

具有简单周期因子的人口模型的增长率和可重复性

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, 法国邦迪
nicolas.bacaer@ird.fr

拉希德·欧菲基 (Rachid Ouifki)

SACEMA, DST / NRF南非斯泰伦博斯大学流行病学分析和建模卓越中心

总结

对于具有周期正弦系数的总体模型，我们表明增长率和可再现性是包含连续分数的简单方程式的解。例如，我们重新研究具有固定潜伏期，呈指数分布的传染期和从[数学]中得出的正弦接触率的SEIS模型。生物科学。145 (1997) 77-88]。我们表明，除了一些例外的参数值之外，流行阈值不仅取决于平均接触率，还取决于波动幅度。

1.简介

洛特卡 (Lotka, 1939年) 研究了将数字联系起来的线性人口模型 $B(t)$ 在时间 t 上每单位时间的生育数 $f(x)$ 和死亡率 $\mu(x)$ 在 x 岁 :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx, \quad (1)$$

哪里 $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$ 。他表明 $B(t)$ 并且总人口呈指数增长 e^{rt} ，其中 r 是方程式的唯一根

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx. \quad (2)$$

(1) 和 (2) 的离散时间类似物是Leslie人口矩阵模型和Leslie矩阵的特征方程 (1945年)。欧拉 (Euler) 在1760年就已经研究了一个特殊的情况。我们经常将 (2) 称为“欧拉-洛特卡方程”。Lotka使用了表示法

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx. \quad (3)$$

它是一个人一生中平均产生的后代数量。 R_0 是可重复性。人口在增长 ($r > 0$) 如果 $R_0 > 1$ 。它减少了 ($r < 0$) 如果 $R_0 < 1$ 。模型 (1) 也出现在流行病模型无病平衡的线性稳定性研究中：变量 x 代表自感染和传染以来经过的时间。 $B(t)$ 流行开始时的感染率 (Diekmann和Heesterbeek, 2000年)。

许多动植物种群和许多传染病表现出季节性波动。这些波动会影响增长率和可重复性。(Thieme, 1984; Jagers, 1985) 将模型 (1) 替换为

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx, \quad (4)$$

哪里 $\Phi(t, x)$ 是一个周期函数吨周期的 T 。那么，增长率 r 是唯一的实数，在该整数中，线性积分算符的频谱半径在连续 T 周期函数的空间上等于1

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(Bacaër和Guernaoui, 2006; Bacaër, 2007) 提出，可重复性的定义可以与算子的光谱半径相同

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx$$

在 T 周期连续函数的相同空间上。和以前一样 $r > 0$ 如果 $R_0 > 1$ 和 $r < 0$ 如果 $R_0 < 1$ 。如果 $\Phi(t, x)$ 不依赖于 t ，这些定义和结果简化为Lotka的定义和结果。

现在假设

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

哪里 $\omega = 2\pi/T$, $|\varepsilon| \leq 1$ 和 $\phi \geq 0$ 。我们定义

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

我们假设 $\xi < 0$ 。我们定义

$$\phi_n(s) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

Coale (1972, 第6章) 用不同的符号表示: $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 为 ε 小地方 r_0 是隐式定义的 r_2 明确地由

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

符号 $\operatorname{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部。在 (Bacaër, 2007) 中, 我们以相同的方式显示 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 为 ε 小地方

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

在本文中, 我们改编了 (Just, 2000) 使用的方法。我们在特定情况下 (6) 表明, 增长率和可重复性是具有连续分数的方程的最大实根。

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

为了一切 $|\varepsilon| \leq 1$ 。再次在右侧注意, 您必须取连续分数的实部。这些相对简单的方程式可用于数值计算生长速率和重现性。如果我们写例如 $r(\varepsilon)$ 坚持增长率对参数的依赖, 那么我们将看到我们通常有不平等 $r(\varepsilon) \neq r(0)$ 为 $\varepsilon \neq 0$ 。换句话说, 人口增长的门槛 ($r > 0$) 不能简单地通过平均周期系数来获得, 因为这等效于 $\varepsilon = 0$ 。(Williams and Dye, 1997) 的SEIS / SEIR流行模型说明了这一点, 该模型包括一个固定的潜伏期和一个呈指数分布的传染期。

我们在第2节中获得等式 (10) 和 (11)。从它们中, 我们找到第3节中的近似公式 (8) 和 (9)。(Williams and Dye的SEIS / SEIR流行病模型 (1997年) 作为示例, 在第4节中。结论中提到了其他示例。

2. (10) 和 (11) 的证明

根据 (Thieme, 1984; Jagers, 1985), 正线性算子 (5) 的谱半径是 r 的递减函数, 模型 (4) 的增长率是唯一的实数, 使得光谱半径等于1。因此, 增长率 r 也是最大的实数, 因此存在非平凡的周期函数 $u(t)$ 与

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

首先让我们考虑一下 $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$ 具有 T 周期函数 $p(t)$ 。考虑傅立叶级数分解

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

哪里 $\omega = 2\pi/T$ 。如前所述 (Coale, 1972; Williams和Dye, 1997), 等式 (12) 等价于线性方程的无限系统。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

哪里 ϕ_n 由 (7) 定义。

现在考虑特殊情况 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 。因为 $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$, 系统 (13) 被写入

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

我们可以将 (Just, 2000) 所使用的方法改编为类似的三对角线系统。让我们重写系统 (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

如果 $k = 0$, 这个等式写成

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

但是 (15) 用 $k-1$ 或 $k+1$ 代替 k , 也表明

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

让我们迭代地组合 (16) 和 (17) - (18)。我们得到连续分数

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}.$$

因为 $\phi_k(r)$ 和 $\phi_{-k}(r)$ 是复共轭数, 我们得出“特征方程” (10)。增长率 r 是最大的解决方案。

从问题开始, (11) 的证明是相似的

$$\int_0^\infty \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

R_0 是最大实数, 对此方程式有一个非零的 T 周期解。对于特定情况 $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$, 等式 (19) 导致

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

并方程 (11)。

3. 近似公式 (8) - (9)

从 (10) - (11) 开始, 可以轻松找到近似值 (8) - (9), 这些近似值已在 (Coale, 1972; Bacaër, 2007) 中以更复杂的方式进行了证明。

让我们从增长率 r 开始。让我们寻找开始进行串行开发的时间 ε 形状小 $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$ 。如果 $\varepsilon = 0$, 取消了 (10) 的右侧, 我们得到 r_0 作为方程的 (唯一) 解 $\phi_0(r_0) = 1$, 这当然与 Euler-Lotka 公式 (2) 相同。顺便说一下

$\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ 对应于替换 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 与 $p(t - T/2)$ 。现在线性算子

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

在 T 周期函数的空间上, 本征值与线性算子 (5) 相同, 本征函数仅偏移 $T/2$ 。为了强调 r 对 ε 的依赖性, 我们写 $r(\varepsilon)$ 。所以 $r(-\varepsilon) = r(\varepsilon)$ 和 $r_1 = 0$ 。(Bacaër, 2007) 使用了类似的论据来近似再现性。

因此, 我们有 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 而且还有待确定 r_2 。增长率 r 是隐式方程 (10) 的解。因为 $\phi_0(r_0) = 1$, 我们有

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-ki\omega x}) dx \neq 0$$

对于所有 $k \geq 1$ (例如, 假设该功能 $\phi(x)$ 至少在很小的时间间隔内都是正数)。所以 $\phi_k(r_0) \neq 1$ 和 $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0$ 对于所有 $k \geq 1$ 。为了仅在等式 (10) 右侧的 ε 中保留二次表达式, 我们将分母替换为其最低阶近似。我们取代 $\phi_1(r)$ 与 $\phi_1(r_0)$ 。我们忽略了连续分数 ε 中的二次余数。我们得到

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

但是

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

我们使用近似值 $\phi_0(r)$ 。我们在 (20) 中确定 ε 中的二次表达式。那给

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

等价于 (8)。该公式可以用略有不同的形式编写。确实, 随着

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

我们有 $\phi_1(r_0) = c_1 - is_1$ 。所以

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 - is_1}{1 - c_1 + is_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

它与 (Coale, 1972) 的公式 (6.27) 基本相同。

同样 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 为 ε 小。根据等式 (3) 或等式 (11) $\varepsilon = 0$, 我们有 $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。为了仅在等式 (11) 的右边保留 ε 中的二次表达式, 我们用分母的最低阶近似值代替, $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。我们忽略了连续分数的其余部分, 因为它在 ε 中是二次方的。我们有

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

这导致公式 (9)。

4. 具有固定等待时间的SEIS模型

4.1 背景

称为SEIR或SEIS的流行病模型具有潜伏期和感染区室。当接触率是周期性的时, 它们已经成为众多数学或数值研究的主题 (Williams和Dye, 1997; Schwartz和Smith, 1983; Aron和Schwartz, 1984; Kuznetsov和Piccardi, 1994; Moneim和Greenhalgh, 2005; Ma和Ma, 2006)。(Earn等人, 2000) 对水痘的麻疹特别感兴趣 (Deguen等人, 2000), 而 (Altizer等人, 2006; Grassly和Fraser, 2006) 提出了一般性评论。尽管它对根除问题很重要, 但只有 (Williams和Dye, 1997年) 和 (Ma和Ma, 2006年) 才研究了流行阈值, 该阈值取决于接近平衡且无病的线性方程。

其他参考文献则集中在地方性情况，寻找混乱或试图估计参数，并且仅在立即转向没有滞后期的简单模型之前提及问题。所有这些参考文献都经历了呈指数分布的传染期。

(Williams and Dye, 1997) 使用傅里叶级数来分析以下情况：潜伏期是一个固定常数，而接触率是一个任意周期函数。作者确认线性化方程的增长率仅取决于周期性接触的速率，且仅取决于其平均值。如下所示，对于正弦曲线接触率的特殊情况，这仅对于特殊的参数值才适用。可以通过使用 (Coale, 1972) 的近似公式 (9) 来实现这一点。

(Ma and Ma, 2006) 对SEIR模型进行了数值研究，该模型是一个常微分方程组，它对应于呈指数分布的潜伏期，接触率随 $1 + \varepsilon \cos \omega t$ 。作者发现，接触率的平均值不足以确定流行阈值。(Bacaër, 2007年) 使用近似公式 (9) 在分析上证实了这一观察结果，在该示例中显示，可重复性以及因此流行阈值也取决于 ε 。

(Just, 2000) 使用傅里叶级数研究延迟微分线性方程，其形式与具有固定等待时间的SEIS或SEIR模型的线性化相同。但是作者选择了该功能 $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ 对于与接触率相对应的参数，由于接触率必须为正，因此不适用于人口动态情况 (Just, 2000) 的动机是工程师的问题)。对于模型的增长率，作者得出了一个包含连续分数的特征方程，类似于 (11)。

4.2模型

让我们回到威廉姆斯和戴伊 (Williams and Dye, 1997) 考虑的固定等待时间的情况，并回顾同一SEIS模型的不同可能公式。请注意，SEIR模型会导致平衡接近平衡而没有疾病的相同线性化方程式。因此它具有相同的流行阈值。

具有偏微分方程的公式包含三个部分：

- $S(t)$ 时间 t 的健康人口是多少
- $E(t, x)$ 是被感染但尚未感染的人口，在时间 t 已被感染 x 个时间单位
- $I(t)$ 是时间 t 的感染人口。

模型的参数是

- N ：总人口，保持不变；
- L ：固定的等待时间；
- a ：传染病的治愈率，使传染期呈指数分布；
- $c(t)$ ：时间 t 的接触率，它是 T 周期函数。

该模型是

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), & E(t, 0) &= c(t) S(t) I(t)/N \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t, x) &= 0 \quad (0 < x < L), & \frac{dI}{dt}(t) &= E(t, L) - a I(t), \end{aligned}$$

与 $E(t, x) = 0$ 为 $x > L$ 。通过沿特征线积分偏微分方程，我们得到 $E(t, L) = E(t - L, 0)$ 。因此，可以使用差分延迟方程以更紧凑的形式编写系统：

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), \\ \frac{dI}{dt}(t) &= c(t - L) S(t - L) I(t - L)/N - a I(t). \end{aligned}$$

我们将这些方程线性化接近平衡而没有疾病 ($S = N, I = 0$)。我们得到

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t - L) I^*(t - L) - a I^*(t).$$

如果 $i^*(t) = c(t) I^*(t)$ 是此线性化模型在时间 t 处每单位时间的新感染数，则

$$\frac{d}{dt} \left[e^{at} I^*(t) \right] = e^{at} i^*(t - L).$$

我们整合 $-\infty$ 和 t , 我们更改变量。我们得到以下积分方程 $i^*(t)$:

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t-x) dx, \quad (21)$$

哪里

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

公式 (21) 的形式为 (4) $\Phi(t, x) = c(t) f(x)$ 。

4.3 数值示例

现在假设如式 (6) 所示 $c(t) = c_0[1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$, 所以 $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ 与 $\phi(x) = c_0 f(x)$ 。根据定义 (7), 我们有

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx - ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL - ni\omega L}}{s + a + ni\omega}. \quad (23)$$

然后, 我们可以使用简单的二分法求解隐式方程 (10) 和 (11), 以求出增长率和具有不同参数值的可再现性。请注意, 例如, 方程 (10) 右侧的分母可以由复数近似 z_1 , 使用迭代算法

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

如果将 n 取足够大, 则引入的误差非常小。我们使用 $n = 20$, 但 $n = 2$ 的结果已经非常接近。此外, 必须谨慎对待二分法, 因为等式 (10) 和 (11) 可以有多个实根: r 和 R_0 是最大的。图1显示了对于不同的值, 可重复性是等待时间 L 的函数。 ε 。对于 T 和 a , 我们采用与 (Williams and Dye, 1997) 中相同的值。对于 c_0 , 我们 $c_0/a = 1, 2$ 代替 $c_0/a = 1, 5$ 如 (Williams and Dye, 1997)。但是请注意, 使用等式 (11), 如果 c_0 乘以一个常数, 然后 R_0 乘以相同的常数; 因此, 图1的外观保持不变, 但在垂直轴上的比例不同。

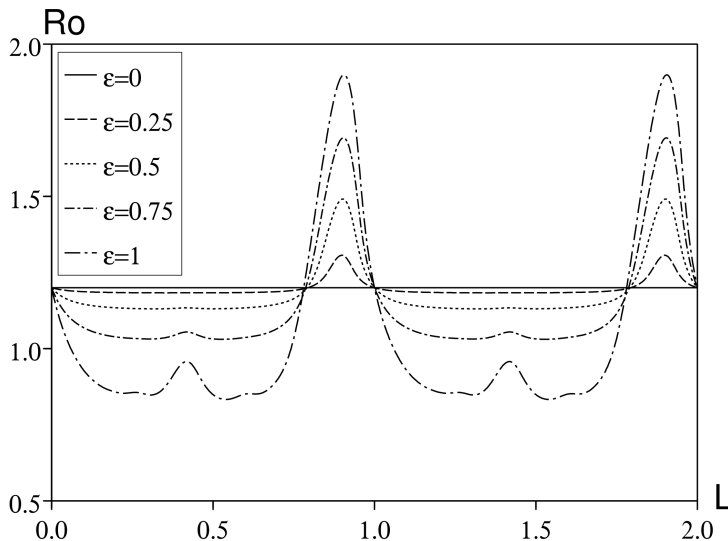


图1. 重现性 R_0 取决于等待时间 L 为 $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。其他参数: $T = 1$, $\log 2/a = 1/12$ 和 $c_0/a = 1,2$ 。

对于潜伏期的给定值, 可重复性可以根据 ε 显著变化。对于 $\varepsilon = 1$, 曲线的很大一部分 R_0 低于1, 即低于流行阈值, 而 $R_{0,0} = c_0/a$ (该值对应于 $\varepsilon = 0$) 高于此阈值: 平均接触率会预测错误的结果。以下是其他一些注意事项:

- R_0 独立于 L 如果 $\varepsilon = 0$
- R_0 是周期为 T 的 L 的函数
- R_0 不依赖于 ε , 如果 $L = 0$, 因此, 如果 L 是 T 的整数倍;

- 在确定的潜伏期 L 内, 重现性可以是 ε 。

第一点是众所周知的: 使用 (3) 或 (11), 我们有 $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$ 如果 $\varepsilon = 0$ 。没有周期性, 潜伏期不会影响继发病例的数量, 因为所有个体都在潜伏期中存活并变得具有感染力, 并且接触率保持不变。

第二点是由等式 (11) 和

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

当保持不变大号被替换为 $L + \tilde{T}$ 。直觉上, 被感染的个体在潜伏期 L 或潜伏期 $L + \tilde{T}$ 之后经历相同的环境。它产生相同数量的辅助案件。

第三点也是众所周知的。如果 $L = 0$, 将模型简化为传染期呈指数分布的 SIS 模型。在这种特殊情况下, 可通过平均接触率获得可重复性 (Bacaër 和 Guernaoui, 2006 年, 第 5 节; Bacaër, 2007 年, 第 5.1.1 节, 包括参考文献)。的确 $R_0 = c_0/a$ 是 (11) 的解 $L = 0$ 因为 $R_0/\phi_n(0) - 1 = R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/a$ 对于任何 $n \geq 1$ 的整数都是纯虚数的: (11) 的左侧和右侧等于 0。

为了解第四点, 我们使用近似公式 (9)。我们有 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2}\varepsilon^2$, 带有

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a}, \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1}\right).$$

对于 ε 小 R_0 是...的增加 (或减少) 功能 ε 如果 $R_{0,2} > 0$ (或 $R_{0,2} < 0$)。 $R_{0,2} = 0$ 当且仅当 $e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1$ 是一个纯虚数。这个条件写成

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0.$$

我们定义 $\psi \in (0, \pi/2)$ 唯一的实数

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

那就是说 $\psi = \arctan(\omega/a)$ 。该 ψ 仅取决于乘积 aT 。所以 $R_{0,2} = 0$ 当且仅当

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

那就是说 $\omega L + \psi = \pm\psi + 2k\pi$ 为 $k \in \mathbb{Z}$ 。因为 $\omega = 2\pi/T$, 我们有 $R_{0,2} = 0$ 如果 $L = kT$ 哪里 $L = (k - \psi/\pi)T$ 为 $k \in \mathbb{Z}$ 。特别是使用图 1 中的数值 $R_{0,2} = 0$ 如果 $L/T = 1 - \psi/\pi \simeq 0,794$ 。但是与图 1 可能暗示的不同, 这四个曲线没有越过水平线 $R_0 = c_0/a$ 恰好在 $L/T = 1 - \psi/\pi$ 但非常接近

同样, 图 2 显示了对于不同的值, 增长率是延迟时间的函数。 ε 但随着 T , c_0 和 a 如前所述。增长速度是不是周期函数大号。该速率随潜伏期降低, 但并非单调。有共振之间大号和 \tilde{T} 。

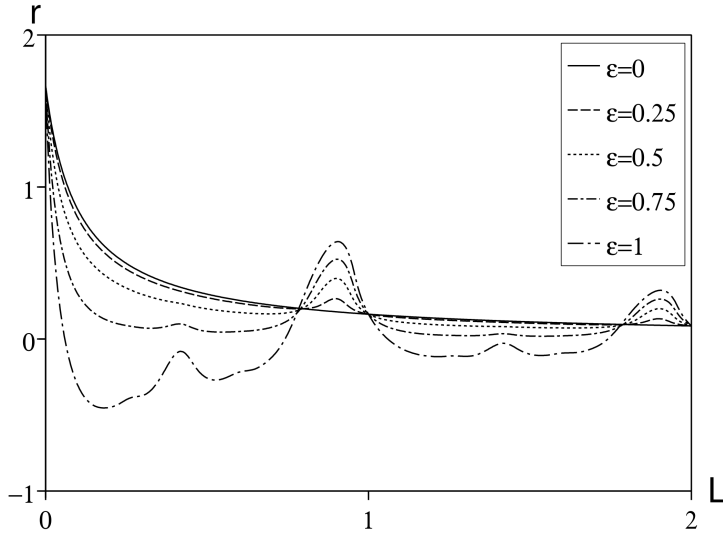


图2.增长率 r 取决于等待时间 L 为 $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。其他参数如图1所示。

但是, r 仍然独立于 ε 如果 L 是 T 的倍数, 即 $L = kT$ 为 $k = 0, 1, 2, \dots$ 确实, 请记住 r_0 是方程的唯一解决方案

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

所以 $r = r_0$ 也是方程式 (10) 的解, 因为

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

纯粹是虚构的 $n \geq 1$: (10) 的左侧和右侧为零。

对于一般的等待时间 L , 使用 (8) 和 (23) $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ 为 ε 小, 有 r_0 隐式定义

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

r_2 由 (8) 和 (23) 给出。用

$$\begin{aligned} \phi_1(r_0) &= c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)}, \\ \phi_0'(r_0) &= -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right), \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L} [1 + i\omega / (r_0 + a)] - 1} \right). \end{aligned}$$

5. 结论

除了上一节提到的SEIS / SEIR模型之外, 其他几个总体模型的平凡平衡的线性稳定性也可以简化为公式 (4), 其中 $\Phi(t, x)$ 由 (6) 给出。对于具有 n 个被感染隔室的流行模型, 尤其是这种情况, 其中感染遵循一个周期 ($I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$) 且仅具有正弦接触功能。参见 (Bacaer, 2007年) 以及有关疟疾和霍乱的参考资料。具有固定传染期 L 和正弦接触率的SIS / SIR流行病模型对应于

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

在这种情况下,

$$\phi_n(s) = c_0 (1 - e^{-sL - ni\omega L}) / (s + ni\omega).$$

如前面部分中，再现性和生长速率是独立于 ϵ 的如果大号是 ϵ 的倍数 \tilde{T} 。这是一个简陋的案例，因为没有理由使传染期与接触期有任何算术关系，接触期通常是一周（周末较少接触）或一年。（在暑假期间因儿童疾病而减少的联系，在冬季传播空气传播疾病的可能性更高）。然而， $L = T$ 案例在数学文献中受到了很多关注（Cooke和Kaplan, 1976；Smith, 1977；Nussbaum, 1977和1978）。

我们的结果更一般的意义是，应将重现性和增长率的平均值视为例外。除了类似于已经提到的简并的情况外，据我们所知，唯一正确的平均情况是传染性区室，传染期呈指数分布且没有潜伏期（Bacaër and Guernaoui, 2006, §5; Bacaër, 2007年, 第5.1.1节及其参考）。该平均值对于任何偏差都是不正确的，例如对于媒介病而言有两个传染性区室（Bacaër, 2007年, 第4.1节），或者传染期没有呈指数分布（Bacaër, 2007年, 第5.1节）。1) 或非零延迟期（Bacaër, 2007年, 第5.1.2节）。

致谢

这项工作是在NB访问斯泰伦博斯的SACEMA时进行的。

参考文献

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period–doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector–borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector–borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations : A Mathematical Investigation.* Princeton University Press.
- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976) A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth, *Math. Biosci.* 31, 87–104.
- S. Deguen, G. Thomas, N. P. Chau (2000) Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model : application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000) *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation.* John Wiley & Sons, New York.
- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000) A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767) *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.* Histoire de l'Académie royale des sciences et belles–lettres de Berlin, 144–164. <http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology, *Proc. R. Soc. B* 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment, *Ann. Prob.* 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time–delayed Floquet problems, *Physica D* 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994) Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine.* Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models, *Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005) Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying contact rate, *Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977) Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York. 235–257.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations, *SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983) Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics, *J. Math. Biol.* 4, 69–80.

- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations, *J. Integr. Equ.* 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997) Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.