] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Sur la concentration de certaines fonctions additives, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **152**, n° 1 (2012), 179–189 ; erratum *ibid.*, 191.

[7] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : central limit theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 240, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.

[8] P.D.T.A. Elliott, Multiplicative functions mean values : asymptotic estimates, prépublication.

[9] P. Erdős & C. Pomerance, On the normal number of prime factors of $\varphi(n)$, *Rocky Mountain Journal of Math. (2)* **15** (1985), 343–352.

[10] P.X. Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, *Invent. Math.* **11** (1970), 329–339.

[11] A. Granville & K. Soundararajan, Decay of mean values of multiplicative functions, *Canad. J. Math.* **55**, n° 6 (2003), 1191–1230.

[12] A. Granville & K. Soundararajan, Pretentious multiplicative functions and an inequality for the zeta-function, in : *Anatomy of integers*, 191–197, CRM Proc. Lecture Notes 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[13] G. Halász, Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acad. Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968), 365–403.

[14] G. Halász, On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions, *Stud. Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 211–233.

[15] G. Halász, Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", *Acta Math. Acad. Scient. Hungar.* **23** (1972), 425–432.

[16] G. Halász, On the distribution of additive functions, *Acta Arith.* **27** (1975), 143–152.

[17] H. Halberstam & H.-E. Richert, On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory* (1) **11** (1979), 76–89.

[18] R.R. Hall, A sharp inequality of Halász type for the mean value of a multiplicative arithmetic function, *Mathematika* **42**, n° 1 (1995), 144–157.

[19] R.R. Hall & G. Tenenbaum, Effective mean value estimates for complex multiplicative functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110** (1991), 337–351.

[20] K.-H. Indlekofer, On a quantitative form of Wirsing's mean-value theorem for multiplicative functions, *Publ. Math. Debrecen* **75**, n°s 1-2 (2009), 105-121.

[21] K.-H. Indlekofer, I. Kátai, & R. Wagner, A comparative result for multiplicative functions, *Lith. Math. J.* **41**, n° 2 (2001), 143–157.

[22] J. Karamata, Sur un mode de croissance des fonctions régulières, *Mathematica (Cluj)* **4** (1930), 38–53.

[23] D. Koukoulopoulos, Pretentious multiplicative functions and the prime number theorem for arithmetic progressions, *Compos. Math.* **149** n° 7 (2013), 1129–1149.

[24] B.V. Levin & N.M. Timofeev, Un théorème de comparaison pour les fonctions multiplicatives (en russe), *Acta Arith.* **42** n° 1 (1982/83), 21–47 ; Corrigendum *ibid.* **42** n° 3 (1983), 325.

[25] A.P. Mangerel, A strengthening of theorems of Halász and Wirsing, prépubl., arXiv :1604.00295v3.

[26] A.P. Mangerel, On the number of restricted prime factors of an integer, II, prépubl., arXiv :1604.01658v2.

[27] F. Marie-Jeanne & G. Tenenbaum, Une propriété de concentration liée à la fonction d'Euler, *Indag. Math.,* N.S., **9** n° 3 (1998), 382–403.

[28] H.L. Montgomery, A note on mean values of multiplicative functions, Report n° 17, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, 1978, 9 pp.

[29] H.L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS regional conferences series in mathematics, no. 84, American mathematical society, Providence, Rhode Island (1994), 220 pp.

[30] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Hilbert's inequality, *J. London Math. Soc.* (2) **8** (1974), 73-82.

[31] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Mean values of multiplicative functions, *Per. Math. Hung.* **43**, 1-2 (2001), 199–204.

[32] M. Nair & G. Tenenbaum, Short sums of certain arithmetic functions, *Acta Math.* **180**, (1998), 119–144.

[33] A. Sárközy, Remarks on a paper of G. Halász, *Period. Math. Hungar.* **8**, n° 2 (1977), 135–150.

[34] P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* **313** (1980), 161–170.

[35] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ème éd., coll. Échelles, Belin, Paris 2015, 592 pp. ; English translation : Graduate Studies in Mathematics 163, Amer. Math. Soc. 2015.

[36] G. Tenenbaum, Fonctions multiplicatives, sommes d'exponentielles, et loi des grands nombres, *Indag. Math.* **27** (2016), 590–600.

[37] E. Wirsing, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967), 411–467.

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France