



**HAL**  
open science

# Répartition des fonctions $Q$ -additives le long des carrés de polynômes sur un corps fini

Mireille Car, Christian Mauduit

► **To cite this version:**

Mireille Car, Christian Mauduit. Répartition des fonctions  $Q$ -additives le long des carrés de polynômes sur un corps fini. Bulletin de la société mathématique de France, 2016, 144 (4), pp.775-817. hal-01297936

**HAL Id: hal-01297936**

**<https://hal.science/hal-01297936>**

Submitted on 1 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Répartition des fonctions $Q$ -additives le long des carrés de polynômes sur un corps fini<sup>\*</sup>

Mireille CAR

Université d'Aix-Marseille,

Institut de Mathématiques de Marseille CNRS, UMR 7373

CMI, 39 rue F. Joliot-Curie 13453 Marseille Cedex 13, France

Christian MAUDUIT

Université d'Aix-Marseille et Institut Universitaire de France,

Institut de Mathématiques de Marseille CNRS, UMR 7373

163 avenue de Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

## 1 Introduction et notations

Soit  $F$  un corps fini à  $q$  éléments et de caractéristique  $p$ . On note  $\mathbf{A}$  l'anneau  $F[T]$  des polynômes à une variable sur le corps  $F$ ,  $\mathbf{M}$  l'ensemble des polynômes unitaires de  $F[T]$  et  $\mathbf{I}$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de  $F[T]$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont des polynômes non nuls, on note  $\tau(X)$  le nombre de diviseurs unitaires de  $X$  et  $(X, Y)$  le plus grand commun diviseur unitaire de  $X$  et  $Y$ .

Si  $Q \in \mathbf{A}$  un polynôme de degré strictement positif, on note

$$\mathcal{C}_Q = \{X \in \mathbf{A} \mid \deg X < \deg Q\}$$

l'ensemble des restes de la division euclidienne par  $Q$  où l'on convient que  $\deg 0 = -\infty$ . Tout polynôme  $X \in \mathbf{A}$  admet une unique représentation comme

---

<sup>\*</sup>AMS Classification 11 T 55

<sup>†</sup>Recherche effectuée avec le soutien de l'Agence Nationale de La Recherche, projet ANR-10-BLAN 0103 MUNUM et de Ciência sem Fronteiras, projet PVE 407308/2013-0.

somme

$$(1.1) \quad X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Q^n,$$

où  $X_n \in \mathcal{C}_Q$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , appelée représentation de  $X$  en base  $Q$ . La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang est la suite des chiffres de  $X$  en base  $Q$ .

La valeur absolue d'un polynôme  $X \in \mathbf{A}$  est définie par

$$(1.2) \quad \langle X \rangle = \begin{cases} q^{\deg X} & \text{si } X \neq 0, \\ 0 & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

Enfin, on notera  $|\mathcal{X}|$  le nombre d'éléments de tout ensemble fini  $\mathcal{X}$ .

**Définition** Une application  $f$  de  $\mathbf{A}$  dans un groupe additif  $\mathbf{B}$  est dite **complètement  $Q$ -additive** si pour tout  $Y \in \mathbf{A}$  et tout  $R \in \mathcal{C}_Q$ , on a  $f(YQ + R) = f(Y) + f(R)$ .

Observons qu'une fonction complètement  $Q$ -additive  $f$  à valeurs dans un anneau  $\mathbf{B}$  est déterminée par les valeurs prises par  $f$  sur l'ensemble des chiffres  $\mathcal{C}_Q$ . En effet, si (1.1) est la représentation de  $X$  en base  $Q$ , alors  $X = \sum_{n=0}^{\infty} f(X_n)$ .

Drmotá et Gutenbrunner ont étudié dans [6] la distribution des fonctions  $Q$ -additives sur  $\mathbf{A}$  et montré des résultats analogues à ceux obtenus par Bassily-Kátai, Kim et Drmotá dans le cas des nombres entiers (voir [1], [9] et [5]). Madritsch et Thuswaldner ont étudié dans [10] le cas plus général des sommes de Weyl polynomiales associées aux fonctions  $Q$ -additives. Lorsque  $B$  est égal à l'anneau  $\mathbf{A} = \mathbb{F}[T]$ , la fonction "somme des chiffres en base  $Q$ " définie pour tout  $X \in A$  écrit sous la forme (1.1) par  $s(X) = \sum_{n \geq 0} X_n$ , constitue un exemple typique de fonction  $Q$ -additive sur  $\mathbf{A}$ . Dans [4] nous avons étudié son comportement sur les puissances  $k$ -ièmes des éléments de  $\mathbf{A}$ . Dans cet article nous nous intéressons au cas plus difficile des fonctions  $Q$ -additives à valeurs réelles.

Un exemple simple de fonctions complètement  $Q$ -additives à valeurs réelles est fourni par les fonctions de poids  $Q$ -adique  $w_Q^{(\ell)}$ ,  $\ell$  étant un paramètre réel, définies par

$$(1.3) \quad w_Q^{(\ell)}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle X_n \rangle^{\ell}$$

pour tout  $X \in A$  dont la représentation en base  $Q$  est donnée par (1.1). En particulier,  $w_Q^{(0)}(X)$  est le nombre de chiffres de  $X$  différents de 0.

Drnota et Gutenbrunner ont montré dans [6] l'existence d'un théorème central limite pour les fonctions  $Q$ -additives à valeurs réelles sur les puissances  $k$ -ièmes des éléments de  $\mathbf{A}$  :

**Théorème** Pour toute fonction  $Q$ -additive  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout nombre entier  $k > 0$ , on a pour  $y$  nombre réel et  $n$  nombre entier tendant vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{q^n} |\{X \in \mathbf{A} \mid \deg X < n, f(X^k) \leq \frac{kn}{\deg Q} \mu_f + y \sqrt{\frac{nk}{\deg Q} \sigma_f^2}\}| = \Phi(y) + o(1),$$

avec  $\mu_f = q^{-\deg Q} \sum_{x \in \mathcal{C}_Q} f(x)$ ,  $\sigma_f^2 = q^{-\deg Q} \sum_{x \in \mathcal{C}_Q} f(x)^2$  et  $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt$ , la loi de distribution normale.

Dans ce qui suit, on suppose que  $q$  est un nombre entier impair,  $f$  une fonction complètement  $Q$ -additive à valeurs réelles définie sur  $\mathbf{A}$  et on s'intéresse à la répartition des valeurs prises par  $f(X^2)$ ,  $X$  décrivant l'anneau  $\mathbf{A}$ . Le but de cet article est de montrer que la méthode introduite par Mauduit et Rivat dans [12] (voir également [7] et [14]) peut être adaptée à  $A$  afin d'étudier le comportement de  $f(X^k)$  lorsque  $k = 2$ . Notons que le cas général  $k \geq 3$  semble hors d'atteinte par les techniques connues à ce jour.

La situation est rendue plus complexe que dans le cas des nombres entiers par l'existence d'obstructions de nature arithmétique propres à  $A$  et qui n'apparaissent pas dans le cas des nombres entiers. Plus précisément, nous allons identifier une classe de fonctions complètement  $Q$ -additives pour lesquelles pour tout nombre entier  $k > 0$ , la suites  $(\frac{k}{p} f(X^2))_{X \in \mathbf{A}}$  a un comportement pathologique.

Par exemple, dans le cas où  $\mathbf{A} = \mathbb{F}_3[T]$ ,  $Q = T$  et  $f$  est l'application de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ , on a

$$|\{X \in \mathbb{F}_3[T] \mid \deg X < n, f(X^2) \equiv a \pmod{3}\}| = \begin{cases} 3^{n-1} & \text{si } a = 0, \\ 2 \times 3^{n-1} & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } a = 2. \end{cases}$$

et  $f$  n'est donc pas équidistribuée sur les carrés.

A toute forme linéaire  $\lambda : F^d \rightarrow F$ , on associe l'application  $\lambda^*$  de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{F}_p$  définie par

$$\lambda^*\left(\sum_{i=0}^{d-1} x_i Y^i\right) = \text{tr}(\lambda(x_0, \dots, x_{d-1})),$$

où  $\text{tr}$  désigne la trace de  $F$  sur  $\mathbb{F}_p$ .

**Définition** On dira qu'une application  $w$  de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{Z}$  est dans la classe  $\mathcal{L}$  s'il existe une forme linéaire  $\lambda : F^d \mapsto F$  telle que pour tout  $X \in \mathcal{C}_Q$ ,  $\lambda^*(X)$  soit la classe de  $w(X)$  modulo  $p$ . Les fonctions  $Q$ -additives  $f$  pour lesquelles  $f|_{\mathcal{C}_Q}$  décrit  $\mathcal{L}$  seront dites dégénérées. Notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble de ces fonctions pour lesquelles nous démontrerons :

**Théorème 1.1** *Soit  $f$  une fonction complètement  $Q$ -additive à valeurs entières dégénérée. Alors il existe une constante  $\gamma(q, Q, f) > 0$  ne dépendant que de  $q, Q, f$  telle que pour tout nombre entier  $k$  et tout nombre entier  $N > \deg Q$ , on ait*

$$\left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} \exp\left(2\pi i \frac{k}{p} f(X^2)\right) \right| \geq \gamma(q, Q, f) q^N.$$

Le principal théorème établi dans cet article est le suivant :

**Théorème 1.2** *Soit  $f$  une fonction complètement  $Q$ -additive à valeurs entières non dégénérée. Alors, pour tout nombre réel  $\alpha$  non entier, il existe un nombre réel  $0 < a(q, Q, f, \alpha) < 1$  et un nombre entier  $N(q, Q, f, \alpha)$  ne dépendant que de  $q, Q, f$  et  $\alpha$  tel que pour tout nombre entier  $N \geq N(q, Q, f, \alpha)$  on ait*

$$\left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} \exp(2\pi i \alpha f(X^2)) \right| \leq b(q, Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-a(q, Q, f, \alpha))},$$

$\omega(Q)$  désignant le nombre de polynômes irréductibles distincts divisant  $Q$  et  $b(q, Q) > 0$  étant une constante ne dépendant que de  $q$  et de  $Q$ .

On déduira de ce théorème le corollaire ci dessous :

**Corollaire 1.3** *Soit  $f$  une fonction complètement  $Q$ -additive à valeurs entières non dégénérée. Alors, pour tout nombre entier  $m > 0$ , il existe un nombre réel  $0 < h(q, Q, f, m) < 1$ , tel que pour tout nombre entier rationnel  $a$ , on ait*

$$|\{X \in \mathbf{A} \mid \deg X < n, f(X^2) \equiv a \pmod{m}\}| = \frac{q^n}{m} + O(q^{n(1-h(q, Q, f, m))}),$$

les constantes impliquées par le symbole  $O$  ne dépendant que de  $q, Q, f$  et  $m$ .

La preuve du Théorème 1.1 sera donnée à la section 3. Pour obtenir la majoration du Théorème 1.2 prouvée à la section 6, nous majorerons les sommes

$$\Sigma_f(N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \nu \deg Q \leq \deg X < N}} e(\alpha f(X^2)),$$

$\nu = \nu(N)$  étant le nombre entier déterminé par la condition  $\nu \deg Q < N \leq (\nu + 1) \deg Q$ . Ceci sera fait à la section 5. Les outils nécessaires à ces preuves seront établis aux sections 2 et 4. Ce sont essentiellement des majorations de sommes de caractères faisant intervenir le caractère  $E$  défini à la section 2.1.

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose  $e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha)$  et on note  $\|\alpha\|$  la distance de  $\alpha$  au nombre entier le plus proche. Pour alléger l'écriture, d'une part, dans les estimations de sommes de caractères, un élément  $x$  de  $\mathbb{F}_p$  sera identifié à son image  $j(x) \in \{0, \dots, p-1\}$  et d'autre part, la dépendance des constantes à  $q$  ne sera pas précisée.

## 2 Rappels et lemmes techniques concernant le caractère exponentiel $E$

### 2.1 Le caractère $E$

On note  $\mathbf{K}$  le corps  $F(T)$ . La valuation à l'infini sur le corps  $\mathbf{K}$  est l'application  $v_\infty$  de  $\mathbf{K}$  dans  $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  définie par  $v_\infty(0) = \infty$  et  $v_\infty(G/H) = \deg H - \deg G$ , si  $G$  et  $H$  sont des polynômes non nuls. Le complété de  $\mathbf{K}$  pour la valuation  $v_\infty$  est le corps  $\mathbf{K}_\infty = F((T^{-1}))$  des séries de Laurent formelles

$$y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n T^n, \quad y_n \in F,$$

les coefficients  $y_n$  étant tous nuls pour  $n$  assez grand. On prolonge  $v_\infty$  à  $\mathbf{K}_\infty$  en posant pour  $y \neq 0$ ,

$$v_\infty(y) = -\sup\{n \in \mathbb{Z} \mid y_n \neq 0\}.$$

Soit  $\mathcal{P}$  l'idéal de valuation de  $\mathbf{K}_\infty$ . Tout  $y \in \mathbf{K}_\infty$  s'écrit de façon unique comme somme

$$y = [y] + \{y\}, \quad [y] \in \mathbf{A}, \quad \{y\} \in \mathcal{P},$$

où  $[y]$  et  $\{y\}$  peuvent être vus comme les parties entière et fractionnaire de  $y$ . Soit  $\psi : F \mapsto \mathbb{C}$  le caractère non trivial du groupe additif de  $F$  défini par

$$\psi(x) = \exp(2\pi i \frac{j(\text{tr}(x))}{p}),$$

$j$  étant la bijection naturelle de  $\mathbb{F}_p$  sur  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ . On associe à  $\psi$  un caractère additif non trivial de  $\mathbf{K}_\infty$  en posant pour tout  $y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n T^n \in \mathbf{K}_\infty$ ,

$$E(y) = \psi(\text{Res}(y)),$$

où

$$\text{Res}(y) = y_{-1}.$$

Ce caractère est trivial sur l'anneau  $\mathbf{A}$ . Dans la suite de ce travail nous utiliserons souvent une conséquence immédiate de cette propriété à savoir, l'implication : Si  $A, B, H$  sont dans  $\mathbf{A}$  avec  $H \neq 0$

$$A \equiv B \pmod{H} \Rightarrow E\left(\frac{A}{H}\right) = E\left(\frac{B}{H}\right).$$

## 2.2 Sommes associées au caractère $E$

Tout d'abord rappelons sans démonstration le résultat fondamental suivant (voir [8]).

**Proposition 2.1** *Soit, pour  $y \in \mathbf{K}_\infty$  et  $N$  un nombre entier naturel*

$$(2.1) \quad S(y, N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} E(yX).$$

Alors,

$$(2.2) \quad S(y, N) = \begin{cases} q^N & \text{si } v_\infty(\{y\}) > N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où l'on déduit le corollaire

**Corollaire 2.2** *Soit  $H \in \mathbf{A}$  un polynôme non nul et soit  $G \in \mathbf{A}$ . Alors,*

$$(2.3) \quad \sum_{X \in \mathcal{C}_H} E\left(\frac{GX}{H}\right) = \begin{cases} \langle H \rangle & \text{si } G \equiv 0 \pmod{H}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 2.3** *Pour tout  $H \in \mathbf{A}$  non nul, on désigne par  $v_Q(H)$  le plus grand nombre entier  $m$  tel que  $Q^m$  divise  $H$ . Soient  $m, n$  et  $\ell$  des nombres entiers tels que  $0 \leq m \leq n \leq \ell$  et soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors,*

$$(2.4) \quad \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ m \leq v_Q(D) \leq n}} \langle D \rangle^{1/2} \langle Q \rangle^{\theta v_Q(D)} \\ \leq (n - m + 1) \tau(Q^{\ell-m}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \max \left( (\langle Q \rangle^\theta q^{1/2})^m, (\langle Q \rangle^\theta q^{1/2})^n \right).$$

*Preuve.* Analogue à celle du lemme 19 de [12]

□

**Lemme 2.4** *Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on a*

$$(2.5) \quad |1 + e(u)| \leq 2 - 4\|u\|^2,$$

*Preuve.* On a  $|1 + e(u)|^2 = 4(1 - \sin(\pi u)^2) \leq 4(1 - 4\|u\|^2)$ , d'où  $|1 + e(u)| \leq 2(1 - 2\|u\|^2)$ .

□

**Proposition 2.5** *Soit  $w$  une application de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{Z}$  n'appartenant pas à la classe  $\mathcal{L}$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $H \in \mathcal{C}_Q$ , soit*

$$(2.6) \quad \phi = \phi_1(Q, w, \alpha, H) = \sum_{X \in \mathcal{C}_Q} e(\alpha w(X)) E\left(-\frac{HX}{Q}\right).$$

*Alors, pour tout nombre réel  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , il existe une constante  $0 < c_{Q,w,\alpha} < 1$  telle que pour tout  $H \in \mathcal{C}_Q$ , on ait*

$$(2.7) \quad |\phi_1(Q, w, \alpha, H)| \leq \langle Q \rangle - c_{Q,w,\alpha}.$$

*Preuve.* Posons  $d = \deg Q$ . Dans le corps  $\mathbf{K}_\infty$ ,  $\frac{H}{Q}$  se développe en série de Laurent

$$\frac{H}{Q} = \sum_{i \leq -1} \frac{a_i}{T^i}.$$

Pour tout  $X = \sum_{j=0}^{d-1} x_j T^j$  appartenant à  $\mathcal{C}_Q$ , on a

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{HX}{Q}\right) &= \psi(-(a_{-1}x_0 + a_{-2}x_1 + \cdots + a_{-d}x_{d-1})) \\ &= e\left(\frac{\text{tr}(-(a_{-1}x_0 + a_{-2}x_1 + \cdots + a_{-d}x_{d-1}))}{p}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$e(\alpha w(X))E\left(-\frac{HX}{Q}\right) = e\left(\alpha w(X) - \frac{\text{tr}(a_{-1}x_0 + a_{-2}x_1 + \cdots + a_{-d}x_{d-1})}{p}\right).$$

Notons  $L_H(X) = a_{-1}x_0 + a_{-2}x_1 + \cdots + a_{-d}x_{d-1}$ . Soit  $\alpha$  un nombre réel non entier. Si  $\alpha$  n'est pas un nombre rationnel de la forme  $\ell/p$ ,  $\ell$  premier à  $p$  alors, pour tout chiffre  $X \in \mathcal{C}_Q$  non nul, on a  $(\alpha w(X) - \frac{\text{tr}(L_H(X))}{p}) \notin \mathbb{Z}$ . Si  $\alpha = \ell/p$ ,  $\ell$  étant premier à  $p$ , comme  $w \notin \mathcal{L}$ , il existe  $X \in \mathcal{C}_Q$  non nul tel que  $(w(X) - \text{tr}(L_H(X))) \notin \mathbb{Z}p$  et donc tel que  $(\alpha w(X) - \frac{\text{tr}(L_H(X))}{p}) \notin \mathbb{Z}$ . Dans l'un ou l'autre cas on peut choisir  $X_H \in \mathcal{C}_Q - \{0\}$  maximisant  $\|\alpha w(X) - \frac{\text{tr}(L_H(X))}{p}\|$ . On pose  $\Delta_{w,\alpha,H} = \|\alpha w(X_H) - \frac{\text{tr}(L_H(X_H))}{p}\|$  et  $\delta_{w,\alpha} = \min_{H \in \mathcal{C}_Q} \Delta_{w,\alpha,H}$  (on note que  $\delta_{w,\alpha} > 0$ ). La somme  $\phi = \phi_1(Q, w, \alpha, H)$  s'écrit

$$\phi = 1 + e\left(\alpha w(X_H) - \frac{\text{tr}(L_H(X_H))}{p}\right) + \sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_Q \\ X \notin \{0, X_H\}}} e\left(\alpha w(X)E\left(-\frac{HX}{Q}\right)\right),$$

d'où

$$|\phi| \leq \left|1 + e\left(\alpha w(X_H) - \frac{\text{tr}(L_H(X_H))}{p}\right)\right| + \langle Q \rangle - 2.$$

Avec (2.5), il vient

$$\begin{aligned} |\phi| &\leq \langle Q \rangle - 4\left\|\alpha w(X_H) - \frac{\text{tr}(L_H(X_H))}{p}\right\|^2 \\ &= \langle Q \rangle - 4\Delta_{w,\alpha,H} \leq \langle Q \rangle - 4\delta_{w,\alpha}^2. \end{aligned}$$

□

Pour des commodités d'écriture, posons  $c_{w,\alpha} = 0$  dans le cas où  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.6** Soit  $w$  une application de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{Z}$  n'appartenant pas à la classe  $\mathcal{L}$ . Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(Q, H) \in \mathbf{A}^2$  avec  $\deg Q > 0$ . Pour tout nombre entier  $j > 0$ , soit

$$(2.8) \quad \phi_j = \phi_j(Q, w, \alpha, H) = \sum_{R \in \mathcal{C}_Q} e(\alpha w(R)) E\left(-\frac{HR}{Q^j}\right).$$

Alors on a

$$(2.9) \quad \phi_j \leq \langle Q \rangle - c_{Q, w, \alpha}.$$

*Preuve.* Soit

$$H = \sum_{k=0}^m H_k Q^k, \quad H_k \in \mathcal{C}_Q$$

le développement de  $H$  en base  $Q$ . Le caractère  $E$  étant trivial sur  $\mathbf{A}$ , on a

$$E\left(\frac{HR}{Q^j}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\min(m, j-1)} \frac{H_k R}{Q^{j-k}}\right) = \prod_{k=0}^{\min(m, j-1)} E\left(\frac{H_k R}{Q^{j-k}}\right).$$

Pour  $0 \leq k \leq j-2$ , on a  $v_\infty\left(\frac{H_k R}{Q^{j-k}}\right) \geq 2$ , d'où  $E\left(\frac{H_k R}{Q^{j-k}}\right) = 1$ . Par suite,

$$\phi_j = \sum_{R \in \mathcal{C}_Q} e(\alpha w(R)) E\left(-\frac{H_j R}{Q}\right) = \phi_1(w, \alpha, Q, H_j).$$

La proposition précédente nous donne

$$\phi_j \leq \langle Q \rangle - c_{Q, w, \alpha}.$$

□

## 2.3 Sommes de Gauss quadratiques associées au caractère $E$

Pour  $H \in \mathbf{A}$  non nul et  $(A, B) \in \mathbf{A}^2$ , soit

$$(2.10) \quad \Gamma(H; A, B) = \sum_{X \in \mathcal{C}_H} E\left(\frac{AX^2 + BX}{H}\right).$$

**Proposition 2.7** Soient  $H \in \mathbf{A}$ ,  $A \in \mathbf{A}$  et  $B \in \mathbf{A}$  avec  $H \neq 0$ . Alors, on a

- (1)  $\Gamma(H; A, B) = \langle (A, H) \rangle \Gamma\left(\frac{H}{(A, H)}, \frac{A}{(A, H)}, \frac{B}{(A, H)}\right)$  si  $(A, H)$  divise  $B$  ;
- (2)  $\Gamma(H; A, B) = 0$  si  $(A, H)$  ne divise pas  $B$ .

*Preuve.* On pose  $H = H_1(A, H)$ ,  $A = A_1(A, H)$ . Tout  $X \in \mathcal{C}_H$  s'écrivant de façon unique  $X = Y + ZH_1$  avec  $Y \in \mathcal{C}_{H_1}$  et  $Z \in \mathcal{C}_{(A, H)}$ , on a

$$\begin{aligned}\Gamma(H; A, B) &= \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} \sum_{Z \in \mathcal{C}_{(A, H)}} E \left( \frac{A_1(Y + ZH_1)^2}{H_1} + \frac{B(Y + ZH_1)}{H_1(A, H)} \right) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} E \left( \frac{A_1 Y^2}{H_1} + \frac{BY}{H_1(A, H)} \right) \sum_{Z \in \mathcal{C}_{(A, H)}} E \left( \frac{BZ}{(A, H)} \right).\end{aligned}$$

Le corollaire 2.2 nous donne alors

$$\Gamma(H; A, B) = \left( \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} E \left( \frac{A_1 Y^2}{H_1} + \frac{BY}{H_1(A, H)} \right) \right) \times \begin{cases} \langle (A, H) \rangle & \text{si } (A, H) | B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui prouve (2). Si  $(A, H)$  divise  $B$ , on pose  $B = B_1(A, H)$ . On a alors

$$\Gamma(H; A, B) = \langle (A, H) \rangle \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} E \left( \frac{A_1 Y^2}{H_1} + \frac{B_1 Y}{H_1} \right) = \langle (A, H) \rangle \Gamma(H_1; A_1, B_1).$$

□

**Proposition 2.8** *Soient  $H \in \mathbf{A}$ ,  $A \in \mathbf{A}$  et  $B \in \mathbf{A}$  avec  $H \neq 0$ . Alors, on a*

$$(2.11) \quad |\Gamma(H; A, B)| \leq \langle (A, H) \rangle^{1/2} \langle H \rangle^{1/2}.$$

*Preuve.* Si  $(A, H)$  ne divise pas  $B$ , la relation (2.11) est triviale. On suppose que  $(A, H)$  divise  $B$ . Comme ci-dessus, on pose  $H = H_1(A, H)$ ,  $A = A_1(A, H)$ ,  $B = B_1(A, H)$ . Les polynômes  $A_1$  et  $H_1$  étant premiers entre eux, il existe  $C_1 \in \mathcal{C}_{H_1}$  tel que  $B_1 \equiv 2A_1 C_1 \pmod{H_1}$ . Par suite,

$$\Gamma(H_1; A_1, B_1) = \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} E \left( \frac{A_1(Y^2 + 2C_1 Y)}{H_1} \right) = \sum_{Y \in \mathcal{C}_{H_1}} E \left( \frac{A_1(Y + C_1)^2}{H_1} \right) E \left( -\frac{C_1^2}{H_1} \right).$$

L'application  $Y \rightarrow Y + C_1$  étant une permutation de l'ensemble  $\mathcal{C}_{H_1}$ , on a  $\Gamma(H_1; A_1, B_1) = E \left( -\frac{C_1^2}{H_1} \right) \Gamma(H_1; A_1, 0)$ , d'où  $|\Gamma(H_1; A_1, B_1)| = |\Gamma(H_1; A_1, 0)|$ . Les propositions III.2 et III.3 de [2] nous donnent  $|\Gamma(H_1; A_1, 0)| = \langle H_1 \rangle^{1/2}$  d'où,

$$|\Gamma(H_1; A_1, B_1)| = \langle (A, H) \rangle \langle H_1 \rangle^{1/2} = \langle (A, H) \rangle^{1/2} \langle H \rangle^{1/2}.$$

□

### 3 Démonstration du Théorème 1.1

Soit  $\lambda$  une application linéaire non nulle de  $F^d$  dans  $F$ ,  $\lambda^*$  l'application de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{F}_p$  définie par

$$\lambda^*\left(\sum_{i=0}^{d-1} x_i T^i\right) = \text{tr}(\lambda(x_0, x_1, \dots, x_{d-1}))$$

et  $f^*$  la fonction complètement  $Q$ -additive à valeurs dans  $\mathbb{F}_p$  prolongeant  $\lambda^*$  à l'anneau  $\mathbf{A}$ .

**Proposition 3.1** *Les applications  $\lambda^*$  et  $f^*$  sont linéaires et*

$$\text{Ker } f^* = \text{Ker } \lambda^* + (Q - 1),$$

$(Q - 1)$  désignant l'idéal de  $\mathbf{A}$  engendré par le polynôme  $Q - 1$ .

*Preuve.* La linéarité de  $\lambda^*$  est évidente et on vérifie facilement celle de  $f^*$ . L'inclusion  $\text{Ker } \lambda^* \subset \text{Ker } f^*$  est également évidente et pour montrer l'inclusion  $(Q - 1) \subset \text{Ker } f^*$ , on remarque que si  $X = \sum_{m=0}^{\infty} X_m Q^m$  est la représentation en base  $Q$  de  $X \in \mathbf{A}$ , alors

$$X(Q - 1) = -X_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (X_m - X_{m+1})Q$$

et par suite

$$\begin{aligned} f^*(X(Q - 1)) &= \lambda^*(-X_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^*(X_m - X_{m+1}) \\ &= -\lambda^*(X_0) + \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda^*(X_m) - \lambda^*(X_{m+1})) = 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit  $Y \in \text{Ker } f$ . On fait la division euclidienne de  $Y$  par  $Q - 1$  :

$$Y = R + X(Q - 1), \quad R \in \mathcal{C}_{Q-1}, \quad X \in \mathbf{A}.$$

On a vu que  $X(Q - 1) \in \text{Ker } f^*$ . Il s'en suit que  $R \in \text{Ker } f^*$ . Comme  $\deg R < \deg(Q - 1) = \deg Q$ , on a  $f(R) = w(R)$ , c'est à dire  $R \in \text{Ker } \lambda^*$ .

□

On pose pour tout nombre entier  $N$  strictement positif et tout  $a \in \mathbb{F}_p$ ,

$$(3.1) \quad U_N(a) = |\{X \in \mathbf{A} ; \deg X < N \text{ et } f^*(X^2) = a\}|.$$

**Proposition 3.2** Soient  $(u_1, \dots, u_d)$  l'élément non nul de  $F^d$  tel que pour  $(x_0, \dots, x_{d-1}) \in F^d$ ,

$$\lambda(x_0, \dots, x_{d-1}) = u_1 x_0 + \dots + u_d x_{d-1}$$

et  $(z_{-m})_{m \geq 1}$  la suite d'éléments de  $F$  définie par

$$\frac{Y_\lambda}{Q-1} = \sum_{m=1}^{\infty} z_{-m} T^{-m},$$

où

$$Y_\lambda = [(Q-1)(u_1 T^{-1} + u_2 T^{-2} + \dots + u_d T^{-d})].$$

Soit  $\varphi$  la forme quadratique à  $d$  variables définie sur  $F^d$  par

$$\varphi(x_0, \dots, x_{d-1}) = \sum_{k=0}^{2d-2} z_{-k-1} \left( \sum_{i+j=k} x_i x_j \right).$$

Alors,

- (i) la forme  $\varphi$  n'est pas nulle ;
- (ii) pour tout  $a \in \mathbb{F}_p$  et tout nombre entier  $N > d$ , on a

$$U_N(a) = q^{N-d} |\{(x_0, \dots, x_{d-1}) \in F^d ; \text{tr}(\varphi(x_0, \dots, x_{d-1})) = a\}|.$$

*Preuve.* Posons  $D = Q - 1$ . La forme linéaire  $\lambda$  n'étant pas nulle, elle est surjective. La trace l'étant aussi,  $\lambda^*$  est surjective et il existe  $R \in \mathcal{C}_Q$  tel que  $\lambda^*(R) = a$ . Soit  $X \in \mathbf{A}$  tel que  $\deg X < N$ . Comme

$$\text{Ker } f^* = \text{Ker } \lambda^* + (Q-1) = \text{Ker } \lambda^* + (D),$$

on en déduit

$$U_N(a) = \sum_{A \in \text{Ker } \lambda^*} |\{X \in \mathbf{A} ; \deg X < N \text{ et } X^2 \equiv R + A \pmod{D}\}|.$$

Supposons  $N > d$ . La division euclidienne par  $D$  nous donne l'égalité

$$|\{X \in \mathbf{A} ; \deg X < N \text{ et } X^2 \equiv R + A \pmod{D}\}| = q^{N-d} v(R, A),$$

où

$$v(R, A) = |\{X \in \mathcal{C}_D ; X^2 \equiv R + A \pmod{D}\}|.$$

Si  $A \in \text{Ker}\lambda^*$ , on a par orthogonalité,

$$v(R, A) = \sum_{X \in \mathcal{C}_D} \frac{1}{\langle D \rangle} \sum_{Y \in \mathcal{C}_D} E\left(\frac{(X^2 - R - A)Y}{D}\right),$$

d'où avec (3.1)

$$(3.2) \quad q^{2d-N}U_N(a) = \sum_{Y \in \mathcal{C}_D} E\left(-\frac{RY}{D}\right) \sum_{X \in \mathcal{C}_D} E\left(\frac{X^2Y}{D}\right)\sigma_Y,$$

où

$$\sigma_Y = \sum_{A \in \text{Ker}\lambda^*} E\left(-\frac{AY}{D}\right).$$

Pour tout  $Y \in \mathcal{C}_D$ , l'application  $A \rightarrow E\left(-\frac{AY}{D}\right)$  est un caractère du groupe additif  $\text{Ker}\lambda^*$  et la somme  $\sigma_Y$  vaut donc 0 ou  $|\text{Ker}\lambda^*| = q^d/p$ . D'autre part,

$$\sum_{Y \in \mathcal{C}_D} \sum_{A \in \text{Ker}\lambda^*} E\left(-\frac{AY}{D}\right) = \sum_{A \in \text{Ker}\lambda^*} \sum_{Y \in \mathcal{C}_D} E\left(-\frac{AY}{D}\right) = q^d$$

et donc, il y a exactement  $q^d/|\text{Ker}\lambda^*| = p$  polynômes  $Y \in \mathcal{C}_D$  pour lesquels la somme  $\sigma_Y$  est non nulle. Déterminons ces polynômes.

Comme  $Y_\lambda = [D(u_1T^{-1} + u_2T^{-2} + \dots + u_dT^{-d})]$ , on a  $v_\infty(\frac{Y_\lambda}{D} - (u_1T^{-1} + u_2T^{-2} + \dots + u_dT^{-d})) > d$ . Donc, pour tout  $A \in \mathcal{C}_D$  et tout  $b \in \mathbb{F}_p$  on a  $v_\infty(b(\frac{Y_\lambda}{D} - (u_1T^{-1} + u_2T^{-2} + \dots + u_dT^{-d}))A) > 1$  d'où  $E(b\frac{Y_\lambda A}{D}) = E(b(u_1T^{-1} + u_2T^{-2} + \dots + u_dT^{-d})A)$ . Si  $A = \sum_{i=0}^{d-1} a_iT^i$ , alors

$$E\left(b\frac{Y_\lambda A}{D}\right) = e\left(\frac{\text{tr}(b(u_1a_0 + \dots + u_da_{d-1}))}{p}\right) = e\left(\frac{b\text{tr}(u_1a_0 + \dots + u_da_{d-1})}{p}\right).$$

En particulier,  $E\left(\frac{bY_\lambda A}{D}\right) = 1$  pour tout  $b \in \mathbb{F}_p$  et tout  $A \in \text{Ker}\lambda^*$ . Par suite, pour tout  $b \in \mathbb{F}_p$ , la somme  $\sigma_{bY_\lambda}$  est non nulle. Les  $p$  polynômes  $Y \in \mathcal{C}_D$  pour lesquels  $\sigma_Y \neq 0$  sont donc les polynômes  $bY_\lambda$ ,  $b$  décrivant  $\mathbb{F}_p$ . Avec (3.2) il vient

$$(3.3) \quad pq^{d-N}U_N(a) = \sum_{b \in \mathbb{F}_p} E\left(-\frac{bRY_\lambda}{D}\right) \sum_{X \in \mathcal{C}_D} E\left(\frac{bX^2Y_\lambda}{D}\right) = \sum_{X \in \mathcal{C}_D} \Theta_X,$$

où

$$(3.4) \quad \Theta_X = \sum_{b \in \mathbb{F}_p} E\left(b\left(\frac{Y_\lambda(X^2 - R)}{D}\right)\right).$$

Les sommes  $\Theta_X$  valent 0 ou  $p$ . Posons

$$R = \rho_0 + \rho_1 T + \cdots + \rho_{2d-2} T^{2d-2} \text{ avec } \rho_d = \rho_{d+1} = \cdots = \rho_{2d-2} = 0.$$

Pour  $X = \sum_{i=0}^{d-1} x_i T^i$  appartenant à  $\mathcal{C}_D$ ,

$$E(bY_\lambda(X^2 - R)/D) = e(\text{tr}(\sum_{k=0}^{2d-2} z_{-k-1} (\sum_{i+j=k} x_i x_j - \rho_k)) / p).$$

D'après (3.4), on a

$$\Theta_X = p \Leftrightarrow \text{tr}(\sum_{k=0}^{2d-2} z_{-k-1} (\sum_{i+j=k} x_i x_j - \rho_k)) = 0,$$

soit en posant

$$\varphi(x_0, \dots, x_{d-1}) = \sum_{k=0}^{2d-2} z_{-k-1} (\sum_{i+j=k} x_i x_j) \text{ et } b(a) = \sum_{k=0}^{d-1} z_{-k-1} \rho_k,$$

$$\Theta_X = p \Leftrightarrow \text{tr}(\varphi(x_0, \dots, x_{d-1}) - b(a)) = 0.$$

Observons que dans l'écriture

$$\frac{Y_\lambda}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} z_{-m} T^{-m}$$

on a  $z_{-m} = u_m$  pour  $m = 1, \dots, d$ . Cela montre d'une part que la forme  $\varphi$  n'est pas nulle et que d'autre part

$$b(a) = \sum_{k=0}^{d-1} u_{-k-1} \rho_k = \lambda(\rho_0, \dots, \rho_{d-1}).$$

On a donc  $\text{tr}(b(a)) = a$ , d'où, avec (3.3),

$$q^{d-N} U_N(a) = |\{(x_0, \dots, x_{d-1}) \in F^d \mid \text{tr}(\varphi(x_0, \dots, x_{d-1})) = a\}|,$$

ce qui est le résultat annoncé. □

On s'intéresse maintenant aux fonctions  $Q$ -additives à valeurs entières.

**Proposition 3.3** Soit  $f \in \mathcal{D}$ . Alors, pour tout nombre entier  $k$ , on a

$$\left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{k}{p}f(X^2)\right) \right| \gg q^N,$$

la constante impliquée par le symbole  $\gg$  ne dépendant que de  $q, Q$  et  $f$ .

*Preuve.* Posons

$$S_k(N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{k}{p}f(X^2)\right).$$

La fonction  $f$  étant à valeurs entières, on peut supposer  $0 \leq k < p$ . Si  $k = 0$ , alors  $S_k(N) = q^N$ . Il reste à prouver la proposition dans le cas où  $0 < k < p$ , ce que l'on supposera maintenant. Comme  $f \in \mathcal{D}$ , on a  $w = f|_{\mathcal{C}_Q} \in \mathcal{L}$ . Il existe  $\lambda$ , application linéaire non nulle de  $F^d$  dans  $F$  telle que pour tout  $X \in \mathcal{C}_Q$ ,  $\lambda^*(X)$  soit la classe de  $w(X)$  modulo  $p$ . Par  $Q$ -additivité, pour tout  $X \in \mathbf{A}$ , la classe de  $f(X)$  modulo  $p$  est  $f^*(X)$ . Donc,

$$S_k(N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{k}{p}(f(X^2))\right) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{k}{p}f^*(X^2)\right) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right)U_N(a).$$

Si l'on suppose  $N > d$ , il s'en suit que

$$S_k(N) = q^{N-d} \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right)u(a).$$

La forme  $\varphi_\lambda$  n'est pas nulle. Soit  $r \in [1, d]$  son rang et  $\delta$  son discriminant. Elle est équivalente à une forme diagonale  $\phi(y_1, \dots, y_d) = y_1^2 + \dots + y_{r-1}^2 + a_r y_r^2$  où  $a_r$  est un élément non nul de  $F$ . Par suite, pour tout  $a \in \mathbb{F}_p$ , on a

$$u(a) = q^{d-r} \nu(a),$$

où

$$\nu(a) = |\{(y_1, \dots, y_r \in F^r \mid \text{tr}(\theta(y_1, \dots, y_r)(\theta(y_1, \dots, y_r))) = a)\}|$$

et

$$\theta(y_1, \dots, y_r) = y_1^2 + \dots + y_{r-1}^2 + a_r y_r^2.$$

On a donc

$$\nu(a) = \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} n_\theta(x),$$

où

$$n_\theta(x) = |\{(y_1, \dots, y_r \in F^r \mid \theta(y_1, \dots, y_r) = x)\}|.$$

Les propositions 6.26 et 6.27 de [11] nous donnent les valeurs des nombres  $n_\theta(x)$ . Pour cela, notons  $\eta$  le caractère quadratique du corps  $F$  et remarquons que  $|\text{Ker}(\text{tr})| = q/p$ .

Supposons d'abord  $r$  pair. La proposition 6.26 de [11] nous donne

$$n_\theta(x) = q^{r-1} + v(x)q^{(r-2)/2}\eta((-1)^{r/2}\delta) \text{ avec } v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \neq 0, \\ q-1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si  $a \neq 0$ , les  $x \in F$  intervenant dans la somme  $\nu(a)$  sont non nuls. Si  $a = 0$ , 0 intervient dans la somme  $\nu(a)$  et il y a exactement  $\frac{q}{p} - 1$  éléments  $x$  non nuls intervenant dans  $\nu(a)$ . D'où,

$$\begin{aligned} S_k(N) &= q^{N-r} \left( \frac{q}{p} (q^{r-1} - q^{(r-2)/2}\eta((-1)^{r/2}\delta)) \sum_{\substack{a \in \mathbb{F}_p \\ a \neq 0}} e\left(\frac{ak}{p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q}{p} - 1\right) (q^{r-1} - q^{(r-2)/2}\eta((-1)^{r/2}\delta)) + q^{r-1} + (q-1)q^{(r-2)/2}\eta((-1)^{r/2}\delta) \right) \\ &= q^{N-r} \left( \frac{q}{p} (q^{r-1} - q^{(r-2)/2}\eta((-1)^{r/2}\delta)) \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) + q^{r/2}\eta((-1)^{r/2}\delta) \right) \\ &= q^{N-r/2}\eta((-1)^{r/2}\delta), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé lorsque  $r$  est pair.

Supposons maintenant  $r$  impair. La proposition 6.27 de [11] nous donne

$$n_\theta(x) = q^{r-1} + q^{(r-1)/2}\eta((-1)^{(r-1)/2}x\delta),$$

d'où

$$S_k(N) = q^{N-r} \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) \left( \frac{q^r}{p} + q^{(r-1)/2}\eta((-1)^{(r-1)/2}\delta) \right) \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} \eta(x),$$

$$= q^{N-(r+1)/2} \eta((-1)^{(r-1)/2} \delta) \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} \eta(x).$$

Posons

$$\sigma = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} \eta(x).$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{q}{p} \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) + \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} \eta(x) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{F}_p} e\left(\frac{ak}{p}\right) \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} (1 + \eta(x)) = \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} e\left(\frac{\text{tr}(x)k}{p}\right) (1 + \eta(x)) \\ &= \sum_{\substack{x \in F \\ \text{tr}(x)=a}} e\left(\frac{\text{tr}(x)k}{p}\right) |\{y \in F; y^2 = x\}| = \sum_{y \in F} e\left(\frac{\text{tr}(y^2)k}{p}\right) = \sum_{y \in F} \psi(ky^2), \end{aligned}$$

$\psi$  étant le caractère additif de  $F$  défini dans l'introduction. On a  $|\sigma| = q^{1/2}$  (voir par exemple [11, Théorème 5.15]) et il s'en suit que

$$|S_k(N)| = q^{N-r/2},$$

ce qui donne le résultat annoncé lorsque  $r$  est impair.

□

## 4 Transformées de Fourier des fonctions $Q$ -additives tronquées

Dans ce paragraphe ainsi que dans les paragraphes suivants  $w$  est une application de  $\mathcal{C}_Q$  dans  $\mathbb{Z}$  n'appartenant pas à l'ensemble  $\mathcal{L}$ . On note encore  $w$  la fonction  $Q$ -additive non dégénérée prolongeant  $w$  à  $\mathbf{A}$ . On introduit les

fonctions tronquées. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des nombres entiers tels que  $0 \leq \mu \leq \lambda$ . Pour tout  $X \in \mathbf{A}$  dont le développement en base  $Q$  est

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} X_i Q^i,$$

on définit  $w_\lambda(X)$  et  $w_{\mu,\lambda}(X)$  par

$$(4.1) \quad w_\lambda(X) = \sum_{n=0}^{\lambda-1} w(X_n), \quad w_{\mu,\lambda}(X) = \sum_{n=\mu}^{\lambda-1} w(X_n).$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , fixé. On pose pour tout  $H \in \mathbf{A}$ ,

$$(4.2) \quad F_\lambda(H) = F_\lambda^{(w)}(\alpha, H) = \langle Q \rangle^{-\lambda} \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} e(\alpha w_\lambda(X)) E\left(-\frac{HX}{Q^\lambda}\right),$$

$$(4.3) \quad F_{\mu,\lambda}(H) = F_{\mu,\lambda}^{(w)}(\alpha, H) = \langle Q \rangle^{-\lambda} \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} e(\alpha w_{\mu,\lambda}(X)) E\left(-\frac{HX}{Q^\lambda}\right).$$

Bien qu'élémentaire la proposition suivante sera très utilisée dans la suite de ce travail.

**Proposition 4.1** *Soit un nombre entier  $\lambda \geq 0$ .*

- (i) *Si  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$ , alors  $w_\lambda(X) = w(X)$ .*
- (ii) *Si  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  et  $Y \in \mathcal{C}_Q$ , alors  $w_{\lambda+1}(QX + Y) = w_\lambda(X) + w(Y) = w(X) + w(Y)$ .*
- (iii) *Si  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  et  $Y \in \mathbf{A}$ , alors  $w_\lambda(X + YQ^\lambda) = w(X) = w_\lambda(X)$ .*
- (iv) *Si  $\mu$  est un nombre entier tel que  $\mu < \lambda$ , si  $Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$  et si  $Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}$ , alors  $w_{\mu,\lambda}(YQ^\mu + Z) = w(Y) = w_{\lambda-\mu}(Y)$ .*
- (v) *Si  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  et  $Y \in \mathbf{A}$ , alors  $F_\lambda(X + YQ^\lambda) = F_\lambda(X)$ .*
- (vi) *Si  $X \in \mathbf{A}$  et  $Y \in \mathbf{A}$  sont congrus modulo  $Q^\lambda$ , alors,  $F_\lambda(X) = F_\lambda(Y)$ .*
- (vii) *Si  $\mu$  est un nombre entier tel que  $\mu < \lambda$ , si  $Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$  et si  $Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}$ , alors  $F_{\mu,\lambda}(YQ^\mu + Z) = F_{\lambda-\mu}(Y)$ .*

*Preuve.* Les points (i), (iii), et (iv) sont évidents; (v) et (vii) découlent de (4.2), (iii) et de la définition du caractère  $E$ ; (vi) est une conséquence de (v). Pour démontrer (ii), il suffit de vérifier que pour  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  et  $Y \in \mathcal{C}_Q$  on a  $w_{\lambda+1}(QX + Y) = w(QX + Y) = w(X) + w(Y) = w(X) + w(Y) = w_\lambda(X) + w(Y)$ .

□

**Proposition 4.2** *On a*

$$F_0(H) = 1,$$

et pour tout nombre entier  $\lambda \geq 1$ , on a

$$\langle Q \rangle^\lambda F_\lambda(H) = \prod_{j=1}^{\lambda} \phi_j(Q, w, \alpha, H),$$

les fonctions  $\phi_j$  étant définies par (2.8).

*Preuve.* Utilisant la proposition 4.1-(ii), la preuve est analogue à celle de la relation (17) de [12].

□

**Proposition 4.3** *Soient un nombre entier  $\lambda > 0$  et  $H \in \mathbf{A}$ . Alors,*

$$(4.4) \quad |F_\lambda(H)| \leq \langle Q \rangle^{-C(Q, w, \alpha)\lambda},$$

avec

$$(4.5) \quad C(Q, w, \alpha) = \frac{c_{Q, w, \alpha}}{\langle Q \rangle \deg Q \log q},$$

où  $c_{Q, w, \alpha}$  est défini dans la Proposition 2.5.

*Preuve.* La proposition précédente donne le résultat quand  $\lambda = 0$ . Lorsque  $\lambda > 0$ , la proposition 4.2 jointe à la majoration (2.9) donne

$$|F_\lambda(H)| = \langle Q \rangle^{-\lambda} \prod_{j=1}^{\lambda} |\phi_j(Q, w, \alpha, H)| \leq \left(1 - \frac{c_{Q, w, \alpha}}{\langle Q \rangle}\right)^\lambda.$$

Soit  $C = C_{Q, w, \alpha} = c_{Q, w, \alpha} / \langle Q \rangle \log \langle Q \rangle$ . Alors,  $C \log \langle Q \rangle \leq \log \left( \frac{1}{1 - c_{Q, w, \alpha} / \langle Q \rangle} \right)$ , d'où  $1 - c_{Q, w, \alpha} / \langle Q \rangle \leq \langle Q \rangle^{-C}$ .

□

**Proposition 4.4** *Soient  $A \in \mathbf{A}$  et  $\delta$  et  $\lambda$  des nombres entiers tels que  $0 \leq \delta \leq \lambda$ . Alors,*

$$\sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_\lambda(X)|^2 = |F_\delta(A)|^2.$$

*Preuve.* Utilisant la proposition 4.1-(ii), la preuve est analogue à celle du lemme 19 de [13].

□

**Proposition 4.5** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des nombres entiers tels que  $0 \leq \mu < \lambda$ . Alors, pour tout  $H \in \mathbf{A}$ , on a

$$\langle Q \rangle^\mu F_{\mu,\lambda}(H) = F_{\lambda-\mu}(H) S\left(\frac{H}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right).$$

*Preuve.* Utilisant la proposition 4.1-(iv), la preuve est analogue à celle à celle du lemme 10 de [12].

□

**Proposition 4.6** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des nombres entiers tel que  $0 \leq \mu < \lambda$ . Alors,

$$\sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} |F_{\mu,\lambda}(X)| = \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(R)| \leq \langle Q \rangle^{\lambda-\mu}.$$

*Preuve.* Ici on fait la division euclidienne par  $Q^{\lambda-\mu}$  des polynômes  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$ . Avec la proposition précédente, il vient

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^\mu \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} |F_{\mu,\lambda}(X)| &= \sum_{\substack{R \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(R + LQ^{\lambda-\mu})| |S\left(\frac{R + LQ^{\lambda-\mu}}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right)| = \\ &= \sum_{\substack{R \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(R + LQ^{\lambda-\mu})| S\left(\frac{R + LQ^{\lambda-\mu}}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right) \end{aligned}$$

puisque d'après la proposition 2.1, les sommes  $S\left(\frac{R + LQ^{\lambda-\mu}}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right)$  sont positives ou nulles. La partie (v) de la proposition 4.1 nous donne ensuite

$$\langle Q \rangle^\mu \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} |F_{\mu,\lambda}(H)| = \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(R)| \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} S\left(\frac{R + LQ^{\lambda-\mu}}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right).$$

Or,

$$\sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} S\left(\frac{R + LQ^{\lambda-\mu}}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right) = \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\left(\frac{R}{Q^\lambda} + \frac{L}{Q^\mu}\right)X\right)$$

$$= \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\frac{RX}{Q^\lambda}\right) \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\frac{LX}{Q^\mu}\right) = \langle Q \rangle^\mu$$

d'après le corollaire 2.2. En reportant cette égalité dans la somme précédente, on obtient

$$\sum_{H \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}} |F_{\mu,\lambda}(H)| = \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(R)|$$

et on majore trivialement  $|F_{\lambda-\mu}(R)|$  par 1.

□

**Proposition 4.7** *Soient  $\lambda, \delta$  et  $\mu$  des nombres entiers tels que  $1 \leq \mu < \lambda, \lambda - \mu \leq \delta \leq \lambda$ . Si  $A \in \mathbf{A}$ , alors*

$$\sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(X)| = \begin{cases} |F_{\lambda-\mu}(A)| & \text{si } v_\infty(\{A/Q^\delta\}) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Preuve.* Soit  $R \in \mathcal{C}_{Q^\delta}$  congru à  $A$  modulo  $Q^\delta$ . Alors  $A$  et  $R$  sont congrus modulo  $Q^{\lambda-\mu}$ . Les polynômes  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  congrus à  $A$  modulo  $Q^\delta$  sont de la forme  $X = R + LQ^\delta$  avec  $L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}$ ; ils sont congrus à  $R$  modulo  $Q^{\lambda-\mu}$  et vérifient, d'après la proposition 4.5, la relation

$$\langle Q \rangle^\mu F_{\mu,\lambda}(X) = F_{\lambda-\mu}(R) S\left(\frac{R + LQ^\delta}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right).$$

La positivité des sommes  $S\left(\frac{R+LQ^\delta}{Q^\lambda}, \mu \deg Q\right)$  jointe à la proposition 4.1-(vi) permet d'écrire

$$\langle Q \rangle^\mu \sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(X)| = |F_{\lambda-\mu}(A)| \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} S\left(\frac{R}{Q^\lambda} + \frac{L}{Q^{\lambda-\delta}}, \mu \deg Q\right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} S\left(\frac{R}{Q^\lambda} + \frac{L}{Q^{\lambda-\delta}}, \mu \deg Q\right) &= \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\left(\frac{R}{Q^\lambda} + \frac{L}{Q^{\lambda-\delta}}\right)X\right) \\ &= \sum_{X \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\frac{RX}{Q^\lambda}\right) \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} E\left(\frac{LX}{Q^{\lambda-\delta}}\right) = \langle Q \rangle^{\lambda-\delta} \sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\mu} \\ X \equiv 0 \pmod{Q^{\lambda-\delta}}} } E\left(\frac{RX}{Q^\lambda}\right). \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.2, la proposition 2.1 donne alors

$$\begin{aligned} & \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} S\left(\frac{R}{Q^\lambda} + \frac{L}{Q^{\lambda-\delta}}, \mu \deg Q\right) \\ &= \langle Q \rangle^{\lambda-\delta} \times \begin{cases} \langle Q \rangle^{\mu+\delta-\lambda} & \text{si } v_\infty(R/Q^\delta) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ H \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(H)| = |F_{\lambda-\mu}(A)| \times \begin{cases} 1 & \text{si } v_\infty(R/Q^\delta) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on conclut en observant que  $v_\infty(R/Q^\delta) = v_\infty(\{A/Q^\delta\})$ .

□

**Proposition 4.8** *Soient  $\lambda, \delta$  et  $\mu$  des nombres entiers tels que  $1 \leq \mu < \lambda$  et  $\delta \leq \lambda - \mu$ . Si  $(A, L) \in \mathbf{A}^2$ , alors*

$$\sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(X)F_{\lambda-\mu}(X+L)| \leq |F_\delta(A)||F_\delta(A+L)|.$$

*Preuve.* Notons  $B$  la somme à majorer et  $R \in \mathcal{C}_{Q^\delta}$  le reste de  $A$  modulo  $Q^\delta$ . Les polynômes  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  congrus à  $R$  modulo  $Q^\delta$  sont de la forme  $X = Y + ZQ^{\lambda-\mu}$  avec  $Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}, Y \equiv R \pmod{Q^\delta}$  et  $Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}$ . D'après les propositions 4.5 et 4.1-(v), on obtient comme ci-dessus

$$\langle Q \rangle^\mu B = \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(Y)||F_{\lambda-\mu}(L+Y)| \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} S\left(\frac{Y}{Q^\lambda} + \frac{Z}{Q^\mu}, \mu \deg Q\right).$$

Mais, pour tout  $Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} S\left(\frac{Y}{Q^\lambda} + \frac{Z}{Q^\mu}, \mu \deg Q\right) &= \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} \sum_{W \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\left(\frac{Y}{Q^\lambda} + \frac{Z}{Q^\mu}\right)W\right) \\ &= \sum_{W \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\frac{YW}{Q^\lambda}\right) \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^\mu}} E\left(\frac{ZW}{Q^\mu}\right) = \langle Q \rangle^\mu \end{aligned}$$

d'après le corollaire 2.2. On a donc,

$$B = \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(Y)| |F_{\lambda-\mu}(L+Y)|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$B^2 \leq \left( \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(Y)|^2 \right) \left( \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(L+Y)|^2 \right).$$

Notons  $V$  le reste de  $L$  modulo  $Q^{\lambda-\mu}$ . Pour tout  $Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$ , on a avec la proposition 4.1-(vi)  $F_{\lambda-\mu}(L+Y) = F_{\lambda-\mu}(V+Y)$ , d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(L+Y)|^2 &= \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Y \equiv R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(V+Y)|^2 \\ &= \sum_{\substack{Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}} \\ Z \equiv V+R \pmod{Q^\delta}}} |F_{\lambda-\mu}(Z)|^2. \end{aligned}$$

La proposition 4.4 donne alors

$$B^2 \leq |F_\delta(R)|^2 |F_\delta(V+R)|^2$$

On conclut en remarquant que puisque  $R \equiv A \pmod{Q^\delta}$  et  $V+R \equiv L+A \pmod{Q^\delta}$ , on a  $F_\delta(R) = F_\delta(A)$ ,  $F_\delta(R+V) = F_\delta(A+L)$ .

□

**Proposition 4.9** *Soient  $\lambda, \delta$  et  $\mu$  des nombres entiers tels que  $1 \leq \mu < \lambda, \lambda - \mu \leq \delta \leq \lambda$ . Si  $A \in \mathbf{A}$ , alors*

$$\sum_{\substack{X, Y \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X-Y \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu, \lambda}(X) F_{\mu, \lambda}(Y)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } v_\infty(\{A/Q^\delta\}) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Preuve.* Posons

$$B' = \sum_{\substack{X, Y \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X - Y \equiv A \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu, \lambda}(X)F_{\mu, \lambda}(Y)|.$$

Alors avec les proposition 4.5 et 2.1, il vient

$$B' = \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A + Y \pmod{Q^\delta} \\ v_\infty\left(\frac{R(Y)}{Q^\lambda}\right) > \mu \deg Q}} |F_{\mu, \lambda}(Y)||F_{\lambda - \mu}(R(Y))|.$$

Comme  $\delta \geq \lambda - \mu$ , la proposition 4.1-(vi) nous donne

$$B' = \sum_{\substack{Y \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv A + Y \pmod{Q^\delta} \\ v_\infty\left(\frac{R(Y)}{Q^\lambda}\right) > \mu \deg Q}} |F_{\mu, \lambda}(Y)||F_{\lambda - \mu}(A + Y)|. \quad (\star)$$

Soit  $A' \in \mathcal{C}_{Q^\delta}$  congru à  $A$  modulo  $Q^\delta$ . Pour  $Y \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  on a

$$v_\infty\left(\left\{\frac{R(Y)}{Q^\lambda}\right\}\right) > \mu \deg Q \Leftrightarrow v_\infty\left(\left\{\frac{A + Y}{Q^\delta}\right\}\right) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q.$$

Un tel  $Y$  s'écrit  $Y = R + ZQ^\delta$  avec  $R \in \mathcal{C}_{Q^\delta}$  et  $Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda - \delta}}$ , ce qui donne  $\left\{\frac{A + Y}{Q^\delta}\right\} = \frac{A' + V}{Q^\delta}$ . On a alors

$$v_\infty\left(\left\{\frac{R(y)}{Q^\lambda}\right\}\right) > \mu \deg Q \Leftrightarrow \deg(A' + V) < (\lambda - \mu) \deg Q.$$

La relation  $(\star)$  devient

$$B' = \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda - \delta}}} \sum_{\substack{V \in \mathcal{C}_{Q^\delta} \\ A' + V \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda - \mu}}}} |F_{\mu, \lambda}(V + ZQ^\delta)F_{\lambda - \mu}(A' + V + ZQ^\delta)|.$$

Comme  $\lambda - \mu \leq \delta$ , en posant  $S = A' + V$ , on obtient

$$B' = \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda - \delta}}} \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda - \mu}}} |F_{\mu, \lambda}(S - A' + ZQ^\delta)F_{\lambda - \mu}(S + ZQ^\delta)|.$$

D'après la proposition 4.1-(vi), pour  $S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$ , on a  $F_{\lambda-\mu}(S + ZQ^\delta) = F_{\lambda-\mu}(S)$ , d'où,

$$\begin{aligned} B' &= \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\mu,\lambda}(S - A' + ZQ^\delta)F_{\lambda-\mu}(S)| \\ &= \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(S)| \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(S - A' + ZQ^\delta)|. \end{aligned}$$

Lorsque  $Z$  décrit l'ensemble  $\mathcal{C}_{Q^{\lambda-\delta}}$ , le polynôme  $S - A' + ZQ^\delta$  décrit l'ensemble des polynômes  $X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda}$  congrus à  $S - A'$  modulo  $Q^\delta$ . Par suite,

$$B' = \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(S)| \sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv S - A' \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(X)|.$$

La proposition 4.7 nous donne pour  $S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}$  fixé,

$$\sum_{\substack{X \in \mathcal{C}_{Q^\lambda} \\ X \equiv S - A' \pmod{Q^\delta}}} |F_{\mu,\lambda}(X)| = \begin{cases} |F_{\lambda-\mu}(S - A')| & \text{si } v_\infty(\{\frac{S-A'}{Q^\delta}\}) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} v_\infty(\{\frac{S - A'}{Q^\delta}\}) > (\mu + \delta - \lambda) \deg Q &\Leftrightarrow \deg(S - A') < (\lambda - \mu) \deg Q \\ &\Leftrightarrow \deg(A') < (\lambda - \mu) \deg Q. \end{aligned}$$

Donc, si  $\deg A' \geq (\lambda - \mu) \deg Q$ , alors  $B' = 0$  et si  $\deg A' < (\lambda - \mu) \deg Q$ , alors

$$B' = \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^{\lambda-\mu}}} |F_{\lambda-\mu}(S)| |F_{\lambda-\mu}(S - A')|$$

et la proposition 4.8 donne  $B' \leq |F_0(0)| |F_0(-A')| = 1$ .

□

## 5 Majoration de la somme $\Sigma(N)$

Le nombre réel  $\alpha$  étant toujours fixé. Soient un nombre entier  $N > 0$  et  $\mathcal{X} = \mathcal{X}(N)$  l'ensemble des polynômes  $X \in \mathbf{A}$  tels que

$$(5.1) \quad \nu \deg Q \leq \deg X < N,$$

où  $\nu = \nu(N)$  est le nombre entier déterminé par la condition

$$(5.2) \quad \nu \deg Q < N \leq (\nu + 1) \deg Q.$$

Observons que l'ensemble  $\mathcal{X}$  a au plus  $q^N$  éléments. Posons

$$(5.3) \quad \Sigma = \Sigma(N) = \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha w(X^2)).$$

Nous supposerons  $N$  assez grand pour que  $\nu(N) \geq 30 \deg Q$ . Soient des nombres entiers  $r$  et  $m$  tels que

$$(5.4) \quad \begin{cases} 1 < r \leq \frac{\nu-3}{5 \deg Q - 1} & (i) \\ m < \nu - r, & (ii) \\ m < \nu + r + 3 - 2r \deg Q, & (iii) \\ 2m > \nu + r(1 + \deg Q). & (iv) \end{cases}$$

Observons qu'à l'exception du cas  $\deg Q = 1$ , la condition (iii) implique la condition (ii). Observons aussi que la condition (i) assure la compatibilité des conditions (ii) et (iv) et celle des conditions (iii) et (iv). On pose

$$(5.5) \quad \ell = \nu + r + 1$$

## 5.1 Utilisation des fonctions de poids tronquées

La proposition suivante est un analogue polynomial de l'inégalité de Van der Corput (Voir [6, Lemme 3.2]).

**Proposition 5.1** *On a*

$$(5.6) \quad |\Sigma(N)|^2 \leq q^N \max_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} \left| \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w((X+R)^2)) - w(X^2)) \right|$$

*Preuve.* Soit  $R \in \mathcal{C}_{Q^r}$ . Puisque  $r < \nu$ , l'application  $X \rightarrow X + R$  est une permutation de l'ensemble  $\mathcal{X}$ . On a donc

$$\sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha w(X^2)) = \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha w((X+R)^2)).$$

Par suite,

$$\langle Q \rangle^r \Sigma = \langle Q \rangle^r \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha w(X^2)) = \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha w((X+R)^2))$$

$$= \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} e(\alpha w((X + R)^2)).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^{2r} |\Sigma|^2 &\leq |\mathcal{X}| \sum_{X \in \mathcal{X}} \left| \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} e(\alpha w((X + R)^2)) \right|^2 \\ &\leq q^N \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{\substack{R_1 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ R_2 \in \mathcal{C}_{Q^r}}} e(\alpha(w((X + R_1)^2) - w((X + R_2)^2))) \\ &= q^N \sum_{\substack{R_1 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ R_2 \in \mathcal{C}_{Q^r}}} \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w((X + R_1)^2) - w((X + R_2)^2))). \end{aligned}$$

L'application  $X \rightarrow Y = X + R_2$  est une permutation de  $\mathcal{X}$  et l'application  $R_1 \rightarrow R = R_1 - R_2$  est une permutation de  $\mathcal{C}_{Q^r}$  ; donc,

$$\langle Q \rangle^{2r} |\Sigma|^2 \leq q^N \sum_{\substack{R_2 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ R \in \mathcal{C}_{Q^r}}} \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\alpha(w((Y + R)^2) - w(Y^2))),$$

d'où,

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^r |\Sigma|^2 &\leq q^N \sum_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\alpha(w((Y + R)^2) - w(Y^2))) \\ &\leq q^N \langle Q \rangle^r \max_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} \left| \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\alpha(w((Y + R)^2) - w(Y^2))) \right|. \end{aligned}$$

□

On en déduit

**Proposition 5.2** *On a*

$$(5.7) \quad |\Sigma(N)|^2 \leq q^N \max_{R \in \mathcal{C}_{Q^r}} (|T(N, r, R)|),$$

où

$$(5.8) \quad T = T(N, r, R) = \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_\ell((X + R)^2)) - w_\ell(X^2)),$$

$w_\ell$  étant la fonction tronquée introduite à la section 4.

*Preuve.* Soient  $X \in \mathcal{X}$  et  $R \in \mathcal{C}_{Q^r}$ . On a  $\deg X < N \leq (\nu + 1) \deg Q$ , d'où  $\deg(XR) \leq (\nu + r + 1) \deg Q - 2 = \ell \deg Q - 2$ . On a aussi  $\deg(R^2) \leq 2r \deg Q - 2 \leq \ell \deg Q - 2$ . Par suite,  $\deg((X + R)^2 - X^2) \leq \ell \deg Q - 2$ . Si  $X^2 = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n Q^n$  et  $(X + R)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n Q^n$  sont les représentations respectives de  $X^2$  et  $(X + R)^2$  en base  $Q$ , on a  $Y_j = Z_j$  pour tout nombre entier  $j \geq \ell$ , d'où, avec (4.1),  $w((X + R)^2) - w_\ell((X + R)^2) = w(X^2) - w_\ell(X^2)$  ou encore  $w((X + R)^2) - w(X^2) = w_\ell((X + R)^2) - w_\ell(X^2)$ . On conclut avec (5.6). □

En appliquant une deuxième fois l'inégalité de Van der Corput, on obtient

**Proposition 5.3** *Soit  $R \in \mathcal{C}_{Q^r}$ . Alors*

$$(5.9) \quad T^2(N, r, R) \leq q^N \max_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} U(N, r, m, R, S),$$

où

$$(5.10) \quad U(N, r, m, R, S) =$$

$$\left| \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_{m,\ell}((X + R + SQ^m)^2) - w_{m,\ell}((X + R)^2) - w_{m,\ell}((X + SQ^m)^2) + w_{m,\ell}(X^2))) \right|.$$

*Preuve.* Soit  $S \in \mathcal{C}_{Q^r}$ . Alors, avec (5.4-(ii)),  $\deg(SQ^m) < (m + r) \deg Q < \nu \deg Q$ . L'application  $X \rightarrow X + SQ^m$  est donc une permutation de l'ensemble  $\mathcal{X}$ . De ce fait,

$$T = \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_\ell((X + R + SQ^m)^2) - w_\ell((X + SQ^m)^2))).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^r T &= \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_\ell((X + R + SQ^m)^2) - w_\ell((X + SQ^m)^2))) \\ &= \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} e(\alpha(w_\ell((X + R + SQ^m)^2) - w_\ell((X + SQ^m)^2))) \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle Q \rangle^{2r} |T|^2 \leq q^N \sum_{X \in \mathcal{X}} \left| \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} e(\alpha(w_\ell((X + R + SQ^m)^2) - w_\ell((X + SQ^m)^2))) \right|^2$$

$$= q^N \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{\substack{S_1 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ S_2 \in \mathcal{C}_{Q^r}}} e(\theta_X(S_1) - \theta_X(S_2)),$$

où pour  $S \in \mathcal{C}_{Q^r}$ ,  $\theta_X(S) = \alpha(w_\ell((X + R + SQ^m)^2) - w_\ell((X + SQ^m)^2))$ . En inversant l'ordre des sommations on obtient

$$\langle Q \rangle^{2r} |T|^2 \leq q^N \sum_{\substack{S_1 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ S_2 \in \mathcal{C}_{Q^r}}} \sum_{X \in \mathcal{X}} e(\theta_X(S_1) - \theta_X(S_2)).$$

Les applications  $X \rightarrow Y = X + S_2 Q^m$  et  $S_1 \rightarrow S = S_1 - S_2$  sont des permutations de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{C}_{Q^r}$  respectivement. Donc,

$$\langle Q \rangle^{2r} |T|^2 \leq q^N \sum_{\substack{S_2 \in \mathcal{C}_{Q^r} \\ S \in \mathcal{C}_{Q^r}}} \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\theta_{Y - S_2 Q^m}(S_2 + S) - \theta_{Y - S_2 Q^m}(S_2)),$$

d'où

$$\langle Q \rangle^{2r} |T|^2 \leq q^N \sum_{S_2 \in \mathcal{C}_{Q^r}} \sum_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_\ell((Y + R + SQ^m)^2) - w_\ell((Y + SQ^m)^2) - w_\ell((Y + R)^2) + w_\ell(Y^2))),$$

ce qui nous donne

$$|T|^2 \leq q^N \max_{S \in \mathcal{C}_{Q^r}} U(N, r, m, R, S),$$

avec

$$U = U(N, r, m, R, S) = \left| \sum_{Y \in \mathcal{X}} e(\alpha(w_\ell((Y + R + SQ^m)^2) - w_\ell((Y + SQ^m)^2) - w_\ell((Y + R)^2) + w_\ell(Y^2)) \right|.$$

Montrons que  $U$  vérifie l'égalité (5.10). Soient  $Z \in \mathcal{X}$  et  $S \in \mathcal{C}_{Q^r}$ . Si  $Z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n Q^n$  et  $(Z + SQ^m)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} W_n Q^n$  sont les représentations respectives de  $Z^2$  et  $(Z + SQ^m)^2$  en base  $Q$ , alors  $V_j = W_j$  pour tout nombre entier  $j < m$ , d'où  $w_m((Z + SQ^m)^2) = w_m(Z^2)$ . D'autre part,  $w_\ell(Z^2) = w_m(Z^2) + w_{m,\ell}(Z^2)$  et  $w_\ell((Z + SQ^m)^2) = w_m((Z + SQ^m)^2) + w_{m,\ell}((Z + SQ^m)^2)$ . Il s'en suit que

$$w_\ell((Z + SQ^m)^2) - w_\ell(Z^2) = w_{m,\ell}((Z + SQ^m)^2) - w_{m,\ell}(Z^2).$$

On reporte cette égalité dans la formule définissant  $U$  en prenant  $Z$  égal à  $Y + R$  puis à  $Y$  et on obtient (5.10). □

## 5.2 Fonction caractéristique des carrés

**Proposition 5.4** *Pour  $R$  et  $S$  dans  $\mathcal{C}_{Q^r}$ , on a*

$$(5.11) \quad \langle Q \rangle^\ell U(N, r, m, R, S) \\ = \left| \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \sum_{(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4} F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(-B) F_{m, \ell}(-G) F_{m, \ell}(H) \Lambda(L) \right|,$$

où

$$(5.12) \quad \Lambda(L) = \Lambda(N, r, R, S, L, A, B, G, H) = \\ \sum_{M \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} E\left(\frac{(M + R + SQ^m)^2 A + (M + R)^2 B + (M + SQ^m)^2 G + M^2 H + LM}{Q^\ell}\right).$$

*Preuve.* On pose  $U = U(N, r, m, R, S)$  et pour  $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{C}_{Q^\ell}, \rho \in \{0, 1\}$  et  $\sigma \in \{0, 1\}$ ,

$$\Theta = \Theta(X, Y, \rho, \sigma) = \sum_{Z \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} E\left(\frac{((X + \rho R + \sigma SQ^m)^2 - Y)Z}{Q^\ell}\right).$$

D'après le corollaire 2.2, on a

$$\Theta = \begin{cases} \langle Q \rangle^\ell & \text{si } Y \equiv (X + \rho R + \sigma SQ^m)^2 \pmod{Q^\ell}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où  $\Theta = \bar{\Theta}$  et

$$\langle Q \rangle^{-\ell} e(\alpha w_{m, \ell}(Y)) \Theta = \begin{cases} e(\alpha w_{m, \ell}(Y)) & \text{si } Y \equiv (X + \rho R + \sigma SQ^m)^2 \pmod{Q^\ell}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, d'après la proposition 4.1-(iv), si  $Y \equiv (X + \rho R + \sigma SQ^m)^2 \pmod{Q^\ell}$ , alors  $w_{m, \ell}(Y) = w_{m, \ell}((X + \rho R + \sigma SQ^m)^2)$ . Par suite, pour  $X \in \mathcal{X}$  et  $(\rho, \sigma) \in \{0, 1\}^2$ , on a

$$e(\alpha w_{m, \ell}((X + \rho R + \sigma SQ^m)^2)) = \sum_{Y \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \langle Q \rangle^{-\ell} e(\alpha w_{m, \ell}(Y)) \Theta(X, Y, \rho, \sigma).$$

On porte cette relation dans l'égalité (5.10). Il vient

$$\langle Q \rangle^{4\ell} U = \left| \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{(Y, Z, V, W) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4} e(\alpha w_{m, \ell}(Y)) \Theta(X, Y, 1, 1) e(-\alpha w_{m, \ell}(Z)) \Theta(X, Z, 1, 0) \right|$$

$$\times e(-\alpha w_{m,\ell}(V))\Theta(X, V, 0, 1)e(\alpha w_{m,\ell}(W))\Theta(X, W, 0, 0)|$$

On inverse l'ordre des sommations après avoir remplacé les  $\Theta(X, \cdot, \rho, \sigma)$  par leurs valeurs et on obtient :

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^{4\ell} U &= \left| \sum_{Y, A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} e(\alpha w_{m,\ell}(Y)) E\left(\frac{-YA}{Q^\ell}\right) \sum_{Z, B \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} e(-\alpha w_{m,\ell}(Z)) E\left(\frac{-ZB}{Q^\ell}\right) \right. \\ &\times \sum_{V, G \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} e(-\alpha w_{m,\ell}(V)) E\left(\frac{-VG}{Q^\ell}\right) \sum_{W, H \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} e(\alpha w_{m,\ell}(W)) E\left(\frac{-WH}{Q^\ell}\right) \times \Psi \left. \right|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(A, B, G, H) = \\ &\sum_{X \in \mathcal{X}} E \left( \frac{(X + R + SQ^m)^2 A + (X + R)^2 B + (X + SQ^m)^2 G + X^2 H}{Q^\ell} \right). \end{aligned}$$

Avec (4.3), on a

$$U = \left| \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} F_{m,\ell}(A) \sum_{B \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} F_{m,\ell}(-B) \sum_{G \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} F_{m,\ell}(-G) \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} F_{m,\ell}(H) \Psi \right| \quad (\star)$$

Il nous reste à transformer la somme  $\Psi(A, B, G, H)$ . Pour cela, on répartit les  $X \in \mathcal{X}$  dans les différentes classes modulo  $Q^\ell$ . On a

$$\begin{aligned} \Psi(A, B, G, H) &= \\ &\sum_{M \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \equiv M \pmod{Q^\ell}}} E \left( \frac{(X + R + SQ^m)^2 A + (X + R)^2 B + (X + SQ^m)^2 G + X^2 H}{Q^\ell} \right) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ X \equiv M \pmod{Q^\ell}}} E \left( \frac{(M + R + SQ^m)^2 A + (M + R)^2 B + (M + SQ^m)^2 G + M^2 H}{Q^\ell} \right). \end{aligned}$$

Le corollaire 2.2 nous donne alors

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^\ell \Psi(A, B, G, H) &= \sum_{M \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{X \in \mathcal{X}} \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} E \left( \frac{L(M - X)}{Q^\ell} \right) \\ &\times E \left( \frac{(M + R + SQ^m)^2 A + (M + R)^2 B + (M + SQ^m)^2 G + M^2 H}{Q^\ell} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle Q \rangle^\ell \Psi(A, B, G, H) = \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \\
&\times \sum_{M \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} E\left(\frac{(M + R + SQ^m)^2 A + (M + R)^2 B + (M + SQ^m)^2 G + M^2 H + LM}{Q^\ell}\right).
\end{aligned}$$

En reportant cette valeur dans  $(\star)$  on obtient (5.11), ce qui achève la preuve de la proposition 5.4.

□

**Lemme 5.5** *On a*

$$(5.13) \quad \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \left| \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \right| \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) \langle Q \rangle^\ell.$$

*Preuve.* Posons pour tout  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$ ,  $\sigma_L = \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right)$ . On a

$$\sigma_L = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \nu \deg Q \leq \deg X < N}} E\left(\frac{LX}{Q^\ell}\right) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} E\left(\frac{LX}{Q^\ell}\right) - \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < \nu \deg Q}} E\left(\frac{LX}{Q^\ell}\right).$$

La proposition 2.1 donne la valeur de  $\sigma_L$  en fonction de  $v_\infty(L/Q^\ell) = \ell \deg Q - \deg L$  :

$$\sigma_L = \begin{cases} q^N - q^{\nu \deg Q} & \text{si } \deg L < \ell \deg Q - N, \\ -q^{\nu \deg Q} & \text{si } \ell \deg Q - N \leq \deg L < (\ell - \nu) \deg Q, \\ 0 & \text{si } \deg L \geq (\ell - \nu) \deg Q. \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \left| \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \right| &= \sum_{\substack{L \in \mathbf{A} \\ \deg L < \ell \deg Q - N}} (q^N - \langle Q \rangle^\nu) + \sum_{\substack{L \in \mathbf{A} \\ \ell \deg Q - N \leq \deg L < (\ell - \nu) \deg Q}} \langle Q \rangle^\nu \\
&= \langle Q \rangle^\ell q^{-N} (q^N - \langle Q \rangle^\nu) + (\langle Q \rangle^{\ell - \nu} - \langle Q \rangle^\ell q^{-N}) \langle Q \rangle^\nu = 2 \langle Q \rangle^\ell (1 - \langle Q \rangle^\nu q^{-N}) \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) \langle Q \rangle^\ell.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 5.6** *Pour tout  $(R, S) \in (\mathcal{C}_{Qr})^2$  on a*

$$(5.14) \quad U(N, r, m, R, S) \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) \langle Q \rangle^{\ell/2} \max_{L \in \mathcal{C}_{Q^{-\ell}}} \left( \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell}} |D|^{1/2} W(L, D) \right),$$

avec

$$(5.15) \quad W(L, D) = \sum_{(A, B, G, H) \in \mathcal{G}(L, D)} |F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(-B) F_{m, \ell}(-G) F_{m, \ell}(H)|,$$

$\mathcal{G}(L, D)$  désignant l'ensemble des  $(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4$  vérifiant les conditions

$$(5.16) \quad \begin{cases} (A + B + G + H, Q^\ell) = D & (i), \\ L + 2R(A + B) + 2SQ^m(A + G) \equiv 0 \pmod{D} & (ii). \end{cases}$$

*Preuve.* Si  $(R, S) \in (\mathcal{C}_{Qr})^2$ , on pose  $U = U(N, r, m, R, S)$  et pour  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$

$$u(L) = \sum_{(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4} F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(-B) F_{m, \ell}(-G) F_{m, \ell}(H) \Lambda(L).$$

Alors, avec (5.11),

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle^\ell U &= \left| \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) u(L) \right| \leq \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} |u(L)| \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \\ &\leq \max_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} |u(L)| \sum_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} \left| \sum_{X \in \mathcal{X}} E\left(-\frac{LX}{Q^\ell}\right) \right|, \end{aligned}$$

d'où, avec (5.13),

$$U \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) \max_{L \in \mathcal{C}_{Q^m}} |u(L)|.$$

Avec (5.12) et (2.10), on a

$$\begin{aligned} |u(L)| &\leq \sum_{(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4} |F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(-B) F_{m, \ell}(-G) F_{m, \ell}(H)| \\ &\times |\Gamma(Q^\ell, A + B + G + H, L + 2R(A + B) + 2SQ^m(A + G))|. \end{aligned}$$

On divise la somme ci-dessus en sommes partielles, suivant les valeurs de  $D = (A + B + G + H, Q^\ell)$ . La Proposition 2.7 jointe à la majoration (2.11) nous donnent alors

$$|u(L)| \leq \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell}} \sum_{\substack{(A,B,G,H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4 \\ (A+B+G+H, Q^\ell) = D \\ D|(L+2R(A+B)+2SQ^m(A+G))}} |F_{m,\ell}(A)F_{m,\ell}(-B)F_{m,\ell}(-G)F_{m,\ell}(H)| \langle D \rangle^{1/2} \langle Q \rangle^{\ell/2},$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

Soit, pour  $R \in \mathcal{C}_{Q^r}$ ,  $S \in \mathcal{C}_{Q^r}$  et  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$ ,

$$(5.17) \quad V = V(R, S, L) = \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell}} \langle D \rangle^{1/2} W(L, D).$$

On pose

$$(5.18) \quad \rho = \rho(Q) = r \deg Q - 1$$

et

$$(5.19) \quad \Delta = \ell - m + \rho(Q).$$

La condition (5.4-(ii)) jointe à (5.5) entraîne  $\Delta > 0$ . La condition (5.4-(iv)) entraîne  $r \deg Q - 1 < 2m - \nu - r - 1$ , d'où  $\rho(Q) < 2m - \nu - r - 1$  et, avec (5.19) et (5.5),  $\Delta < m$ . On divise  $V$  en trois sommes partielles suivant les valeurs de  $v_Q(D)$  :  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , avec

$$(5.20) \quad V_1 = V_1(R, S, L) = \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ v_Q(D) < \Delta}} \langle D \rangle^{1/2} W(L, D).$$

$$(5.21) \quad V_2 = V_2(R, S, L) = \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \Delta \leq v_Q(D) < m}} \langle D \rangle^{1/2} W(L, D).$$

$$(5.22) \quad V_3 = V_3(R, S, L) = \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ v_Q(D) \geq m}} \langle D \rangle^{1/2} W(L, D).$$

On fixe momentanément les polynômes  $R, S$  et  $L$  et on majore ces trois sommes. La majoration de  $V_1$  est facile.

**Proposition 5.7** *Pour tout  $(R, S) \in (\mathcal{C}_{Q^r})^2$  et  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$  on a*

$$(5.23) \quad V_1(R, S, L) \leq \Delta \tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{4(\ell-m)} \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} q^{(\Delta-1)/2}.$$

*Preuve.* On majore les sommes  $W(L, D)$  intervenant dans  $V_1$  en remplaçant la condition  $(A, B, G, H) \in \mathcal{G}(L, D)$  par la condition moins restrictive  $(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4$ . Cela donne

$$V_1 \leq \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \omega_Q(D) < \Delta}} \langle D \rangle^{1/2} \sum_{(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4} |F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(B) F_{m, \ell}(G) F_{m, \ell}(H)|,$$

d'où, avec la proposition 4.6,

$$V_1 \leq \langle Q \rangle^{4(\ell-m)} \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \omega_Q(D) < \Delta}} \langle D \rangle^{1/2}.$$

On applique alors la proposition 2.3 avec  $m = \theta = 0$  et  $n = \Delta - 1$  et il vient

$$\sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \omega_Q(D) < \Delta}} \langle D \rangle^{1/2} \leq \Delta \tau(Q^\ell) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \max(1, q^{(\Delta-1)/2}).$$

□

Les majorations de  $V_2$  et  $V_3$  demandent quelques notations supplémentaires.

D'après (5.15), si  $D$  est un polynôme unitaire divisant  $Q^\ell$  tel que  $\mathcal{G}(L, D) = \emptyset$ ,  $W(L, D) = 0$  et n'intervient pas dans les sommes  $V_i$ . On n'a donc à considérer que les polynômes  $D$  pour lesquels  $\mathcal{G}(L, D) \neq \emptyset$ . Pour tout polynôme unitaire  $D$  divisant  $Q^\ell$ , on pose

$$(5.24) \quad \tilde{D} = (D, R).$$

Les facteurs irréductibles de  $\tilde{D}$  sont facteurs irréductibles de  $Q$ . Soit  $P$  l'un de ces facteurs. Alors  $P^{v_P(\tilde{D})}$  divise  $(D, R)$ , donc divise  $R$ . On a donc  $v_P(\tilde{D}) \deg P \leq \deg R < r \deg Q$ , ou encore avec (5.18),  $v_P(\tilde{D}) \leq \rho$ . Par suite,

$$(5.25) \quad \tilde{D} = \prod_{\substack{P \in \mathbf{I} \\ P|D}} P^{v_P(\tilde{D})} \quad | \quad \prod_{\substack{P \in \mathbf{I} \\ P|Q}} P^\rho \quad | \quad Q^\rho.$$

Avec (5.4-(ii)) et (5.4-(iv)) on a  $\rho < m$ , d'où  $\tilde{D}|Q^m$ . D'après (5.16), si  $(A, B, G, H) \in \mathcal{G}(L, D)$ , alors  $D|Q^\ell$  et  $L + 2R(A + B) + 2SQ^m(A + G) \equiv 0 \pmod{D}$ , d'où, avec (5.24),  $L + 2SQ^m(A + G) \equiv 0 \pmod{\tilde{D}}$ , ce qui implique que  $\tilde{D}$  divise  $L$ . Les polynômes  $D$  tels que  $\mathcal{G}(L, D) \neq \emptyset$  sont tels que  $\tilde{D}$  divise  $L$ . Quand cette condition est réalisée, on pose

$$(5.26) \quad 2R = R'\tilde{D}, \quad 2SQ^\rho = S'\tilde{D}, \quad L = L'\tilde{D}, \quad D = D'\tilde{D}.$$

La deuxième des conditions (5.16) s'écrit alors

$$L'\tilde{D} + R'\tilde{D}(A + B) + S'Q^{m-\rho}\tilde{D}(A + G) \equiv 0 \pmod{D'\tilde{D}},$$

d'où

$$(5.16 - (iii)) \quad L' + R'(A + B) + S'Q^{m-\rho}(A + G) \equiv 0 \pmod{D'}.$$

Les polynômes  $R'$  et  $D'$  sont premiers entre eux. Soit  $R'' \in \mathcal{C}_{D'}$ , inverse de  $R'$  modulo  $D'$ . Posons

$$(5.27) \quad L'' = R''L', \quad S'' = R''S' = \frac{2R''SQ^\rho}{(D, R)}.$$

La condition (5.16-(iii)) devient

$$(5.16 - (iv)) \quad L'' + A + B + S''Q^{m-\rho}(A + G) \equiv 0 \pmod{D'}.$$

On peut maintenant majorer  $V_2$  et  $V_3$  :

**Proposition 5.8** *Pour tout  $(R, S) \in (\mathcal{C}_{Q^r})^2$  et  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$ , on a*

$$(5.28) \quad V_2(R, S, L) \leq (m - \Delta)\tau(Q^{\ell-\Delta}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} q^{(m-1)/2}.$$

*Preuve.* Soit  $D \in \mathbf{M}$  divisant  $Q^\ell$  et tel que  $\Delta \leq v_Q(D) < m$ . Nous supposons que  $\tilde{D}$  divise  $L$ . Soit  $\delta = v_Q(D)$ . D'après (5.19), on a

$$v_Q(D'\tilde{D}) = v_Q(D) \geq \Delta = \ell - m + \rho,$$

et d'après (5.25),  $v_Q(\tilde{D}) \leq \rho$ . Donc  $v_Q(D') \geq \delta - \rho \geq \ell - m$ . On majore la somme  $W(L, D)$  en remplaçant les conditions (5.16) par les conditions moins restrictives

$$A + B + G + H \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}}; \quad L'' + A + B \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}}$$

impliquées par (5.16-(i)) et (5.16-(iv)). On obtient avec (5.21) et (5.15)

$$\begin{aligned} V_2 \leq & \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \Delta \leq v_Q(D) < m}} \langle D \rangle^{1/2} \\ & \times \sum_{\substack{(A,B,G,H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4 \\ A+B+G+H \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}} \\ A+B \equiv -L'' \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m,\ell}(A)F_{m,\ell}(-B)F_{m,\ell} - (G)F_{m,\ell}(H)|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} V_2 \leq & \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \Delta \leq v_Q(D) < m}} \langle D \rangle^{1/2} \left\{ \sum_{\substack{(A,B) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^2 \\ A+B \equiv -L'' \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m,\ell}(A)F_{m,\ell}(-B)| \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{\substack{(G,H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^2 \\ G+H \equiv L'' \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m,\ell}(-G)F_{m,\ell}(H)| \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $\ell - m \leq \delta - \rho$ , on peut appliquer la proposition 4.9 aux deux dernières sommes. On obtient

$$V_2 \leq \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ \Delta \leq v_Q(D) < m}} \langle D \rangle^{1/2},$$

d'où, avec la proposition 2.3,

$$V_2 \leq (m - \Delta) \tau(Q^{\ell - \Delta}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \max(q^{\Delta/2}, q^{(m-1)/2}).$$

□

Pour majorer  $V_3$ , on majore d'abord les  $W(L, D)$  intervenant dans  $V_3$ .

**Proposition 5.9** *Soit  $D$  un diviseur unitaire de  $Q^\ell$  tel que  $\tilde{D}$  divise  $L$  et tel que  $\delta = v_Q(D) \geq m$ . Alors,*

$$(5.29) \quad W(L, D) \leq \begin{cases} \langle Q \rangle^{-2C(Q, w, \alpha)(\delta - m - 2\rho(Q))} & \text{si } \delta - m - 2\rho(Q) > 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Preuve.* Soit  $(A, B, G, H) \in \mathcal{G}(L, D)$ . Avec (5.16-(iv)) on a

$$L'' + A + B + S'' Q^{m-\rho}(A + G) \equiv 0 \pmod{D'}$$

et avec (5.16-(i)) on a

$$A + B + G + H \equiv 0 \pmod{D}$$

On a  $v_Q(D') \geq \delta - \rho$ , d'où

$$\begin{cases} L'' + A + B + S'' Q^{m-\rho}(A + G) \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}} \\ A + B + G + H \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}}, \end{cases}$$

système équivalent au système  $(\mathcal{E})$  suivant

$$\begin{cases} L'' + A + B + S'' Q^{m-\rho}(A + G) \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}} \\ G + H - S'' Q^{m-\rho}(A + G) - L'' \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-\rho}}. \end{cases}$$

On majore  $W = W(L, D)$  en remplaçant la condition  $(A, B, G, H) \in \mathcal{G}(L, D)$  par la condition moins restrictive  $(A, B, G, H) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^4$  et vérifie  $(\mathcal{E})$ . On obtient

$$\begin{aligned} W \leq & \sum_{(A, G) \in (\mathcal{C}_{Q^\ell})^2} |F_{m, \ell}(A) F_{m, \ell}(-G)| \sum_{\substack{B \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ -B \equiv L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G) \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m, \ell}(-B)| \\ & \times \sum_{\substack{H \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ H \equiv L'' - G + S'' Q^{m-\rho}(A+G) \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m, \ell}(H)|. \end{aligned}$$

Avec (5.4-(iv)), (5.5) et (5.18), on a  $\delta - \rho \geq m - \rho \geq \ell - m$ . En appliquant la proposition 4.7 aux deux dernières sommes on obtient que la somme

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ -B \equiv L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G) \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m,\ell}(-B)|$$

vaut  $|F_{\ell-m}(L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G))|$  si  $v_\infty(\{\frac{L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G)}{Q^{\delta-\rho}}\}) > (m + \delta - \rho - \ell) \deg Q$  et 0 sinon ainsi que la majoration

$$\sum_{\substack{H \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ H \equiv L'' - G + S'' Q^{m-\rho}(A+G) \pmod{Q^{\delta-\rho}}} } |F_{m,\ell}(H)| \leq |F_{\ell-m}(L'' - G + S'' Q^{m-\rho}(A+G))|$$

On définit le sous ensemble  $\mathcal{H}$  de  $(\mathcal{C}_{Q^\ell})^2$  par la condition

$$(A, G) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \nu(\{\frac{L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G)}{Q^{\delta-\rho}}\}) > (m + \delta - \rho - \ell) \deg Q.$$

Alors,

$$W \leq \sum_{(A,G) \in \mathcal{H}} |F_{m,\ell}(A) F_{m,\ell}(-G)| \\ \times |F_{\ell-m}(L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G))| |F_{\ell-m}(L'' - G + S'' Q^{m-\rho}(A+G))|.$$

Fixons  $A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$  et montrons que les  $G \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$  tels que  $(A, G) \in \mathcal{H}$  sont dans une même classe de congruence modulo  $Q^{\delta-m-2\rho}$ . En effet, supposons que  $(A, G) \in \mathcal{H}$  et  $(A, G') \in \mathcal{H}$ . Alors on a

$$v_\infty(\{\frac{S''(G-G')}{Q^{\delta-m}}\}) > (m + \delta - \rho - \ell) \deg Q.$$

Avec (5.4-(iv)) on a  $2m > r(\deg Q + 1) + \nu$ , d'où  $m + \delta - \rho - \ell > \delta - m$ . Par suite  $S''(G - G') \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-m}}$  d'où, avec (5.27),  $\frac{R'' S Q^\rho}{(D, R)}(G - G') \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-m}}$ . Le polynôme  $R''$  étant l'inverse de  $R'$  modulo  $D'$ , il est donc premier à tout diviseur de  $D'$ . En particulier, il est premier à  $Q$  et donc inversible modulo  $Q^{\delta-m}$ , d'où  $S Q^\rho(G - G') \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-m}}$ . Par ailleurs, si  $P$  est un facteur irréductible de  $(S, Q)$ , on  $v_P(S) \deg P \leq \deg S < r \deg Q$ , d'où avec (5.18),  $v_P(S) \leq \rho$ . On a donc

$$\prod_{\substack{P \in \mathbf{I} \\ P|(S,Q)}} P^{v_P(S)} \mid Q^\rho,$$

d'où

$$Q^{2\rho}(G - G') \equiv 0 \pmod{Q^{\delta-m}} \text{ et } G' \equiv G \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}.$$

Pour tout  $A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$ , notons  $G_0(A)$  l'élément de  $\mathcal{C}_{Q^{\delta-m-2\rho}}$  tel que pour tout  $G \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$  on ait

$$(A, G) \in \mathcal{H} \Rightarrow G \equiv G_0(A) \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}.$$

On majore  $W = W(L, D)$  en remplaçant la condition  $(A, H) \in \mathcal{H}$  par la condition  $G \equiv G_0(A) \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}$ . On obtient

$$W \leq \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{\substack{G \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ G \equiv G_0(A) \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}}} |F_{m,\ell}(A)|$$

$$\times |F_{\ell-m}(L'' + A + S'' Q^{m-\rho}(A+G))| |F_{m,\ell}(-G)| |F_{\ell-m}(L'' - G) + S'' Q^{m-\rho}(A+G)|$$

Avec (5.4-(iv)) on a  $m - \rho > \ell - m$  et la proposition 4.1-(vi) nous donne

$$W \leq \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} \sum_{\substack{G \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ G \equiv G_0(A) \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}}} |F_{m,\ell}(A) F_{\ell-m}(L'' + A)| |F_{m,\ell}(-G)| |F_{\ell-m}(L'' - G)|,$$

soit

$$\begin{aligned} W &\leq \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} |F_{m,\ell}(A) F_{\ell-m}(L'' + A)| \\ &\times \sum_{\substack{G \in \mathcal{C}_{Q^\ell} \\ G \equiv G_0(A) \pmod{Q^{\delta-m-2\rho}}}} |F_{m,\ell}(-G) F_{\ell-m}(L'' - G)|. \end{aligned}$$

(I) Supposons d'abord que  $\gamma = \delta - m - 2\rho > 0$ . On a alors  $\gamma < \ell - m$  et  $m < \ell$ . On applique la proposition 4.8 à la somme intérieure et on obtient

$$W \leq \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} |F_{m,\ell}(A) F_{\ell-m}(L'' + A)| |F_\gamma(-G_0(A)) F_\gamma(L'' - G_0(A))|.$$

La proposition 4.3 donne alors

$$W \leq \langle Q \rangle^{-2C\gamma} \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} |F_{m,\ell}(A) F_{\ell-m}(L'' + A)|$$

où  $C = C(Q, w, \alpha)$  et les propositions 4.8 et 4.2 nous donnent

$$W \leq \langle Q \rangle^{-2C\gamma} |F_0(0)F_0(L'')| = \langle Q \rangle^{-2C\gamma}.$$

(II) Supposons maintenant que  $\gamma = \delta - m - 2\rho \leq 0$ . Dans ce cas, la condition de congruence dans la somme majorant  $W$  n'apportant aucune restriction, on majore  $W$  trivialement et on obtient

$$W \leq \sum_{A \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} |F_{m,\ell}(A)F_{\ell-m}(L'' + A)| \sum_{G \in \mathcal{C}_{Q^\ell}} |F_{m,\ell}(-G)F_{\ell-m}(L'' - G)|$$

et la proposition 4.8 nous donne  $W \leq 1$ .

□

**Proposition 5.10** *Pour tout  $(R, S) \in (\mathcal{C}_{Q^r})^2$  et  $L \in \mathcal{C}_{Q^\ell}$ , on a*

$$(5.30) \quad V_3(R, S, L) \leq (\ell - m + 1)\tau(Q^{\ell-m})\langle Q \rangle^{\ell/2}\langle Q \rangle^{-C'(Q, w, \alpha)(\ell - m - 2\rho(Q))},$$

avec

$$(5.31) \quad C'(Q, w, \alpha) = \min(2C(Q, w, \alpha), \frac{1}{2 \deg Q}).$$

*Preuve.* Observons d'abord que la condition (5.4-(iii)) entraîne la relation  $m + 2\rho < \ell$ . Avec (5.22) et (5.29), on a

$$V_3 \leq \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ m \leq v_Q(D) \leq m+2\rho}} \langle D \rangle^{1/2} + \sum_{\substack{D \in \mathbf{M} \\ D|Q^\ell \\ m+2\rho < v_Q(D)}} \langle D \rangle^{1/2} \langle Q \rangle^{2(m+2\rho - v_Q(D))C},$$

où l'on a posé  $C = C(Q, w, \alpha)$ . Comme  $\tau(Q^{\ell-m-2\rho-1}) \leq \tau(Q^{\ell-m})$ , la proposition 2.3 donne

$$V_3 \leq \tau(Q^{\ell-m}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \left( (2\rho + 1)q^{\rho+m/2} + (\ell - m - 2\rho)\langle Q \rangle^{2(m+2\rho)C} \right) \\ \times \max \left( (\langle Q \rangle^{-2C\|\alpha\|^2} q^{1/2})^{m+2\rho+1}, (\langle Q \rangle^{-2C\|\alpha\|^2} q^{1/2})^\ell \right).$$

Si  $\langle Q \rangle^{-2C} q^{1/2} < 1$ , on a

$$V_3 \leq \tau(Q^{\ell-m}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \left( (2\rho + 1)q^{\rho+m/2} + (\ell - m - 2\rho)q^{(m+1+2\rho)/2} \langle Q \rangle^{-2C} \right),$$

d'où

$$V_3 \leq \tau(Q^{\ell-m}) \langle Q \rangle^{\ell/2} (\ell - m + 1) q^{\rho+m/2-\ell/2}.$$

Si  $\langle Q \rangle^{-2C} q^{1/2} \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} V_3 &\leq \tau(Q^{\ell-m}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} \left( (2\rho + 1) q^{\rho+m/2} + (\ell - m - 2\rho) q^{\ell/2} \langle Q \rangle^{2(m+2\rho-\ell)C} \right), \\ &\leq \tau(Q^{\ell-m}) \langle Q \rangle^{\ell/2} \left( (2\rho + 1) q^{\rho+\frac{m-\ell}{2}} + (\ell - m - 2\rho) \langle Q \rangle^{-2C(\ell-m-2\rho)} \right). \end{aligned}$$

Si on pose  $C' = C'(Q, w, \alpha)$ , on a

$$V_3 \leq \tau(Q^{\ell-m}) \langle Q \rangle^{\ell/2} (\ell - m + 1) \langle Q \rangle^{-C'(\ell-m-2\rho)}.$$

□

**Proposition 5.11** *On a*

$$(5.32) \quad \begin{aligned} V(R, S, L) &\leq m\tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{\ell/2} \left( q^{-1} \langle Q \rangle^{4\nu+9r/2-(4+1/2 \deg Q)m+4} \right. \\ &\quad \left. + q^{-1-r/2} \langle Q \rangle^{-(\nu-m)/2 \deg Q} + \langle Q \rangle^{-C'(Q,w,\alpha)(\ell-m-2\rho)} \right). \end{aligned}$$

*Preuve.* La proposition 5.7 nous donne

$$V_1 \leq \Delta \tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{4(\ell-m)} \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} q^{(\Delta-1)/2},$$

d'où, avec (5.19), (5.18), (5.4) et (5.5),

$$\begin{aligned} V_1 &\leq m\tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{\ell/2} \langle Q \rangle^{4(\nu+r+1-m)+r/2} q^{-1-m/2}, \\ &\leq \frac{m}{q} \tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{\ell/2} \langle Q \rangle^{4\nu+9r/2-m(4+1/2 \deg Q)+4}. \end{aligned}$$

La proposition 5.8 nous donne

$$V_2 \leq m\tau(Q^{\ell-\Delta}) \left( \frac{\langle Q \rangle}{q} \right)^{\ell/2} q^{(m-1)/2},$$

d'où, avec (5.5),

$$V_2 \leq \frac{m}{q} \tau(Q^\ell) \langle Q \rangle^{\ell/2} q^{-r/2} \langle Q \rangle^{-(\nu-m)/2 \deg Q}.$$

D'après la proposition 5.10, on a

$$V_3 \leq (\ell - m + 1)\tau(Q^{\ell-m})\langle Q \rangle^{\ell/2}\langle Q \rangle^{-C'(Q,w,\alpha)(\ell-m-2\rho)},$$

d'où, avec (5.18), (5.4) et (5.5),

$$V_3 \leq m\tau(Q^\ell)\langle Q \rangle^{\ell/2}\langle Q \rangle^{-C'(Q,w,\alpha)(\ell-m-2\rho)}.$$

Les majorations de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  jointes aux relations (5.17), (5.20), (5.21), (5.22), nous donnent

$$\begin{aligned} V &\leq m\tau(Q^\ell)\langle Q \rangle^{\ell/2} \left( q^{-1}\langle Q \rangle^{4\nu+9r/2-m(4+1/2\deg Q)+4} \right. \\ &\quad \left. + q^{-1-r/2}\langle Q \rangle^{-(\nu-m)/2\deg Q} + \langle Q \rangle^{-C'(Q,w,\alpha)(\ell-m-2\rho)} \right). \end{aligned}$$

□

### 5.3 Fin de la Majoration

On est en mesure de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.12** *On suppose  $\alpha$  non entier. Soient*

$$(5.33) \quad \eta(Q) = \left( \frac{4q^{99/100} \exp(\frac{1}{48\deg Q})(1 - \frac{1}{q})(1 + \frac{2}{q})\tau(Q)\langle Q \rangle^5}{(\deg Q)^{\omega(Q)+1}} \right)^{1/4}$$

et

$$(5.34) \quad \xi(Q, w, \alpha) = \frac{11}{15} \min\left( \frac{1}{48(\deg Q)^2 + 11\deg Q - 1}, \frac{1}{16(\deg Q)^2 + 7\deg Q + \frac{1+8\deg Q}{C(Q,w,\alpha)} - 1} \right),$$

où  $C(Q, w, \alpha)$  est définie par (4.5). Alors, pour  $\nu(N) > 100/\xi(Q, w, \alpha)$ , on a

$$(5.35) \quad |\Sigma(N)| \leq \eta(Q)N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}}q^{N(1-\frac{99}{400}\xi(Q,w,\alpha))}.$$

*Preuve.* On pose  $C' = C'(Q, w, \alpha)$  défini par (5.31). On va imposer des conditions supplémentaires aux paramètres  $r$  et  $m$  afin que les conditions suivantes soient réalisées :

$$(5.36) \quad \begin{cases} (4\nu + 13r/2) - m(4 + 1/2\deg Q) \leq 0, \\ (m - \nu - r)/2\deg Q + 2r - 4 \leq 0, \\ C'(m - \nu - r - 3) + 2r(1 + C'\deg Q) - 4 \leq 0. \end{cases}$$

Ces conditions réalisées, on déduit des relations (5.14), (5.17) et (5.32) que pour  $R \in \mathcal{C}_Q$  et  $S \in \mathcal{C}_{Q^r}$ ,

$$U = U(N, r, m, R, S) \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right)m\tau(Q^\ell)\langle Q \rangle^\ell \left(q^{-1}\langle Q \rangle^{4\nu+9r/2-(4+1/2 \deg Q)m+4} + q^{-1-r/2}\langle Q \rangle^{-(\nu-m)/2 \deg Q} + \langle Q \rangle^{-C'(\ell-m-2\rho)}\right),$$

d'où, avec (5.5), (5.18) et (5.36),

$$(5.37) \quad U \leq 2\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{2}{q} + 1\right)m\tau(Q^\ell)\langle Q \rangle^{\nu-r+5}.$$

Compte tenu de (5.31), les conditions (5.36) sont réalisées dès que les conditions

$$(5.38) \quad \begin{cases} (8\nu + 13r) \deg Q \leq m(8 \deg Q + 1), \\ m \leq \nu + r - \frac{2r}{C'} - 2r \deg Q + 8 \deg Q. \end{cases}$$

le sont.

On se donne un paramètre  $\xi \in ]0, 1]$  et on impose

$$(5.39) \quad 1 < r \leq \xi\nu.$$

Les conditions (5.38) sont satisfaites si

$$\nu \left( \frac{1 + \frac{13\xi}{8}}{1 + \frac{1}{8 \deg Q}} \right) \leq m \leq \nu \left( 1 + \xi - \frac{2\xi}{C'} - 2\xi \deg Q \right).$$

On exigera donc que  $\xi$  vérifie la condition

$$(5.40) \quad \frac{1 + \frac{13\xi}{8}}{1 + \frac{1}{8 \deg Q}} \leq 1 + \xi - 2\xi \deg Q - \frac{2\xi}{C'}$$

et que l'intervalle

$$J_{\xi, \nu} = \left[ \nu \frac{1 + \frac{13\xi}{8}}{1 + \frac{1}{8 \deg Q}}, \nu \left( 1 + \xi - 2\xi \deg Q - \frac{2\xi}{C'} \right) \right]$$

contienne des nombres entiers  $m$  tels que  $r \leq \xi\nu$  et  $m$  vérifient les conditions (5.4). On prend

$$(5.41) \quad \xi = \xi(Q, w, \alpha) = \frac{\frac{11}{15}}{16(\deg Q)^2 + 7 \deg Q + \frac{2+16 \deg Q}{C'} - 1}.$$

et la condition (5.40) est vérifiée. Observons que,  $C' = C'(Q, w, \alpha)$  étant défini par (5.31),  $\xi(Q, w, \alpha)$  vérifie (5.34). On suppose que  $N$  est assez grand pour que  $\nu = \nu(N) > 100/\xi$ . Alors on a  $\nu > 30 \deg Q$  et

$$(5.42) \quad \nu \geq \frac{1}{1 + \xi - 2\xi \deg Q - \frac{2\xi}{C'} - \frac{1 + \frac{13\xi}{8}}{1 + \frac{1}{8 \deg Q}}}.$$

L'intervalle  $J_{\xi, \nu}$  contient alors des nombres entiers. Si  $r \leq \xi\nu$ , alors  $\frac{1-3/\nu}{5 \deg Q - 1} > \frac{1-1/10 \deg Q}{5 \deg Q - 1} > \xi$ , d'où  $r \leq \xi\nu < \frac{\nu-3}{5 \deg Q - 1}$ , ce qui est la relation (5.4-(i)). Soit un nombre entier  $m \in J_{\xi, \nu}$ . Alors

$$m \leq \nu(1 + \xi - 2\xi \deg Q - 2\xi/C') \leq \nu(1 + \xi - 6\xi \deg Q),$$

d'où, d'une part  $m \leq \nu(1 - 5\xi) < \nu - r$  et d'autre part,

$$m \leq \nu(1 + \xi(1 - 2 \deg Q)) \leq \nu + r(1 - 2 \deg Q) < \nu + r(1 - 2 \deg Q) + 3.$$

Les relations (5.4-(ii)) et (5.4-(iii)) sont vérifiées. Avec (5.41), on a

$$\xi < \frac{1 - 1/8 \deg Q}{(1 + \deg Q)(1 + 1/8 \deg Q)},$$

d'où

$$2m > \nu(1 + \xi(1 + \deg Q)) \geq \nu + r(1 + \deg Q)$$

et (5.4)-(iv) est vérifiée. Par suite, (5.37) est vérifiée. Majorons  $\tau(Q^\ell)$ . On a

$$\tau(Q^\ell) = \prod_{\substack{P \in \mathbf{I} \\ P|Q}} (\ell v_P(Q) + 1) \leq \prod_{\substack{P \in \mathbf{I} \\ P|Q}} (\ell v_P(Q) + \ell) = \ell^{\omega(Q)} \tau(Q).$$

Avec (5.5) puis (5.39), on a

$$\ell^{\omega(Q)} = (\nu + r + 1)^{\omega(Q)} \leq \nu^{\omega(Q)} \left(1 + \xi + \frac{1}{\nu}\right)^{\omega(Q)}.$$

Comme  $\nu = \nu(N) \geq 100/\xi$ , on a

$$\ell^{\omega(Q)} \leq \nu^{\omega(Q)} (1 + 2\xi)^{\omega(Q)} = \nu^{\omega(Q)} \exp(\omega(Q) \log(1 + \frac{101}{100}\xi)) \leq \nu^{\omega(Q)} \exp(\frac{101}{100}\xi \deg Q).$$

Avec (5.41) et (5.31),

$$\ell^{\omega(Q)} \leq \nu^{\omega(Q)} \exp\left(\frac{1}{48 \deg Q}\right),$$

d'où

$$(5.43) \quad \tau(Q^\ell) \leq \exp\left(\frac{1}{48 \deg Q}\right) \tau(Q) \nu^{\omega(Q)}.$$

Avec (5.4) on a  $m \leq \nu + r - 6r \deg Q + 8 \deg Q \leq \nu + r < 2\nu$ , d'où, avec (5.37), (5.42) et (5.43),

$$U \leq \kappa(Q) \tau(Q) \nu^{\omega(Q)+1} \langle Q \rangle^{\nu-r+5},$$

où

$$\kappa(Q) = 4 \exp\left(\frac{1}{48 \deg Q}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 + \frac{2}{q}\right).$$

La proposition 5.3 nous donne

$$T(N, R, S)^2 \leq \kappa(Q) \tau(Q) q^N \nu^{\omega(Q)+1} \langle Q \rangle^{\nu-r+5},$$

puis, la proposition 5.2 nous donne

$$|\Sigma(N)|^4 \leq \kappa(Q) \tau(Q) q^{3N} \nu^{\omega(Q)+1} \langle Q \rangle^{\nu-r+5},$$

d'où, en majorant  $\nu$  par  $N/\deg Q$ ,

$$|\Sigma(N)| \leq (\kappa(Q) \tau(Q) \langle Q \rangle^5)^{1/4} \left(\frac{N}{\deg Q}\right)^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^N \langle Q \rangle^{-r/4}.$$

L'intervalle  $[\frac{99}{100}\xi\nu, \xi\nu]$  contient des nombres entiers. On prend  $r$  dans cet intervalle et on obtient la majoration

$$|\Sigma(N)| \leq (\kappa(Q) \tau(Q) \langle Q \rangle^5)^{1/4} \left(\frac{N}{\deg Q}\right)^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-\frac{99}{400}\xi)+\frac{99}{400}}.$$

□

## 6 Démonstration du théorème 1.2

**Proposition 6.1** *Soit  $N$  un nombre entier,  $N > 100 \deg Q/\xi(Q, w, \alpha)$ . Alors*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e(\alpha w(X^2)) \right| &\leq \eta(Q) \left(1 + \frac{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1}\right) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-99\xi/400)} \\ &\quad + \langle Q \rangle^{[100/\xi]} - \eta(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} \frac{\langle Q \rangle^{([100/\xi]+1)(1-99\xi/400)}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1}, \end{aligned}$$

où  $\xi = \xi(Q, w, \alpha)$ .

*Preuve.* Posons

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e(\alpha w(X^2)).$$

Avec (5.1), (5.2) et (5.3), on a

$$\mathfrak{S}(N) = 1 + \sum_{j=1}^{\nu(N)} \Sigma(j \deg Q) + \Sigma(N).$$

La proposition 5.12 nous donne

$$|\mathfrak{S}(N)| \leq 1 + \sum_{j=1}^{\lfloor 100/\xi \rfloor} |\Sigma(j \deg Q)| + \eta(Q) \left( \sum_{j=1+\lfloor 100/\xi \rfloor}^{\nu(N)} (j \deg Q)^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{j \deg Q(1-99\xi/400)} + N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-99\xi/400)} \right).$$

On majore la première somme en majorant trivialement  $|\Sigma(j \deg Q)|$  par  $q^{j \deg Q} - q^{(j-1) \deg Q}$  et la deuxième somme en majorant  $(j \deg Q)^{\frac{\omega(Q)+1}{4}}$  par  $N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}}$ . On obtient

$$|\mathfrak{S}(N)| \leq \langle Q \rangle^{\lfloor 100/\xi \rfloor} + \eta(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} \left( \sum_{j=1+\lfloor 100/\xi \rfloor}^{\nu(N)} \langle Q \rangle^{j(1-99\xi/400)} + q^{N(1-99\xi/400)} \right),$$

d'où,

$$|\mathfrak{S}(N)| \leq \langle Q \rangle^{\lfloor 100/\xi \rfloor} + \eta(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} \left( \frac{\langle Q \rangle^{(\nu(N)+1)(1-99\xi/400)} - \langle Q \rangle^{(1+\lfloor 100/\xi \rfloor)(1-99\xi/400)}}{\langle Q \rangle^{(1-99\xi/400)} - 1} + q^{N(1-99\xi/400)} \right).$$

Avec (5.2), on obtient

$$|\mathfrak{S}(N)| \leq \langle Q \rangle^{\lfloor 100/\xi \rfloor} + \eta(Q) \left( 1 + \frac{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1} \right) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-99\xi/400)} - \eta(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} \frac{\langle Q \rangle^{\lfloor 100/\xi \rfloor + 1(1-99\xi/400)}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1}.$$

□

**Corollaire 6.2** *Soit  $\alpha$  un nombre réel non entier. Alors il existe un nombre entier  $N(Q, w, \alpha)$  tel que pour tout nombre entier  $N \geq N(Q, w, \alpha)$  on ait*

$$\left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e(\alpha w(X^2)) \right| \leq \beta(Q, w, \alpha) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-99\xi/400)},$$

où  $\xi = \xi(Q, w, \alpha)$  et

$$(6.1) \quad \beta(Q, w, \alpha) = \eta(Q) \left( 1 + \frac{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1} \right).$$

*Preuve.* Pour  $N \geq n(Q, \xi) = n(Q, \xi(Q, w, \alpha))$ , on a

$$\eta(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} \frac{\langle Q \rangle^{(\lceil 100/\xi \rceil + 1)(1-99\xi/400)}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1} > \langle Q \rangle^{\lceil 100/\xi \rceil}.$$

On prend  $N(Q, w, \alpha) = \max(n(Q, \xi(Q, w, \alpha)), 1 + 100 \deg Q / \xi(Q, w, \alpha))$ .

□

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 1.2 avec

$$(6.2) \quad a(Q, w, \alpha) = \frac{363}{2000} \min\left(\frac{1}{48(\deg Q)^2 + 11 \deg Q - 1}, \frac{C(Q, w, \alpha)}{C(Q, w, \alpha)(16(\deg Q)^2 + 7 \deg Q - 1) + 1 + 8 \deg Q}\right)$$

et

$$(6.3) \quad b = b(Q) = \eta(Q) \left( 1 + \frac{\langle Q \rangle^{1-363/2000(48(\deg Q)^2 + 11 \deg Q - 1)}}{\langle Q \rangle^{1-99/400(48(\deg Q)^2 + 11 \deg Q - 1)} - 1} \right).$$

Posons  $a = a(Q, w, \alpha)$  et minorons d'abord  $\xi = C(Q, w, \alpha)$ . On a

$$\frac{1}{48(\deg Q)^2 + 11 \deg Q - 1} \geq \frac{2000}{363} a$$

ainsi que

$$\frac{1}{16(\deg Q)^2 + 7 \deg Q + \frac{1+8 \deg Q}{C(Q, w, \alpha) - 1}} \geq \frac{2000}{363} a.$$

D'après (5.34)

$$\xi(Q, w, \alpha) \geq \frac{2000}{363}a,$$

d'où

$$1 - 99\xi/400 \leq 1 - a.$$

D'autre part, la fonction  $t \rightarrow \frac{\langle Q \rangle^t}{\langle Q \rangle^{t-1}}$  étant décroissante sur l'ensemble des nombres réels, on a avec (5.34)

$$\frac{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400}}{\langle Q \rangle^{1-99\xi/400} - 1} \leq \frac{\langle Q \rangle^{1-363/2000(48(\deg Q)^2+11 \deg Q-1)}}{\langle Q \rangle^{1-363/2000(48(\deg Q)^2+11 \deg Q-1)} - 1},$$

d'où, avec (6.1)

$$\beta(Q, w, \alpha) \leq \eta(Q) \left( 1 + \frac{\langle Q \rangle^{1-363/2000(48(\deg Q)^2+7 \deg Q-1)}}{\langle Q \rangle^{1-363/2000(48(\deg Q)^2+7 \deg Q-1)} - 1} \right),$$

soit

$$\beta(Q, w, \alpha) \leq b(Q).$$

D'après le corollaire 6.2, pour tout nombre entier  $N \geq N(Q, w, \alpha)$ , on a

$$\left| \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e(\alpha w(X^2)) \right| \leq b(Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-a)}.$$

□

Terminons cette section par la preuve du corollaire 1.3. Soient  $m$  un nombre entier strictement positif et  $a \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Posons

$$z(m, a, N) = \text{Card}\{X \in \mathbf{A} \mid \deg X < n, f(X^2) \equiv a \pmod{m}\}.$$

On a

$$z(m, a, N) = \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{h(f(X^2) - a)}{m}\right).$$

En inversant l'ordre des sommations on obtient

$$mz(m, a, N) = \sum_{h=0}^{m-1} e\left(\frac{-ha}{m}\right) \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{hf(X^2)}{m}\right)$$

$$= q^N + \sum_{h=1}^{m-1} e\left(\frac{-ha}{m}\right) \sum_{\substack{X \in \mathbf{A} \\ \deg X < N}} e\left(\frac{h}{m}f(X^2)\right).$$

Le théorème 1.2 nous donne alors

$$\begin{aligned} |mz(m, a, N) - q^N| &\leq \sum_{h=1}^{m-1} b(q, Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-a(q, Q, f, h/m))} \\ &\leq (m-1)b(q, Q) N^{\frac{\omega(Q)+1}{4}} q^{N(1-\eta(q, Q, f, m))}, \end{aligned}$$

avec  $\eta(q, Q, f, m) = \min_{1 \leq h \leq m-1} \{a(q, Q, f, h/m)\}$ , d'où le résultat annoncé.

□

## Références

- [1] N.L. Bassily, I. Kátai, *Distribution of the values of  $q$ -additive functions on polynomial sequences*, Acta Math. Hung. **68** (1995), 353-361.
- [2] M. Car, *Quadratic forms on  $\mathbf{F}_q[T]$* , J. Number Theory **61**,  $n^\circ 1$ , (1996), 145-180.
- [3] L. Carlitz, *Diophantine approximations in fields of characteristic  $p$* , Proc. Amer. Math. Soc. (1952), 187-208.
- [4] M. Car, C. Mauduit, *Sur les puissances des polynômes sur un corps fini*, Uniform Distribution Theory, **8**, No 2, (2013), 171-182.
- [5] M. Drmota, *The joint distribution of  $q$ -additive functions*, Acta Arith. **100** (2001), 17-39
- [6] M. Drmota, G. Gutenbrunner, *The joint distribution of  $Q$ -additive functions on polynomials over finite fields*, J. Theor. Nombres Bordeaux **17** (2005), 125-150.
- [7] M. Drmota, J.F. Morgenbesser, *Generalized Thue-Morse sequences of squares*, Israel J. Math. **190** (2012), 157-193
- [8] D. R. Hayes, *The expression of a polynomial as the sum of three irreducibles*, Acta Arith **11** (1966), 461-488.
- [9] D. H. Kim, *On the joint distribution of  $q$ -additive functions in residue classes*, J. Number Theory **74** (1999), 307-336.
- [10] M. Madritsch, J. Thuswaldner *Weyl sums in  $\mathbf{F}_q[X]$  with digital restrictions*, Finite Fields and Their Applications **14**,  $n^\circ 1$ , (2008), 877-896.

- [11] R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite Fields*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, vol 20, (1983), (Reprinted 1987).
- [12] C. Mauduit, J. Rivat, *La somme des chiffres des carrés*, Acta Math., **203** (2009), 107-148.
- [13] C. Mauduit, J. Rivat, *Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers*, Ann. of Math. **171** (2010), 1591-1646.
- [14] C. Mauduit, J. Rivat, *Rudin-Shapiro sequences along squares*, preprint.