HAL
open science

GEOMETRIE ET QUANTIFICATION DE L'UNIVERS DE DIRAC-EINSTEIN

Jean Louis Jonot

To cite this version:

Jean Louis Jonot. GEOMETRIE ET QUANTIFICATION DE L'UNIVERS DE DIRAC-EINSTEIN. 2016. hal-01294150v5

HAL Id: hal-01294150

https://hal.science/hal-01294150v5

Preprint submitted on 18 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

GÉOMÉTRIE ET QUANTIFICATION DE L'UNIVERS DE DIRAC-EINSTEIN

JONOT JEAN LOUIS

Abstract. Les constructions géométriques et les procédés de quantification proposés dans ce document sont des essais de représentation mathématique et physique de l'univers de Dirac-Einstein. Le but de cet article est de donner une vision différente de cet univers. Je ne prétends pas que cette construction soit le modèle de la réalité physique, mais cette approche permet de proposer des outils mathématiques pour la quantification des fibrés d'état, la présentation des équations de Dirac et la représentation géométrique de notre univers comme une singularité d'un multivers de Banach-Schauder. Cette représentation définit la géométrie de l'univers à partir d'une section de Dirac du multivers de Banach-Schauder.

1. Représentation de l'univers de Dirac-Einstein comme une singularité d'un multivers de Banach-Schauder

Un multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$ est une variété de Banach modelée sur un espace de Banach muni d'une base de Schauder inconditionnelle et d'une métrique **fortement riemannienne** g. Si l'espace de Banach $\mathcal{B}$ est hilbertien réel, le produit scalaire induit une métrique riemannienne sur $\mathbf{V}$, si cette métrique est fortement riemannienne, on prend pour g cette métrique. La géométrie ainsi définie est une géométrie de Finsler améliorée. La connexion de Levi-Civita définie par la métrique est notée ∇ [33]. Une section de Dirac γ sur le fibré tangent

$$\xi_{\mathbf{V}} = (T\mathbf{V}, \pi, \mathbf{V}, \mathcal{B}),$$

est une section γ de $\mathrm{Hom}\left(\Lambda^1(\mathbf{V}) \otimes T\mathbf{V}, T\mathbf{V}\right)$ où $\Lambda^1(\mathbf{V})$ est le fibré des formes linéaires continues. Pour chaque ouvert de trivialisation $\mathcal{U}$ du fibré $\xi_{\mathbf{V}}$, on définit l'endomorphisme de Dirac comme une section sur $\mathcal{U}$

$$\gamma^d : \Gamma(\mathcal{U}, T\mathbf{V}) \to \Gamma(\mathcal{U}, T\mathbf{V}), \ \gamma^d(X) = \gamma(d \otimes X),$$

avec $X \in \Gamma(\mathcal{U}, T\mathbf{V})$ et $d \in \Gamma\left(\mathcal{U}, \Lambda^1(\mathbf{V})\right)$. La section γ^d est une section bornée et à trace si et seulement si $\forall v \in \mathcal{U} \subset \mathbf{V}$, $\gamma^d(v) : T_v\mathbf{V} \to T_v\mathbf{V}$, est un endomorphisme borné et à trace pour la structure de Banach induite par la fibre $\mathcal{B}$.

Definition 1. *Une base locale de champs de Schauder $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{U}$ est une base locale de champs qui vérifie $\forall v \in \mathcal{U}$, $\{X_m(v)\}$ est une base locale de Schauder inconditionnelle de $T_v\mathbf{V}$ pour la structure de Banach induite par $\mathcal{B}$.*

Lemma 1. *Tout ouvert de trivialisation $\mathcal{U}$ de $\xi_{\mathbf{V}}$ a une base locale de champs de Schauder $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.*

Date: March 1, 2016.

Key words and phrases. Attracteur, Base de Schauder inconditionnelle, Section de Dirac, Fibré d'état, Champ en corde, Equation d'évolution, Intégrales de Feynman, Entropie, Chirurgie, Théorie de Morse, Feuilletage, Fibré d'état, Champ chronologique.

Remark 1. *En général, une base locale de Schauder inconditionnelle n'est pas dualisable en posant*

$$X^m(X_n) = \delta_n^m,$$

la section des formes linéaires X^m sur $\mathcal{U}$ n'est pas dans $\Gamma\left(\mathcal{U}, \Lambda^1(\mathbf{V})\right)$. Si pour tout m, $X^m \in \Gamma\left(\mathcal{U}, \Lambda^1(\mathbf{V})\right)$, on dit $\{X_m\}$ est une base locale de Schauder inconditionnelle ***dualisable****. Si $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert réel, le théorème de représentation de Riesz-Fischer donne l'existence de base locale de Schauder inconditionnelle* ***dualisable*** *sur tout ouvert de trialisation de $\xi_{\mathbf{V}}$.*

Si la base de Schauder n'est pas dualisable, on dualise les champs en utilisant la métrique fortement riemannienne g, on pose

$$\mathbf{X}(Y) = g(X, Y), \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{U}, T\mathbf{V})$$

en chaque $v \in \mathcal{U}$ et $u \in T_v\mathbf{V}$, $\mathbf{X}(v)(u) = g(v)(X(v), u)$. Toute base locale de Schauder $\{X_m\}$ se dualise par ce procédé. Soit $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une base de Schauder, $\gamma^m = \gamma^{\mathbf{X}^m}$ où $\mathbf{X}^m$ est le dualisé de X_m par l'un ou l'autre des procédés. La suite $\{\gamma^m\}$ est suite de sections locales sur $\mathcal{U}$ de $\mathrm{Hom}(T\mathbf{V})$ qui est bornée et à trace. On définit le tenseur de Poisson par la suite double $\{\gamma^{mn}\}$ où

$$\gamma^{mn} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\{\gamma^m, \gamma^n\} = \mathrm{Trace}(\gamma^m\gamma^n).$$

Definition 2. *Une sous-variété $\mathbf{W}$ de dimension n est une singularité de type (n_-, n_+) avec $n = n_- + n_+$ si pour chaque événement $w \in \mathbf{W}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de trivialisation de $\xi_{\mathbf{V}}$ contenant w et une base de Schauder inconditionnelle $\{X_m\}$ qui contient une sous famille finie $\left\{X_{m_j}, j = 1, \cdots, n\right\}$ telle que pour tout $v \in \mathcal{U} \cap \mathbf{W}$,*

$$T_v\mathbf{W} = \mathrm{Vect}\{X_{m_i}(v), i = 1, \cdots, n\}$$

et la matrice $\widetilde{\gamma}(v) = (\gamma^{m_i m_j}(v))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par le tenseur de Poisson est inversible pour tout $v \in \mathcal{U} \cap \mathbf{W}$ et $\frac{1}{n}\widetilde{\gamma}^{-1}$ est congrue à une matrice de signature (n_-, n_+).

Remark 2. *La transformation qui permet de passer de la métrique $\frac{1}{n}\widetilde{\gamma}^{-1}$ à la métrique $g|_{\mathbf{W}}$ est la transformation de Wick ou rotation de Wick. La métrique g est la métrique fortement riemannienne définie sur le multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$.*

Si la sous-variété $\mathbf{W}$ est de dimension 4 et de type $(1, 3)$ de $\mathbf{V}$ [18], on dit que $\mathbf{W}$ est un univers de Dirac-Einstein. Cette représentation est différente des représentations géométriques habituelles. La géométrie de $\mathbf{W}$ est entièrement définie par la section de Dirac bornée et à trace, le multivers de Banach-Schauder définit la structure gravitationnelle de l'univers $\mathbf{W}$ et la connexion ∇ de $\mathbf{V}$ induite par la métrique fortement riemannienne donne la connexion sur $\mathbf{W}$ qui permet de définir les équations de Dirac-Einstein.

L'hypothèse que l'on fait est la suivante, sur une carte de l'univers $\mathbf{W}$, les systèmes physiques sont décrits par des fibrés. Ces fibrés sont des fibrés vectoriels réels ou complexes, ou des fibrés dont la fibre est un groupe de Lie. Les fibrés d'état définis sur $\mathbf{W}$ sont notés

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, F) \text{ ou } \zeta = (E, \pi, \mathbf{W})$$

s'il n'y a pas de confusion sur la fibre $F = \mathcal{H}$ ou $F = \mathcal{B}$, on parlera du fibré d'état E. L'ensemble des sections du fibré E est noté $\Gamma(E)$. Les exemples les plus utilisés

en physique sont le fibré trivial $\mathbf{W} \times \mathbb{C}$ dont les sections sont les applications C^∞ de $\mathbf{W}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, le fibré tangent $T\mathbf{W}$ et son complexifié $T_{\mathbb{C}}\mathbf{W} = T\mathbf{W} \otimes \mathbb{C}$ qui ont pour sections, respectivement, les champs réels et complexes.

Remark 3. *En dimension infinie, les fibrés vectoriels se comportent différemment. Si* $\mathbf{W}$ *est compact suffisamment régulier, par exemple si* $\mathbf{W}$ *est un* CW*-complexe alors tous les fibrés de dimension infinie sur* $\mathbf{W}$ *sont triviaux. Dans la suite* $\mathbf{W}$ *n'est pas supposé compact, mais on peut se restreindre à des cartes d'adhérence compacte.*

Pour nous, une observable en $w \in \mathbf{W}$ est un opérateur $\Phi(w) : E_w \to E_w$ ayant une base de vecteurs propres pour chaque w et telle que l'application $w \to \Phi(w)$ est C^∞ dans le sens suivant, pour toute section $s \in \Gamma(E)$, l'application

$$w \to \Phi(w)(s(w))$$

est C^∞. On remarque que cette définition a un sens si la fibre F du fibré est de dimension finie, on peut étendre cette notion à un fibré de dimension infinie, hilbertien ou banachique, dans le cas hilbertien $\Phi(w)$ est un opérateur self-adjoint pour tout $w \in \mathbf{W}$. L'observable Φ est donc une section du fibré, dont la fibre est formée par les éléments de $\mathrm{End}(F)$ qui sont diagonalisables. Les fonctions $\lambda : U \subset \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une section s, non nulle sur V, vérifiant

$$\Phi(w)(s(w)) = \lambda(w)\, s(w), \forall w \in V$$

est une fonction propre de Φ sur V et la section s est une section propre de Φ sur V. Si la fibre est hilbertienne, le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\Phi(w)$, une mesure spectrale

$$P_{\Phi(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(E_w),$$

qui à chaque borélien B de $\mathbb{R}$ associe un projecteur $P_{\Phi(w)}(B)$ de l'espace d'Hilbert complexe E_w. Pour chaque couple $(s,t) \in \Gamma(E)^2$ et chaque $w \in \mathbf{W}$, on définit la mesure complexe $\nu_{(s(w),t(w))}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$

$$\nu_{(s(w),t(w))}(B) = \left\langle P_{\Phi(w)}(B)(s(w)) \mid t(w) \right\rangle_w.$$

Pour chaque $w \in \mathbf{W}$ et chaque $s \in \Gamma(E)$, on construit une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$, définie par

$$\nu_{s(w)}(B) = \left\langle P_{\Phi(w)}(B)(s(w)) \mid s(w) \right\rangle_w.$$

En particulier, pour $s \in \Gamma(E)$ et si la fibre de E est $\mathcal{H}$, on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}(\mathbf{W})$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$. Si la section s est normalisée pour tout w, c'est-à-dire, $\|s(w)\|_w = 1$, $\nu_{s(w)}$ est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée $P_{s,\Phi}$ avec $P_{s,\Phi}(w) = \nu_{s(w)}$.

En utilisant la décomposition de Paul Levy, ν_s s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^{p} + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^{p} est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue, la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si $\nu_s = \nu_s^{p}$, on dit que s a un spectre

discret et si $\nu_s = \nu_s^{ac}$, on dit que s a un spectre continu. On se donne une connexion ∇ sur le fibré d'état E, c'est-à-dire, la donnée d'une application $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E\right)$$

qui vérifie la relation de Leibnitz

$$\nabla(\phi s) = d\phi \otimes s + \phi \nabla s,\ \forall \phi \in C^\infty(\mathbf{W}).$$

La représentation de la connexion ∇ sous la forme de dérivée covariante, s'écrit

$$\nabla : \Gamma(T\mathbf{W}) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),\ (X, s) \to \nabla_X s$$

avec

$$\nabla_{fX+gY} s = f \nabla_X s + g \nabla_Y s,$$
$$\nabla_X (s + t) = \nabla_X s + \nabla_X t,$$

et

$$\nabla_X (fs) = df(X)s + f \nabla_X s.$$

Ces deux notions sont équivalentes, $\nabla_X s$ est la dérivée covariante de s le long du champ X. On se fixe ensuite une section de Dirac γ de E, c'est-à-dire, une section de

$$\mathrm{Hom}\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E, E\right) \approx \mathrm{Hom}\left(\Lambda^1 \mathbf{W}, \mathrm{End}(E)\right),$$

ainsi pour tout $d \in \Lambda^1 \mathbf{W}$, l'application

$$\gamma^d : \Gamma(E) \to \Gamma(E),\ \gamma^d(s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w))$$

est un endomorphisme de $\Gamma(E)$, dit endomorphisme de Dirac. Si le fibré est de dimension finie, sur une carte V où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé à la carte V et $\{s_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ une base de sections du fibré d'état resteint à V. On pose $\{d^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés. Ces endomorphismes sont représentés par des matrices carrées d'ordre m dans la base $\{\phi_s, \nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ dont les coefficients sont dans $C^\infty(V)$. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\right),$$

il est indépendant du choix de la base $\{\phi_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ en dimension finie, cette notion s'étend en dimension infinie si la section de Dirac est bornée et à trace. Si l'univers $\mathbf{W}$ est muni d'une métrique de Lorentz g, dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est $(g_{\mu\nu})$ et $(g^{\mu\nu})$ est sa matrice inverse, on fait l'hypothèse

$$(g^{\mu\nu}) = 4(\gamma^{\mu\nu}). \tag{1.1}$$

Dans l'hypothèse où on n'impose pas l'existence d'une métrique de Lorentz g sur l'univers $\mathbf{W}$, on admet que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et $(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})^{-1}$ est la matrice d'une métrique de Lorentz g_γ sur l'ouvert V, pour définir l'équation d'évolution le long d'un champ chronologique T. On définit la section H de $\mathrm{End}(\Gamma(E))$ par

$$H(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w))$$

notée $H = \gamma \otimes \nabla$, l'équation d'état est donnée par

$$H(s) = \lambda s, \tag{1.2}$$

où λ est une fonction propre C^∞ définie sur une carte V de $\mathbf{W}$. On va décrire l'équation d'évolution du système quantique, pour cela on introduit la notion de champ chronologique [19]. On se place sur une carte V de l'univers $\mathbf{W}$ sur laquelle le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ définit une métrique g. Pour cette métrique de type $(1,3)$, il existe au moins un champ $T : \mathbf{W} \to T\mathbf{W}$ de genre temps $\forall w \in V$, $g(w)(T(w), T(w)) < 0$. Pour l'espace-temps de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps. Soit $T_w = \mathbb{R}T(w)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T(w) \in T_w\mathbf{W}$. Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire $g(w)$ sur $T_w\mathbf{W}$ et scinde $T_w\mathbf{W}$ en une somme orthogonale unique $T_w\mathbf{W} = T_w \oplus E_w$, où $E_w = T_w^\perp$. Les restrictions $g(w)\mid_{E_w}$ et $-g(w)\mid_{T_w}$sont définies positives. Tout champ $X : \mathbf{W} \to T(\mathbf{W})$ se décompose en $X = X_E - tT$, où $t : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ est une C^∞-application, X_E est un champ espace, c'est-à-dire, $X_E(w) \in E_w$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. En particulier, $|X_E(w)|_g^2 = g(w)(X_E(w), X_E(w)) > 0$ si $X_E(w) \neq o_{T_w(\mathbf{W})}$. Un champ X est orienté vers le T-futur si $X = X_E - tT$, avec $t > 0$ et vers le T-passé si $t < 0$.

Definition 3. *Un champ T est stable sur une carte V de $\mathbf{W}$, dans laquelle T s'écrit dans le local frame associé sous la forme $T = T^\nu \partial_\nu$, si*

$$\partial_k\left(T^j g_{ij}\right) = \partial_i\left(T^j g_{kj}\right), \forall i, k.$$

Example 1. *Si $\mathbf{W}$ est l'espace de Minkowski alors $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ chronologique stable.*

On peut définir la dérivée covariante le long du champ chronologique T , noté ∇_T. L'équation d'évolution d'une section locale s définie sur V, le long d'un champ chronologique T, non nécessairement stable, d'un système soumis à aucune observation est

$$Hs = i\lambda\nabla_T s, \tag{1.3}$$

si le fibré est complexe ou

$$Hs = \lambda\nabla_T s, \tag{1.4}$$

si le fibré est réel.

Axiom 1. *L'état d'un système physique est défini, par une section s d'un fibré hermitien E, dit fibré d'état.*

Axiom 2. *A tout observable $\mathcal{O}$ est associée une section Φ de $\mathcal{O}(E)$, formée des éléments de $\mathrm{End}(E)$, self-adjoints. On dit que Φ est l'observable quantique de la grandeur physique $\mathcal{O}$.*

Axiom 3. *Quelque soit la section s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur $\mathcal{O}$, les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de Φ.*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure de $\mathcal{O}$ dans Δ est*

$$P_{s,\Phi}(\lambda) = P_{s,\Phi}(\Delta)$$

où

$$P_{s,\Phi}(\Delta)(w) = P_{s(w),\Phi(w)}(\Delta(w))$$

avec $\Delta(w) =]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$ *si le spectre de* s *est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est*

$$P_{s,\Phi}(\lambda)(w) = P_{s(w),\Phi(w)}(\lambda(w)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction* λ *est*

$$\widetilde{s} = \frac{P_{E_\lambda}(s)}{\|P_{E_\lambda}(s)\|},$$

où $\widetilde{s}(w) = P_{E_{\lambda(w)}}(s(w))$ *et* $P_{E_{\lambda(w)}}$ *est le projecteur sur le sous-espace propre* $E_{\lambda(w)}$ *associé à la valeur propre* $\lambda(w)$ *de* $\Phi(w)$.

Axiom 6. *Soit* s*, l'état du système en* w_0 *dans une carte* V *de* $\mathbf{W}$*, tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution le long d'un champ chronologique* T *associé au tenseur de Poisson* $\gamma^{\mu\nu}$ *est*

$$Hs = i\lambda\nabla_T s$$

où $H = \gamma \otimes \nabla$*,* γ *est la section de Dirac et* ∇ *est la connexion associés au fibré d'état.*

2. La quantification des fibrés d'état

Les fibrés considérés sont de base $\mathbf{W}$ et ne sont pas nécessairement des fibrés induits par des fibrés au dessus du multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$. Un fibré d'état de l'univers $\mathbf{W}$ est un fibré $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{H})$ muni d'un produit hermitien C^∞, d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ bornée, à trace. Sur une carte V où le fibré tangent est trivialisable, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le local frame associé à la carte V, $\{d^\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le local frame dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés à la base duale d^μ. Pour chaque $v \in \mathbf{W}$, $\gamma^\mu(v)$ est un opérateur de l'espace d'hilbert E_v qui est un opérateur borné, à trace pour $\mu = 0,1,2,3$, ils forment un idéal des opérateurs bornés. Le tenseur de Poisson est un tenseur symétrique, on suppose que la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et que sa matrice inverse $(\gamma_{\mu\nu})$ définit, sur la carte U, une métrique de Lorentz g_γ par $g_\gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}$.

Definition 4. *La section des groupes de Dirac* [10] *est définie par*

$$\mathcal{D} = \left\{\gamma^d : d \in \Lambda^1\mathbf{W}\right\}$$

avec

$$\mathcal{D}(v) = \left\{\gamma^d(v) : E_v \to E_v : d \in \Lambda^1\mathbf{W}\right\}$$

où

$$\gamma^d(v)(e) = \gamma(v)(d(v) \otimes e),\ e \in E_v.$$

Les hypothèses sont les suivantes, si on munit $\mathbf{W}$ d'une métrique Lorentzienne h, on veut localement que sur toutes les cartes

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = h^{\mu\nu} Id_E,\ [4] \text{ et } [5] \tag{2.1}$$

Remark 4. *Avec une base de* 1*-formes* $\{\tau_\mu\}$ *pour laquelle*

$$\frac{1}{8}\operatorname{Trace}(\{\gamma^{\tau_\mu}, \gamma^{\tau_\nu}\}) = \delta^{\mu\nu} \ \textit{si}\ (\mu,\nu) \neq (0,0)\ \textit{et}\ \frac{1}{8}\operatorname{Trace}(\{\gamma^{\tau_0}, \gamma^{\tau_0}\}) = -1$$

l'opérateur

$$J = \gamma^{\tau_0}$$

définit une structure presque complexe sur le fibré d'état restreint à V, noté $E(V)$, quand la relation 2.1 est vérifiée [7].

Si on prend la dérivée covariante, le long du champ chronologique T,

$$\nabla_T \circ H(s) = \nabla_T (\gamma \otimes \nabla(s)) = d\lambda(T)s + \lambda \nabla_T s. \tag{2.2}$$

Sur $\mathbf{W}$ on a une métrique pseudo-riemannienne qui permet de définir une forme volume μ. Dans une carte, si $\mathbf{W}$ est orientable cette forme volume s'écrit

$$\mu = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3,$$

les sections s telles que

$$\int_{\mathbf{W}} \langle s \mid s \rangle \mu = \int_{\mathbf{W}} \langle s(w) \mid s(w) \rangle_w \mu(w) < +\infty$$

sont les sections de carré intégrable, le complété de ces sections est étudié comme un espace de Sobolev particulier.

Definition 5. *Pour cette métrique pseudo-riemannienne, la probabilité de trouver la particule dans une région $\Re$ de l'univers $\mathbf{W}$ dans l'état s est*

$$p(\Re) = \frac{\int_{\Re} \langle s \mid s \rangle \mu}{\int_{\mathbf{W}} \langle s \mid s \rangle \mu}.$$

Remark 5. *Les sections d'état telles que $\int_{\mathbf{W}} \langle s \mid s \rangle \mu = 1$ sont les sections unitaires pour la métrique g.*

Pour un fibré d'état $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{H})$, $\mathcal{O}(\zeta)$ est le sous-fibré de $\mathrm{End}(\zeta)$ dont la fibre est formée des éléments de $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ qui sont autoadjoints. Soit $\mathcal{A}_E$ un élément de $\Gamma(\mathcal{O}(\zeta))$, pour chaque $w \in \mathbf{W}$, l'application $\mathcal{A}_E(w) : E_w \to E_w$ est une observable de E_w. Une fonction $\lambda : \mathbf{W} \to \mathbb{C}$ est une fonction localement propre de $\mathcal{A}_E$ si en chaque point $w_0 \in \mathbf{W}$, il existe une carte V et une section locale s sur V, non nulle sur V pour laquelle

$$\mathcal{A}_E(w)(s(w)) = \lambda(w) s(w)$$

pour tout $w \in V \subset \mathbf{W}$. La section s est une section locale propre associée à la fonction λ. On note $E_w(\lambda)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda(w)$. On pose $E(\lambda) = \cup_{w \in \mathbf{W}} E_w(\lambda)$ et $\zeta(\lambda) = (E(\lambda), \pi_\lambda, \mathbf{W})$ où $\pi_\lambda = \pi \mid_{E(\lambda)}$.

Definition 6. *Si $\zeta(\lambda)$ est un sous-fibré de ζ, on dit que λ est une fonction propre et $\zeta(\lambda)$ est le sous-fibré propre associé à la fonction propre λ, $\dim \zeta(\lambda) \leqslant +\infty$ est la dimension de $\zeta(\lambda)$. La section $\mathcal{A}_E$ de $\mathcal{O}(\zeta)$ est diagonalisable s'il existe une suite $\{\lambda_j\}$ de fonctions propres telles que ζ soit la somme de Whitney des sous-fibrés propres $\zeta(\lambda_j)$*

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

Proposition 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une section $\mathcal{A}_E$ de $\mathcal{O}(\zeta)$ soit diagonalisable est qu'il existe une suite de fonctions propres $\{\lambda_j\}$ telle que*

$$\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j,$$

où $\mathcal{H}_j$ est la fibre du fibré hilbertien $\zeta(\lambda_j)$.

Proof. Chaque fibre $E_w(\lambda_j) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_E(w) - \lambda_j(w) Id_{E_w})$ est hilbertienne comme sous-espace fermé de E_w. La condition $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j$ est réalisée si et seulement si sur chaque fibre

$$E_w = \oplus_j E_w(\lambda_j),$$

et

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

□

Remark 6. *Si ∇^j est une connexion définie sur $\zeta(\lambda_j)$ alors*

$$\nabla s = \nabla^j s_j \tag{2.3}$$

avec $s = \sum_j s_j$ est une connexion sur ζ. Une connexion ∇ qui vérifie l'équation 2.3 est une $\mathcal{A}$-connexion.

Si $\dim(\zeta) < +\infty$ et L est une section de $\mathrm{End}(\zeta)$ alors L est diagonalisable, au sens des fibrés vectoriels si

$$\dim(\zeta) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spect}(L)} \dim \zeta(\lambda),$$

où $\mathrm{Spect}(L)$ est formé des fonctions propres de L.

Definition 7. *Une densité d'état de l'observable $\mathcal{A}_E$ est une fonction propre λ de $\mathcal{A}_E$.*

Remark 7. *On peut définir une représentation géométrique de l'univers $\mathbf{W}$, en utilisant la densité des fonctions de Morse pour la C^∞-topologie fine de Whitney dans $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{R})$. On approche chaque fonction λ de densité d'état par une fonction de Morse Λ, et on applique le procédé de géométrisation développé dans* [19].

Definition 8. *La forme différentielle d est γ-diagonalisable si et seulement si γ^d est diagonalisable au sens des fibrés.*

Si d est γ-diagonalisable alors toute section s peut s'écrire localement $s = \sum_j s^j$, où s^j est une section locale de $E(\lambda_j)$ associée à la fonction propre λ_j et

$$\gamma^d(s) = \sum_j \lambda_j s^j = \lambda_j s^j,$$

en utilisant le principe de sommation d'Einstein au somme infinie. Si γ est une section de Dirac à trace

$$\mathrm{Trace}\, \gamma^d = \sum_j n_j \lambda_j \text{ et } \det \gamma^d = \prod_j \lambda_j^{n_j},$$

où $n_j(w) = \dim E(\lambda_j(w)) < +\infty$, avec

$$\sum_j n_j(w) |\lambda_j(w)| < +\infty \text{ et } \prod_j |\lambda_j(w)|^{n_j(w)} < +\infty$$

pour tout $w \in \mathbf{W}$. Une C^∞-section polynomiale est une section du fibré de base $\mathbf{W}$ et de fibre $\mathbb{C}[X]$

$$w \to P(w), P(w)(X) \in \mathbb{C}[X]$$

où $P(w)(X)$ est un polynôme de dégré fini de la variable X, noté $\deg P(w)$. La notion de C^∞-section est définie dans le sens suivant,

$$(w, X) \to P(w)(X)$$

est C^∞ comme application $\mathbf{W}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. En particulier, $\deg P(w)$ est indépendant du choix de w, on le note $\deg P$. La section polynomiale P, de dégré minimal, pour laquelle $P(w)\left(\gamma^d(w)\right)=o$, est la section minimale associée à γ^d. Si $P(w)(X)=X^2+1$, on dit que γ^d définie une structure presque complexe sur le fibré des états ζ. Une structure complexe sur le fibré des états $\zeta=(E,\pi,\mathbf{W},\mathcal{H})$ est un automorphisme de fibré $J:E\to E$ tel que $J^2=-Id$, c'est-à-dire, de polynôme minimal X^2+1. Les fonctions propres de J sont les fonctions constantes $\lambda=i$ et $\overline{\lambda}=-i$, les sous-fibrés propres $\zeta^{1,0}$ et $\zeta^{0,1}$ associés vérifient $\zeta=\zeta^{1,0}\oplus\zeta^{0,1}$. On définit un scindage de ζ, toute section s s'écrit

$$s=s^{1,0}+s^{0,1},\ s^{1,0}=\frac{1}{2}(s-iJs)\ \text{ et }\ s^{0,1}=\frac{1}{2}(s+iJs),$$

pour aller plus loin, on peut consulter [20], [7]. Chaque fibré d'état $\zeta=(E,\pi,\mathbf{W},\mathcal{H})$ de l'univers lisse $\mathbf{W}$ est muni d'une section hermitienne, notée $\langle\bullet\mid\bullet\rangle$. Les fibres sont munies d'un produit scalaire hermitien. L'univers $\mathbf{W}$ est muni d'une orientation et d'une mesure Lebesguienne μ. En générale, cette mesure Lebesguienne est définie par une métrique pseudo-riemannienne g. On identifie chaque section s, à la classe des sections qui sont μ presque partout égales à s. Une section s est nulle μ-presque partout, si

$$\mu\left(\{w\in\mathbf{W}:s(w)\neq o_w\}\right)=0.$$

On définit le produit scalaire

$$\langle s\mid t\rangle_\mu=\int_{\mathbf{W}}\langle s\mid t\rangle\,\mu,$$

s et t sont deux sections de ζ. Si ∇ est une connexion sur le fibré ζ et γ une section de Dirac sur ζ, on définit pour une section s la norme d'ordre p,

$$\|s\|_p=\sqrt[p]{\int_{\mathbf{W}}|s|^p\,\mu}$$

avec, $|s|=\sqrt{\langle s\mid s\rangle}$ et on pose

$$\|s\|_{m,p}=\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\nabla_\gamma^k s\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\leqslant p<+\infty\ \text{ et }\ \nabla_\gamma^0 s=s$$

avec $\nabla_\gamma^n=\gamma_n\otimes\nabla_{n-1}$ et $\nabla_\gamma^0=Id$. Le sous-espace de $\Gamma(\zeta)$, noté $\Gamma^{m,p}(\zeta)$, est

$$\Gamma^{m,p}(\zeta)=\left\{s\in\Gamma(\zeta):\|s\|_{m,p}<+\infty\right\}.$$

Les espaces de type Sobolev attachés au fibré hermitien ζ sont définis par la complétion des espaces normés $\Gamma^{m,p}(\zeta)$ et sont notés $\mathcal{W}^{m,p}(\zeta)$. Par construction, ces espaces sont des espaces de Banach. Si on pose $\mathcal{H}^m(\zeta)=\mathcal{W}^{m,2}(\zeta)$, les espaces obtenus sont des espaces d'Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle s\mid t\rangle_m=\sum_{k=0}^{m}\int_{\mathbf{W}}\left\langle\nabla_\gamma^k s\mid\nabla_\gamma^k t\right\rangle\mu.$$

Remark 8. *Les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^m(\zeta)$ sont définis pour l'étude spectrale de l'extension de la dérivée de Lie aux champs complexes en identifiant $\mathcal{L}_X$ à un opérateur*

$$\mathcal{L}_X:\mathcal{H}^m(\zeta)\to\mathcal{H}^m(\zeta),\ \mathcal{L}_X(Y)=[X,Y]$$

avec $E(\zeta)=T\mathbf{W}\otimes\mathbb{C}$.

Les opérateurs γ_n et ∇_{n-1} sont définis comme suit. Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\left\{\gamma^{d^\mu}\right\}$ est

$$\begin{aligned}&\left[\gamma^{d^1},\gamma^{d^2},\cdots,\gamma^{d^n}\right](w)\\&=\sum_{s\in\mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}}\varepsilon(s)\,\gamma^{d^{s(1)}}(w)\circ\gamma^{d^{s(2)}}(w)\circ\cdots\circ\gamma^{d^{s(n-1)}}(w)\circ\gamma^{d^{s(n)}}(w),\end{aligned}\tag{2.4}$$

et l'anticommutateur est donné par,

$$\begin{aligned}&\left\{\gamma^{d^1},\gamma^{d^2},\cdots,\gamma^{d^n}\right\}(w)\\&=\sum_{s\in\mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}}\gamma^{d^{s(1)}}(w)\circ\gamma^{d^{s(2)}}(w)\circ\cdots\circ\gamma^{d^{s(n-1)}}(w)\circ\gamma^{d^{s(n)}}(w)\end{aligned}\tag{2.5}$$

pour tout $w\in\mathbf{W}$. Le commutateur définit un endomorphisme de $\mathrm{End}\left(\Lambda^n\mathbf{W}\otimes E,E\right)$. L'extension de rang n d'une section γ est l'endomorphisme $\gamma_n\in\mathrm{End}\left(\Lambda^n(\mathbf{W})\otimes E,E\right)$ où

$$\gamma_n(w)\left(\left(d^1\wedge d^2\wedge\cdots\wedge d^n\right)(w)\otimes s(w)\right)=\left[\gamma^{d^1},\gamma^{d^2},\cdots,\gamma^{d^n}\right](w)\left(s(w)\right),$$

pour tout $w\in\mathbf{W}$ et on prolonge γ_n par $C^\infty(\mathbf{W},\mathbb{C})$-linéarité sur $\Lambda^n(\mathbf{W})\otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension

$$d_n^\nabla:\Gamma\left(\Lambda^n(\mathbf{W})\otimes E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W})\otimes E\right)$$

avec, $d_0^\nabla=\nabla$, $\Lambda^0(\mathbf{W})\otimes E=E$ et

$$d_n^\nabla(\psi\otimes s)=d\psi\otimes s+(-1)^n\psi\wedge\nabla s,\psi\in\Lambda^n(\mathbf{W}).$$

L'opérateur ∇_γ^n est défini par

$$\nabla_\gamma^n(s)=\gamma_n\otimes\nabla_{n-1}(s)=\gamma_n(\nabla_{n-1}s)\ \text{ avec }\nabla_{n-1}=d_{n-1}^\nabla\circ\cdots\circ d_0^\nabla$$

pour toute section s, c'est-à-dire, pour tout $w\in\mathbf{W}$

$$\left(\gamma_n\otimes\nabla_{n-1}\right)(w)\left(s(w)\right)=\gamma_n(w)\left(\nabla_{n-1}s(w)\right).$$

Les équations d'évolution d'ordre n du fibré d'état $\zeta\mid_V$ où V est un ouvert $\mathbf{W}$ sont définie par l'opérateur d'évolution $\Phi_n=\gamma_n\otimes\nabla_{n-1}$ comme un endomorphisme de l'espace de Banach $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta\mid_V)$. Si cet endomorphisme est diagonalisable pour au moins un réel $p\geqslant1$, on en déduit toutes les équations d'évolution possibles des sections s de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta\mid_V)$. On généralise la notion d'opérateur d'évolution comme un opérateur diagonalisable de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta\mid_V)$ qui devient une observable si $p=2$. On va étendre cette notion d'espace de Sobolev en définissant les espaces L^p d'un fibré et en présentant une théorie des distributions sur les fibrés. Dans la suite, l'ensemble des sections, non nécessairement différentiables, du fibré ζ est noté $\mathcal{S}(\zeta)$. On note

$$\mathcal{L}^p(\zeta,\mu)=\left\{s\in\mathcal{S}(\zeta):\int_{\mathbf{W}}|s|^p\mu<+\infty\right\},$$

où $|s|=\sqrt{\langle s\mid s\rangle}$ est μ-mesurable. $\mathcal{O}$ est le sous-espace vectoriel formé par les sections nulles μ presque partout. L'espace $L^p(\zeta,\mu)$ est $L^p(\zeta,\mu)=\frac{\mathcal{L}^p(\zeta,\mu)}{\mathcal{O}}$.

Proposition 2. *$L^p(\zeta,\mu)$ est espace de Banach pour la norme $\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_{\mathbf{W}} |s|^p \, d\mu}$ et $L^2(\zeta,\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle s \mid t \rangle_\mu = \int_{\mathbf{W}} \langle s \mid t \rangle \, \mu.$$

L'espace vectoriel des sections test est défini par

$$\mathcal{D}(\zeta) = \{ s \in \Gamma(\zeta) : \operatorname{supp}(s) \text{ est compact} \},$$

où $\operatorname{supp}(s) = \operatorname{Adh}\{w : s(w) \neq o_w\}$.

Definition 9. *Une distribution D est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\zeta)$. L'ensemble des distributions sur ζ est noté $\mathcal{D}'(\zeta)$.*

Pour une section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$, localement intégrable, c'est-à-dire, une section s telle que pour tout compact K de $\mathbf{W}$ on a $\int_K |s| \, \mu < +\infty$, on définit la distribution

$$D_s(t) = \langle D_s, t \rangle = \int_{\mathbf{W}} \langle s \mid t \rangle \, \mu. \tag{2.6}$$

Proposition 3. *$D_s = o$ si et seulement si $s = o$ μ-presque partout.*

On a une inclusion naturelle de $\frac{\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$ où $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)$ est l'ensemble des sections localement intégrables. On a $L^p(\zeta,\mu) \subset \frac{\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$, et un plongement naturel de $L^p(\zeta,\mu)$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$. On identifiera $L^p(\zeta,\mu)$ et son image dans $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Remark 9. *Si 2.6 est vérifiée, on dit que la distribution est régulière et on identifie D_s à s. Dans cette situation, on note $\langle D_s, t \rangle = \langle s \mid t \rangle_{\mathbf{W}}$. On a $D_{\lambda s} = \overline{\lambda} D_s$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Definition 10. *Le produit scalaire hermitien $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ si et seulement si pour tout champ X de $\mathbf{W}$ et pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$*

$$X.\langle s \mid t \rangle = \langle \nabla_X s \mid t \rangle + \langle s \mid \nabla_X t \rangle, \tag{2.7}$$

où $X.\langle s \mid t \rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞-application

$$w \to \langle s(w) \mid t(w) \rangle_w .$$

Theorem 1. *Si le produit scalaire $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ alors*

$$\langle \nabla_X s, t \rangle = -\langle s \mid \operatorname{div}(X) t + \nabla_X t \rangle_\mu ,$$

pour toutes sections test t et toute section $s \in \Gamma(\zeta)$.

Proof. Il suffit de vérifier que dans les hypothèses du théorème

$$I = \int_{\mathbf{W}} L_X(f) \, \mu = -\int_{\mathbf{W}} f \operatorname{div}(X) \, \mu$$

pour toute C^∞-fonction f à support compact avec $L_X(f)$ est la dérivée de Lie le long du champ X de f. On peut se ramener à une carte en utilisant une partition de l'unité associé à un recouvrement de cartes V. Dans le local frame $\{\partial_\nu\}$ associé à la carte V, de dual $\{d^\nu\}$ la forme volume μ s'écrit

$$\mu = \theta d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3$$

avec θ fonction de classe C^∞, non nulle, sur V. On a, si $X = X^\nu \partial_\nu$

$$I = \int_V X^\nu (\partial_\nu f) \, \theta d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3$$

et

$$I=\int_V \partial_\nu\left(X^\nu f\theta\right)d^0\wedge d^1\wedge d^2\wedge d^3-\int_V f\partial_\nu\left(X^\nu\theta\right)d^0\wedge d^1\wedge d^2\wedge d^3.$$

La fonction f est à support compact dans V, donc

$$\int_V \partial_\nu\left(X^\nu f\theta\right)d^0\wedge d^1\wedge d^2\wedge d^3=0.$$

Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}&\int_V f\partial_\nu\left(X^\nu\theta\right)d^0\wedge d^1\wedge d^2\wedge d^3\\&=\int_V f\left(\theta\partial_\nu X^\nu+d\theta\left(X\right)\right)d^0\wedge d^1\wedge d^2\wedge d^3\\&=\int_V f\left(\partial_\nu X^\nu+\frac{d\theta\left(X\right)}{\theta}\right)\mu\end{aligned}$$

On en déduit $I=-\int_V f\operatorname{div}\left(X\right)\mu$ car $\operatorname{div}\left(X\right)=\partial_\nu X^\nu+\frac{d\theta(X)}{\theta}$ dans le local frame $\{\partial_\nu\}$. □

Definition 11. $\operatorname{div}\left(X\right)=\operatorname{div}_\mu\left(X\right)$ *est la divergence de X associée à la forme volume μ, c'est-à-dire, $\mathcal{L}_X\left(\mu\right)=\operatorname{div}\left(X\right).\mu$.*

Si le produit scalaire est parallèle à la connexion, cela permet de définir la dérivée covariante d'une distribution D de ζ, le long d'un champ X par

$$\left\langle\nabla_X D,t\right\rangle=-\left\langle D,\operatorname{div}\left(X\right)t+\nabla_X t\right\rangle$$

pour tout $t\in\mathcal{D}\left(\zeta\right)$. On peut étendre la notion de dérivée covariante d'une section s localement intégrable quelconque, au sens des distributions le long du champ X, notée encore $\nabla_X s$, telle que $\nabla_X s=\nabla_X D_s$. Cette notion étend la notion de dérivée covariante, $\nabla_X s\in\mathcal{D}'\left(\zeta\right)$ car $\nabla_X s=-D\circ T_X$ où $T_X\left(t\right)=\operatorname{div}\left(X\right)t+\nabla_X t$, qui est un opérateur borné de $\mathcal{D}\left(\zeta\right)$, pour tout compact $K\subset\mathbf{W}$, la restriction à K de $\nabla:\left(X,t\right)\to\nabla_X t$ est continue pour les normes définies plus haut.

Proposition 4. $\left\langle\nabla_{fX}D,t\right\rangle=\left\langle\nabla_X D,ft\right\rangle$ *pour toute C^∞-application f et*

$$\nabla_X\left(fD\right)=f\nabla_X D.$$

Proof. On a

$$\left\langle\nabla_{fX}D,t\right\rangle=-\left\langle D,\operatorname{div}\left(fX\right)t+\nabla_{fX}t\right\rangle$$

$$\operatorname{div}\left(fX\right)t+\nabla_{fX}t=\left(f\operatorname{div}\left(X\right)+df\left(X\right)\right)t+f\nabla_X t$$

$$\left(f\operatorname{div}\left(X\right)+df\left(X\right)\right)t+f\nabla_X t=\operatorname{div}\left(X\right)ft+\nabla_X\left(ft\right).$$

On en déduit

$$\left\langle\nabla_{fX}D,t\right\rangle=-\left\langle D,\operatorname{div}\left(X\right)ft+\nabla_X\left(ft\right)\right\rangle=\left\langle\nabla_X D,ft\right\rangle.$$

Cette égalité peut s'écrire si

$$H_f\left(t\right)=ft,\ H_f\left(t\right)\left(w\right)=f\left(w\right)t\left(w\right)$$

$$\nabla_{fX}D=\nabla_X D\circ H_f.$$

□

Il y a deux procédés de quantification d'un fibré d'état de $\mathbf{W}$. Le premier consiste à travailler globalement sur les sections du fibré qui ont un carré intégrable, cette approche nécessite l'apport d'une forme volume μ. On peut ainsi construire l'espace de Hilbert $L^2(\zeta,\mu)$, ensuite construire l'espace de Fock associé à cet espace de Hilbert et utiliser les procédés de quantification habituels. L'autre procédé ne fait pas intervenir de forme volume, on travaille sur chaque fibre et on procède à une quantification fibre à fibre. On s'intéresse au deuxième procédé de quantification. Soit $\zeta = (E,\pi,\mathbf{W},\mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers $\mathbf{W}$, on note $\otimes^n\zeta$, le produit tensoriel d'ordre n de ζ et $\otimes^0\zeta = (\mathbf{W}\times\mathbb{C},\pi_1,\mathbf{W},\mathbb{C})$ le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{S}_n(\zeta)$, le symétrisé de $\otimes^n\zeta$ et $\mathcal{A}_n(\zeta)$, l'antisymétrisé de $\otimes^n\zeta$. L'espace de Bose-Fock de ζ est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés $\mathcal{S}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_+(\zeta) = (\cup_{w\in\mathbf{W}}\mathcal{F}_+(\zeta)(w),\pi,\mathbf{W},\mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

c'est-à-dire, pour chaque $w\in\mathbf{W}$,

$$\mathcal{F}_+(\zeta)(w) = \left\{u = \left\{u^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)}\in\mathcal{S}_n(E_w(\zeta)), \sum_{n=0}^{\infty}\left\|u^{(n)}\right\|_w^2 < \infty\right\}$$

$\mathcal{S}_n(E_w(\zeta))$ est le symétrisé d'ordre n de la fibre $E_w(\zeta)$ munit du produit hermitien induit par le produit hermitien de $E_w(\zeta)$, noté $\langle\bullet\mid\bullet\rangle_w$, et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés $\mathcal{A}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_-(\zeta) = (\cup_{w\in\mathbf{W}}\mathcal{F}_-(\zeta)(w),\pi,\mathbf{W},\mathcal{F}_-(\mathcal{H})).$$

Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré hermitien sur $\mathbf{W}$. L'espace de Bose-Fermi-Fock d'une paire de fibrés (ζ,ξ) est défini par le produit tensoriel des fibrés $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\xi)$

$$\mathcal{F}(\zeta,\xi) = \mathcal{F}_+(\zeta)\otimes\mathcal{F}_-(\xi),$$

c'est le fibré de Bose-Fermi-Fock associé à la paire (ζ,ξ) des fibrés d'état de l'univers $\mathbf{W}$. Soient n sections $s_1,\cdots,s_n$, le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(s_1\otimes\cdots\otimes s_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}\{1,\cdots,n\}} s_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes s_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(s_1\otimes\cdots\otimes s_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}\{1,\cdots,n\}} \varepsilon(\sigma)\, s_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes s_{\sigma(n)}.$$

Remark 10. *Le fibré $\otimes^n\zeta$ a pour fibre $\otimes^n\mathcal{H}$ et chaque fibre est donnée par*

$$E_w(\otimes^n\zeta) = \otimes^n E_w(\zeta).$$

On note $\mathcal{C}(\zeta,\xi)\subset\Gamma(\mathrm{Hom}(\zeta,\xi))$, le sous-ensemble des sections

$$L : w\to L(w) : E_w(\zeta)\to E_w(\xi),$$

tel que pour chaque $w\in\mathbf{W}$, $L(w)$ est un opérateur de $E_w(\zeta)$ dans $E_w(\xi)$ qui est densément défini et fermé. Ponctuellement,

$$\mathrm{dom}(L) = \{\mathrm{dom}(L(w)) : w\in\mathbf{W}\}$$

est formé de l'ensemble de tous les domaines des opérateurs

$$L(w) : E_w(\zeta)\to E_w(\xi).$$

L'application L est C^{∞} dans le sens suivant, pour chaque section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$ vérifiant $s(w) \in \operatorname{dom}(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$, l'application

$$w \to L(w)(s(w)) = L \otimes s(w)$$

est une section de $\mathcal{S}(\xi)$. Les sections telles que $s(w) \in \operatorname{dom}(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$, forment un sous-ensemble des sections de $\mathcal{S}(\zeta)$, noté

$$\operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right) = \{s \in \mathcal{S}(\zeta) : s(w) \in \operatorname{dom}(L(w)), \forall w \in \mathbf{W}\},$$

où l'application $\widetilde{L}$ est définie par

$$\widetilde{L} : \operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right) \subset \mathcal{S}(\zeta) \to \mathcal{S}(\xi), \ \widetilde{L}(s) = L \otimes s.$$

Definition 12. *Si L est densément défini l'adjoint de $L \in \operatorname{Hom}(\zeta, \xi)$ est l'opérateur $L^* \in \operatorname{Hom}(\xi, \zeta)$ qui vérifie*

$$\langle L^* \otimes s \mid t \rangle_{\zeta} = \langle s \mid L \otimes t \rangle_{\xi}$$

pour toute section $s \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{L^*}\right)$ et $t \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right)$. On a pour tout $w \in \mathbf{W}$,

$$\langle L^*(w)\, s(w) \mid t(w) \rangle_{w,\zeta} = \langle s(w) \mid L(w)\, t(w) \rangle_{w,\xi}.$$

L'espace $\operatorname{dom}\left(\widetilde{L^*}\right)$ est formé des sections $s \in \mathcal{S}(\xi)$ pour lesquelles il existe une section $\tau \in \mathcal{S}(\zeta)$ telle que

$$\langle \tau \mid t \rangle_{\zeta} = \langle s \mid L \otimes t \rangle_{\xi}$$

pour tout $t \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right)$. Si L est densément défini τ est unique et on pose $L^* \otimes s = \tau$ [24].

Remark 11. *L'opérateur adjoint associé à L est entiérement défini par*

$$\langle L^*(w)(e_{\zeta}) \mid e_{\xi} \rangle_{w,\zeta} = \langle e_{\zeta} \mid L(w)(e_{\xi}) \rangle_{w,\xi}, \ \forall e_{\zeta} \in E_w(\zeta), \ \forall e_{\xi} \in E_w(\xi) \ \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

Proposition 5. *Si L est fermé et densément défini alors L^* est fermé et densément défini et $L^{**} = L$.*

Proof. On peut consulter [1], [3] pour une preuve sur chaque fibre du fibré. □

Notation 1. *Pour un opérateur $L \in \operatorname{Hom}(\zeta)$, on pose $\operatorname{Im}(L) = \{\operatorname{Im}(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$ l'ensemble des images de L, $\operatorname{Ker}(L) = \{\operatorname{Ker}(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$ est l'ensemble des noyaux de L* [30]. *Les sous-ensembles de $\mathbb{C}$, $\rho(L) = \{\rho(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$ forme la résolvante de L, elle est formée des sous-ensembles $\rho(L(w))$ définis par*

$$\rho(L(w)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(w) \ \text{ est injective}, \operatorname{Im}(L(w)) \ \text{ est dense et } L(w) - \lambda \mathbf{I}_w \ \text{ est borné}\}$$

où $\mathbf{I}_w$ est l'application identique sur la fibre $E_w(\zeta)$, $\sigma(L) = \{\sigma(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$ est l'ensemble des spectres $\sigma(L(w)) = \mathbb{C} \setminus \rho(L(w))$ et $\sigma_p(L) = \{\sigma_p(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$ où $\sigma_p(L(w))$ est l'ensemble des valeurs propres de $L(w)$.

Definition 13. *Une fonction $\phi \in C^{\infty}(\mathbf{W}, \mathbb{C})$ est propre pour L si $\phi(w) \in \sigma_p(L(w))$, ϕ est une résolvante de L si $\phi(w) \in \rho(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. La fonction ϕ est spectrale si $\phi(w) \in \sigma(L(w))$.*

Proposition 6. *Si L est densément défini alors* $\ker L^* = \operatorname{Im}(L)^{\perp}$*, c'est-à-dire, pour tout* $w \in \mathbf{W}$

$$\ker L^*(w) = \operatorname{Im}(L(w))^{\perp}$$

l'orthogonalité est définie dans l'espace de Hilbert $E_w(\xi)$*. Si* $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ *alors l'opérateur de* $\mathbf{I}_\zeta + L^*L$ *de* $\operatorname{Hom}(\zeta)$ *est un opérateur injectif,*

$$\ker(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = (\mathbf{W} \times o, \pi_1, \mathbf{W}, o)$$

et

$$\operatorname{Im}(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = \zeta,$$

ponctuellement, cela signifie que

$$\ker\left(\mathbf{I}_{E_w(\zeta)} + L(w)^* L(w)\right) = \{o_w\}$$

et

$$\operatorname{Im}\left(\mathbf{I}_{E_w(\zeta)} + L(w)^* L(w)\right) = E_w(\zeta).$$

L'opérateur $(\mathbf{I}_\zeta + L^*L)^{-1}$ *est positif et* L^*L *est autoadjoint avec* $\sigma(L^*L) \subset \mathbb{R}^+$*, c'est-à-dire,* $\sigma\left(L(w)^* L(w)\right) \subset \mathbb{R}^+$ *pour tout* $w \in \mathbf{W}$*.*

On travaille dorénavant sur les sections des fibrés considérés précédemment. Chaque section s de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ s'écrit

$$s = \left\{s^{(n)}\right\},$$

où $s^{(n)}$ est une section de $\mathcal{S}_n(\zeta)$ que l'on peut identifier à une section de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ $\left\{o, \cdots, o, s^{(n)}, o, \cdots\right\}$. La section vide de l'espace de Bose-Fock est la section constante $\mathbf{1}_+$ définie par $\mathbf{1}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \cdots\}$ qui s'écrit ponctuellement, $\mathbf{1}_+(\omega) = \{1, o_\omega, o_\omega, \cdots\}$. Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\zeta)$, il existe un unique opérateur linéaire $a(s)$ densément défini et fermé sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$, non borné, appelé annulateur de Bose, son adjoint est l'opérateur $a(s)^*$. Il vérifie les propriétés

$$\left(a(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(0)} = o,$$

$$\left(a(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(n)} = \sqrt{n}\mathcal{S}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right) \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{a(s)^*}\right).$$

Ponctuellement pour chaque $e_\zeta \in E_w(\zeta)$, l'opérateur $a(e_\zeta)$ a pour adjoint $a(e_\zeta)^*$ qui s'écrit

$$a(e_\zeta)^*\left(\left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\}\right) = \left\{o, \left\{\sqrt{n}\mathcal{S}_n\left(e_\zeta \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)\right\}_{n \geqslant 1}\right\}$$

où $\mathcal{S}_n\left(e_\zeta \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)$ est le symétrisé de $e_\zeta \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}$ pour tout $\left\{\mathbf{v}^{(n-1)}\right\} \in \mathcal{F}_+(\zeta)(w)$ [2].

Remark 12. *L'opérateur* $a(s)^*$ *est défini en prenant pour chaque* $w \in \mathbf{W}$*, l'adjoint de l'opérateur*

$$a(s)(w) : \mathcal{F}_+(\zeta)(w) \to \mathcal{F}_+(\zeta)(w),$$

sur chaque fibre $\mathcal{F}_+(\zeta)(w)$*. On a*

$$a(s) \otimes \mathbf{1}_+ = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \mathcal{S}(\xi),$$

où $\mathbf{o}(w) = (0, o_w, o_w, \cdots)$*.*

Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\xi)$, il existe un unique opérateur linéaire $b(s)$ sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ appelé annulateur de Fermi tel que

$$\operatorname{dom}(b(s)) = \mathcal{F}_-(\xi) \text{ et } \|b(s)(w)\| = \|s(w)\|_w \text{ pour tout } w \in \mathbf{W},$$

l'adjoint $b(s)^*$ vérifie

$$\left(b(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(0)} = \mathbf{o} \text{ et } \left(b(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(n)} = \sqrt{n}\mathcal{A}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right), n \geqslant 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \mathcal{F}_-(\xi),$$

$\mathcal{A}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right)$ est l'antisymétrisé d'ordre n de $s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}$. Ponctuellement, pour chaque $e_\xi \in E_w(\xi)$, l'opérateur $b(e_\xi)$ a pour adjoint $b(e_\xi)^*$ qui vérifie

$$b(e_\xi)^*\left(\left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\}\right) = \left\{0, \left\{\sqrt{n}\mathcal{A}_n\left(e_\xi \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)\right\}_{n\geqslant 1}\right\}, \ \left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\} \in \mathcal{F}_-(\xi)(w).$$

On a les anticommutations canoniques suivantes

$$\left[b(s), b(t)^*\right] = \langle s \mid t\rangle \mathbf{I}, \{b(s), b(t)\} = \mathbf{o},$$

pour toute section $s \in \mathcal{S}(\xi)$ et $t \in \mathcal{S}(\xi)$ [34]. En particulier, $b(s)^2 = \mathbf{o}$, $s \in \mathcal{S}(\xi)$. La section vide de l'espace de Fermi-Fock est la section constante $\mathbf{1}_-$ définie par $\mathbf{1}_- = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \cdots\}$, ponctuellement $\mathbf{1}_-(w) = \{1, o_w, o_w, \cdots\}$ cette section vide vérifie $b(s) \otimes \mathbf{1}_- = \mathbf{o}$ pour toute section $s \in \mathcal{S}(\xi)$. On introduit un opérateur différentiel extérieur sur les fibrés des états de la façon suivante. Soit $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$, on pose

$$\mathcal{D}_L^\infty = \operatorname{Vect}\left\{a(s_1)^* \cdots a(s_n)\mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^\infty(L^*L) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^\infty(LL^*)\ \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^\infty(T) = \cap_{n=1}^\infty \operatorname{dom}\left(\widetilde{T^n}\right) \text{ pour } T \in \operatorname{Hom}(\zeta) \text{ ou } T \in \operatorname{Hom}(\xi).$$

Proposition 7. *Il existe un unique opérateur linéaire d_L, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ tel que*

$$\mathcal{D}_L^\infty \subset \operatorname{dom}(d_L) \text{ et } \mathcal{D}_L^\infty \text{ est un coeur de } d_L,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\mathbf{1}_-,$$

$d_L(s)$ s'écrit

$$d_L\mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_L\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^*\mathbf{1}_+ \otimes b(L \otimes s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\mathbf{1}_-,$$

d_L laisse invariant $\mathcal{D}_L^\infty$.

De plus,

$$\mathcal{D}_L^\infty \subset \operatorname{dom}(d_L^*)$$

et

$$d_L^*\mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(L^* \otimes u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^*\mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, on a

$$d_L^*\mathbf{s} = \mathbf{o},$$

en particulier, d_L^* laisse invariant $\mathcal{D}_L^\infty$.

$$\operatorname{dom}\left(d_L^2\right) = \operatorname{dom}(d_L) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \operatorname{dom}(d_L),\ d_L^2\mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur linéaire borné de $\operatorname{Hom}(\zeta,\xi)$ *avec* $\operatorname{dom}(T) = \mathcal{S}(\zeta)$ *alors pour tout* $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ *et* α, $\beta \in C^\infty(\mathbf{W},\mathbb{C})$,

$$\alpha d_L\mathbf{s} + \beta d_T\mathbf{s} = d_{\alpha L+\beta T}\mathbf{s}.$$

Proof. Il suffit de vérifier que la propriété est vraie sur chaque fibre des fibrés considérés. La démonstration sur une fibre du fibré est donnée dans [1], [2] et [3]. □

Definition 14. *L'opérateur de Dirac sur* $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ *est défini par*

$$Q_L = d_L + d_L^*$$

avec $\operatorname{dom}(Q_L) = \operatorname{dom}(d_L) \cap \operatorname{dom}(d_L^*)$.

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ *est*

$$\Delta_L = d_L d_L^* + d_L^* d_L.$$

Pour un opérateur autoadjoint T de $\operatorname{Hom}(\zeta)$, c'est-à-dire, pour tout $w \in \mathbf{W}$, l'opérateur $T(w) : E_w(\zeta) \to E_w(\zeta)$ est autoadjoint pour la structure d'espace de Hilbert sur chaque fibre, on pose

$$\widehat{T}^{(n)} : \otimes^n\zeta \to \otimes^n\zeta$$

défini par $\widehat{T}^{(0)} = \mathbf{o}$ et

$$\widehat{T}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes T \otimes \mathbf{I} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I},\ n \geqslant 1$$

où T se trouve à la j-ième place et

$$\mathbf{I} : w \to \mathbf{I}(w) = Id_{E_w(\zeta)}.$$

La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\zeta)$ est $\widehat{T} = \oplus_{n=0}^\infty \widehat{T}^{(n)}$, qui est un opérateur autoadjoint, il suit que pour tout $w \in \mathbf{W}$, $0 \in \sigma_p\left(\widehat{T}(w)\right)$, $\mathbf{1}(w) \in \ker\left(\widehat{T}(w)\right)$. La fonction constante identiquement nulle est une fonction propre de $\widehat{T}$. L'opérateur $\widehat{T}$ est stable sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\zeta)$, on pose

$$\widehat{T}_+ = \widehat{T}\,|_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \text{ et } \widehat{T}_- = \widehat{T}\,|_{\mathcal{F}_-(\zeta)},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et la fonction identiquement nulle est propre pour $\widehat{T}_+$ et $\widehat{T}_-$ car $\mathbf{1}_\pm(w) \in \ker\left(\widehat{T}_\pm(w)\right)$. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ est défini par

$$N = \widehat{\mathbf{I}}_- = \oplus_{n=0}^\infty (n \otimes^n \mathbf{I})\,|_{\mathcal{F}_-(\xi)},$$

et on pose

$$(-1)_-^N = \oplus_{n=0}^\infty \left((-1)^n \otimes^n \mathbf{I}\right)|_{\mathcal{F}_-(\xi)}.$$

Soit Γ l'opérateur de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ défini par $\Gamma = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes (-1)_-^N$, c'est un opérateur autoadjoint tel que $\Gamma^2 = \mathbf{I}_{\mathcal{F}(\zeta,\xi)}$, il a pour fonctions propres, les fonctions constantes $+1$ et -1 et comme sous-espaces propres

$$\mathcal{F}_{+1}(\zeta,\xi) = \oplus_{p=0}^\infty \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\zeta)$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\zeta,\xi) = \oplus_{p=0}^\infty \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\zeta).$$

On obtient une décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}(\zeta,\xi)=\mathcal{F}_{+1}(\zeta,\xi)\oplus\mathcal{F}_{-1}(\zeta,\xi),$$

on note P_+ et P_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\zeta,\xi)$ et $\mathcal{F}_{-1}(\zeta,\xi)$ alors

$$\Gamma=P_+-P_-.$$

Soit l'opérateur

$$\mathcal{L}=\widehat{L^*L}_+\otimes\mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\xi)}\oplus\mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)}\otimes\widehat{LL^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ qui est positif et autoadjoint, la fonction identiquement nulle sur $\mathbf{W}$ est une fonction propre de $\mathcal{L}$ car

$$\mathbf{1}=\mathbf{1}_+\otimes\mathbf{1}_-\in\ker(\mathcal{L}).$$

Theorem 2. *L'opérateur Q_L est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de $\mathcal{L}$. En particulier, Q_L est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}_L^\infty$. L'opérateur Γ laisse invariant* $\operatorname{dom}(Q_L)$ *et*

$$\{\Gamma,Q_L\}=\Gamma Q_L+Q_L\Gamma=o_{\mathcal{F}(\zeta,\xi)}$$

sur $\operatorname{dom}(Q_L)$*. On a l'égalité entre les opérateurs*

$$\Delta_L=\mathcal{L}=Q_L^2.$$

Proof. Il suffit de vérifier le résultat sur chaque fibre du fibré $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$. Sur les fibres, on peut consulter [1], [2] et [3] . □

Definition 15. *Le quadruplet*

$$\{\mathcal{F}(\zeta,\xi),Q_L,\mathcal{L},\Gamma\}$$

est appelée quantification supersymétrique du triplet (ζ,L,ξ).

Dans ce qui suit, on suppose que l'opérateur $L\in\mathcal{C}(\zeta,\xi)$ et $L^*\in\mathcal{C}(\xi,\zeta)$ ont pour fonction propre la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire, que

$$\ker L=(\cup_{w\in\mathbf{W}}\ker L(\omega),\pi,\mathbf{W})\ \text{ et }\ \ker L^*=(\cup_{w\in\mathbf{W}}\ker L^*(w),\pi,\mathbf{W})$$

sont des sous-fibrés de ζ et ξ, on pose $\operatorname{nul}L=\dim(\ker L)$.

Theorem 3. *Si* $\ker L$ *et* $\ker L^*$ *sont des sous-fibrés de, respectivement ζ et ξ, alors* $\ker Q_L$ *et* $\ker\mathcal{L}$ *sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ et*

$$\ker Q_L=\ker\mathcal{L}=\oplus_{n,p=0}^\infty\left[\mathcal{S}_n(\ker L)\otimes\mathcal{A}_p(\ker L^*)\right].$$

On a si

$$\operatorname{nul}L=0\ \textit{et}\ \operatorname{nul}L^*<+\infty\ \textit{alors}\ \operatorname{nul}Q_L=2^{\operatorname{nul}L^*}<+\infty,$$

si

$$\operatorname{nul}L=0\ \textit{et}\ \operatorname{nul}L^*=+\infty\ \textit{alors}\ \operatorname{nul}Q_L=+\infty,$$

et si

$$\operatorname{nul}L\geqslant 1\ \textit{alors}\ \operatorname{nul}Q_L=+\infty.$$

Proof. On vérifie que si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ en remarquant que la propriété

$$\ker Q_L(\omega) = \ker \widehat{L}(\omega) = \oplus_{n,p=0}^{\infty} \left[\mathcal{S}_n(\ker(L(\omega))) \otimes \mathcal{A}_p(\ker(L^*(\omega)))\right] \tag{2.8}$$

est vraie pour tout $\omega \in \Omega$. Ensuite, on peut écrire, puisque $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des fibrés

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^{\infty} \left[\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)\right].$$

La relation 2.8 a été démontrée dans [3] (Lemme 3.4). □

Pour plus de propriétés sur les opérateurs Q_L, $\mathcal{L}$ on peut consulter [3] pour l'étude sur chaque fibre des opérateurs

$$Q_L(w) : E_w(\mathcal{F}(\zeta,\xi)) \to E_w(\mathcal{F}(\zeta,\xi))$$

et

$$\mathcal{L}(w) : E_w(\mathcal{F}(\zeta,\xi)) \to E_w(\mathcal{F}(\zeta,\xi)),$$

pour tout $w \in \mathbf{W}$. Notamment, on peut étendre les théorèmes de [3], pour l'étude du spectre de Q_L et de $\mathcal{L}$ ainsi que la notion de classe d'opérateurs de Dirac pertubés en dimension infinie si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ.

On s'intéresse, dorénavant, à la première quantification liée aux espaces de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\zeta,\mu)$ et $\mathcal{K} = L^2(\xi,\mu)$ où μ est une forme volume sur $\mathbf{W}$. Les produits scalaires associés sont $(s \mid t)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbf{W}} \langle s \mid t\rangle_{\mathcal{H}}\, \mu$ pour toutes sections s et t de $\mathcal{H}$ et $(s \mid t)_{\mathcal{K},} = \int_{\mathbf{W}} \langle s \mid t\rangle_{\mathcal{K}}\, \mu$ pour toutes sections s et t de $\mathcal{K}$. Pour un opérateur $L \in \operatorname{Hom}(\zeta,\xi)$, on définit l'opérateur

$$\widetilde{L} : \operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{K},\ \widetilde{L}(s) = L \otimes s$$

avec

$$\operatorname{dom}\left(\widetilde{L}\right) = \{s \in \mathcal{H} : L \otimes s \in \mathcal{K}\} \text{ et } L \otimes s(w) = L(w)\, s(w).$$

On suppose que $\widetilde{L}$ est un opérateur densément défini et fermé. On pose

$$\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} = \operatorname{Vect}\left\{a(s_1)^* \cdots a(s_n)\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\widetilde{L}^*\widetilde{L}\right) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\widetilde{L}\widetilde{L}^*\right)\right\}$$

où

$$\mathcal{C}^{\infty}(T) = \cap_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom}(T^n)$$

pour un opérateur T de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{K}$.

Proposition 8. *Il existe un unique opérateur linéaire $d_{\widetilde{L}}$, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ tel que*

$$\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} \subset \operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right) \text{ et } \mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} \text{ est un coeur de } d_{\widetilde{L}},$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-$$

on a $d_{\widetilde{L}}\mathbf{s} = \mathbf{o}$ pour $n = 0$ et

$$d_{\widetilde{L}}\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{n} a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b\left(\widetilde{L}s_j\right)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-,$$

$d_{\widetilde{L}}$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$. De plus, $\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} \subset \operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}^{*}\right)$ et

$$d_{\widetilde{L}}^{*}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} a\left(\widetilde{L}^{*} u_k\right)^{*} a(s_1)^{*} \cdots a(s_n)^{*} \mathbf{1}_{+} \otimes b(t_1)^{*} \cdots b(t_k)^{*} \cdots b(t_p)^{*} \mathbf{1}_{-}$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^{*} \cdots a(s_n)^{*} \mathbf{1}_{+} \otimes b(t_1)^{*} \cdots b(t_p)^{*} \mathbf{1}_{-}$. Dans le cas $p = 0$ on a $d_{\widetilde{L}}^{*}\mathbf{s} = \mathbf{o}$, en particulier, $d_{\widetilde{L}}^{*}$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$ et

$$\operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}^{2}\right) = \operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right),\ d_{\widetilde{L}}^{2}\mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur de $\operatorname{Hom}(\zeta, \xi)$ tel que $\widetilde{T}$ est borné et $\operatorname{dom}\left(\widetilde{T}\right) = \mathcal{H}$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$ et α, $\beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha d_{\widetilde{L}}\mathbf{s} + \beta d_{\widetilde{T}}\mathbf{s} = d_{\alpha\widetilde{L}+\beta\widetilde{T}}\mathbf{s}.$$

Proof. La preuve est donnée dans [2], [3]. □

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\widetilde{L}} = d_{\widetilde{L}} + d_{\widetilde{L}}^{*}$$

de domaine

$$\operatorname{dom} Q_{\widetilde{L}} = \operatorname{dom} d_{\widetilde{L}} \cap \operatorname{dom} d_{\widetilde{L}}^{*},$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\widetilde{L}} = d_{\widetilde{L}}^{*} d_{\widetilde{L}} + d_{\widetilde{L}} d_{\widetilde{L}}^{*}$$

sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est $\widehat{T} = \oplus_{n=0}^{\infty} \widehat{T}^{(n)}$ qui est un opérateur autoadjoint, $0 \in \sigma_p\left(\widehat{T}\right)$, $\mathbf{1} \in \ker\left(\widehat{T}\right)$ et donc $\widehat{T}$ a pour valeur propre 0. L'opérateur $\widehat{T}$ est stable sur $\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})$, on pose

$$\widehat{T}_{+} = \widehat{T}\,|_{\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})} \text{ et } \widehat{T}_{-} = \widehat{T}\,|_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et 0 est une valeur propre pour $\widehat{T}_{+}$ et $\widehat{T}_{-}$ car $\mathbf{1}_{\pm} \in \ker\left(\widehat{T}_{\pm}\right)$. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})$ est défini par

$$N = \widehat{\mathbf{I}}_{-} = \oplus_{n=0}^{\infty} (n \otimes^{n} \mathbf{I})\,|_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})},\ \mathbf{I} = Id_{\mathcal{K}}$$

et on pose comme précédemment

$$(-1)_{-}^{N} = \oplus_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n} \otimes^{n} \mathbf{I}\right)|_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})}.$$

Soit Γ l'opérateur de $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$

$$\Gamma = Id_{\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})} \otimes (-1)_{-}^{N},$$

c'est un opérateur autoadjoint tel que $\Gamma^{2} = Id_{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})}$, il a pour valeurs propres, les fonctions constantes $+1$ et -1 et comme sous-espaces propres

$$\mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{+}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\mathcal{K})$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_{+}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\mathcal{K}).$$

On obtient une décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \oplus \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}),$$

on note P_+ et P_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ alors

$$\Gamma = P_+ - P_-.$$

Soit l'opérateur

$$\overline{L} = \widehat{\widetilde{L}^*\widetilde{L}} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathcal{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \otimes \widehat{\widetilde{L}\widetilde{L}^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ qui est positif et autoadjoint, 0 est une valeur propre de $\overline{L}$ car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker\left(\overline{L}\right).$$

Theorem 4. *L'opérateur $Q_{\widetilde{L}}$ est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de $\overline{L}$. En particulier, $Q_{\widetilde{L}}$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}}$. L'opérateur Γ laisse invariant* $\operatorname{dom}\left(Q_{\widetilde{L}}\right)$ *et*

$$\left\{\Gamma, Q_{\widetilde{L}}\right\} = \Gamma Q_{\widetilde{L}} + Q_{\widetilde{L}}\Gamma = o_{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})}$$

sur $\operatorname{dom}\left(Q_{\widetilde{L}}\right)$. *On a l'égalité entre les opérateurs*

$$\Delta_{\widetilde{L}} = \overline{L} = Q^2_{\widetilde{L}}.$$

Proof. La preuve est dans [3] et [27]. □

Definition 16. *Le quadruplet*

$$\left\{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K}), Q_{\widetilde{L}}, \overline{L}, \Gamma\right\}$$

est appelée μ-quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ).

Le fibré ξ sur $\mathbf{W}$, d'espace total

$$E(\xi) = \Lambda^1\mathbf{W} \otimes E(\zeta)$$

où ζ est un fibré d'état de l'univers $\mathbf{W}$ muni de la connexion ∇ et de la section de Dirac γ, a une structure de fibré complexe. On suppose l'existence sur ce fibré ξ, d'une structure de fibré d'état ayant la propriété suivante, il existe une forme volume μ sur $\mathbf{W}$ telle que $\nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ soit un opérateur fermé, densément défini, de domaine

$$\operatorname{dom}(\nabla) \subset \mathcal{H} \cap \Gamma(E(\zeta))$$

à valeurs dans $\mathcal{K}$ avec $\mathcal{H} = L^2(\zeta,\mu)$ et $\mathcal{K} = L^2(\xi,\mu)$. Sous ces hypothèses, il existe un unique opérateur linéaire d_∇, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ tel que

$$\mathcal{D}^\infty_\nabla \subset \operatorname{dom}(d_\nabla) \text{ et } \mathcal{D}^\infty_\nabla \text{ est un coeur de } d_\nabla,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^\infty_\nabla$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

on a $d_\nabla \mathbf{s} = \mathbf{o}$ pour $n = 0$ et

$$d_\nabla \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(\nabla s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

d_∇ laisse invariant $\mathcal{D}^\infty_\nabla$. De plus, $\mathcal{D}^\infty_\nabla \subset \operatorname{dom}(d^*_\nabla)$ et

$$d^*_\nabla \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(\nabla^* u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Si $p = 0$, $d_\nabla^* \mathbf{s} = \mathbf{o}$, en particulier d_∇^* laisse invariant $\mathcal{D}_\nabla^\infty$. On peut définir l'opérateur de Dirac $Q_\nabla = d_\nabla + d_\nabla^*$ de domaine

$$\operatorname{dom} Q_\nabla = \operatorname{dom} d_\nabla \cap \operatorname{dom} d_\nabla^*,$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_\nabla = d_\nabla^* d_\nabla + d_\nabla d_\nabla^*$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. On a, si on pose

$$\overline{\nabla} = \widehat{\nabla^* \nabla} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathcal{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \otimes \widehat{\nabla \nabla^*}_-,$$

le quatruplet

$$\left\{ \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), Q_\nabla, \overline{\nabla}, \Gamma \right\}$$

est la μ-quantification de (ζ, ∇, ξ) et $\Delta_\nabla = \overline{\nabla} = Q_\nabla^2$. Pour définir l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$, on construit un produit scalaire naturel sur le fibré des formes différentielles $\Lambda^1 \mathbf{W} = \mathcal{T}\mathbf{W}$, dual $T\mathbf{W}$, de la façon suivante. On prend la métrique riemannienne $g \mid_{\mathbf{W}}$, notée encore g, sur $\mathbf{W}$ qui est la métrique induite par la métrique fortement riemannienne g du multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$, l'isomorphisme de Riesz permet d'identifier $T\mathbf{W}$ à son dual par

$$\mathcal{R}_g : T\mathbf{W} \to \Lambda^1 \mathbf{W}, \, \mathcal{R}_g(X) = d_X$$

où

$$d_X(Y) = g(X, Y), \, \forall Y \in \Gamma(T\mathbf{W}).$$

Cet isomorphisme de Riesz transporte le produit scalaire sur le fibré $\Lambda^1 \mathbf{W}$,

$$\langle d \mid \delta \rangle = g\left(\mathcal{R}_g^{-1}(d), \mathcal{R}_g^{-1}(\delta)\right), \, \forall d, \delta \in \Lambda^1 \mathbf{W}.$$

On définit le produit hermitien naturel sur $\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E(\zeta)$ par

$$\langle d \otimes s \mid \delta \otimes t \rangle = \langle d \mid \delta \rangle \langle s \mid t \rangle,$$

et on prolonge par $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{C})$-linéarité. Le fibré ξ, d'espace total

$$E(\xi) = \Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E(\zeta)$$

est un fibré d'état de l'univers $\mathbf{W}$, on a une structure d'espace vectoriel complexe sur chaque fibre

$$\lambda d \otimes s = d \otimes (\lambda s), \, \forall \lambda \in C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{C}).$$

On définit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ par

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta, \mu) \text{ et } \mathcal{K} = L^2(\xi, \mu)$$

où μ est la forme volume induite par la métrique riemannienne g. On peut, également, quantifier l'opérateur d'évolution $\nabla_\gamma^1 = \gamma \otimes \nabla$ en regardant sa restriction à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^1(\zeta) = \mathcal{W}^{1,2}(\zeta)$, $\nabla_\gamma^1 \mid_{\mathcal{H}^1(\zeta)}$ est un opérateur borné. Sur l'espace de Bose-Fermi-Fock $\mathcal{F}\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta)\right)$, on a une μ-quantification supersymétrique

$$\left\{ \mathcal{F}\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta)\right), Q_{\widetilde{\nabla_\gamma^1 \mid_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}}, \overline{\nabla_\gamma^1 \mid_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}, \Gamma \right\}$$

du triplet

$$\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \nabla_\gamma^1 \mid_{\mathcal{H}^1(\zeta)}, \mathcal{H}^1(\zeta)\right).$$

3. L'intégrale de Feynman et les graphes quantiques

Le graphe quantique est un graphe qui vit dans l'univers $\mathbf{W}$. Pour définir ce graphe, on va définir la notion d'intégrale de Feynman sur un fibré d'état appliqué aux champs et la notion de C^{α}-structure. Si λ est une mesure sur un espace vectoriel X qui est de Hausdorff et localement convexe, de dual $\mathcal{D}X$, alors la transformée de Fourier de λ est la fonction complexe définie sur $\mathcal{D}X$ par

$$\mathcal{F}\lambda\left(x_{\mathcal{D}}\right)=\int_{X}\exp\left(-i\left\langle x_{\mathcal{D}},x\right\rangle\right)d\lambda\left(x\right),$$

où $x\in X$, $x_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}X$ et $\left\langle x_{\mathcal{D}},x\right\rangle=x_{\mathcal{D}}\left(x\right)$. Soit $L:X\rightarrow Y$ une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et d'Hausdorff. Pour la transposée ${}^{\mathrm{Tr}}L$ du dual de Y dans le dual de X

$${}^{\mathrm{Tr}}L:\mathcal{D}Y\rightarrow\mathcal{D}X$$

on peut écrire

$$\left\langle {}^{\mathrm{Tr}}L\left(y_{\mathcal{D}}\right),x\right\rangle=\left\langle y_{\mathcal{D}},L\left(x\right)\right\rangle,\ y_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}Y,\ x\in X$$

et

$${}^{\mathrm{Tr}}L\left(y_{\mathcal{D}}\right)=y_{\mathcal{D}}\circ L.$$

Notons λ_{L}, l'image de la mesure λ par l'application linéaire L,

$$\lambda_{L}\left(B\right)=\lambda\left(L^{-1}\left(B\right)\right),\ B\subset Y$$

alors

$$\mathcal{F}\lambda_{L}=\mathcal{F}\lambda\circ^{\mathrm{Tr}}L \tag{3.1}$$

car si $y_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}Y$ et $y\in Y$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\lambda\circ^{\mathrm{Tr}}L\left(y_{\mathcal{D}}\right)&=\int_{X}\exp\left(-i\left\langle {}^{\mathrm{Tr}}L\left(y_{\mathcal{D}}\right),x\right\rangle\right)d\lambda\left(x\right)\\&=\int_{X}\exp\left(-i\left\langle y_{\mathcal{D}},L\left(x\right)\right\rangle\right)d\lambda\left(x\right)\\&=\int_{Y}\exp\left(-i\left\langle y_{\mathcal{D}},y\right\rangle\right)d\lambda_{L}\left(y\right).\end{aligned}$$

En particulier, pour une forme linéaire continue L sur X,

$$L:X\rightarrow\mathbb{R}$$

on a si

$$\tau=\left\langle L,x\right\rangle=L\left(x\right)$$

$$\mathcal{F}\lambda_{L}\left(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}\right)=\mathcal{F}\lambda\circ^{\mathrm{Tr}}L\left(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}\right)=\mathcal{F}\lambda\left(L\right)=\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-i\tau\right)d\lambda_{L}\left(\tau\right), \tag{3.2}$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est l'application identique de $\mathbb{R}$. Pour tout sous-espace fermé V de codimension finie, si $\pi_{V}:X\rightarrow X/V$ est la projection canonique sur l'espace quotient X/V, ${}^{\mathrm{Tr}}\pi_{V}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}\left(X/V\right)$ sur

$$V^{o}=\left\{x_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}X:\left\langle x_{\mathcal{D}},x\right\rangle=0,\ \forall x\in V\right\}$$

et pour $y_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}\left(X/V\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\lambda_{\pi_{V}}\left(y_{\mathcal{D}}\right)&=\int_{X/V}\exp\left(-i\left\langle y_{\mathcal{D}},y\right\rangle\right)d\lambda_{\pi_{V}}\left(y\right)=\mathcal{F}\lambda\circ^{\mathrm{Tr}}\pi_{V}\left(y_{\mathcal{D}}\right)\\&=\mathcal{F}\lambda\left(x_{\mathcal{D}}\right),\ x_{\mathcal{D}}\in V^{o}\subset\mathcal{D}X.\end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés V de X tels que $\operatorname{codim} V < +\infty$, alors $\mathcal{D}X = \cup_{V\in\mathcal{F}(X)} V^o$, ce qui permet de définir la transformée de Fourier par une famille de transformées de Fourier sur des espaces vectoriels de dimension finie.

Definition 17. *Une pseudo-mesure μ sur X est une famille $\{\mu_V\}_{V\in\mathcal{F}(X)}$ telle que, μ_V soient des mesures σ-additives sur X/V qui satisfont à la condition de compatibilité suivante. Si $W \subset V$, μ_V est la mesure image de μ_W par l'application π_{VW}*

$$\mu_V(B) = \mu_W(A)\,,\ A = \pi_{VW}^{-1}(B)$$

où π_{WV} est la projection canonique

$$\pi_{VW} : X/W \to X/V$$

vérifiant

$$\pi_V = \pi_{VW} \circ \pi_W\,.$$

Remark 13. *Si la famille $\{\mu_V\}_{V\in\mathcal{F}(X)}$ est une famille de mesure finies telles que*

$$\mu_V(X/V) = \mu(X)\,,$$

ne dépend pas de V, on dit que la pseudo-mesure est finie de masse $\mu(X)$.

La transformée de Fourier d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_V \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}})\,,\ \forall x_{\mathcal{D}} \in V^o.$$

Lemma 2. *Si $x_{\mathcal{D}} \in V^o \cap W^o$ alors*

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_V \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_W \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_W\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}})\,,$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \int_{X/V} \exp\left(-i\left\langle x_{\mathcal{D}}, x\right\rangle\right) d\mu_V(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it)\, d\mu_{V_{x_{\mathcal{D}}}}(t)\,.$$

pour tout $x_{\mathcal{D}} \in V^o$.

Proof. De la relation 3.2, on déduit

$$\int_{X/V} \exp\left(-i\left\langle x_{\mathcal{D}}, x\right\rangle\right) d\mu_V(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it)\, d\mu_{V_{x_{\mathcal{D}}}}(t)$$

et si $\mathcal{W} = W \cap V$, de la relation 3.1, on a

$$\mathcal{F}\mu_V = \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ^{\mathrm{Tr}} \pi_{V\mathcal{W}} \text{ et } \mathcal{F}\mu_W = \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ^{\mathrm{Tr}} \pi_{W\mathcal{W}},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mu_V \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ^{\mathrm{Tr}} \pi_{V\mathcal{W}} \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \\ &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_{\mathcal{W}}\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}})\,,\ x_{\mathcal{D}} \in V^o \subset \mathcal{W}^o\end{aligned}$$

car

$${}^{\mathrm{Tr}}\pi_{V\mathcal{W}} \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_{\mathcal{W}}\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}})$$

de façon analogue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mu_W \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_W\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ^{\mathrm{Tr}} \pi_{W\mathcal{W}} \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_W\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \\ &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_{\mathcal{W}}\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}})\,,\ x_{\mathcal{D}} \in W^o \subset \mathcal{W}^o\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{F}\mu_V \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_V\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_W \circ \left({}^{\mathrm{Tr}}\pi_W\right)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \text{ si } x_{\mathcal{D}} \in V^o \cap W^o.$$

□

Theorem 5. *Si* $\mathbf{Q}$ *est une forme quadratique positive sur* $\mathcal{D}X$*, il existe une unique pseudo-mesure finie* μ *sur* X *telle que*

$$\mathcal{F}\mu\left(x_{\mathcal{D}}\right)=\exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}\left(x_{\mathcal{D}}\right)\right),\ \forall x_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}X.$$

Proof. Cette preuve est développée dans [8]. □

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des chemins

$$\gamma:T=[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$$

tels que

$$\gamma\left(t_0\right)=\gamma\left(t_1\right)=0,$$

$\mathcal{C}$ est un espace vectoriel de Hausdorff localement connexe pour la norme uniforme. Le dual de $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{M}$, est l'espace vectoriel des mesures bornées sur T.

Theorem 6. *L'intégrale de chemin de Feynman* [11] *d'une particule de masse* m*, à un degré de liberté, évoluant dans un potentiel* $\mathcal{V}$*, est donnée par*

$$\int_{\mathcal{C}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{V}\left(\gamma\left(t\right)\right)dt\right)dw\left(\sqrt{m}\gamma\right),$$

où w *est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier est*

$$\mathcal{F}w\left(\mu\right)=\exp\left(-\frac{i}{2}W\left(\mu\right)\right)=\exp\left(-\frac{i}{2}\int_{T\times T}\inf\left(t,s\right)d\mu\left(t\right)d\mu\left(s\right)\right)$$

pour toute mesure $\mu\in\mathcal{M}$*.*

Proof. Ce résultat a été démontré dans [8]. □

Le propagateur $\mathcal{K}\left(\left(x_1,t_1\right),\left(x_0,t_0\right)\right)$ permet de déterminer l'amplitude de probabilité de trouver la particule $x_1\in\mathbb{R}$ à l'instant t_1 si elle se trouvait localisée en x_0 à l'instant t_0 avec $t_1\geqslant t_0$ [11]. Si $\widetilde{\gamma}$ est un chemin fixé tel que

$$\widetilde{\gamma}\left(t_0\right)=x_0\text{ et }\widetilde{\gamma}\left(t_1\right)=x_1$$

on a le théorème suivant.

Theorem 7. *Le calcul du propagateur dans le cas d'un degré de liberté est*

$$\mathcal{K}\left(\left(x_1,t_1\right),\left(x_0,t_0\right)\right)=\sqrt{m}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_o\left(\widetilde{\gamma}\right)\right)\int_{\mathcal{C}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}\left(\widetilde{\gamma}+\gamma\right)\right)dw\left(\gamma\right),$$

$\mathcal{S}$ *est l'action qui se scinde sous la forme*

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_o+\mathcal{S}_{int}$$

où $\mathcal{S}_o$ *est l'action d'une particule de masse* m *et* $\mathcal{S}_{int}$ *est l'interaction dans le potentiel* $\mathcal{V}$ *définie par*

$$\mathcal{S}_{int}\left(\gamma\right)=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{V}\left(\gamma\left(t\right)\right)dt.$$

Proof. La preuve est donnée dans [8]. □

Dans ce qui suit

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{E})$$

est un fibré Banachique ou Hilbertien, de fibre $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ ou $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ sur l'univers $\mathbf{W}$, qui est une variété que l'on suppose de dimension, $\dim \mathbf{W} \geqslant 4$. Le fibré dual de ζ est noté $\zeta_{\mathcal{D}}$, si s et $s_{\mathcal{D}}$ sont des sections de, respectivement, ζ et $\zeta_{\mathcal{D}}$ on pose

$$s_{\mathcal{D}} \otimes s(w) = s_{\mathcal{D}}(w)(s(w)), \forall w \in \mathbf{W}.$$

Soit λ une mesure finie sur $\Gamma(\zeta)$, l'espace vectoriel des sections de ζ, on définit la **transformée de Fourier en fibre** de λ par

$$\mathcal{F}\lambda(s_{\mathcal{D}})(w) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-is_{\mathcal{D}} \otimes s(w))\, d\lambda(s),$$

c'est une section du fibré trivial

$$(\mathbf{W} \times \mathcal{C}^{\infty}(\zeta_{\mathcal{D}}), pr_1, \mathbf{W})$$

où $\mathcal{C}^{\infty}(\zeta_{\mathcal{D}})$ est l'espace vectoriel des applications C^{∞}, dans le sens de Banach, de $\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose θ, θ_{ω} et θ_s, les C^{∞}-applications comme applications de variétés de Banach définies par

$$\theta : \Gamma(\zeta) \times \mathbf{W} \to E(\zeta), \theta(s, w) = \sigma(w),$$

$$\theta_w : \Gamma(\zeta) \to E_w(\zeta), \theta_w(s) = s(w)$$

et

$$\theta_s : \mathbf{W} \to E_w(\zeta), \theta_s(w) = s(w).$$

Pour une mesure λ sur $\Gamma(\zeta)$, on note $\lambda(w)$ la mesure image de λ par θ_w alors

$$\mathcal{F}\lambda(s_{\mathcal{D}})(w) = \int_{E_w(\zeta)} \exp(-i\langle s_{\mathcal{D}}(w), u\rangle)\, d\lambda(w)(u)$$

par changement de variable, avec les notations précédentes

$$\mathcal{F}\lambda(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\lambda(w)(s_{\mathcal{D}}(w)), s_{\mathcal{D}}(w) \in E_w(\zeta_{\mathcal{D}}). \tag{3.3}$$

Remark 14. *Dans l'équation 3.3, le membre de gauche représente la* ***transformée de Fourier en fibre*** *de la mesure λ et le membre de droite la* ***transformée de Fourier*** *de la mesure image $\lambda(w)$ sur $E_w(\zeta)$.*

La transformée de Fourier d'une mesure finie λ de $\Gamma(\zeta)$ est définie plus haut par

$$\mathcal{F}\lambda(s_{\mathcal{D}}) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i\langle s_{\mathcal{D}}, s\rangle)\, d\lambda(s), s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}\Gamma(\zeta)$$

où $\mathcal{D}\Gamma(\zeta)$ est l'espace dual de $\Gamma(\zeta)$.

Soit L un morphisme de fibrés de ζ dans ξ

$$L \in \mathrm{Hom}(\zeta, \xi),$$

L induit un morphisme de de $\Gamma(\zeta)$ dans $\Gamma(\xi)$ défini par

$$\mathcal{L}(s_{\zeta}) = L \otimes s_{\zeta} \text{ avec } L \otimes s_{\zeta}(w) = L(w)(s_{\zeta}(w)), \forall w \in \mathbf{W},$$

et soit $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ le morphisme de $\Gamma(\xi_{\mathcal{D}})$ dans $\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$, défini par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(s_{\xi_{\mathcal{D}}}) = s_{\xi_{\mathcal{D}}} \circ L \text{ avec } (s_{\xi_{\mathcal{D}}} \circ L)(w) = s_{\xi_{\mathcal{D}}}(w) \circ L(w), \forall w \in \mathbf{W}$$

alors

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(s_{\xi_{\mathcal{D}}}) \otimes s_{\zeta}(\omega) = s_{\xi_{\mathcal{D}}} \otimes \mathcal{L}(s_{\zeta})(w), \forall w \in \mathbf{W}.$$

Notons $\lambda_{\mathcal{L}}$, l'image de la mesure λ par l'application linéaire $\mathcal{L}$,

$$\lambda_{\mathcal{L}}(B) = \lambda\left(\mathcal{L}^{-1}(B)\right),\ B \subset \Gamma(\xi)$$

on a

$$\mathcal{F}\lambda_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}\lambda \circ \mathcal{L}_{\mathcal{D}}.$$

Si $L = s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ alors L s'identifie à un élément de $\mathrm{Hom}(\zeta, \xi)$, où ξ est le fibré trivial

$$\xi = (\mathbf{W} \times \mathbb{K}, pr_1, \mathbf{W}),\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},$$

le morphisme induit $\mathcal{L}$ est un morphisme de l'espace des sections de ζ dans l'espace des sections de ξ qui est l'espace des fonctions d'ondes de l'univers. Les sections du dual $\xi_{\mathcal{D}}$ s'identifient aux sections de ξ. A la forme linéaire

$$s_{\xi_{\mathcal{D}}}(w) : \{w\} \times \mathbb{K} \to \{w\} \times \mathbb{K},\ s_{\xi_{\mathcal{D}}}(w)(k) = a_{s_{\xi_{\mathcal{D}}}}(w)\, k \text{ où } a_{s_{\xi_{\mathcal{D}}}}(w), k \in \mathbb{K}$$

on associe la section

$$\mathbf{W} \to \mathbf{W} \times \mathbb{K},\ w \to \left(w, a_{s_{\xi_{\mathcal{D}}}}(w)\right).$$

L'application $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ est définie par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(s_{\xi_{\mathcal{D}}})(w) = s_{\xi_{\mathcal{D}}}(w) \circ L(w) = a_{s_{\xi_{\mathcal{D}}}}(w) \times L(w)$$

et

$$\mathcal{F}\lambda_{\mathcal{L}}(\mathbf{1}) = \mathcal{F}\lambda \circ \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) = \mathcal{F}\lambda(L)$$

où $\mathbf{1}$ est définie par $\mathbf{1}(w) = \mathbf{Id}_{\{w\}\times\mathbb{K}}$. La mesure $\lambda_{\sigma_{\mathcal{D}}}$ est une mesure sur les ondes de l'univers qui vérifie

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}})(w) &= \int_{\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{W})} \exp(-i\phi(w))\, d\lambda_{\sigma_{\mathcal{D}}}(\phi) \\ &= \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(w))\, d\lambda(\sigma),\ \forall w \in \mathbf{W}.\end{aligned}$$

On note $\mathcal{S}(\zeta)$, l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie. Si $\varsigma \in \mathcal{S}(\zeta)$, la fibre $\mathcal{E}_{\varsigma}$ de ς est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}$ de codimension finie. On définit le fibré quotient ζ/ς, de fibre $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$ dont les cartes de trivialisation sont données par

$$p_U : \pi_{\zeta/\varsigma}^{-1}(U) \to U \times \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma},\ p_U(x) = (\pi(x), \mathbf{p}(x)),$$

si U est un ouvert de trivialisation de ζ et

$$\mathbf{p}_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathcal{E},\ \mathbf{p}_U(x) = (\pi(x), \mathbf{q}(x))$$

est l'isomorphisme de trivialisation on a, $\mathbf{p}(x) = \pi_{\varsigma} \circ \mathbf{q}(x)$ où π_{ς} est la projection canonique $\pi_{\varsigma} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$. On note L_{ς} le morphisme de fibré induit par π_{ς},

$$L_{\varsigma} : \zeta \to \varsigma, \text{ si } \mathcal{E}_{\varsigma} \subset \mathcal{E}_{\tau}$$

alors la projection $\pi_{\varsigma\tau} : \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\tau} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$ vérifiant $\pi_{\varsigma} = \pi_{\varsigma\tau} \circ \pi_{\tau}$ induit un morphisme de fibré noté $L_{\varsigma\tau} : \zeta/\tau \to \zeta/\varsigma$ pour lequel

$$L_{\varsigma} = L_{\varsigma\tau} \circ L_{\tau}.$$

Les morphismes L_{ς} et $L_{\varsigma\tau}$ induisent des morphismes

$$\mathcal{L}_{\varsigma} : \Gamma(\zeta) \to \Gamma(\zeta/\varsigma) \text{ et } \mathcal{L}_{\varsigma\tau} : \Gamma(\zeta/\tau) \to \Gamma(\zeta/\varsigma)$$

vérifiant $\mathcal{L}_{\varsigma} = \mathcal{L}_{\varsigma\tau} \circ \mathcal{L}_{\tau}$, les applications

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \to \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}\tau_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \to \Gamma((\zeta/\tau)_{\mathcal{D}}) \tag{3.4}$$

vérifient

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} = \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{D}}} \circ \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{D}}\varsigma_{\mathcal{D}}}.$$

On pose

$$\Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o = \{s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) : s_{\mathcal{D}} \otimes s : \Omega \to \mathbb{K},\ s_{\mathcal{D}} \otimes s = 0 \text{ si } s \in \Gamma(\varsigma)\}$$

alors $\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \to \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ est un isomorphisme sur $\Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o$, on note

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}}^{-1} : \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o \to \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}),$$

l'application réciproque. Si $\mathcal{F}(\zeta)$ est l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie alors

$$\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) = \cup_{\varsigma \in \mathcal{F}(\zeta)} \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o,$$

une pseudo-mesure μ sur $\Gamma(\zeta)$ est une famille $\{\mu_\varsigma\}_{\varsigma \in \mathcal{F}(\zeta)}$ telle que μ_ς sont des mesures σ-additives sur $\Gamma(\zeta)$ qui satisfont à la condition de compatibilité si $\mathcal{E}_\varsigma \subset \mathcal{E}_\tau$, μ_τ est la mesure image de μ_ς par l'application $\mathcal{L}_{\varsigma\tau}$

$$\mu_\varsigma(B) = \mu_\tau(A),\ A = \mathcal{L}_{\tau\varsigma}^{-1}(B)$$

où $\mathcal{L}_{\tau\varsigma}$ est la projection canonique

$$\mathcal{L}_{\tau\varsigma} : \Gamma(\zeta/\tau) \to \Gamma(\zeta/\varsigma)$$

vérifiant $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\tau\varsigma} \circ \mathcal{L}_\varsigma$. Si les mesures μ_ς sont finies et de masse $\mu(\zeta)$, on dit que la pseudo-mesure est finie. La transformée de Fourier en fibre d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\mu_\varsigma \circ \mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}}^{-1}(s_{\mathcal{D}})(w),\ \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma)^o \text{ et } w \in \mathbf{W}.$$

Lemma 3. *Si $s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o \cap \Gamma(\tau_{\mathcal{D}})^o$ alors*

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\mu_\varsigma \circ \mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}}^{-1}(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\mu_\tau \circ \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{D}}}^{-1}(s_{\mathcal{D}})(w),\ \forall w \in \mathbf{W}$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) &= \int_{\Gamma(\zeta/\varsigma)} \exp(-is_{\mathcal{D}} \otimes s(w))\, d\mu_\varsigma(s) \\ &= \int_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{W})} \exp(-i\phi(w))\, d\mu_{\mathcal{L}_{\sigma_{\mathcal{D}}}}(\phi),\ \forall w \in \mathbf{W} \text{ et } s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma)^o.\end{aligned}$$

A partir d'un fibré vectoriel ζ on définit deux fibrés, l'un est le fibré des formes quadratiques de ζ, noté $\mathcal{Q}(\zeta)$ et l'autre est le fibré des mesures de ζ, noté $\mathcal{M}(\zeta)$. Si V est une carte de trivialisation de ζ, on note $\theta_{V,\zeta}$ l'isomorphisme de trivialisation

$$\theta_{V,\zeta} : \pi_\zeta^{-1}(V) \to V \times \mathbf{F}(\zeta),\ \theta_{V,\zeta}(u) = (\pi_\zeta(u), \mathbf{p}_\zeta(u))$$

alors les fibrés $\mathcal{Q}(\zeta)$ et $\mathcal{M}(\zeta)$ ont pour fibres respectives $\mathbf{FQ}(\zeta)$ et $\mathbf{FM}(\zeta)$ où $\mathbf{FQ}(\zeta)$ est l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{F}(\zeta)$ et $\mathbf{FM}(\zeta)$ est l'espace vectoriel des pseudo-mesures finies sur $\mathbf{F}(\zeta)$. Les applications de trivialisation sont respectivement

$$\theta_{V,\mathcal{Q}(\zeta)} : \pi_{\mathcal{Q}(\zeta)}^{-1}(V) \to V \times \mathbf{FQ}(\zeta),\ \theta_{V,\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = \left(\pi_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q), \mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q)\right)$$

où $\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = q \circ \theta_{U,\zeta}^{-1}$ et

$$\theta_{V,\mathcal{M}(\zeta)} : \pi_{\mathcal{M}(\zeta)}^{-1}(V) \to V \times \mathbf{FM}(\zeta),\ \theta_{V,\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = \left(\pi_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu), \mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu)\right)$$

où $\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = \mu \circ \theta_{U,\zeta}^{-1}$. Si q est une forme quadratique sur $E_w(\zeta)$ alors $\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q)$ est la forme quadratique sur $\mathbf{F}(\zeta)$

$$\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = q \circ \theta_{V,\zeta}^{-1} \mid_{E_w(\zeta)}$$

et si μ est une pseudo-mesure finie sur $E_w(\zeta)$ alors $\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu)$ est la pseudo-mesure image sur $\mathbf{F}(\zeta)$

$$\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = \mu \circ \theta_{V,\zeta}^{-1} \mid_{E_w(\zeta)} .$$

Les sections de $\mathcal{Q}(\zeta)$ sont les sections de formes quadratiques, si toutes les formes quadratiques sont positives, la section est une section positive. Les sections de $\mathcal{M}(\zeta)$ sont les sections de pseudo-mesures, si sur chaque fibre la pseudo-mesure est finie, on dit que la section est finie.

Lemma 4. *Soit* $\mathbf{Q}$ *une section positive de* $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$*, il existe une section finie de pseudo-mesures* μ *de* $\mathcal{M}(\zeta)$ *telle que*

$$\mathcal{F}\mu(w)(s_{\mathcal{D}}(w)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s_{\mathcal{D}}(w))\right), \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

où $\mathbf{Q}(w)$ *est la forme quadratique induite par* $\mathbf{Q}$ *sur la fibre* $E_w(\zeta_{\mathcal{D}})$*.*

Proof. Pour chaque $w \in \mathbf{W}$, la forme quadratique positive $\mathbf{Q}(w)$ de

$$E_w(\zeta_{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}E_w(\zeta)$$

permet de définir une pseudo-mesure finie $\mu(w)$ sur $E_w(\zeta)$ telle que

$$\mathcal{F}\mu(w)(s_{\mathcal{D}}(w)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s_{\mathcal{D}}(w))\right), \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$$

par le théorème de [8] et μ est une section de $\mathcal{M}(\zeta)$. □

Lemma 5. *Soit* μ *une pseudo-mesure finie de* $\Gamma(\zeta)$*, il existe une section finie* $\widetilde{\mu}$ *de* $\mathcal{M}(\zeta)$ *telle que la transformée de Fourier en fibre*

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-is_{\mathcal{D}} \otimes s(w))\, d\mu(s)$$

vérifie

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\widetilde{\mu}(w)(s_{\mathcal{D}}(w)), \forall w \in \mathbf{W} \text{ et } s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

Proof. L'application canonique

$$\theta_w : \Gamma(\zeta) \to E_w(\zeta), \theta_w(\sigma) = \sigma(w)$$

permet de construire pour toute pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ une section finie $\widetilde{\mu}$ de $\mathcal{M}(\zeta)$, où $\widetilde{\mu}(w)$ est la pseudo-mesure image de μ par θ_w. On a par 3.3

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \mathcal{F}\widetilde{\mu}(w)(s_{\mathcal{D}}(w)), \forall w \in \mathbf{W} \text{ et } s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

□

Definition 18. *Une section positive* $\mathbf{Q}$ *de* $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ *est* ***stable*** *s'il existe une pseudo-mesure finie* μ *de* $\Gamma(\zeta)$ *pour laquelle la section* $\widetilde{\mu}$ *image de* μ *vérifie*

$$\mathcal{F}\widetilde{\mu}(w)(s_{\mathcal{D}}(w)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s_{\mathcal{D}}(w))\right), \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

Proposition 9. *Si* $\mathbf{Q}$ *est une section positive stable de* $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ *alors il existe une pseudo-mesure finie* μ *de* $\Gamma(\zeta)$ *telle que*

$$\mathcal{F}\mu(s_{\mathcal{D}})(w) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s_{\mathcal{D}}(w))\right), \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

Un potentiel $\mathcal{V}$ sur un fibré ζ est une C^{∞}-application de l'espace total $E(\zeta)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\mathcal{V} : E(\zeta) \to \mathbb{R},$$

l'interaction d'une section s, avec un potentiel $\mathcal{V}$, est définie par

$$\mathcal{S}_{int}(s) = \int_{\mathbf{W}} \mathcal{V}(s(t))\, d\nu(t) \tag{3.5}$$

où ν est une mesure de Lebesgue sur l'univers $\mathbf{W}$. L'intégrale de Feynman sur les sections d'un fibré de potentiel $\mathcal{V}$, est donnée par

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(s)\right) dw(s),$$

w est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier en fibre est

$$\mathcal{F}w(s_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(s_{\mathcal{D}})\right)$$

où $\mathbf{Q}$ est une **section positive stable** de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$. On dit que la pseudo-mesure, ainsi définie, est une **pseudo-mesure gaussienne en fibre** de covariance $\mathbf{Q}$. Pour une sous-variété V_0 de $\mathbf{W}$, de dimension 0, on pose

$$\Gamma_{V_0}(\zeta) = \{\tau \in \Gamma(\zeta) : \tau(\nu) = o_v \in E_v(\zeta), \forall \nu \in V_0\}$$

et

$$W_0 = \{w_\nu \in E_v(\zeta), \forall \nu \in V_0\}.$$

Definition 19. *On appelle propagateur de Feynman pour la section positive stable* $\mathbf{Q}$ *sur* $\Gamma_{V_0}(\zeta)$ *de* $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$*, la quantité*

$$\mathcal{K}(V_0, W_0) = \phi(\sigma) \int_{\Gamma_{V_0}(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(s+\tau)\right) dw(\tau),$$

où w *est la pseudo-mesure sur* $\Gamma_{V_0}(\zeta)$ *de transformée de Fourier en fibre*

$$\mathcal{F}w(s_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(s_{\mathcal{D}})\right) \ \forall s_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}),$$

s *est une section fixée vérifiant*

$$s(\nu) = w_\nu,\ \nu \in V_0 \tag{3.6}$$

et l'application ϕ *est une* C^{∞}*-application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans* $\mathbb{C}$

$$\phi : \Gamma(\zeta) \to \mathbb{R},\ \phi(s) = |\phi(s)| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0(s)\right)$$

$\mathcal{S}_0$ *est l'action et l'interaction* $\mathcal{S}_{int}$*, relatif à un potentiel* $\mathcal{V}$*, est définie par 3.5.*

Remark 15. *Pour les sections de chemins, à un degré de liberté,* $|\phi(\sigma)|$ *est constant et vaut* $\sqrt{m}$*,* m *est la masse de la particule.*

Le propagateur de Feynman des sections quantifie les sections de ζ. Ce propagateur mesure, **en un certain sens**, la **"pseudo-probabilité"** de trouver des sections de ζ pour lesquelles le système d'équations 3.6 est vérifié lorsque l'on munit le fibré ζ, d'un potentiel $\mathcal{V}$, d'une section positive stable $\mathbf{Q}$ de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$. Le fibré considéré ζ est le fibré tangent

$$\zeta = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^n), \; n \geqslant 4$$

et on note $\zeta_{\mathcal{D}}$ le fibré dual $\zeta_{\mathcal{D}} = (\mathcal{T}\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^n)$. La métrique riemannienne g de $\mathbf{W}$ induite par la métrique fortement riemanienne g de $\mathbf{V}$, est une section de $\mathcal{Q}(\zeta)$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de ζ dans $\zeta_{\mathcal{D}}$, défini par $\mathcal{D} : \Gamma(\zeta) \to \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$,

$$\mathcal{D}(X)(w) = X_{\mathcal{D}}(w) : E_w(\zeta) \to \mathbb{R}, \; X_{\mathcal{D}}(w)(u) = g(w)(X(w), u).$$

Soit $\mathbf{Q}$ la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ définie par

$$\mathbf{Q}(w)(X_{\mathcal{D}}(w)) = g(w)(X(w), X(w)), \; X(w) = \mathcal{D}^{-1}(X_{\mathcal{D}})(w), \tag{3.7}$$

sur chaque fibre $\mathcal{D}T_w\mathbf{W}$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(w)$ induit, en dimension finie, une mesure gaussienne $\widetilde{\mu}(w)$. Si $\mathbf{Q}$ est positive et stable la section $\widetilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(\mathbf{W})$. Fixons une sous-variété V_0 d'événements de l'univers $\mathbf{W}$, $\dim V_0 = 0$, et une famille $W_0 = \{X_v : v \in V_0\}$ telle que

$$X_v \in T_v\mathbf{W}, \; \forall v \in V_0$$

il existe un champ $\mathbf{X}$ tel que

$$\mathbf{X}(v) = X_v, \; \forall v \in V_0, \tag{3.8}$$

il suffit de prendre pour chaque $v \in V_0$, des cartes V_v de v, deux à deux disjointes et des C^∞-applications θ_v telles que

$$\operatorname{supp} \theta_v \subset V_v \text{ et } \theta_v(v) = 1, \; \forall v \in V_0$$

alors

$$\mathbf{X} = \sum_{v \in V_0} \theta_v X_v \tag{3.9}$$

est un champ qui vérifie les équations 3.8. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(V_0, W_0) = \phi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_{V_0}(\mathbf{W})} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X)\right) dw(X),$$

où w est la pseudo-mesure sur $\Gamma_{V_0}(\mathbf{W})$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}w(X_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(X_{\mathcal{D}})\right) \; \forall X_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}),$$

$\mathbf{X}$ est un champ vérifiant 3.9 et l'application ϕ est une C^∞-application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$\phi : \Gamma(\zeta) \to \mathbb{R}, \; \phi(\mathbf{X}) = |\phi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0(\mathbf{X})\right)$$

$\mathcal{S}_0$ est l'action et $\mathcal{S}_{int}$ est l'interaction relatif à un potentiel $\mathcal{V}$. Si

$$|\phi(\mathbf{X})| = 1 \text{ et } \int_{\Gamma_V(\mathbf{W})} dw = 1$$

alors $|\mathcal{K}(V_0, W_0)|$ est indépendant du choix de $\phi(\mathbf{X})$, c'est la probabilité de trouver un champ $X \in \Gamma(\mathbf{W})$ vérifiant les équations 3.8.

Remark 16. *Si la famille d'événements V_0 est discrète avec des points d'accumulation, une condition nécessaire pour l'existence d'un champ X pour lequel les équations 3.9 soient vérifiées est donnée par*

$$\lim_{v \to v_0, v \in V_0} X_v = X_{v_0}, \text{ si } v_0 \in V_0.$$

Pour définir la notion de graphe quantique, on est amené à définir la notion de C^α-structure. On s'intéresse aux lignes d'univers des particules. Une ligne d'univers lisse de $\mathbf{W}$ est une sous-variété topologique γ de dimension 1 telle qu'il existe une sous-variété $\mathcal{N}_\gamma$ de γ de dimension 0 pour laquelle chaque composante connexe de $\gamma \setminus \mathcal{N}_\gamma$ est une sous-variété de classe C^∞. La sous-variété $\mathcal{N}_\gamma$ forme les noeuds de la ligne d'univers. Si on fait l'hypothèse qu'une ligne d'univers ne peut-être observable qu'aux événements $\mathcal{N}_\gamma$, peut-on mesurer les irrégularités aux noeuds? Peut-on décrire la ligne d'univers à partir de ses noeuds. Dans un premier temps, on étudie la ligne d'univers aux noeuds et ensuite on détermine en un certain sens la probabilité de touver une ligne d'univers ayant des noeuds fixés.

Definition 20. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, l'intégrale de Riemann-Liouville au point $x \in [a, b]$ est définie par*

$$I_a(f, \alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t)\, dt.$$

On rappelle que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \mathcal{L}\left(t^{\alpha-1} u(t)\right)(1)$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Laplace. La dérivée de Riemann-Liouville

$$D^\alpha(f, a)(x) = \frac{d}{dx}\left(I_a(f, 1 - \alpha)\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx}\left(\int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^\alpha} dt\right)$$

et $\alpha \leqslant 1$.

La dérivée fractionnaire locale à droite et à gauche de f en $y \in [a, b]$ est, respectivement,

$$d_-^\alpha f(y) = \lim_{x \to y^-} D^\alpha(f - f(y), y)(x)$$

et

$$d_+^\alpha f(y) = \lim_{x \to y^+} D^\alpha(f - f(y), y)(x).$$

Proposition 10. *Si f est différentiable en y, $\lim_{\alpha \to 1} d_\pm^\alpha f(y) = f'(y)$.*

Pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, $d_\pm^\alpha(C) = 0$.

Theorem 8. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $\alpha \leqslant 1$*

$$d_\pm^\alpha f(y) = \Gamma(1 + \alpha) \lim_{x \to y^\pm} \frac{\pm(f(y) - f(x))}{(\pm(y - x))^\alpha}.$$

En particulier, si f est α-dérivable en $y \in [a, b]$, les dérivées fractionnaires, à gauche et à droite de y, sont égales à $d_\pm^\alpha f(y) = \Gamma(1 + \alpha) f^{(\alpha)}(y)$.

Proof. On peut consulter [6] pour une preuve. □

On a

$$d_{+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{x \to y^{+}} \frac{d}{dx} \left(\int_{y}^{x} \frac{f(t) - f(y)}{(x-t)^{\alpha}} dt \right)$$

et

$$d_{-}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{x \to y^{-}} \frac{d}{dx} \left(\int_{x}^{y} \frac{f(y) - f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt \right).$$

On peut exprimer, lorsqu'elle existe, la dérivée d'ordre α de f à l'aide d'opérations standards. Si $\gamma \in \mathcal{C}^{n}(I, \mathcal{B})$ et $\gamma \notin \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est un espace de Banach et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on dit que $\gamma^{(n)}$ est α-dérivable en $t \in I$, si les limites suivantes existent et sont égales

$$\lim_{h \to 0^{+}} \frac{\gamma^{(n)}(t+h) - \gamma^{(n)}(t)}{h^{\alpha}} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\gamma^{(n)}(t) - \gamma^{(n)}(t-h)}{h^{\alpha}}, \text{ pour } \alpha \in [0,1[\quad (3.10)$$

on note $\gamma^{(n+\alpha)}(t)$ cette limite [22]. L'ordre de dérivation de $\gamma^{(n)}$ en t est défini par

$$\alpha(t) = \inf \left\{ \alpha \in [0,1[: \gamma^{(n)} \text{ est } \alpha\text{-dérivable en } t \right\}.$$

On dit qu'une trajectoire γ d'un espace de Banach est α-dérivable en t si

$$\gamma \in \mathcal{C}^{[\alpha]}(I, \mathcal{B}), \gamma \notin \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I, \mathcal{B})$$
$$\text{et } \alpha - [\alpha] = \inf \left\{ \beta \in [0,1[: \gamma^{[\alpha]} \text{ est } \beta\text{-dérivable en } t \right\},$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α. Les chemins γ de classe $\mathcal{C}^{\alpha}(I, \mathcal{B})$ sont les chemins α-dérivables en t pour tout $t \in I$.

Remark 17. *Un chemin continu $\gamma \in \mathcal{C}(I, \mathcal{B})$ est dit α-dérivable en $a \in I$ si les deux limites existent et sont égales,*

$$\lim_{h \to 0^{+}} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h^{\alpha}} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\gamma(a) - \gamma(a-h)}{h^{\alpha}}, \text{ pour } \alpha \in [0,1[,$$

on note $\gamma^{(\alpha)}(a)$ cette limite. Si γ est α-dérivable en a, alors pour tout β, $\alpha \leqslant \beta < 1$, γ est β-dérivable en a et $\gamma^{(\beta)}(a) = 0$. On note

$$\alpha(a) = \inf \{ \beta \in [0,1[: \gamma \text{ est } \beta\text{-dérivable en } a \},$$

α est une fonction de I à valeurs dans $[0,1[$. Pour $\alpha \geqslant 0$, un chemin γ est α-dérivable sur I si γ est de classe $\mathcal{C}^{n}$, $n = [\alpha]$, telle que $\gamma^{(n)}$ est $(\alpha - [\alpha])$-dérivable sur I. On définit la classe des chemins α-dérivables $C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$.

Pour une trajectoire $\gamma \in \mathcal{C}^{n}(I, \mathcal{B})$, $\gamma \notin \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathcal{B})$, le nombre

$$\alpha(t) = \inf \left\{ \alpha \in [0,1[: \gamma^{(n)} \text{ est } \alpha\text{-dérivable en } t \right\}$$

est la fonction d'irrégularité de $\gamma^{(n)}$.

Definition 21. ***Une trajectoire fractale γ de $\mathcal{B}$ est un chemin continu de $\mathcal{B}$, tel que la fonction d'irrégularité restreinte à tout intervalle $J \subset I$, notée α_J est différente de 1 presque partout. On dit que γ est quantique si***

$$\mathcal{I} = \{ t \in I : \alpha(t) < 1 \}$$

est discret. Les points $\gamma(t)$ pour $t \in \mathcal{I}$ sont les noeuds de la trajectoire.

On suppose que $\mathcal{B}$ est muni d'une base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dans cette base on peut écrire tout chemin continu $\gamma(t)$ sous la forme

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t) e_n.$$

Si γ est une trajectoire fractale alors toutes les fonctions coordonnées sont fractales. Si γ est quantique, toutes les coordonnées sont quantiques. Peut-on donner une interprétation géométrique de la masse? Si la trajectoire γ d'une particule est α-dérivable sur I où α est une fonction numérique sur I, à valeurs dans $[0,1[$, on peut interpréter la masse m de la particule aux noeuds comme une fonction qui mesure l'irrégularité de γ. On pose $m = \Psi(\alpha)$, la fonction Ψ est une fonction décroissante de

$$\Psi : [0,1[\to]0,1],$$

plus la masse est élevée, plus elle interagit avec les autres particules et plus sa trajectoire est irrégulière. On conjecture pour Ψ aux noeuds de la trajectoire, $\Psi(t) = 1 - \alpha(t)$ si $t \in \mathcal{I}$. En dehors des noeuds la notion de masse n'existe plus, la particule devient énergie. Dans le cas général, la masse mesure l'irrégularité de $\gamma^{(n)}$, où γ est une trajectoire de classe C^n. Dans le cas d'une trajectoire de classe C^∞, la masse $m = 0$. L'univers visible est formé par les noeuds des lignes d'univers $\mathbf{W}$. Une **"entropie"** Φ est une C^∞-application

$$\Phi : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$$

qui mesure le désordre dans l'univers $\mathbf{W}$. L'évolution de l'univers n'est plus décrit par le temps, qui est une notion locale définie à l'aide des champs chronologiques, mais par son entropie. On définit le graphe orienté

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{W}, \Phi, g)$$

les sommets du graphe sont les noeuds des lignes d'univers de chaque particule. Notons $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$, l'ensemble des sommets du graphe, un arc joint le sommet w_0 au sommet w_1 si

$$\Phi(w_0) < \Phi(w_1)$$

et il existe une géodésique de la pseudo-métrique g joignant les sommets w_0 et w_1.

Remark 18. *La pseudo-métrique g est soit la métrique riemannienne induite par la métrique fortement riemannienne de $\mathbf{V}$, soit la métrique Lorentzienne définie par la section de Dirac définie sur $\mathbf{V}$. Dans la première situation on dit que le graphe est riemannien d'entropie Φ, dans la seconde situation, il est Lorentzien d'entropie Φ. On a sur $\mathbf{W}$ deux graphes quantiques, de mêmes sommets et d'entropie Φ.*

On pondère les arcs pour minimaliser l'entropie de la façon suivante. Soit γ un $\mathcal{C}^\infty$-chemin de l'événement w_0 à w_1 alors $\Phi \circ \gamma \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, on définit le propagateur de Feynman pour l'entropie Φ par

$$\mathcal{K}_\Phi(w_0, w_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_o(\Phi \circ \gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(\Phi \circ \gamma + \tau)\right) dw(\tau),$$

où m_0 est la masse de la particule en l'événement w_0, γ est une géodésique joingnant les événements w_0 et w_1, l'action $\mathcal{S}$ de la particule se scinde sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_o + \mathcal{S}_{int}$$

avec $\mathcal{S}_o(\Phi \circ \gamma)$ est l'action de la particule le long du chemin γ et $\mathcal{S}_{int} \circ \Phi$ est l'interaction dans un potentiel $\mathcal{V}$ définit par

$$\mathcal{S}_{int} \circ \Phi(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t))\, dt.$$

La pseudo-mesure w est définie par sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp\left(-\frac{i}{2}W(\mu)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{[0,1]^2} \inf(t,s)\, d\mu(t)\, d\mu(s)\right),$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$.

Remark 19. *$\mathcal{S}_{int}$ est une interaction définie sur les chemins $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, si la condition suivante est vérifiée*

$$\Phi(\gamma_0) = \Phi(\gamma_1) \implies \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_0(t))\, dt = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_1(t))\, dt, \tag{3.11}$$

une entropie qui vérifie 3.11 est une $\mathcal{V}$-entropie. Si $\Phi = \mathcal{V}$ alors

$$\mathcal{S}_{int} \circ \mathcal{V}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t))\, dt$$

et l'interaction s'écrit

$$\mathcal{S}_{int}(\tau) = \int_0^1 \tau(t)\, dt,\ \forall \tau \in \mathcal{C}.$$

Dans cette situation, on peut décrire le propagateur de Feynman de façon intrinsèque. L'action $\mathbf{S}$ de la particule sur l'univers $\mathbf{W}$ se scinde sous la forme

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_{int}$$

avec $\mathbf{S}_0$ est l'action de la particule dans l'univers $\mathbf{W}$, $\mathbf{S}_{int}$ est l'interaction définie par

$$\mathbf{S}_{int}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t))\, dt,$$

si γ est une géodésique de g on a

$$\mathcal{K}(w_0, w_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{S}_o(\gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^1 (\mathcal{V} \circ \gamma(t) + \tau(t))\, dt\right) dw(\tau),$$

et w est la pseudo-mesure définie par

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{[0,1]^2} \inf(t,s)\, d\mu(t)\, d\mu(s)\right).$$

On peut, maintenant, définir la pondération sur l'arc (w_0, w_1) du graphe quantique $\mathcal{G}(\mathbf{W}, \Phi, g)$ par

$$\operatorname{pond}(w_0, w_1) = |\mathcal{K}_\Phi(w_0, w_1)|,$$

après normalisation $|\mathcal{K}_\Phi(w_0, w_1)| \leqslant 1$, le principe de moindre action s'énonce ainsi:

"Pour une particule de masse m_0 qui se situe en l'événement w_0, la probabilité de la localiser en w_1 est $\operatorname{pond}(w_0, w_1)$. La ligne d'univers est un chemin fini ou infini du graphe pour lequel entre deux sommets consécutifs w_0 et w_1, on ait

$$\operatorname{pond}(w_0, w_1) = \inf\{\operatorname{pond}(w_0, w) : (w_0, w) \in \mathcal{A}(\mathcal{G})\}$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est l'ensemble des arcs de $\mathcal{G}$".

En chaque sommet $w \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ du graphe quantique $\mathcal{G}$, on définit un champ de la façon suivante. Si w est un sommet de $\mathcal{G}$, soit (U, φ) une carte en $w \in \mathbf{W}$, pour un chemin quantique γ passant par w, l'application

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^n,\ \varphi^{-1} \circ \gamma(0) = o$$

est α-dérivable dans le sens de 3.10 pour $0 \leqslant \alpha < 1$. Le vecteur tangent est

$$D_w \varphi \left(\gamma^{(\alpha)}(0) \right) \in T_w \mathbf{W}$$

où

$$\gamma^{(\alpha)}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi^{-1} \circ \gamma(h) - \varphi^{-1} \circ \gamma(0)}{h^\alpha} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi^{-1} \circ \gamma(0) - \varphi^{-1} \circ \gamma(-h)}{h^\alpha}.$$

Supposons qu'en chaque sommet du graphe quantique $\mathcal{G}$, on se fixe le champ défini précédemment, on note $\mathcal{W}$ cette famille. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W}) = \phi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_V(\mathbf{W})} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X) \right) dw(X),$$

où w est la pseudo-mesure sur $\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathbf{W})$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}w(d) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(d) \right) \ \forall d \in \Gamma(\mathcal{T}\mathbf{W}),$$

d est une section de 1-forme et $\mathbf{X}$ est un champ vérifiant

$$\mathbf{X}(w) = X_w \in T_w \mathbf{W}, \tag{3.12}$$

pour tous les sommets $w \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ du graphe quantique et l'application ϕ est une C^∞-application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$\phi : \Gamma(T\mathbf{W}) \to \mathbb{R},\ \phi(\mathbf{X}) = |\phi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0(\mathbf{X}) \right)$$

$\mathcal{S}_0$ est l'action et $\mathcal{S}_{int}$ est l'interaction relatif au potentiel $\mathcal{V}$ défini précédemment. La probabilité de trouver un champ vérifiant 3.12 est $|\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W})|$.

Dans ce qui suit, on voudrait renormaliser les intégrales de Feynman en donnant un sens géométrique à cette renormalisation. L'idée est de regarder les graphes de Feynman comme des parties locales du graphe quantique. Les notations sont celles de [21], le fibré considéré est le fibré tangent $T\mathbf{W}$ et $\mathcal{T}\mathbf{W}$ est le fibré dual. La métrique riemannienne fixée, g est une section de $\mathcal{Q}(T\mathbf{W})$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de $T\mathbf{W}$ dans $\mathcal{T}\mathbf{W}$, défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: \Gamma(T\mathbf{W}) \to \Gamma(\mathcal{T}\mathbf{W}), \\ \mathcal{D}(X)(w) &= X_{\mathcal{D}}(w) : E_w(\zeta) \to \mathbb{R}, \\ X_{\mathcal{D}}(w)(e_\zeta) &= g(w)(X(w), e_\zeta). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{Q}$ la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ définie par

$$\mathbf{Q}(w)(X_{\mathcal{D}}(w)) = g(w)(X(w), X(w)),\ X(w) = \mathcal{D}^{-1}(X_{\mathcal{D}})(w),$$

sur chaque fibre $\mathcal{D}T_w\mathbf{W}$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(w)$ induit, en dimension finie sur la fibre, une mesure gaussienne $\widetilde{\mu}(w)$. Si $\mathbf{Q}$ est **stable** la section $\widetilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une pseudo-mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(T\mathbf{W})$. L'univers $\mathbf{W}$ est une variété de dimension $k \geqslant 4$, un graphe de Feynman

à m pattes externes, de moments $X_1, \cdots, X_m \in \Gamma(T\mathbf{W})$ et ayant $n-m$ boucles, $n > m$, a pour amplitude [11]

$$\mathcal{I}_\phi(k) = \int_{\Gamma(T\mathbf{W})^{n-m}} \phi(X_1, \cdots, X_n)\, d\mu(X_{m+1}) \cdots d\mu(X_n)$$

où la fonction scalaire ϕ s'écrit

$$\phi(X) = \frac{P(X)}{\Pi_j \left(l_j(X)^2 + m_j^2 \right)},$$

l_j sont des sections de $\mathcal{T}\mathbf{W}^n$, $m_j > 0$ sont les masses internes, données par l'ordre d'irrégularité du graphe quantique aux sommets, P est un polynôme et μ est la pseudo-mesure définie sur $\Gamma(T\mathbf{W})$ induite par la section **stable Q**. Les graphes de Feynman sont des parties finies du graphe quantique, les masses internes sont décrites par les irrégularités aux sommets de ce graphe. On peut écrire $\mathcal{I}_\phi$ sous la forme

$$\mathcal{I}_\phi(k) = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \exp\left(-t.m^2\right) \psi(t, \mathcal{P}, k) \left(\det L(t)\right)^{-\frac{k}{2}} dt,$$

où $L(t)$ est la restriction de la forme bilinéaire $\sum_{j=1}^n t_j l_j(X)^2$ à $\mathcal{D}T\mathbf{W}^{n-m}$ et $\mathcal{P}$ est la matrice des produits scalaires des moments externes $\mathcal{P} = (g(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, ψ est une fonction polynomiale qui dépend de Q, $t.m^2$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ de t avec $m^2 = \left(m_1^2, \cdots, m_n^2\right)$ et $k = \dim \mathbf{W}$. On pose $z = k$, pour $\mathrm{Re}(z) << 0$, $\mathcal{I}_\phi(z)$ existe et a une extension méromorphe dans $\mathbb{C}$, notée $\widetilde{\mathcal{I}_\phi}(z)$ [25]. Si on pose $\widetilde{\mathcal{I}_\phi}(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s (z-k)^s$, la régularisée est

$$\mathcal{R}\mathcal{I}_\phi = \alpha_0 \text{ et le contre-terme } \sum_{-\infty}^{s=-1} \alpha_s (z-k)^s.$$

4. Les équations de Dirac-Einstein

On rappelle la définition des opérateurs de Dirac-Einstein de rang n. Sauf mention contraire, $\xi = (E, \pi, \mathbf{W}, F)$ est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie, de fibre F, dont la base est l'univers de Dirac-Einstein $\mathbf{W}$, de dimension 4. On note

$$\Lambda^n \mathbf{W} = \wedge^n T^* \mathbf{W},$$

le fibré des n-formes différentielles sur $\mathbf{W}$ et l'espace des (p,q)-tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\mathbf{W} = (\otimes^p T^* \mathbf{W}) \otimes (\otimes^q T\mathbf{W}).$$

On munit ξ d'une connexion,

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E\right).$$

Soit γ une section de Dirac du fibré d'état E. L'endomorphisme $\gamma \otimes \nabla$ de $\Gamma(E)$ est défini par

$$\gamma \otimes \nabla(s) = \gamma(\nabla s),\ s \in \Gamma(E),$$

c'est-à-dire,

$$\gamma \otimes \nabla(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)), w \in \mathbf{W}.$$

Les sections d'endomorphismes de Dirac [10], [4] sont définies par,

$$\gamma^{d}(s)=\gamma(d\otimes s),d\in\Lambda^{1}\mathbf{W}\text{ et }s\in\Gamma(E),$$

le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac noté $\left\{\gamma^{d^{\mu}}\right\}$ est défini par 2.4 et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par 2.5. Le commutateur définit une section de $\operatorname{Hom}(\Lambda^{n}\mathbf{W}\otimes E,E)$. Les extensions de rang n d'une section γ sont les sections $\gamma_{n}\in\Gamma(\operatorname{Hom}(\Lambda^{n}(\mathbf{W})\otimes E,E))$

$$\gamma_{n}\left(\left(d^{1}\wedge d^{2}\wedge\cdots\wedge d^{n}\right)\otimes s\right)=\left[\gamma^{d^{1}},\gamma^{d^{2}},\cdots,\gamma^{d^{n}}\right](s),\ s\in\Gamma(E)$$

et on prolonge γ_{n} par $C^{\infty}(\mathbf{W},\mathbb{R})$-linéarité sur $\Lambda^{n}(\mathbf{W})\otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension

$$d_{n}^{\nabla}:\Gamma(\Lambda^{n}(\mathbf{W})\otimes E)\rightarrow\Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W})\otimes E\right)$$

avec

$$d_{0}^{\nabla}=\nabla,\Lambda^{0}(\mathbf{W})\otimes E=E$$

et

$$d_{n}^{\nabla}(\psi\otimes s)=d\psi\otimes s+(-1)^{n}\psi\wedge\nabla s,\psi\in\Lambda^{n}(\mathbf{W}).$$

Definition 22. *Une équation de Dirac-Einstein au rang n ou équation d'état de rang n est définie par*

$$\gamma_{n}\otimes\nabla_{n-1}(s)=\gamma_{n}(\nabla_{n-1}s)=\lambda s,\ \nabla_{n-1}=d_{n-1}^{\nabla}\circ\cdots\circ d_{0}^{\nabla},$$

où λ est une C^{∞}-application définie sur une carte de $\mathbf{W}$.

L'étude locale des équations d'état de rang 1 sont définies sur une carte U de l'univers $\mathbf{W}$ sur laquelle le fibré tangent

$$\xi_{\mathbf{W}}=(T\mathbf{W},\pi,\mathbf{W})$$

et le fibré ξ sont trivialisables. Soit

$$\left\{\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},0\leqslant\mu\leqslant3\right\}$$

les champs de vecteurs sur U linéairement indépendants associés et

$$\{d^{\nu}=dx^{\nu},0\leqslant\nu\leqslant3\},$$

la base duale. Sur $E(U)$ il existe un local frame, noté $\{e_{\alpha},0\leqslant\alpha\leqslant n-1\}$, $n=\dim E$. On pose $s=s^{\alpha}e_{\alpha}$ alors

$$\begin{aligned}\nabla s&=\nabla(s^{\alpha}e_{\alpha})=ds^{\alpha}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\nabla e_{\alpha}\\&=ds^{\alpha}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}^{\beta}d^{j}\otimes e_{\beta}.\end{aligned}$$

La connexion s'écrit $\nabla e_{\alpha}=\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}d^{\nu}\otimes e_{\beta}$, avec des C^{∞} fonctions $\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ définies sur U à valeurs complexes ou réelles, $\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^{\alpha}=\partial_{\nu}s^{\alpha}d^{\nu}$,

$$\begin{aligned}\nabla s&=\partial_{\nu}s^{\alpha}d^{\nu}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}d^{\nu}\otimes e_{\beta}\\&=\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)d^{\nu}\otimes e_{\beta}.\end{aligned}$$

La section de Dirac γ de E a pour représentation

$$\gamma(d^{\nu}\otimes e_{\beta})=\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}e_{\sigma},$$

et si $\gamma^{\nu}=\gamma(d^{\nu})$ avec $(\gamma^{\nu})_{\beta}^{\alpha}=\gamma_{\beta}^{\nu\alpha}$,

$$\gamma \otimes \nabla (s) = \gamma \left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \right) d^\nu \otimes e_\beta \right)$$
$$\gamma \otimes \nabla (s) = \left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \right) \gamma \left(d^\nu \otimes e_\beta \right)$$
$$\gamma \otimes \nabla (s) = \gamma^{\nu\sigma}_\beta \left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \right) e_\sigma .$$

L'équation de Dirac-Einstein de rang 1, s'écrit localement,

$$\gamma^{\nu\sigma}_\beta \left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \right) = \lambda s^\sigma ,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant n-1.$$

Les matrices de Dirac γ^μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, sont des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des applications C^∞ sur U, à valeurs réelles ou complexes. On pose

$$(D_\nu s)^\beta = \partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu},$$

D_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ définie par, $D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu$, où Γ_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le local frame, est

$$(\Gamma_\nu)^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\nu}$$

et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par, $\mathrm{L}_\nu\, s = (\partial_\nu s^\alpha)\, e_\alpha$. L'équation s'écrit

$$\gamma^{\nu\sigma}_\beta \left(D_\nu s \right)^\beta = \lambda s^\sigma ,$$

et

$$\gamma^\nu D_\nu (s) = \lambda s.$$

L'opérateur de l'équation d'état de rang 1 est,

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla = \gamma^\nu D_\nu ,$$

on a le théorème suivant,

Theorem 9. *L'opérateur H_1 de l'équation d'état du premier ordre est*

$$H_1 = \gamma^\nu D_\nu ,$$

γ^ν sont les quatre matrices de Dirac dans le local frame $\{e_\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant n-1\}$

$$D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu ,$$

L_ν est l'opérateur de Lie et Γ_ν est l'opérateur de Christoffel.

L'extension d'une paire (∇, γ) de $\xi_{\mathbf{W}}$ au fibré $T^{2,0}\mathbf{W}$ peut être défini comme suit. A partir d'une connexion ∇ sur les champs, on peut étendre l'endomorphisme ∇_X aux tenseurs de façon unique avec deux conditions sur l'extension $\widetilde{\nabla}_X$, $\widetilde{\nabla}_X$ commute avec les contractions et

$$\widetilde{\nabla}_X (S \otimes T) = \widetilde{\nabla}_X (S) \otimes T + S \otimes \widetilde{\nabla}_X (T) .$$

La connexion sur les $(2,0)$-tenseurs est définie à partir de la connexion initiale ∇ sur les champs en posant,

$$\widetilde{\nabla} \left(d^1 \otimes d^2 \right) = \nabla^* \left(d^1 \right) \otimes d^2 + d^1 \otimes \nabla^* \left(d^2 \right) ,$$

on définit la connexion duale ∇^*_X par

$$L_X (d \otimes Y) = d \otimes \nabla_X Y + \nabla^*_X d \otimes Y ,\ d \otimes Y (\omega) = d (\omega) (Y (\omega)) ,$$

de façon plus générale pour un fibré ξ et son dual, on pose

$$L_X (s^* \otimes s) = s^* \otimes \nabla_X s + \nabla^*_X s^* \otimes s ,\ s^* \otimes s (\omega) = s^* (\omega) (s (\omega))$$

L_X est la dérivée de Lie le long du champ X. En particulier,

$$\begin{aligned} L_{\partial_\beta}\left(d^\sigma \otimes \partial_\mu\right) &= d^\sigma \otimes \nabla_{\partial_\beta}\partial_\mu + \nabla^*_{\partial_\beta} d^\sigma \otimes \partial_\mu \\ 0 &= d^\sigma\left(\Gamma^\tau_{\beta\mu}\partial_\tau\right) + \nabla^*_{\partial_\beta} d^\sigma\left(\partial_\mu\right), \end{aligned}$$

$$\nabla^*_{\partial_\beta} d^\sigma\left(\partial_\mu\right) = -\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \text{ et } \nabla^*_{\partial_\beta} d^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\beta\tau} d^\tau,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma \otimes d^\tau\right) &= \widetilde{\nabla}\left(d^\sigma \otimes d^\tau\right)\left(\partial_\beta\right) = \left(\Gamma^{\sigma\tau}_{\rho\gamma\delta} d^\rho \otimes d^\gamma \otimes d^\delta\right)\left(\partial_\beta\right) \\ \widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma \otimes d^\tau\right) &= \Gamma^{\sigma\tau}_{\rho\gamma\delta} d^\rho\left(\partial_\beta\right) d^\gamma \otimes d^\delta = \Gamma^{\sigma\tau}_{\beta\gamma\delta} d^\gamma \otimes d^\delta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma \otimes d^\tau\right) &= \nabla^*_{\partial_\beta} d^\sigma \otimes d^\tau + d^\sigma \otimes \nabla^*_{\partial_\beta} d^\tau \\ &= -\Gamma^\sigma_{\beta\mu} d^\mu \otimes d^\tau - \Gamma^\tau_{\beta\rho} d^\sigma \otimes d^\rho \\ &= -\left(\Gamma^\sigma_{\beta i} + \Gamma^\tau_{\beta j}\right) d^i \otimes d^j, \end{aligned}$$

on a

$$\Gamma^{\sigma\tau}_{\beta ij} = -\left(\Gamma^\sigma_{\beta i} + \Gamma^\tau_{\beta j}\right) \tag{4.1}$$

Il y a une façon naturelle de décrire les endomorphismes de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs, si γ est une section de Dirac du fibré des champs, γ^* la section du fibré dual est définie par

$$\left(\gamma^d\right)^*\left(\zeta\right) = \zeta \circ \gamma^d,\ \zeta \text{ et } d \in \Lambda^1\mathbf{W},$$

$$\left(\zeta \circ \gamma^d\right)\left(w\right) = \zeta\left(w\right) \circ \gamma^d\left(w\right),\ w \in \mathbf{W}.$$

Ensuite, pour obtenir la section de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs, on pose

$$\widetilde{\gamma}^d\left(\zeta \otimes \xi\right) = \left(\gamma^d\right)^*\left(\zeta\right) \otimes \left(\gamma^d\right)^*\left(\xi\right), \tag{4.2}$$

pour chaque w, on prend le produit tensoriel des deux 1-formes $\left(\zeta \circ \gamma^d\right)(w)$ et $\left(\xi \circ \gamma^d\right)(w)$, $w \in \mathbf{W}$, on a

$$\widetilde{\gamma}^\mu\left(d^\nu \otimes d^\tau\right) = \gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma} d^\rho \otimes d^\sigma = \left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right) \otimes \left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\tau\right),$$

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)\left(\partial_\rho\right) &= d^\nu \circ \gamma^\mu\left(\partial_\rho\right) \\ &= d^\nu\left(\gamma^{\mu\sigma}_\rho \partial_\sigma\right) = \gamma^{\mu\nu}_\rho \\ \left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right) &= \gamma^{\mu\nu}_\rho d^\rho, \end{aligned}$$

$$\widetilde{\gamma}^\mu\left(d^\nu \otimes d^\tau\right) = \gamma^{\mu\nu}_\rho \gamma^{\mu\tau}_\sigma d^\rho \otimes d^\sigma,$$

il suit

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma} = \gamma^{\mu\nu}_\rho \gamma^{\mu\tau}_\sigma.$$

Theorem 10. *Si une pseudo-métrique riemannienne g suit une équation d'état de Dirac-Einstein de rang 1, alors dans toute carte U, $g = g_{ij} d^i \otimes d^j$ vérifie l'équation*

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau}\right) = \lambda g_{\rho\sigma}, \tag{4.3}$$

avec

$$\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau} = -\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\tau}\right) \text{ et } \gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma} = \gamma^{\mu\nu}_\rho \gamma^{\mu\tau}_\sigma. \tag{4.4}$$

On présente, maintenant, l'étude locale des équations d'état de rang 2. Sur le fibré ξ, avec les notations précédentes, on définit l'opérateur H_2 comme suit. Pour $n = 2$,

$$\gamma_2\left(\left(d^1 \wedge d^2\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}\right](s) = \gamma^{d^1}\gamma^{d^2}(s) - \gamma^{d^2}\gamma^{d^1}(s)$$

et

$$\nabla_1 = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla = R^\nabla$$

représente la courbure de la connexion ∇. Sur un ouvert de trivialisation U de $\xi_{\mathbf{W}}$ et ξ, on a pour $s = s^\alpha e_\alpha$,

$$\begin{aligned}
R^\nabla(s) = d_1^\nabla(\nabla s) &= d_1^\nabla\left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu \otimes e_\beta\right) \\
&= d\left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu\right) \otimes e_\beta - \left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu\right) \wedge \nabla e_\beta \\
&= \left(d\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) \wedge d^\nu\right) \otimes e_\beta - \left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu \wedge \Gamma^\tau_{\beta\sigma} d^\sigma\right) \otimes e_\tau \\
&= \left(d\left(\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma^j_{\alpha\nu}\right) \wedge d^\nu\right) \otimes e_j - \left(\left(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) d^\nu \wedge \Gamma^j_{\beta\sigma} d^\sigma\right) \otimes e_j \\
&= \left(\partial_\mu\left(\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma^j_{\alpha\nu}\right) - \left(\partial_\mu s^\beta + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\right) \Gamma^j_{\beta\nu}\right)\left(d^\mu \wedge d^\nu\right) \otimes e_j \\
&= \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right) s^\alpha\right)\left(d^\mu \wedge d^\nu\right) \otimes e_j.
\end{aligned}$$

La section de Dirac γ de $E(\xi)$ a pour représentation locale

$$\gamma\left(d^\nu \otimes e_\beta\right) = \gamma^{\nu\sigma}_\beta e_\sigma,$$

et si $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$, on pose $(\gamma^\nu)^\alpha_\beta = \gamma^{\nu\alpha}_\beta$, alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s) = \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right) s^\alpha\right)\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right](e_j),$$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right](e_j) &= \gamma^\mu\left(\gamma^{\nu\sigma}_j e_\sigma\right) - \gamma^\nu\left(\gamma^{\mu\sigma}_j e_\sigma\right) \\
&= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) e_k
\end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla\left(s^\alpha e_\alpha\right) = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right) s^\alpha\right) e_k.$$

Si on pose $\triangle^k_j$ l'opérateur

$$\triangle^k_j = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) \partial_\mu \partial_\nu,$$

et

$$\Upsilon^k_\alpha = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
\gamma_2 \otimes R^\nabla\left(s^\alpha e_\alpha\right) &= \left(\triangle^k_j s^j + \Upsilon^k_\alpha s^\alpha\right) e_k \\
&= \left(\triangle^k_\tau s^\tau + \Upsilon^k_\tau s^\tau\right) e_k \\
&= \left(\triangle^k_\tau + \Upsilon^k_\tau\right) s^\tau e_k.
\end{aligned}$$

Pour un champ chronologique $T = t^\rho \partial_\rho$, les équations d'évolution s'écrivent localement

$$\left(\triangle^k_\tau + \Upsilon^k_\tau\right) s^\tau = \chi\left(t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma^k_{\rho\alpha}\right). \tag{4.5}$$

où

$$\begin{aligned}\nabla_T s^\alpha e_\alpha &= t^\rho \nabla_{\partial_\rho}\left(s^\alpha e_\alpha\right)\\ &= t^\rho\left(\partial_\rho s^\alpha e_\alpha + s^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\rho} e_\beta\right)\\ &= \left(t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma^k_{\rho\alpha}\right) e_k,\end{aligned}$$

L'équation 4.5 est l'équation locale sur une carte de trivialisation de $\xi_{\mathbf{W}}$ et ξ, cette équation est l'équation d'évolution de Dirac-Einstein de rang 2 développée dans le local frame associé à la carte avec la condition

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla = \chi \nabla_T \text{ avec } \chi = i\lambda \text{ ou } \chi = \lambda \text{ et } \lambda \in C^\infty\left(U, \mathbb{R}\right),$$

respectivement, complexe ou réelle.

Theorem 11. *L'opérateur $H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$ a pour représentation locale*

$$H_2\left(s^\alpha e_\alpha\right) = \left(\triangle^k_\tau + \Upsilon^k_\tau\right) s^\tau e_k \tag{4.6}$$

avec

$$\triangle^k_j = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) \partial_\mu \partial_\nu, \tag{4.7}$$

et

$$\Upsilon^k_\alpha = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right). \tag{4.8}$$

Remark 20. *Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale, ce système d'équations est*

$$t^\rho \partial_\rho s^\tau = 0,\ \forall \tau.$$

Le tenseur de courbure R^∇ s'écrit

$$R^\nabla\left(\partial_\nu, \partial_\mu\right)\left(e_\sigma\right) = \nabla_{\partial_\nu}\nabla_{\partial_\mu} e_\sigma - \nabla_{\partial_\mu}\nabla_{\partial_\nu} e_\sigma = R^\tau_{\sigma\mu\nu} e_\tau,$$

et

$$\begin{aligned}R^\sigma_{\mu\nu\kappa} &= \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\\ &= \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \left(\partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\right)\\ &= \Lambda^\sigma_{\nu\mu\kappa} - \Lambda^\sigma_{\kappa\mu\nu},\end{aligned}$$

où $\Lambda^\sigma_{\nu\mu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ est le tenseur de Christoffel. On en déduit que

$$\begin{aligned}\triangle^k_\tau &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_\tau \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_\tau \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\partial_\mu \partial_\nu = \left([\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)^k_\tau \partial_{\mu\nu},\\ \Upsilon^k_\tau &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\Lambda^j_{\mu\tau\nu} = \left([\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)^k_j \Lambda^j_{\mu\tau\nu},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}H_2\left(s^\alpha e_\alpha\right) &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} s^\alpha\right) e_k\\ &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} s^\alpha\right) e_k\\ &= \left(\left(\gamma^{\nu\sigma}_\tau \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_\tau \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\partial_\mu \partial_\nu s^\tau + \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\Lambda^j_{\mu\tau\nu} s^\tau\right) e_k\\ &= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\partial_{\mu\nu}\right)^k_\tau s^\tau + \left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\right)^k_j \Lambda^j_{\mu\tau\nu} s^\tau\right) e_k\\ &= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\partial_{\mu\nu}\right)^k_\tau s^\tau + \left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\Lambda_{\mu\nu}\right)^k_\tau s^\tau\right) e_k\\ &= \left(\left(\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\left(\partial_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\right)\right)^k_\tau s^\tau\right) e_k,\end{aligned}$$

où

$$\left(\Lambda_{\mu\nu}\right)^j_\tau = \Lambda^j_{\mu\tau\nu} \text{ et } \partial_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu.$$

Theorem 12. *L'équation d'état de rang* 2*, d'une section* $s = s^k e_k$ *est donnée par le système d'équations différentielles*

$$\left([\gamma^\mu, \gamma^\nu]\left(\partial_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\right)\right)_\tau^k s^\tau = \lambda s^k,$$

où λ *est une fonction* C^∞ *définie sur* W*.*

5. La connexion de Dirac

En général, les sections de Dirac considérées sont métriques, c'est-à-dire, que le tenseur de Poisson associé qui est indépendant du local frame, est inversible et son inverse définit une métrique locale sur **W**. Dans le cas des dimensions infinies, on a vu que l'on doit imposer aux endomorphisme de Dirac d'être des endomorphismes bornés, à trace pour définir le tenseur de Poisson.

Si on regarde l'équation d'évolution de Dirac, cette équation n'est pas une équation de Dirac-Einstein de rang 2 car l'équation développée est

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} \\ i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

où ψ est une section du fibré de

$$\xi_D = \left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4\right),$$

qui ne fait apparaître que des opérateurs de rang 1. Pour déterminier γ et ∇, on passe à une équation d'état de rang 1, d'opérateur $H = \gamma \otimes \nabla$ [10]. Pour cet opérateur, il n'existe pas d'équation d'évolution, à l'exception des particules de masse nulle. Seule l'équation des états de rang 1, d'opérateur H peuvent décrire l'équation 5.1. On se restreint donc, à l'image d'une carte, où plus précisément à $\mathbb{R}^4$ et par un recouvrement localement fini, on définit la connexion de Dirac sur **W**. Dans $\mathbb{R}^4$, soit

$$\left\{\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ linéairement indépendants associés et

$$\{d^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\},$$

la base duale. L'équation de Dirac-Einstein au rang 1 est

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\left(\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta\right) = -i\lambda\psi^\sigma \text{ pour tout } \sigma = 0, 1, 2, 3. \tag{5.2}$$

Les matrices de Dirac γ^μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, sont des matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients sont des applications C^∞ sur $\mathbb{R}^4$, à valeurs complexes. On note $(D_\nu\psi)^\beta = \partial_\nu\psi^\beta + \psi^\alpha\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$, D_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ définie par,

$$D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu,$$

où Γ_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le local frame, est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par,

$$\mathrm{L}_\nu\,\psi = \left(\partial_\nu\psi^0, \partial_\nu\psi^1, \partial_\nu\psi^2, \partial_\nu\psi^3\right), \ \psi = \left(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\right)$$

alors

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\left(D_\nu\psi\right)^\beta = -i\lambda\psi^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^{\nu} D_{\nu}(\psi) = -i\lambda\psi.$$

Utilisons l'équation 5.2 et comparons à 5.1,

$$\gamma_{\beta}^{\nu k}\left(\partial_{\nu}\psi^{\beta} + \psi^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) + i\lambda\psi^{k} = 0,\ k = 0,1,2,3$$

$$\gamma_{\beta}^{\nu k}\partial_{\nu}\psi^{\beta} + \psi^{\alpha}\gamma_{\beta}^{\nu k}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + i\lambda\psi^{k} = 0$$

$$\left(\gamma_{j}^{\nu k}\partial_{\nu} + \gamma_{\beta}^{\nu k}\Gamma_{j\nu}^{\beta}\right)\psi^{j} + i\lambda\psi^{k} = 0$$

si on prend pour $(\gamma^{\nu})_{j}^{k} = \gamma_{j}^{\nu k}$, on retombe sur l'équation 5.1 pour des coefficients de Christoffel $\Gamma_{j\nu}^{\beta}$ qui sont calculables comme suit. La matrice associée s'écrit

$$\begin{pmatrix} i\gamma_{0}^{\nu 0}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 0}\Gamma_{0\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_{1}^{\nu 0}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 0}\Gamma_{11}^{\beta} & i\gamma_{2}^{\nu 0}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 0}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_{3}^{\nu 0}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 0}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_{0}^{\nu 1}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 1}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_{1}^{\nu 1}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 1}\Gamma_{1\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_{2}^{\nu 1}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 1}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_{3}^{\nu 1}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 1}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_{0}^{\nu 2}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 2}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_{1}^{\nu 2}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 2}\Gamma_{1\nu}^{\beta} & i\gamma_{2}^{\nu 2}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 2}\Gamma_{2\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_{3}^{\nu 2}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 2}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_{0}^{\nu 3}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 3}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_{1}^{\nu 3}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 3}\Gamma_{1\nu}^{\beta} & i\gamma_{2}^{\nu 3}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 3}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_{3}^{\nu 3}\partial_{\nu} + i\gamma_{\beta}^{\nu 3}\Gamma_{3\nu}^{\beta} - \lambda \end{pmatrix},$$

on en déduit que $\lambda = m$, et que les matrices γ^{ν} définies par $(\gamma^{\nu})_{\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta}^{\nu\alpha}$ sont les matrices de Dirac. On a

$$\begin{pmatrix} i\partial_{0} + i\Gamma_{00}^{0} - m & 0 & i\partial_{3} - i\Gamma_{23}^{2} & i\partial_{1} + \partial_{2} - i\Gamma_{31}^{3} + \Gamma_{32}^{3} \\ 0 & i\partial_{0} + i\Gamma_{10}^{1} - m & i\partial_{1} - \partial_{2} + i\Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{22}^{2} & -i\partial_{3} - i\Gamma_{33}^{3} \\ -i\partial_{3} - i\Gamma_{03}^{0} & -i\partial_{1} - \partial_{2} - i\Gamma_{11}^{1} - \Gamma_{12}^{1} & -i\partial_{0} - i\Gamma_{20}^{2} - m & 0 \\ -i\partial_{1} + \partial_{2} - i\Gamma_{01}^{0} - \Gamma_{02}^{0} & i\partial_{3} + \Gamma_{13}^{1} & 0 & -i\partial_{0} - i\Gamma_{30}^{3} - m \end{pmatrix},$$

les relations sur les coefficients de Christoffel de la connexion de Dirac sont

$$\Gamma_{00}^{0} = \Gamma_{23}^{2} = \Gamma_{10}^{1} = \Gamma_{33}^{3} = \Gamma_{03}^{0} = \Gamma_{20}^{2} = \Gamma_{13}^{1} = \Gamma_{30}^{3} = 0 \tag{5.3}$$

et

$$\Gamma_{32}^{3} = i\Gamma_{31}^{3}, \Gamma_{22}^{2} = i\Gamma_{21}^{2}, \Gamma_{12}^{1} = -i\Gamma_{11}^{1}, \Gamma_{02}^{0} = -i\Gamma_{01}^{0}. \tag{5.4}$$

Theorem 13. *Les symboles de Christoffel de la connexion de Dirac sur* $\mathbb{R}^{4}$ *vérifient*

$$\Gamma_{00}^{0} = \Gamma_{23}^{2} = \Gamma_{10}^{1} = \Gamma_{33}^{3} = \Gamma_{03}^{0} = \Gamma_{20}^{2} = \Gamma_{13}^{1} = \Gamma_{30}^{3} = 0,$$

$$\Gamma_{32}^{3} = i\Gamma_{31}^{3}, \Gamma_{22}^{2} = i\Gamma_{21}^{2}, \Gamma_{12}^{1} = -i\Gamma_{11}^{1}, \Gamma_{02}^{0} = -i\Gamma_{01}^{0},$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} = \Gamma_{\nu\mu}^{\tau}.$$

On peut construire une connexion de Dirac sur l'univers $\mathbf{W}$, en prenant un recouvrement localement fini et une partition de l'unité $\left\{\lambda^{U}\right\}$ subordonnée à ce recouvrement. Si ∇_{U} est une connexion de Dirac induite par la carte alors

$$\nabla = \sum_{U}\lambda^{U}\nabla_{U},\ \sum_{U}\lambda^{U} = 1$$

est une connexion définie sur l'univers $\mathbf{W}$. Cette connexion est définie sur le fibré tangent de l'univers $\mathbf{W}$.

Remark 21. *La connexion de Dirac est indépendante du choix de la particule de masse m, c'est donc, une connexion intrinsèque sur les champs complexes. Les équations 5.3 et 5.4 permettent de définir un grand nombre de choix possibles pour la connexion de Dirac.*

6. Les champs en cordes

On s'intéresse dans cette section à une représentation en cordes des particules élémentaires. On suppose que l'univers $\mathbf{W}$ est une variété de dimension 4, orientée. Le fibré tangent est muni d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ, $\gamma^{\mu\nu}$ est le tenseur de Poisson défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8}\operatorname{Trace}\left(\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{Trace}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right),$$

γ^{μ} sont les matrices de Dirac associées à γ dans une carte de $\mathbf{W}$. On définit l'opérateur d'évolution sur le complexifié du fibré tangent comme la section du fibré $\Lambda^1_{\mathbb{C}}\mathbf{W} \otimes T_{\mathbb{C}}\mathbf{W}$,

$$\Phi\left(X + iY\right) = \gamma \otimes \nabla\left(X\right) + i\gamma \otimes \nabla\left(Y\right).$$

L'équation d'évolution des champs complexes est

$$\Phi\left(Z\right) = -i\frac{mc}{\hbar}Z, \tag{6.1}$$

où m est la densité de masse associée au champ complexe Z. Dans une première approche on parlera de champ complexe et de masse ponctuelle pour définir la notion de pseudo-particule et de masse. L'opérateur $i\Phi$ est un opérateur hermitien pour une structure hermitienne donnée. L'ensemble de toutes les sections des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\mathbf{W}$ qui rendent l'opérateur $i\Phi$ hermitien est noté $\mathcal{H}_{\Phi}$. Un champ Z vérifie une équation d'évolution de type 6.1. La masse ponctuelle ou densité de masse associée à Z est la fonction m fixée par une section de $\mathcal{H}_{\Phi}$.

Definition 23. *Les champs en corde sont des champs complexes Z pour lesquels*

$$\dim\left(\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\right\}\right) = 2,$$

et

$$\left[\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\right] \in \operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\right\}.$$

Ces hypothèses permettent de définir un feuilletage de l'univers, de dimension 2. Chaque feuille représente une trajectoire possible d'une corde, dite surface d'univers, la corde est une feuille du feuilletage de S, défini par $\operatorname{Im} Z$. Sous les hypothèses précédentes, il existe deux fonctions réelles a et b, de classe C^{∞} sur $\mathbf{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\left[\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\right] = a \operatorname{Re} Z + b \operatorname{Im} Z.$$

On peut associer à un champ en corde une fonction définie sur $\mathbf{W}$ à valeurs complexes, $\Theta = a + ib$.

Remark 22. $\left[\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\right] = \mathcal{L}_{\operatorname{Re} Z} \operatorname{Im} Z$ *où $\mathcal{L}_{\operatorname{Re} Z}$ est la dérivée de Lie étendue aux champs réels.*

Definition 24. *Une réunion finie de cordes est une* ***"particule"****. La fonction Θ est la* ***fonction d'onde*** *associée au champ Z.*

Soit S une surface d'univers et $\operatorname{in} : S \to \mathbf{W}$, l'inclusion de S dans $\mathbf{W}$. L'endomorphisme

$$T_w \operatorname{in} : T_w S \to T_w \mathbf{W}$$

est un isomorphisme de $T_w S$ sur $\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re} Z\left(w\right), \operatorname{Im} Z\left(w\right)\right\}$. Par la suite, on identifie $T_w S$ et $\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re} Z\left(w\right), \operatorname{Im} Z\left(w\right)\right\}$ à l'aide de cet isomorphisme. On définit les deux 1-formes λ et μ sur S par $\lambda\left(w\right)\left(u\right) = \alpha$ et $\mu\left(w\right)\left(u\right) = \beta$ où

$$T_w \operatorname{in}\left(u\right) = \alpha \operatorname{Re} Z\left(w\right) + \beta \operatorname{Im} Z\left(w\right) \in T_w \operatorname{in}\left(T_w S\right).$$

Ces deux 1-formes définissent la 2-forme $\sigma = \lambda \wedge \mu$ sur S. On prend pour orientation de S, l'orientation définie par σ.

Definition 25. *La tension de la feuille S est*

$$\mathcal{T}(S) = \int_S \sigma, \tag{6.2}$$

La tension est une quantité positive par le choix de l'orientation de S. La corde ne peut pas occuper toutes les surfaces d'univers $\mathbf{W}$, on fait l'hypothèse que les trajectoires possibles S sont celles qui rendent minimale $\mathcal{T}(S)$. Il peut y avoir une infinité de surface d'univers. La trajectoire d'une corde définie par un champ en corde est une surface d'univers pour ce champ. La notion de temps peut apparaître dans le choix de la restriction de la section des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\mathbf{W}$ à $T\mathbf{W}$. On peut représenter cette restriction comme une métrique de Lorentz ou une métrique pseudo-riemannienne de l'univers $\mathbf{W}$. Dans le cas d'une métrique de Lorentz, on définit les champs chronologiques associés à cette métrique. L'opérateur Φ est défini par la connexion de Levi-Civita de cette métrique et le tenseur de Poisson s'écrit localement comme le tenseur dual de $g_{\alpha\beta}$.

Definition 26. *Un temps relatif sur S est une C^∞-application $\tau : S \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\tau\mid_\gamma$ est constante pour toutes les cordes de S.*

La condition nécessaire et suffisante pour que τ soit un temps relatif est que pour tout $w \in S$, $d_w\tau(\operatorname{Im} Z(w)) = 0$. Ces égalités sont équivalentes à l'existence d'une C^∞-application χ de $\mathbf{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $d\tau = \chi\lambda$. Le temps relatif est orienté positivement si $\chi > 0$ sur $S \setminus \{\chi = 0\}$. Si τ est orienté négativement, $-\tau$ est orienté positivement. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps relatifs sur S alors $\tau_2 - \tau_1$ est un temps relatif sur S. Un temps relatif τ est un temps propre si $\chi = 1$. Si $S \setminus \{\chi = 0\}$ n'est pas connexe, un temps relatif peut être positif sur une composante connexe et négatif sur l'autre. Dans la suite un temps relatif est tel que $\{\chi = 0\}$ est vide ou une sous-variété de dimension 0.

Theorem 14. *Il y a équivalence entre la 1-forme différentielle λ est exacte et S est muni d'un temps propre, tous les temps propres τ de S sont les primitives de λ. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps propres sur S alors $\tau_2 - \tau_1$ est constante sur S.*

Proof. La fonction χ est définie par $\chi(w) = d_w\tau(\operatorname{Re} Z(w))$, si $\chi = 1$ alors $d\tau = \lambda$. □

Definition 27. *Le champ en corde Z est exacte ou totale sur la surface d'univers S si la 1-forme λ est exacte.*

Le champ Z vérifie une équation de la forme 6.1, la fonction m représente la masse ponctuelle du champ Z. La masse de la corde γ est donnée par

$$\mathcal{M}_\gamma = \int_\gamma m\mu = \int_\gamma m\boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re} Z}\sigma, \tag{6.3}$$

avec $\mu = \boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re} Z}\sigma$ qui est une forme volume sur γ. Et sa tension est définie par

$$\mathcal{T}_\gamma = \int_\gamma \mu = \int_\gamma \boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re}\Psi}\sigma. \tag{6.4}$$

Remark 23. $\lambda = -\boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Im} Z}\sigma$.

L'énergie est proportionnelle à la masse de la corde avec un coefficient de proportionnalité positif, noté c^2,

$$E_\gamma = \mathcal{M}_\gamma c^2.$$

Dans ce qui suit Z est un champ en corde **exacte** sur S. Si on impose que l'énergie de chaque corde est invariante sur S et vaut E_S, alors l'énergie d'une particule au temps t pour le temps propre τ est

$$E_t = k(t) E_S$$

où $k(t)$ est le nombre de cordes composant cette particule. Si on passe d'un temps t à $t + \Delta t$, la variation d'énergie est

$$\Delta E = (k(t + \Delta t) - k(t)) E_S = \Delta k(t) E_S.$$

Si on change de temps propre on a

$$\Delta E = \Delta k(t + \alpha) E_S,$$

où la constante α est la différence entre le nouveau et l'ancien temps propre. On a quantifié l'énergie en imposant une énergie constante sur chaque corde située sur la surface d'univers. Si on utilise la formule de Planck

$$E_S = h\nu$$

où ν est la fréquence d'oscillation de la corde, alors les cordes ont même fréquence d'oscillation sur S. Les équations d'Einstein et Plank, $E_\gamma = \mathcal{M}_\gamma c^2$ et $E_\gamma = h\nu_\gamma$, permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma T_\gamma = \frac{h}{c^2} \tag{6.5}$$

qui est invariant, où h est la constante de Planck et $T_\gamma = \frac{1}{\nu_\gamma}$ est la période d'oscillation de la corde γ. On se fixe une métrique riemannienne g canonique, sur S par

$$g(\operatorname{Re} Z, \operatorname{Re} Z) = g(\operatorname{Im} Z, \operatorname{Im} Z) = 1$$

et

$$g(\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z) = g(\operatorname{Im} Z, \operatorname{Re} Z) = 0.$$

Avec cette métrique pour un temps propre, $\operatorname{Re} Z = \operatorname{grad} \tau$. L'excitation globale de la surface d'univers de S est une section $\mathcal{E}$ de S à valeurs dans $\operatorname{Isom}_+(TS)$ qui à chaque événement $w \in S$ associe une isométrie de $(T_w S, g(w))$ conservant l'orientation. La restriction de cette section à une corde γ est l'excitation de cette corde sur S. On pose $\mathbf{M}_w$ la matrice de $\mathcal{E}(w)$ dans la base $\{\operatorname{Re} Z(w), \operatorname{Im} Z(w)\}$, il existe une C^∞-application $\theta : S \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbf{M}_w = \begin{pmatrix} \cos\theta(w) & -\sin\theta(w) \\ \sin\theta(w) & \cos\theta(w) \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Si γ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$ou $\mathbf{I}=[0,1]$, on prend un paramétrage par longueur d'arc $\varrho : [0,l] \to \gamma$, l'application $\theta \circ \varrho : [0,l] \to \mathbb{R}$ est prolongeable par périodicité sur $\mathbb{R}$, la période T_γ de cette fonction est la période d'excitation de la corde γ. La longueur de la corde l qui est la tension $\mathcal{T}_\gamma$ de la corde vérifie

$$\mathcal{T}_\gamma = kT_\gamma,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 11. *La tension de la corde γ est un multiple entier de la période T_γ.*

Remark 24. *La fréquence d'excitation de γ est $\nu_\gamma = \frac{1}{T_\gamma}$.*

Pour comprendre la notion de fréquence d'excitation d'une corde γ, on se place dans un voisinage de cette corde dans lequel il existe un temps propre τ. On choisit l'unique temps propre pour lequel $\gamma = \tau^{-1}(t_0)$ et on pose $\gamma_0 = \gamma$. Ensuite, on fait varier le temps propre de t_0 à t_1. Si on pense γ_0 comme une corde ouverte ou fermée qui évolue, sur la surface S, de $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ à $\gamma_1 = \tau^{-1}(t_1)$ et on se fixe un événement w_{t_0} sur γ_0, cet événement décrit une trajectoire de w_{t_0} à $w_{t_1} \in \gamma_1$. On pose $w_t \in \gamma_t = \tau^{-1}(t)$ un paramétrage de cette courbe. Le transport parallèle le long de cette courbe permet de définir une isométrie de $\varsigma_{w_t,w_{t_0}} : T_{w_{t_0}}S \to T_{w_t}S$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, qui préserve l'orientation. On a

$$\varsigma_{w_{t_1},w_{t_0}} = \varsigma_{w_{t_1},w_t} \circ \varsigma_{w_t,w_{t_0}}.$$

L'événement marqué w sur $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ suit la trajectoire w_t pour laquelle

$$\mathcal{E}(w_{t_1}) = \varsigma_{w_{t_1},w_{t_0}} \circ \mathcal{E}(w_0) \circ \varsigma^{-1}_{w_{t_1},w_{t_0}}, \forall t_0, t_1.$$

Si on se place sur la corde, il y a une excitation donnée en chaque événement w par $\mathcal{E}(w)$ et les déplacements suivant un temps propre, de chaque événement de la corde, vérifient 6.5. On en déduit la relation de quantification d'une corde,

$$\mathcal{M}_\gamma \mathcal{T}_\gamma = k\frac{h}{c^2}, k \in \mathbb{N}^*. \tag{6.7}$$

On peut fixer l'excitation sur la surface d'univers S, en prenant pour fonction θ dans l'équation 6.6, la fonction qui vérifie $\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\exp(i\theta)$ où Θ est l'onde associée au champ en corde Z et est défini par $\Theta(w) = a(w) + ib(w)$ avec

$$[\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z] = a \operatorname{Re} Z + b \operatorname{Im} Z.$$

Si la surface d'univers est muni d'un temps relatif τ qui n'est plus propre, on prend un temps relatif τ qui vérifie $d\tau = \chi\lambda$ et $L_{\operatorname{Im} Z}(\chi) = 0$ pour lequel $\{\chi = 0\}$ est discret et positif sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$. Les points où $\chi = 0$ correspondent aux points de séparation des cordes ou au regroupement de deux cordes. Sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$, si on transforme le champ Z en $Z_\chi = \chi \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z$ et si on se restreint à la surface $S_\chi = S \smallsetminus \{Z_\chi = o\}$, alors τ est un temps propre pour Z_χ qui est un champ défini sur S. Les 1-formes différentielles λ, μ se transforment en $\chi\lambda$ et μ, donc $\mathcal{M}_\gamma$ et $\mathcal{T}_\gamma$ sont invariantes et la tension de la surface S_χ est

$$\mathcal{T}(S_\chi) = \int_S \chi\sigma,$$

la fonction d'onde Θ_χ associée au champ Z_χ est $\Theta_\chi = -L_{\operatorname{Im} Z}(\chi) + \chi\Theta = \chi\Theta$ sur S et $\theta_\chi = \theta$ 6.8. On obtient encore une formule de quantification identique à celle donnée en 6.7. Dans le cas le plus général, on découpe la surface $S \smallsetminus \{Z_\chi = 0\}$, en surfaces ouvertes connexes et on répète le procédé sur chaque composante connexe obtenue. Les événements de $\{Z_\chi = 0\}$ sont les points où se collent et se décollent les cordes entre elles qui évoluent dans la surface d'univers S. La représentation géométrique des champs en corde permet de quantifier l'énergie de la corde définie par le champ. Le produit de la masse et de la tension est discrétisé dans l'équation 6.7. Il serait intéressant de regarder le comportement d'un nombre fini de champs en cordes, notamment en analysant les feuilletages de l'univers induits par ces champs.

Lemma 6. *Si $Z = X + iY$ et $Z' = X' + iY$ sont des champs en corde de champ imaginaire Y alors $Z'' = (X + X') + iY$ et $Z = \lambda X + iY$ sont des champs en corde.*

Proof. On a

$$\begin{aligned}[Y, \lambda X] &= \lambda [Y, X] + L_Y(\lambda) X \\ &= \lambda\beta Y + (\lambda\alpha + L_Y(\lambda)) X\end{aligned}$$

si

$$[Y, X] = \alpha X + \beta Y.$$

□

Proposition 12. *La fonction d'onde associée au champ en corde $Z = \lambda X + iY$ est*

$$\lambda\alpha - L_Y(\lambda) + i\lambda\beta = -L_Y(\lambda) + \lambda(\alpha + i\beta),$$

si la fonction d'onde du champ en corde $X + iY$ est ϕ alors la fonction d'onde du champ en corde $\lambda X + iY$ est

$$\psi = -L_Y(\lambda) + \lambda\phi, \tag{6.8}$$

où L_Y est la dérivée de Lie le long du champ Y.

Si $X \in \Gamma^\infty(\mathbf{W})$ alors en coordonnées locales $X = X^\mu \partial_\mu$, où $X^\mu : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$ est une C^∞-application. Si $Y = Y^\mu \partial_\mu$ alors $[Y, X] = L^\nu \partial_\nu$ avec,

$$L^\nu = Y^\mu (\partial_\mu X^\nu) - X^\mu (\partial_\mu Y^\nu).$$

On cherche à déterminer les champs X tels que

$$\mathcal{L}_Y(X) = [Y, X] = \alpha X + \beta Y,$$

où α et β sont des C^∞-applications définies sur un ouvert $U \subset \mathbf{W}$ et Y est un champ fixé non nul sur U. Localement, on a

$$Y^\mu (\partial_\mu X^\nu) - X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) = \alpha\delta_{\mu\nu} X^\mu + \beta\delta_{\mu\nu} Y^\mu, \tag{6.9}$$

pour tout $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Si $\{\partial_\nu\}$ est le local frame associé à la carte U, les champs $X = X^\nu \partial_\nu$ pour lesquels

$$X + i\partial_\sigma$$

est un champ en corde sont les champs qui vérifient le système d'équations différentielles

$$\alpha\delta_{\sigma\nu} + \beta X^\nu + \partial_\sigma X^\nu = 0,\ \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Pour un champ Y, le théorème de redressement permet de construire une carte φ pour laquelle le local frame associé vérifie

$$Y = \partial_0 \text{ et } Y\varphi(\partial_0) = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Un champ local X s'écrit dans cette carte

$$X = X^\mu \partial_\mu,$$

le champ complexe

$$X + iY$$

est un champ en corde si et seulement si il existe deux C^∞-applications α et β définies sur la carte φ telles que

$$\alpha\delta_{0\nu} + \beta X^\nu + \partial_0 X^\nu = 0,\ \nu = 0, 1, 2, 3.$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\beta X^0 + \partial_Y X^0 + \alpha = 0$$

$$\beta X^{\nu}+\partial_{Y}X^{\nu}=0,\ \nu=1,2,3$$

avec

$$X=X^{0}Y+X^{\nu}\partial_{\nu}.$$

L'existence de solution s'obtient en transportant ce système dans $\mathbb{R}^4$ par l'isomorphisme de carte $T\varphi:TU\rightarrow T\mathbb{R}^4$, ce système s'écrit

$$\frac{\partial\mathbf{X}^{\nu}}{\partial t}+\beta_{\varphi}\mathbf{X}^{\nu}+\alpha_{\varphi}\delta_{0\nu}=0$$

avec

$$\beta_{\varphi}=\beta\circ\varphi^{-1},\ \alpha_{\varphi}=\alpha\circ\varphi^{-1}\text{ et }\mathbf{X}^{\nu}=X^{\nu}\circ\varphi^{-1}.$$

On a

$$\mathbf{X}^{\nu}=k_{\nu}\exp\left(-\int\beta_{\varphi}dt\right)$$

avec

$$k_{\nu}=-\delta_{0\nu}\int\alpha_{\varphi}\exp\left(-\int\beta_{\varphi}dt\right)dt+C_{\nu}$$

où C_{ν} est une fonction indépendante de t, elle ne dépend que de x,y,z. On en déduit le théorème suivant, ce théorème permet de déterminer le champ en corde à partir de sa fonction d'onde.

Theorem 15. *Les champs X pour lesquels $X+iY$ est un champ en corde pour $Y\neq\mathbf{o}$ dans une carte*

$$\varphi:U\rightarrow\mathbb{R}^{4}$$

dont le local frame associé $\{\partial_{\nu},\nu=0,1,2,3\}$ vérifie

$$Y=\partial_{0}$$

avec

$$T\varphi\otimes\partial_{0}=\frac{\partial}{\partial t}$$

et dont la fonction d'onde associée sur U est

$$\theta=\alpha+i\beta,$$

sont de la forme

$$X^{\nu}\partial_{\nu}$$

où

$$X^{\nu}=\mathbf{X}^{\nu}\circ\varphi$$

et

$$\mathbf{X}^{\nu}=k_{\nu}\exp\left(-\int\beta_{\varphi}dt\right)$$

avec

$$k_{\nu}=-\delta_{0\nu}\int\alpha_{\varphi}\exp\left(-\int\beta_{\varphi}dt\right)dt+C_{\nu},\ C_{\nu}=C_{\nu}\left(x,y,z\right),$$

et

$$\alpha_{\varphi}=\alpha\circ\varphi^{-1},\ \beta_{\varphi}=\beta\circ\varphi^{-1}.$$

Le complexifié de ζ d'un fibré hilbertien réel est

$$\zeta \otimes \mathbb{C} \approx \zeta \times \zeta \approx \zeta + i\zeta$$

où le produit par un complexe est défini par

$$(\lambda + i\mu)(x,t) = (\lambda x - \mu t, \lambda t + \mu x)$$

pour toutes sections x et t de $\Gamma(\xi)$ et toutes C^∞-applications $\lambda, \mu : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$. L'opération de conjugaison est une section de $\mathrm{Hom}(\xi \otimes \mathbb{C})$ définie par $\overline{(x,t)} = (x,-t)$, x et $t \in \Gamma(\xi)$ et l'endomorphisme de fibré définissant la structure complexe est $J(x,t) = (-t,x)$. On pose $s = x + it$, où x et t sont des sections de $\Gamma(\xi)$ par l'identification $x = (x, \mathbf{o})$ et $t = (\mathbf{o}, t)$ où $\mathbf{o}$ représente la section nulle de ξ.

Definition 28. *Une section $s = x + it$ de $\Gamma(\xi \otimes \mathbb{C})$ est un complexification de la section réelle x.*

Definition 29. *Une section complexe $s \in \Gamma(\xi \otimes \mathbb{C})$ est une φ-section sur $V \subset \mathbf{W}$ si $\varphi \otimes t = x$ sur V.*

Cela revient à dire qu'il existe une section locale φ de $\mathrm{Hom}(\zeta)$ définie sur V telle que pour tout $\omega \in V$

$$\varphi(w) : E_w(\xi) \to E_w(\xi), \ \varphi(w)(t(w)) = x(w).$$

L'application est un paramétrage qui donne la variation de la section espace x par rapport à la section temps t. On peut comparer cet opérateur au paramétrage d'une courbe. Une section d-dimensionnelle sur $V \subset \mathbf{W}$ est une section locale $(s_1, s_2, \cdots, s_d)$ de $\Gamma(\xi \otimes \mathbb{C})^d$, telle que $\{s_1(w), s_2(w), \cdots, s_d(w)\}$ est une famille libre de $E_w(\xi) \otimes \mathbb{C}$, pour tout w appartenant à un ouvert V. Si $s \in \mathrm{Vect}\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$ alors $s = z^\mu s_\mu$, $z^\mu \in \mathbb{C}$ que l'on peut écrire sous la forme $s = x + it$ avec

$$x = \mathrm{Re}(z^\mu)\mathcal{R}(s_\mu) - \mathrm{Im}(z^\mu)\mathcal{I}(s_\mu),$$

est une section espace et

$$t = \mathrm{Im}(z^\mu)\mathcal{R}(s_\mu) + \mathrm{Re}(z^\mu)\mathcal{I}(s_\mu)$$

où $s_\mu = \mathcal{R}(s_\mu) + i\mathcal{I}(s_\mu)$.

Definition 30. *Soit s' une autre section de* $\mathrm{Vect}\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$

$$s' = x' + it',$$

un $\{\varphi, \psi\}$-déplacement sur V de s' par rapport à s est la donnée de deux sections locales φ et ψ sur V de $\mathrm{Hom}(\xi)$ *telles que la condition suivante est réalisée*

$$x' = \mathbf{o} \implies x = \varphi \otimes t \text{ et } x = \mathbf{o} \implies x' = \psi \otimes t'$$

où $\mathbf{o}$ est la section nulle et

$$(\varphi \otimes t)(w) = \varphi(w)(t(w)), \ \forall w \in V.$$

.

On dit que les sections s' et s sont en déplacement uniforme sur V, l'une par rapport à l'autre, s'il existe un $\{\varphi, \psi\}$-déplacement sur un ouvert V de $\mathbf{W}$, de s' par rapport à s tel que

$$\psi = -\varphi,$$

où φ est une section locale de $\mathrm{GL}(\xi)$ définies sur l'ouvert V, c'est-à-dire que sur chaque fibre $E_w(\xi)$, $\varphi(w) \in \mathrm{GL}(E_w(\xi))$.

Remark 25. *φ est la vitesse de s' par rapport à s.*

Dans cette partie, on impose une condition d'analycité des déplacements uniformes, dans le sens suivant, toutes les tranformations considérées sont analytiques par rapport à la vitesse φ. Supposons que sur l'univers $\mathbf{W}$ existe une structure qui soit une $\pm$-presque complexe $\varphi = J$. Si le champ complexe $X + iY$ est en déplacement uniforme par rapport à $X_0 + iY_0$ [18] alors on a

$$\left\{ \begin{array}{c} X = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(X_0 - JY_0\right) \\ Y = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(Y_0 - c^{-1} J X_0\right) \end{array} \right. .$$

Proposition 13. *Avec les hypothèses précédentes, si*

$$X_0 + iJY_0$$

est un champ en corde alors

$$X + iJY$$

est un champ en corde.

Proof. On a

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X, JY\right\}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X_0, JY_0\right\}\right) = 2$$

et

$$\begin{aligned} [X, JY] &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[X_0 - JY_0, JY_0 + c^{-1} X_0\right] \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left[X_0, JY_0\right] \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\alpha X_0 + \beta JY_0\right) \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\alpha + \beta\right) X + \left(1 \pm c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\beta - c^{-1}\alpha\right) JY. \end{aligned}$$

□

Remark 26. *Si la fonction d'onde de $X_0 + iJY_0$ est $\alpha + i\beta$ alors la fonction d'onde de $X + iJY$ est*

$$\left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\left(\alpha + \beta\right) + i\left(\beta - c^{-1}\alpha\right)\right)$$

si le champ $X + iY$ est en déplacement uniforme le long de la structure $\pm$-complexe, de vitesse J.

7. Représentation de l'univers de Dirac-Einstein par chirurgie et extension analytique

Soit Λ une variété fermée, connexe, de dimension 4 et V une sous-variété compacte, sans bord, non nécessairement connexe, de codimension $\geqslant 2$. La variété $\mathbf{W} = \Lambda \smallsetminus V$ est une variété connexe qui représente notre univers de Dirac-Einstein. La variété V est dite variété à l'infini et est notée $V = \mathbf{W}_\infty$. La variété $\mathbf{W}_\infty$ est une variété compacte, sans bord, de dimension 0, 1 ou 2. La dimension 0, permet de représenter $\mathbf{W}$ comme une variété fermée privée de k points. Si $k = 1$, Λ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{W}$. Pour la dimension 1, on retire à Λ, un nombre fini k de lacets simples plongés dans Λ deux à deux disjoints. Si la dimension est 2, on retire un nombre fini k de surfaces fermées de genres $g_1, g_2, \cdots, g_k$. On peut généraliser en supposant que $\mathbf{W}_\infty$ est une réunion finie de variétés fermées, deux à deux disjointes, de codimension $\geqslant 2$. On note dans cette situation $\mathrm{codim}_\infty \mathbf{W}$, la plus petite codimension de chaque composante connexe de $\mathbf{W}_\infty$.

Theorem 16. *1) Si* $\operatorname{codim} \mathbf{W}_\infty \geqslant 3$, *alors l'inclusion* $\mathrm{in} : \mathbf{W} \to \Lambda$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{in}_* : \pi_1(\mathbf{W}, w) \to \pi_1(\Lambda, w)$ *pour tout* $\omega \in \mathbf{W}$.

2) Si $\operatorname{codim} \mathbf{W}_\infty = 2$, $\mathrm{in}_* : \pi_1(\mathbf{W}, w) \to \pi_1(\Lambda, w)$ *est surjectif pour tout* $w \in \mathbf{W}$.

Proof. C'est un théorème de Godbillon [12]. □

Remark 27. *Le goupe de Poincaré de l'univers est isomorphe au groupe fondamental d'une variété fermé sous l'hypothèse que sa structure à l'infini est formée d'un nombre fini de points.*

On suppose l'existence d'un champ chronologique stable sur $\mathbf{W}$. La variété $\mathbf{W}$ est une variété à deux feuilletages transversaux, notés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}$ avec $\operatorname{codim} \mathcal{T} = 3$ et $\operatorname{codim} \mathcal{E} = 1$. Il y a deux types de feuilles pour ces feuilletages, les feuilles F pour lesquelles $\mathrm{Adh}_\Lambda F = F$ qui sont les feuilles compactes et les feuilles pour lesquelles $\mathrm{Adh}_\Lambda F \neq F$. On se place dans la situation où $\mathbf{W}_\infty = \{\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_k\}$ alors $\mathrm{Adh}_\Lambda F = F \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_J$ où J est un sous-ensemble de $\{1, 2, \cdots, k\}$. Les points $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_k$ sont les points de contact des feuilles à l'infini. On note pour tout $J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$, $\mathbf{W}_J = \cup_{\mathrm{Adh}_\Lambda F = F_J} F$. La famille

$$\{\mathbf{W}_J : J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, k\})\}$$

forment une partition de l'univers $\mathbf{W}$. Si le système de Pfaff

$$\tau : w \to \tau(w) = E_w,$$

est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, si $\lim_{w \to \infty_j} \tau(w) = E_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{E}$ telle que $\mathrm{Adh}_\Lambda F_\mathcal{E} = F_\mathcal{E} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{E},J}$, est une sous-variété et

$$T_{\infty_j} F_{\mathcal{E},J} = E_j.$$

On a pincé les feuilles-espace aux points à l'infini. Si le système de Pfaff

$$\varsigma : w \to T_w$$

est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, $\lim_{w \to \infty_j} \varsigma(w) = T_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{T}$ telle que $\mathrm{Adh}_\Lambda F_\mathcal{T} = F_\mathcal{T} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{T},J}$ est une sous-variété homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ ou à $[0, 1]$ avec, $T_{\infty_j} F_{\mathcal{T},J} = T_j$. Les lacets simples $F_{\mathcal{T},J}$ se coupent tangentiellement aux points ∞_j pour $j \in J$. Sans l'hypothèse de prolongement par continuité à l'infini des systèmes de Pfaff, on a un théorème de fibration de l'univers si les feuilles-espace sont compactes.

Remark 28. $\lim_{\omega \to \infty_j} \varsigma(w) = T_j$ *signifie qu'il existe des sections locales* X_{ji} *dans une carte de* ∞_j *telles que* $\mathrm{Vect}\{X_{ji}(w)\} = \varsigma(w)$ *avec* $T_j = \mathrm{Vect}\{X_{ji}(\infty_j)\}$.

Theorem 17. *Si* $\mathbf{W} = \mathbf{W}_\emptyset$ *et* $\mathbf{W} \neq \Lambda$ *alors* $\mathbf{W}$ *est l'espace total d'un fibré de base* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{S}^1$. *Si* $\mathbf{W}$ *est compacte,* $\mathbf{W}$ *est l'espace total d'un fibré de base* $\mathbb{S}^1$.

Proof. C'est une conséquence du théorème de stabilité globale de Reeb [28], [29] et [15], il suffit de remarquer que toutes les feuilles espace sont compactes et que, sous cette hypothèse, $\mathbf{W}$ est l'espace total d'un fibré de base $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}$ suivant la compacité de $\mathbf{W}$. □

Si $\infty \in \mathrm{Adh}_\Lambda F_\mathcal{E}$, un chemin γ de Λ, tel que $\gamma(0) = \infty$ pour un point à l'infini $\infty \in \mathbf{W}_\infty$ et $\gamma(t) \in F_\mathcal{E}$ pour $t \neq 0$, est un $F_\mathcal{E}$-chemin. On note $T_\infty F_\mathcal{E}$, l'ensemble des vecteurs $\gamma'(0)$, lorsque γ parcourt l'ensemble des $F_\mathcal{E}$-chemins. En général, $T_\infty F_\mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $T_\infty \Lambda$. C'est un cône de sommet l'origine o_∞ de $T_\infty \Lambda$. Ce n'est pas un cône de lumière en général car il n'y a pas de prolongement

de la métrique de Lorentz aux points à l'infini. Dans le cas où $\mathbf{W}_\infty$ est formé de sous-variétés de dimension $0, 1$ et 2 en nombre fini, on dit que le feuilletage est stable à l'infini si pour $\infty \in V$, où V est une composante connexe de $\mathbf{W}_\infty$, on a $T_\infty F_{\mathcal{E}} = T_\infty \mathbf{W}_\infty$. Si $\mathbf{W}_\infty = \{\infty\}$, il n'y a plus d'espace en ce point, si $\mathbf{W}_\infty = \mathbb{S}^1$ alors l'espace est à une dimension au plus sur les lacets à l'infini [9]. Si $\mathbf{W}_\infty = \mathbb{T}_g$, une surface de genre $g \geqslant 0$, l'espace est de dimension au plus 2. A l'extérieur des points à l'infini, les feuilles-espace sont de dimension 3. Pour le feuilletage temps, si $\mathbf{W}_\infty = \{\infty\}$ il n'y a plus de temps en ce point, si $\mathbf{W}_\infty = \mathbb{S}^1$ou $\mathbb{T}_g$ alors le temps est à une dimension au plus.

On peut imaginer une structure à l'infini ayant des sous-variétés de dimension $n = 3$ ou $n = 4$. Si $n = 3$, on se restreint à la partie connexe de $\mathbf{W}$, privée des sous-variétés de dimension 3 à l'infini, où vit le champ chronologique de notre univers. Notre univers est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est une variété à l'infini. Si $n = 4$, notre univers est le bord à l'infini, d'un univers de dimension $\geqslant 5$. On a une construction en *"gigogne"* d'une succession d'univers de dimensions supérieures contenues de le multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$. Lorsque l'on impose que les dimensions de $\mathbf{W}_\infty$ sont de dimensions inférieures ou égales à 2, cette construction en *"gigogne"* reste vraie sans que l'on soit dans l'obligation d'augmenter la dimension 4 des univers que l'on recolle par somme connexe sur les différentes structures à l'infini. On représente $\mathbf{W}$ comme une singularité d'un multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$.

On suppose que le compactifié d'Alexandroff de l'univers $\mathbf{W}$, $\mathbf{W} \cup \{\infty\}$ est une C^∞-variété fermée. Dans cette situation, on dit que l'univers est stable à l'infini. On peut généraliser cette notion de stabilité en prenant une compactification à plusieurs points ou tout autre type de compactification décrite précédemment. On se donne une fonction C^∞, $\Phi : \mathbf{W} \to \mathbb{R}$, qui mesure un état physique de l'univers $\mathbf{W}$, cette fonction peut être une entropie ou une mesure physique réelle.

Definition 31. *Deux événements p et q sont dans le même état si $\Phi(p) = \Phi(q)$. On dit que les événements sont dans le même présent pour la fonction d'état Φ. L'événement p est dans le passé de l'événement q et q est dans le futur de p si $\Phi(p) < \Phi(q)$ pour la fonction d'état Φ.*

Si s est une valeur régulière de l'état Φ alors $\Phi^{-1}(s)$ est une hypersurface de $\mathbf{W}$. Pour définir un événement de l'univers, il faut définir exactement un nombre $n = \dim \mathbf{W}$ d'états $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$, deux à deux transversaux, $\Phi_i \pitchfork \Phi_j$ et $i \neq j$. Si $s_1, \cdots, s_n$ sont des valeurs régulières pour les états $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$ alors le sous-espace $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$ est une sous-variété de $\mathbf{W}$ de dimension 0, c'est-à-dire, une suite de points de $\mathbf{W}$ sans point d'accumulation dans $\mathbf{W}$, les points d'accumulation possibles dans le compactifié est le point à l'infini ∞. L'événement w n'est pas entièrement localisé mais peut se situer en chaque point de $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$. C'est un **"principe d'incertitude de localisation"** pour un événement décrit par $n = \dim \mathbf{W}$ états transversaux deux à deux. On peut approcher une fonction d'état par une fonction de Morse. Pour structurer cet univers on fait l'hypothèse que la fonction d'état Φ est une fonction de Morse sur $\mathbf{W}$. L'existence de telles fonctions de Morse existent par le théorème de densité de Milnor pour la C^k-topologie fine de Whitney. Pour une fonction d'état de Morse, si α est une valeur d'état non dégénérée, alors $\mathbf{W}_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ est une sous-variété de dimension $n - 1$. Pour $n = 4$ les sous-espaces, dans un état non dégénéré donné, sont des sous-variétés de dimension 3. Les tranches d'univers de ce type qui ne contiennent pas le point à l'infini dans

leur adhérence relativement à $\mathbf{W} \cup \{\infty\}$, sont des variétés fermées de dimension 3 dont chaque composante connexe peut être décrite à l'aide des huit géométries de Thurston [32]. L'ensemble des points critiques est discret, ce sont les points dont la valeur d'état est irrégulière. Si on note $\mathbf{W}_{\leqslant\alpha}$, le passé de $\mathbf{W}_\alpha$, c'est à dire, $\mathbf{W}_{\leqslant\alpha} = \Phi^{-1}(]-\infty;\alpha])$, le présent est le bord du passé, alors on peut reconstruire l'univers à l'aide des deux théorèmes suivants,

Theorem 18. *Si $[\alpha,\beta]$ ne contient aucun état irrégulier alors la portion d'univers $\Phi^{-1}([\alpha,\beta])$ est difféomorphe à $\mathbf{W}_\alpha \times [\alpha,\beta]$. Le passé détermine entièrement le futur. En particulier, le présent $\mathbf{W}_\alpha$ est difféomorphe au présent $\mathbf{W}_\beta$.*

Theorem 19. *Si p est un événement critique d'indice λ, et s'il existe une petite variation $\varepsilon > 0$ d'état pour laquelle $\mathbf{W}_{\leqslant\Phi(p)+\varepsilon} \setminus \mathbf{W}_{\leqslant\Phi(p)-\varepsilon}$ ne contient que p comme événement singulier, alors $\mathbf{W}_{\leqslant\Phi(p)+\varepsilon}$ est obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n-\lambda)$ à partir du passé $\mathbf{W}_{\leqslant\Phi(p)-\varepsilon}$.*

Proof. C'est le théorème de chirurgie de Milnor-Morse-Smale [26]. □

Remark 29. *On rappelle la construction des chirurgies de type $(\lambda, n-\lambda)$. Si N est une variété de dimension n, de bord non vide $\partial N \neq \emptyset$ et φ est un plongement de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ dans ∂N, on pose $\chi(N,\varphi) = \frac{N \cup D^n}{\sim}$, $\cup$ est l'union disjointe de N et D^n et $\sim$ représente la relation d'équivalence suivante*

$$x \in \partial N \sim y \in \partial D^n = S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$$

si et seulement si $\varphi(x) = y$. L'espace $\chi(N,\varphi)$ est une C^∞-variété obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n-\lambda)$ à partir de la variété à bord N.

On peut construire des états de Morse pour lesquels chaque présent ne contient au plus qu'un événement singulier. Ainsi , pour étudier la géométrie de l'univers, par rapport à cet état, il suffit d'analyser la géométrie du passé et reconstruire par chirurgie, à partir de ce passé, le futur local de notre univers.

Si on veut décrire de façon déterministe chaque événement, on peut plonger $\mathbf{W}$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $n \leqslant p \leqslant 2n+1$, c'est le théorème de plongement de Withney. Il suffit de décrire au plus 9 états $\{\Phi_j\}$ tels que $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_9)$ soit un plongement. Pour un déterminisme local, il suffit d'immerger l'univers dans $\mathbb{R}^p$, les théorèmes de Gromov-Smale [13], [31] de la théorie des immersions permettent de limiter le nombre d'états suivant la nature topologique de l'univers $\mathbf{W}$. Dans l'hypothèse non déterministe, il y a donc, un principe d'incertitude sur la localisation d'un événement.

Dans ce qui suit, on propose une représentation par extension analytique à partir des cartes de l'univers $\mathbf{W}$. Soient $\varphi, \psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{W}$, deux cartes de $\mathbf{W}$ telles que $\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) \neq \emptyset$, le changement de carte est donné par

$$\lambda : \varphi^{-1}\left(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)\right) \subset \mathbb{R}^4 \to \psi^{-1}\left(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)\right) \subset \mathbb{R}^4$$

où $\lambda = \psi^{-1} \circ \varphi \mid_{\varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4)\cap\psi(\mathbb{R}^4))}$ [23]. Sur un C^∞-variété $\mathbf{W}$, l'unique structure analytique induite par la C^∞-structure, permet de choisir des cartes analytiques $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{W}$. Le changement de carte λ est analytique sur l'ouvert $\varphi^{-1}\left(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)\right)$.

Definition 32. *Les cartes φ et ψ sont analytiquement compatibles si et seulement si le changement de carte λ est la trace d'un difféomorphisme analytique Θ de $\mathbb{R}^4$.*

Remark 30. *Ce prolongement analytique est unique d'après le théorème d'unicité analytique.*

Un m-uplet de cartes $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ est stable si φ_j et φ_{j+1} sont analytiquement compatibles pour tout $j = 1, \cdots, m-1$. Soit $\phi_j = \varphi_j^{-1} : U_j = \varphi_j\left(\mathbb{R}^4\right) \to \mathbb{R}^4$, pour $j = 1, \cdots, m$ et

$$\lambda_j = \phi_j \circ \phi_{j+1}^{-1} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_{j+1} : \phi_{j+1}\left(U_j \cap U_{j+1}\right) \to \phi_j\left(U_j \cap U_{j+1}\right)$$

alors l'ajustement de carte ϕ_1 est donné par $\Theta_1 \circ \Theta_2 \circ \cdots \circ \Theta_{m-1} \circ \phi_m$ où Θ_j est l'unique extension analytique de λ_j. Si on pose $\Theta = \Theta_1 \circ \Theta_2 \circ \cdots \circ \Theta_{m-1}$, alors l'ajustement de carte dans ϕ_1 est $\Theta \circ \phi_m$ et l'ajustement dans ϕ_m est $\Theta^{-1} \circ \phi_1$. Dans ce qui suit on suppose que tous les changements de cartes analytiques sont les traces des éléments d'un sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, c'est-à-dire, $\mathbf{W}$ est une $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété. Les sous-groupes $\mathcal{G}$ du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, à savoir $\mathbb{R}^4$, muni de la métrique $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (on normalise en prenant $c = 1$), qui opèrent transitivement sur $\mathbb{R}^4$ permettent de construire l'application développante pour un événement fixé $w \in \mathbf{W}$ et une carte ψ de la $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété $\mathbf{W}$ avec, $\psi(o) = w$, $o \in \mathbb{R}^4$. Cette application est notée $D : \widetilde{\mathbf{W}} \to \mathbb{R}^4$, où $\widetilde{\mathbf{W}}$ est le revêtement universel de $\mathbf{W}$, D est un difféomorphisme si et seulement si la métrique induite sur l'univers $\mathbf{W}$ par la métrique de Minkowski fait de $\mathbf{W}$ un espace métrique complet. Dans cette situation, l'univers $\mathbf{W}$ est entièrement décrit par son groupe d'holonomie $\Gamma \subset \mathcal{G}$, qui est isomorphe à $\pi_1(\mathbf{W})$ [36].

Theorem 20. *Avec les hypothèses précédentes, le revêtement universel de* $\mathbf{W}$ *est difféomorphe à* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbf{W}$ *est difféomorphe à* $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$.

Proof. $\mathcal{G}$ opère analytiquement et transitivement, avec stabilisateur compacte en chaque point de $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski. Avec ces hypothèses, $\mathbf{W}$ est $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-complète. Le revêtement universel de $\mathbf{W}$ est $\mathbb{R}^4$. On a le difféomorphisme de $\mathbf{W}$ sur $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$. □

Le choix du groupe $\mathcal{G}$ est entièrement décrit par la nature ondulatoire de l'univers. A chaque changement de cartes de φ à ψ, on définit un élément Θ du groupe structurel $\mathcal{G}$. Une onde ϕ sur l'univers $\mathbf{W}$ est une application $\phi : \mathbf{W} \to \mathbb{C}$ qui vérifie pour toute carte $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{W}$ la propriété $\int_{\mathbb{R}^4} |\phi \circ \varphi|^2 \, dxdt < +\infty$, on note $\|\phi \circ \varphi\|^2$ cette intégrale. Soit $\Phi_\Theta : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$, l'application définie par $\Phi_\Theta(\alpha) = \alpha \circ \Theta$, où Θ est l'unique extension du changement de carte de φ à ψ. Si on prend une onde ϕ de l'univers $\mathbf{W}$, on a $\Phi_\Theta(\phi \circ \psi) = \phi \circ \varphi$. L'application est une bijection de $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$, on fait l'hypothèse suivante, qui est une hypothèse naturelle qui respecte les principes quantiques, Φ_Θ est une transformation de Wigner, c'est-à-dire, $|\langle \Phi_\Theta \alpha, \Phi_\Theta \beta \rangle| = |\langle \alpha, \beta \rangle|$ pour tout α et β dans $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Theorem 21. *Il existe une application* $\theta : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to \mathbb{S}^1$ *et une application*

$$L : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$$

telles que, $\Phi_\Theta(\alpha) = \theta(\alpha) L(\alpha)$, *avec* L *est unitaire ou* L *est antiunitaire.*

Proof. C'est le théorème de Wigner [35]. □

$\mathcal{G}$ est un groupe, donc $\mathcal{G} = \left\{\Theta : \Phi_\Theta = \theta \times L,\ |\theta| = 1 \text{ et } L \in \mathcal{U}\left(L^2\left(\mathbb{R}^4\right)\right)\ \right\}$. L ne peut pas être antiunitaire. Les applications de $\mathcal{G}$ sont les isométries de l'espace

de Minkowski pour lesquelles l'opérateur Φ_Θ conserve le produit hermitique de $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$. Il faut vérifier que ce groupe $\mathcal{G}$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^4$. Le groupe de Poincaré propre $\mathcal{L}_0 \ltimes \mathbb{R}^4$ est contenu dans le groupe $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}_0 \ltimes \mathbb{R}^4$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^4$. Pour une isométrie $\Theta \in SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$, $\|\Phi_\Theta \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Theta(x,t)|^2 \, dxdt$, le Jacobien est $J_\Theta(x,t) = \left|\det \vec{\Theta}(x,t)\right| = 1$. En particulier,

$$\|\Phi_\Theta \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Theta(x,t)|^2 J_\Theta(x,t) \, dxdt = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha(x,t)|^2 \, dxdt = \|\alpha\|^2,$$

par changement de variable. On rappelle que le produit semi-direct est décrit par $(\Theta, x)(\Theta', x') = (\Theta\Theta', x + \Theta x')$ et $\mathcal{L}_0$ correspond à la composante connexe de $SO(3,1)$, contenant $\mathbf{I}_4$.

Remark 31. *L'univers de Poincaré-Minkowski-Einstein* ***(PME)*** *est obtenu pour le groupe de Poincaré* $\mathcal{G} = SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$.

On veut généraliser la $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-structure de $\mathbf{W}$, $\mathcal{G}$ désigne toujours un sous-groupe de difféomorphismes analytiques de $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{A}$, l'atlas des cartes analytiques de l'univers $\mathbf{W}$. Une sous-famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ a la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, si pour tout couple de cartes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}^2$, tel que $\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right) \neq \emptyset$, le changement de carte λ a une extension sur $\mathbb{R}^4$ appartenant à $\mathcal{G}$. Dans tout ce qui suit $\mathcal{F}$ est une famille de cartes ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, on pose $\mathbf{W}_\mathcal{F} = \cup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi\left(\mathbb{R}^4\right)$, alors $\mathbf{W}_\mathcal{F}$ est un ouvert de $\mathbf{W}$, non nécessairement connexe, qui a la structure de $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété pour l'atlas engendré par $\mathcal{F}$. La famille $\{\mathbf{W}_\mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ parcourt l'ensemble des parties $\mathcal{A}$, ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, forme un recouvrement d'ouverts de $\mathbf{W}$. Les familles réduites à une carte, ont la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, c'est le cas trivial. Une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, est maximale si pour toute carte $\psi \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cup \{\psi\}$ n'a pas la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$. On suppose, par la suite, que $\mathcal{F}$ est maximale. La variété ouverte $\mathbf{W}_\mathcal{F}$ a une structure de $\left(\mathcal{H}, \mathbb{R}^4\right)$-variété, où $\mathcal{H}$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}$, engendré par l'ensemble des $\mathcal{G}$-extensions des changements de cartes appartenant à $\mathcal{F}$.

Theorem 22. *Il existe un homomorphisme* $\Phi : \pi_1(\mathbf{W}_\mathcal{F}) \to \mathcal{H}$*, appelée l'holonomie de* $\mathbf{W}_\mathcal{F}$ *et une application continue* Φ*-équivariante(*$D\gamma = \Phi(\gamma) \circ D$ *pour* $\gamma \in \pi_1(\mathbf{W}_\mathcal{F})$*,* $D : \widetilde{\mathbf{W}}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}^4$*, appelé le développement de* $\mathbf{W}_\mathcal{F}$*, qui est un isomorphisme local et* $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathcal{F}$ *est le revêtement universel de* $\mathbf{W}_\mathcal{F}$*.*

Le couple (Φ, D) *est unique dans le sens suivant, pour tout isomorphisme local* $D' : \widetilde{\mathbf{W}}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}^4$*, il existe* $h \in \mathcal{H}$ *tel que* $D' = h \circ D$*,* D' *est* Φ'*-équivariante pour l'homorphisme* Φ' *conjugué de* Φ *par* h*, c'est-à-dire,* $\Phi' : \pi_1(\mathbf{W}_\mathcal{F}) \to \mathcal{H}$ *et* $\Phi'(\gamma) = h\Phi(\gamma)h^{-1}$*.*

Remark 32. *On identifie le revêtement universel à* $\pi_1(\mathbf{W}_\mathcal{F})$ *et la projection* $\pi : \widetilde{\mathbf{W}}_\mathcal{F} \to \mathbf{W}_\mathcal{F}$*, s'identifie à* $\pi(\gamma) = \gamma_a(1)$ *avec* $\gamma = [\gamma_a]$ *et* $\gamma_a(0) = a$*. Le groupe d'holonomie est* $\Gamma = \Phi(\mathbf{W}_\mathcal{F})$*.*

Theorem 23. *Si* $\mathcal{H}$ *est un sous-groupe d'isomorphismes de Lorentz et* $\mathbf{W}_\mathcal{F}$ *est complet pour la métrique héritée de la métrique de Minkowski, alors* $\mathbf{W}_\mathcal{F}$ *est isomorphe à* $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$*.*

Proof. C'est un théorème de Thurston [32]. □

On peut représenter l'univers $\mathbf{W}$, comme une union de sous-univers difféomorphes à $\Gamma\backslash\mathbb{R}^4$, ayant même point à l'infini dans leur compactification d'Alexandroff ou de façon plus général, de même variété à l'infini suivant la compactification choisie. Dans cette représentation l'univers est entièrement décrit par une famille de sous-groupes du groupe des isométries de l'univers de Minkowski et sa structure à l'infini.

8. Attracteurs de l'univers de Dirac-Einstein et graphes de Feynman associés.

L'univers de Dirac-Einstein est muni d'une métrique riemannienne $g\,|_{\mathbf{W}}$ induite par la métrique riemannienne forte g du multivers de Banach-Schauder. On note $d_{\mathbf{W}}$, la métrique induite sur $\mathbf{W}$ par g. **On suppose** $(\mathbf{W},d_{\mathbf{W}})$ **est un espace métrique complet**. Soit ψ une C^{∞}-application de $\mathbf{W}$ dans $\mathbf{W}$, on définit le coefficient de Lipschitz de ψ par

$$\mathrm{Lip}\,(\psi)=\sup\left\{\|T_w\psi\|_{g(w)}:w\in\mathbf{W}\right\}\leqslant+\infty.$$

Definition 33. *un déplacement est une C^{∞}-application ψ qui vérifie $\mathrm{Lip}\,(\psi)<+\infty$, une contraction ψ de $\mathbf{W}$ est un déplacement tel que $\mathrm{Lip}\,(\psi)<1$. Soit $\widetilde{\psi}$ une C^{∞}-application du multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$ dans lui-même, $\widetilde{\psi}$ est une $\mathbf{W}$-contraction si $\widetilde{\psi}\,(\mathbf{W})\subset\mathbf{W}$ et $\widetilde{\psi}$ est une contraction de $\mathbf{V}$. On dit que ψ a pour extension $\widetilde{\psi}$.*

Si $\mathcal{F}=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$ famille finie de contractions de $\mathbf{W}$, il existe un unique compact $\mathbf{K}$ de $\mathbf{W}$, non vide, tel que

$$\mathbf{K}=\psi_1\,(\mathbf{K})\cup\psi_2\,(\mathbf{K})\cup\cdots\cup\psi_n\,(\mathbf{K})$$

c'est l'ensemble auto-similaire associé à la famille $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$ [17]. De plus, pour toute partie compacte $\mathbf{L}\subset\mathbf{W}$,

$$\lim_{m\to+\infty}\Psi^m\,(\mathbf{L})=\mathbf{K}\text{ où }\Psi\,(\mathbf{L})=\psi_1\,(\mathbf{L})\cup\psi_2\,(\mathbf{L})\cup\cdots\cup\psi_n\,(\mathbf{L})\tag{8.1}$$

pour la métrique de Hausdorff associée à $d_{\mathbf{W}}$ et Ψ^m est la composée d'ordre m de Ψ.

Notation 2. *On note $\mathbf{K}=\mathcal{A}\,(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$, l'ensemble auto-similaire associé aux contractions $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$.*

Definition 34. *La famille de contractions $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$ vérifie la* ***"condition d'ensemble ouvert"*** *s'il existe un ouvert non vide V de l'ensemble $\mathbf{W}$ tel que*

$$\cup_{j=1}^{n}\psi_j\,(V)\subseteq V\text{ et }\psi_j\,(V)\cap\psi_i\,(V)=\emptyset\text{ si }i\neq j.$$

Theorem 24. *Si la famille contractions $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$ vérifie la* ***"condition d'ensemble ouvert"*** [14] *alors la dimension de Hausdorff de $\mathcal{A}\,(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$ est l'unique nombre α solution de l'équation de Moran*

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Lip}\,(\psi_j)^{\alpha}=1.$$

Proof. La preuve est donnée dans [14] et [17]. □

On note $\mathcal{C}_{\mathbf{W}}$ est l'ensemble des contractions de $\mathbf{W}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{W}}$ l'ensemble des contractions de $\mathbf{W}$ ayant une extension dans $\mathbf{V}$. Un attracteur de $\mathbf{W}$ est un ensemble auto-similaire $\mathcal{A}(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ où $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ est un sous-ensemble fini de $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{W}}$ qui vérifie la **condition d'ensemble ouvert**. Les attracteurs de l'univers de Dirac-Einstein sont des sous ensembles compactes qui dépendent du choix des contractions du multivers de Banach-Schauder et qui sont à structure fractale.

Soit $\mathcal{F} = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ une famille finie de $\mathbf{W}$-contractions du multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ l'attracteur associé à cette suite. L'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$, où $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{W}, \Phi, g\,|_{\mathbf{W}})$ est le graphe quantique associé à la fonction d'entropie Φ et à la métrique riemannienne $g\,|_{\mathbf{W}}$, est un ensemble fini qui définit un graphe de Feynmann dont les sommets sont les événements de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ et les arcs sont de deux sortes, les arcs de $\mathcal{G}$ joints par deux sommets de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ et les arcs de $\mathcal{G}$ qui ne contiennent qu'un sommet de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$. Les boucles du graphe de Feynman sont les circuits du sous-graphe de $\mathcal{G}$ formés par les arcs ayant les deux sommets dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ et les pattes formées par un arc de $\mathcal{G}$ contenant qu'un seul sommet dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$. Il y a deux types de pattes, les pattes sortantes sont les arcs dont le sommet dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ est l'origine et les pattes entrantes sont les arcs dont le sommet dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ est l'extrémité. Si on note $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ ce gaphe, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \Psi^n(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}.$$

L'intérêt de cette présentation est la suivante, le graphe de Feynman $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ associé à la suite $\mathcal{F} = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ définit entièrement l'attracteur $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et donne la dynamique de $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

9. Conclusion

Décrire l'univers de Dirac-Einstein comme une singularité de type $(1, 3)$ permet de construire une métrique de Lorentz qui donne la géométrie de l'univers et définie les champs chronologiques liés à cette métrique. Cela signifie que la section de Dirac du multivers de Banach-Schauder $\mathbf{V}$ est un outil mathématique qui permet de décrire la structure gravitationnelle de l'univers de Dirac-Einstein. La connexion ∇ induite par la métrique riemannienne $g\,|_{\mathbf{W}}$, où g est la métrique fortement riemannienne définie sur le multivers $\mathbf{V}$, permet de définir les équations d'état et d'évolution des systèmes physiques sur $\mathbf{W}$ qui ne dépendent que de la section de Dirac à trace et la connexion ∇ donné par le multivers $\mathbf{V}$. La section de Dirac à trace et la métrique fortement riemannienne décrivent entièrement la physique de l'univers si on complète cette présentation avec la notion de fibré d'état au dessus de l'univers $\mathbf{W}$. La quantification de ces fibrés permet de définir les axiomes de quantification de l'univers $\mathbf{W}$ de mannière géométrique.

Les intégrales de Feynman, les graphes quantiques et la représentation des particules en corde, à partir des champs en cordes, complètent la description physique de l'univers de Dirac-Einstein. Pour finaliser la représentation géométrique de $\mathbf{W}$, on découpe l'univers et on le recolle par chirurgie en utilisant les fonctions d'état de Morse. La construction des feuilletages espace et temps à l'infini donne une représentation géométrique des champs espace et temps à l'infini. Enfin, le prolongement analytique est un procédé qui permet d'étendre les lois physiques d'une carte à l'autre.

Je pense qu'entre les dimensions existe une **interdépendance**. Il faudra repenser l'univers, non pas comme une variété de type $(1,3)$ mais comme un espace avec une structure qui lie mesure et dimension, c'est l'objet du prochain article....

References

[1] Arai A., "A class of Dirac-Type Operators on the Abstract Boson-Fermion Fock Space and Their Strong Anticommutativity", (1999).

[2] Arai A.,"Supersymmetric extension of quantum scalar field theory." Quantum and Non-Commutative Analysis, H. Araki. Ed. pp73-90, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands, (1993)

[3] Arai A., "A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)

[4] Arminjon M. , Reifler F., "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.

[5] Arminjon M., Reifler F., Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).

[6] Ben Adda F., Cresson J., "Divergence d'échelle et différentiabilité" C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 261–264, (2000)

[7] Dloussky G., "Variétés riemanniennes, variétés hermitiennes"(2008)

[8] DeWitt-Morette C., "Feynman's Path Integral Definition Without Limiting Procedure" Commun. math. Phys. 28, 47-67(1972) Springer-Verlag 1972

[9] Ehresmann C., Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 1879-1880.

[10] Esteban M.J., Séré E., "Les équations de Dirac-Fock". Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.

[11] Feynman R. P. ,Hibbs A. R., "Quantum Mechanics and Path Integrals", (New York : McGraw-Hill 1965) 133

[12] Godbillon C., "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique" Hermann Paris (1985)

[13] Gromov M. L. , "Stable mappings of foliations into manifolds", Izv. Akad. Nauk SSSR 33 (1969), 707-734.

[14] Hutchinson J.E., "Fractals and self-similarity", Indiana J. Math. 30 (1981), 713–747.

[15] Haefliger A., "Feuilletages sur les variétés ouvertes", Topology 9 (1970), 183-194.

[16] Hormander L. , "An introduction to complex analysis in several variables" (Third Edition, 1990)

[17] Kigami J.,"Analysis on Fractals" Cambridge Tracts in Mathematics, 143. Cambridge University Press (2001)

[18] Jonot J.L."Dirac-Weyl-Fock equation along a chronological field" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063612 (2014)

[19] Jonot J.L."Sur les champs physiques de divergence nulle et les champs en corde" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01072257v2. (2015)

[20] Jonot J. L. , "Structures complexes et presque réelles en physique, une application à la complexification des dimensions" [Rapport de recherche] Académie de Versailles (2015). <hal-01137579v2>

[21] Jonot J.L., "Intégrale de Feynmann et C^{α}-Structures en Physique"[Rapport de recherche] Académie de versailles (2016). <hal-01232637>

[22] Jonot J.L., "Structures opérationnelles de dimension intrinsèque non entière" Thèse 1993.

[23] Kobayashi S. and Nomizu K. "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, (1996).

[24] Kohn J. J., "Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds, I and II" (Annals of Math, 1963)

[25] Meyer R., "Dimensional Regularization", Lecture at the workshop Theory of Renormalization and Regularization, Hesselberg, (2002), 1-9

[26] Milnor J., "Morse Theory" Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.

[27] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)
[28] Reeb G. , "Variétés feuilletées, feuilles voisines", C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1613-1614.
[29] Reeb G., "Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini", C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 47-48.
[30] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
[31] Spring D.,"Théorie de Gromov", Cours de DEA d'Orsay (2004)
[32] Thurston W., "The geometry and topology of three-manifolds", Princeton lecture notes (1978–1981).
[33] Tumpach A.B."Varietes kaehlériennes et hyperkaéleriennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)
[34] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91
[35] Wigner E. P., "Gruppentheorie" (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1931), pp. 251-254; Group Theory (Academic Press Inc., New York, 1959), pp. 233-236
[36] Voisin C."Géométrie différentielle" www.math.polytechnique.fr/˜voisin/Articlesweb/poly(2013) chap1,2,3.

E-mail address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`