

単純な周期的因子を持つ人口モデルの成長率と再現性

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、ボンディ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

ラキッドウイフキ

SACEMA、DST / NRF Center of Excellence in Epidemiological Analysis and Modeling、University of Stellenbosch、南アフリカ

まとめ

周期的な正弦係数を持つ母集団モデルの場合、成長率と再現性が連続分数を含む単純な方程式の解であることを示します。例として、固定レイテンシー期間、指数分布した感染期間、および[Math. Biosci. 145 (1997) 77-88]。パラメータのいくつかの例外的な値を除いて、流行のしきい値は平均接触率だけでなく、変動の振幅にも依存することを示します。

1.はじめに

ロトカ (1939) は数をリンクする線形人口モデルを研究しました $B(t)$ 出生可能性を伴う時間 t における単位時間あたりの出産 $f(x)$ と死亡率 $\mu(x)$ 年齢 x :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx, \quad (1)$$

どこに $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$ 。彼はそれを示した $B(t)$ 総人口は指数関数的に増加します e^{rt} 、ここで r は方程式の唯一の根です

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx. \quad (2)$$

(1) と (2) の離散時間アナログは、レスリー母集団行列モデルとレスリー行列の特性方程式 (1945) です。オイラーはすでに1760年に特定のケースを研究していました。しばしば (2) を「オイラー-ロトカ方程式」と呼びます。ロトカは表記を使用しました

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx. \quad (3)$$

これは、個人が生涯に生成した子孫の平均数です。 R_0 再現性です。人口は増加しています ($r > 0$) もし $R_0 > 1$ 。減少します ($r < 0$) もし $R_0 < 1$ 。モデル (1) は、伝染病モデルの無病平衡の線形安定性の研究にも表示されます。変数 x は、感染からの経過時間と $B(t)$ 流行開始時の感染の発生率 (Diekmann and Heesterbeek, 2000)。

多くの動植物個体群と多くの感染症は季節変動を示します。これらの変動は、成長率と再現性の両方に影響を与えます。(Thieme, 1984; Jagers, 1985) モデル (1) を

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx, \quad (4)$$

どこに $\Phi(t, x)$ 周期関数であり、 T の期間の T は。成長率 r は、連続 T 周期関数の空間における線形積分演算子のスペクトル半径が1に等しい唯一の実数です。

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(Bacaërand Guernaoui, 2006; Bacaër, 2007) は、再現性はオペレーターのスペクトル半径と同じ方法で定義できることを示唆しています

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx$$

T -周期連続関数の同じ空間で。前と同じように $r > 0$ もし $R_0 > 1$ と $r < 0$ もし $R_0 < 1$ 。もし $\Phi(t, x)$ t に依存せず、これらの定義と結果はロトカのものに縮小されます。

今それを仮定します

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

どこに $\omega = 2\pi/T$ 、 $|\varepsilon| \leq 1$ と $\phi \geq 0$ 。私たちは定義します

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

とする $\xi < 0$ 。私たちは定義します

$$\phi_n(s) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

コール (1972年、第6章) は、 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ のために ε 小さな場所 r_0 暗黙的に定義され、 r_2 明示的に

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

シンボル $\operatorname{Re}(z)$ 複素数 z の実部を表します。(Bacaër, 2007) では、同じ方法で $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ のために ε 小さな場所

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

この記事では、(2000年だけ) によって使用される方法を採用します。特定のケース (6) では、成長率と再現性が連続分数を持つ方程式の最大の根であることを示しています。

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

すべてのために $|\varepsilon| \leq 1$ 。右側で、連続した分数の実数部をとらなければならないことに注意してください。これらの比較的単純な方程式を使用して、成長率と再現性を数値で計算できます。例えば書いたら $r(\varepsilon)$ 成長率のパラメータへの依存を主張するために、私たちは一般的に不平等を持っていることがわかります $r(\varepsilon) \neq r(0)$ のために $\varepsilon \neq 0$ 。言い換えれば、人口増加の閾値 ($r > 0$) 周期係数を平均化するだけでは取得できません。これは、 $\varepsilon = 0$ 。この点は、(Williams and Dye, 1997) のSEIS/SEIR流行モデルで示され、固定潜伏期間と指数分布感染期間が含まれています。

セクション2で式 (10) と (11) を取得します。これらから、セクション3で近似式 (8) と (9) を見つけます。(Williams and Dye, 1997) はセクション4で例として取り上げられています。結論は他の例に言及しています。

2. (10) および (11) の証明

(Thieme, 1984; Jagers, 1985) によれば、正の線形演算子 (5) のスペクトル半径は r の減少関数であり、モデル (4) の成長率は次のような唯一の実数です。スペクトル半径は1です。したがって、成長率 r も最大の実数であり、自明でない周期関数が存在します。 $u(t)$ と

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

最初に、 $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$ 機能付き T -périodique $p(t)$ 。フーリエ級数分解を考える

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

どこに $\omega = 2\pi/T$ 。述べたように (Coale, 1972; Williams and Dye, 1997)、方程式 (12) は線形方程式の無限系と同等です。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

どこに ϕ_n (7) で定義されます。

ここで、 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ 。なぜなら $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$ 、システム (13) が書かれています

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

(2000年7月) で使用した方法を、同様の三重対角システムに適合させることができます。システムを書き直そう (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

もし $k = 0$ 、この方程式は

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

しかし、(15) は $k-1$ または $k+1$ を k に置き換えて、

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

(16) と (17) - (18) を繰り返し組み合わせてみましょう。連続した分数を取得します

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}.$$

なぜなら $\phi_k(r)$ と $\phi_{-k}(r)$ は複素共役数なので、「特性方程式」 (10) に到達します。成長率 r が最大のソリューションです。

(11) の証明も同様で、問題から始まります

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

R_0 は最大の実数で、この方程式にはゼロ以外の T 周期解があります。特定の場合 $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$ 、方程式 (19) は

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

そして式 (11) に。

3. 近似式 (8) - (9)

(10) - (11) から、(Coale, 1972; Bacař, 2007) でより複雑な方法で示されている (8) - (9) の近似を簡単に見つけることができます。

成長率 r から始めましょう。のシリアル開発の始まりを探しましょう ε 形が小さい $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$ 。もし $\varepsilon = 0$ 、(10) の右側がキャンセルされ、 r_0 方程式の (一意の) 解として $\phi_0(r_0) = 1$ 、これはもちろんオイラー・ロトカ方程式 (2) と同じです。ちなみに、変化は $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ 置換に対応 $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$ と $p(t - T/2)$ 。今、線形演算子

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

T 周期関数の空間では、線形演算子 (5) と同じ固有値があり、固有関数は $T/2$ だけシフトされています。 r の ε への依存を強調するために、書きましょう $r(\varepsilon)$ 。だから $r(-\varepsilon) = r(\varepsilon)$ と $r_1 = 0$ 。(Bacař, 2007) は、再現性の近似について同様の議論を使用しました。

したがって、 $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$ そしてそれはまだ決定されていない r_2 。成長率 r は、陰的方程式 (10) の解です。なぜなら $\phi_0(r_0) = 1$ 、私たちは持っています

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-k i \omega x}) dx \neq 0$$

すべてのために $k \geq 1$ (たとえば、関数が $\phi(x)$ 少なくとも短い間隔で厳密に正です)。だから $\phi_k(r_0) \neq 1$ と $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0$ すべてのために $k \geq 1$ 。式 (10) の右辺の ε の 2 次式のみを保持するために、分母をその最低次の近似で置き換えます。入れ替え $\phi_1(r)$ と $\phi_1(r_0)$ 。連続部分の ε の二次剰余を無視します。得る

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

でも

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

近似を使用します $\phi_0(r)$ 。(20) の ε の 2 次式を特定します。それは与える

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

これは (8) と同等です。この式は少し異なる形式で書くことができます。確かに、

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

私たちは持っています $\phi_1(r_0) = c_1 - i s_1$ 。だから

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 - i s_1}{1 - c_1 + i s_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

これは (Coale, 1972) の式 (6.27) と本質的に同じです。

同様に、 $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ のために ε 小さい。式 (3) または式 (11) から $\varepsilon = 0$ 、私たちは持っています $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。式 (11) の右辺を保つために、 ε の2次式のみを維持するために、分母を次のように使用して、その最低次の近似で置き換えます $R_{0,0} = \phi_0(0)$ 。残りの連続部分は、 ε で二次式であるため、無視します。私たちは持っています

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

これにより、式 (9) が導かれます。

4.レイテンシ期間が固定されたSEISモデル

4.1背景

SEIRまたはSEISと呼ばれる流行モデルには、潜伏期間と感染性コンパートメントがあります。さらに、接触率が定期的である場合、それらは数多くの数学的または数値的研究の対象となっています (Williams and Dye, 1997; Schwartz and Smith, 1983; Aron and Schwartz, 1984; Kuznetsov and Piccardi, 1994; MoneimおよびGreenhalgh, 2005; MaおよびMa, 2006)。(Earn et al., 2000) は水痘の麻疹 (Deguen et al., 2000) に特に関心があり、(Altizer et al., 2006; Grassly and Fraser, 2006) は一般的なレビューを提示しています。根絶問題に対するその重要性にもかかわらず、(Williams and Dye, 1997) と (Ma and Ma, 2006) のみが、病気のない平衡に近い線形化方程式に依存する流行のしきい値を調査しました。他の参考文献は、流行の状況に焦点を当て、カオスを探るか、パラメータを推定しようと試み、ラグ期間のないより単純なモデルにすぐに移る前に、問題についてのみ言及します。これらの参考文献はすべて、指数関数的に分布する感染期間を要します。

(Williams and Dye, 1997) は、フーリエ級数を使用して、潜伏期間が固定定数であり、接触率が任意の周期関数であるケースを分析的に研究しています。著者らは、線形化された方程式の成長率は、その平均値によってのみ周期的接触の率に依存することを確認しています。これは、正弦波接触率の特定のケースについて以下に示されていますが、これはパラメータの例外的な値に対してのみ当てはまる可能性があります。これは、(Coale, 1972) の近似式 (9) を使用して実現できます。

(MaおよびMa, 2006) は、接触率が次のように変化する指数関数的に分布した待ち時間に対応する常微分方程式のシステムであるSEIRモデルを数値的に研究します。 $1 + \varepsilon \cos \omega t$ 。著者らは、接触率の平均値は、流行の閾値を決定するのに十分ではないことを発見した。(Bacaër, 2007) 近似式 (9) を使用してこの観察を分析的に確認しました。これは、この例では再現性、したがって流行のしきい値も ε に依存することを示しています。

(2000年だけ) は、フーリエ級数を使用して線形微分遅延方程式を研究します。これは、固定遅延期間を持つSEISまたはSEIRモデルの線形化と正式に同じです。ただし、作成者は関数を選択しました $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ 接触率は正でなければならないので、接触ダイナミクスのコンテキストでは適切ではない接触率に対応するパラメータの場合 (2000年8月) の動機はエンジニアの問題です)。彼のモデルの成長率について、著者は (11) と同様の連続部分を含む特性方程式に達しました。

4.2モデル

ウィリアムスとダイ (1997) が検討した固定レイテンシ期間の場合に戻り、同じSEISモデルのさまざまな可能な定式化を思い出してみましょう。SEIRモデルは、疾患なしで平衡に近い同じ線形化方程式を導くことに注意してください。そのため、同じ流行しきい値があります。

偏微分方程式を使用した定式化には3つの区画があります。

- $S(t)$ 時間 t における健康な人口
- $E(t, x)$ 感染しているがまだ感染していない集団であり、時間 t に x 時間単位で感染している
- $I(t)$ は、時間 t における感染人口です。

モデルのパラメーターは次のとおりです。

- N : 総人口。一定のままです。
- L : 固定レイテンシー期間。
- a : 感染者の治癒率。感染期間は指数関数的に分布します。
- $c(t)$: 時間 t での接触率。これは T 周期関数です。

モデルは

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t)S(t)I(t)/N + aI(t), & E(t,0) &= c(t)S(t)I(t)/N \\ \frac{\partial E}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t,x) &= 0 \quad (0 < x < L), & \frac{dI}{dt}(t) &= E(t,L) - aI(t), \end{aligned}$$

と $E(t,x) = 0$ のために $x > L$ 。特性線に沿って偏微分方程式を積分することにより、 $E(t,L) = E(t-L,0)$ 。したがって、システムは微分遅延方程式を使用して、よりコンパクトな形式で記述できます。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -c(t)S(t)I(t)/N + aI(t), \\ \frac{dI}{dt}(t) &= c(t-L)S(t-L)I(t-L)/N - aI(t). \end{aligned}$$

私たちはこれらの方程式を病気の無い平衡近くで線形化します ($S = N, I = 0$)。得る

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t-L)I^*(t-L) - aI^*(t).$$

もし $i^*(t) = c(t)I^*(t)$ は、この線形化モデルの時間 t における 単位時間あたりの新しい感染数です。

$$\frac{d}{dt} [e^{at} I^*(t)] = e^{at} i^*(t-L).$$

私たちは $-\infty$ として t と変数を変更します。次の積分方程式を取得します $i^*(t)$:

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t-x) dx, \quad (21)$$

どこに

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

式 (21) の形式は (4) で、 $\Phi(t,x) = c(t)f(x)$ 。

4.3 数値例

ここで、式 (6) のように、 $c(t) = c_0[1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$ なので、 $\Phi(t,x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t))\phi(x)$ と $\phi(x) = c_0 f(x)$ 。定義 (7) によれば、

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx-ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL-ni\omega L}}{s+a+ni\omega}. \quad (23)$$

次に、単純な二分法を使用して、パラメーターの異なる値を使用して、成長率と再現性について陰的方程式 (10) および (11) を解くことができます。たとえば、式 (10) の右辺の分母は複素数で近似できることに注意してください。 z_1 、反復アルゴリズム

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

導入されたエラーは、 n が十分に大きい場合、非常に小さくなります。 $n = 20$ を使用しましたが、 $n = 2$ の結果はすでに非常に近いです。また、我々は方程式として二分法 (10) と (11)、いくつかの実根が見つかるかもしれないと注

意する必要があった r をと R_0 最大です。図1は、さまざまな値の再現性を待ち時間 L の関数として示しています。 ε 。以下のための T と a 、(Williams and Dye, 1997)と同じ値を使用しました。のために c_0 、取りました $c_0/a = 1,2$ の代わりに $c_0/a = 1,5$ (Williams and Dye, 1997)のように。ただし、式(11)では、 c_0 定数を掛けて、 R_0 同じ定数が乗算されます。したがって、図1の外観は同じままであるが、縦軸のスケールが異なる。

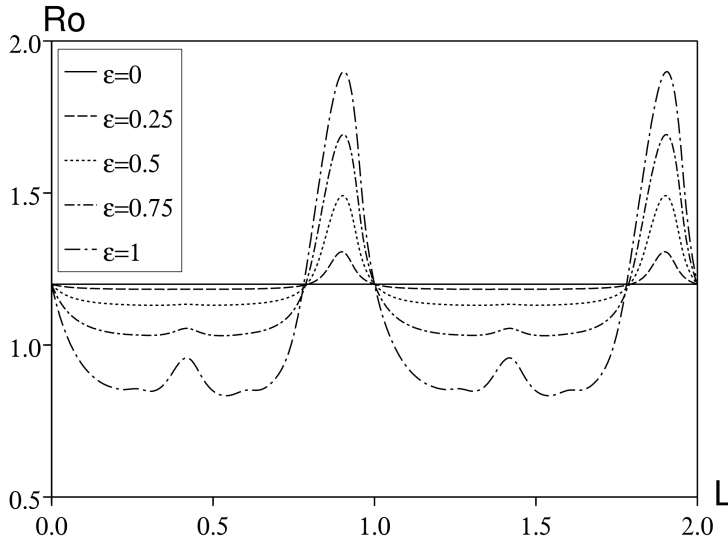


図1.再現性 R_0 待ち時間に応じて L のために $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。その他のパラメーター： $T = 1$ 、 $\log_2/a = 1/12$ と $c_0/a = 1,2$ 。

レイテンシ期間の特定の値に対して、再現性は ε の関数としてかなり変化する可能性があります。のために $\varepsilon = 1$ 、曲線の大部分 R_0 は1未満、つまり流行のしきい値を下回っていますが、 $R_{0,0} = c_0/a$ (に対応する値 $\varepsilon = 0$) がこのしきい値を上回っています。接触率を平均すると、誤った結果が予測されます。その他の注意事項は次のとおりです。

- R_0 独立しています L もし $\varepsilon = 0$
- R_0 は周期 T で周期的な L の関数です
- R_0 以下の場合、 ε に依存しません $L = 0$ 、したがって、 L が T の整数倍の場合も同様です。
- 決定された待ち時間 L の場合、再現性は次の関数の増加または減少になります。 ε 。

最初の点はよく知られています：(3) または (11) を使用して、 $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$ もし $\varepsilon = 0$ 。周期性がなければ、潜伏期間は二次症例の数に影響を与えません。これは、すべての個人が潜伏期間を生き延びて感染力を持ち、接触率が同じままであるためです。

2番目の点は、式(11)と、

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

とき変わらず L が置き換えられ $L + T$ 。直感的に、感染した個人は、潜伏期間 L または潜伏期間 $L + T$ の後に同じ環境を経験します。同じ数の二次ケースが生成されます。

3番目の点もよく知られています。もし $L = 0$ 、モデルは、感染期間が指数的に分布するSISモデルに縮小されません。この特定のケースでは、接触率を平均化することで再現性が得られます (BacaërおよびGuernaoui, 2006, §5, Bacaër, 2007, §5.1.1, および参照が含まれます)。確かに、 $R_0 = c_0/a$ (11) の解である場合 $L = 0$ なぜなら $R_0/\phi_n(0) - 1 = R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/an \geq 1$ の整数については純粋に虚数です。(11)の左側と右側は0に等しくなります。

4番目の点を理解するために、近似式(9)を使用します。私たちは持っています $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$ 、

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a}, \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1} \right).$$

のために ε 小さい、 R_0 の増加（または減少）関数です ε もし $R_{0,2} > 0$ （または $R_{0,2} < 0$ ）。 $R_{0,2} = 0$ もしそうなら $e^{i\omega L}(1 + i\omega/a) - 1$ 純粋な虚数です。この状態が書かれています

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0.$$

私たちは定義します $\psi \in (0, \pi/2)$ 唯一の実数

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

つまり $\psi = \arctan(\omega/a)$ 。これは製品によってのみ異なります aT 。だから $R_{0,2} = 0$ もしそうなら

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

つまり $\omega L + \psi = \pm\psi + 2k\pi$ のために $k \in \mathbb{Z}$ 。なぜなら $\omega = 2\pi/T$ 、私たちは持っています $R_{0,2} = 0$ もし $L = kT$ どこに $L = (k - \psi/\pi)T$ のために $k \in \mathbb{Z}$ 。特に、図1の数値では、 $R_{0,2} = 0$ もし $L/T = 1 - \psi/\pi \approx 0,794$ 。しかし、図1の示唆とは異なり、4つの曲線は水平線と交差していません。 $R_0 = c_0/a$ 正確に $L/T = 1 - \psi/\pi$ しかし非常に近い。

同様に、図2は、さまざまな値のレイテンシ期間の関数として成長率を示しています ε しかし T 、 c_0 と a 以前と同じように与えられます。成長率はの周期関数ではありません L 。この率は、待ち時間とともに減少しますが、単調ではありません。間の共鳴がある L および T は。

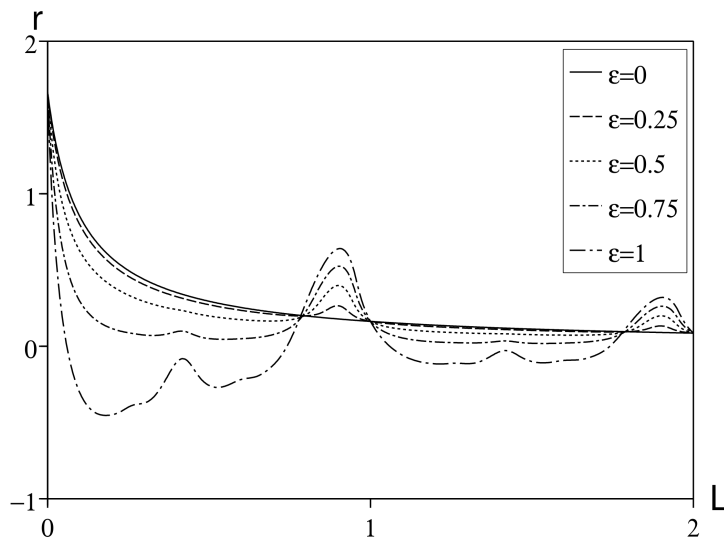


図2.成長率 r 待ち時間に応じて L のために $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ 。その他のパラメーターは図1のとおりです。

ただし、 r まだ独立しています εL が T の倍数の場合、つまり $L = kT$ のために $k = 0, 1, 2, \dots$ 確かに、覚えておいてください r_0 方程式の唯一の解です

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

だから $r = r_0$ また、式 (10) の解でもあります。

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

純粋に架空のものです $n \geq 1$: (10) の左側と右側はゼロです。

(8) と (23) を使用して、一般的な待ち時間 L に対して、 $r \approx r_0 + r_2 \varepsilon^2$ のために ε 小さい、と r_0 によって暗黙的に定義された

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

r_2 (8) と (23) によって与えられます。と

$$\begin{aligned} \phi_1(r_0) &= c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega / (r_0 + a)}, \\ \phi_0'(r_0) &= -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left(L + \frac{1}{r_0 + a} \right), \end{aligned}$$

私たちは得る

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\omega L} [1 + i\omega / (r_0 + a)] - 1} \right). \end{aligned}$$

5.まとめ

前のセクションで述べたSEIS / SEIRモデルとは別に、他のいくつかの母集団モデルの自明な平衡の線形安定性は、式 (4) に削減されます。 $\Phi(t, x)$ (6) で与えられます。これは特に、感染が循環する n 個の感染したコンパートメントを持つ流行モデルの場合です ($I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$) および正弦波の接触関数のみ。(Bacaër, 2007) およびマラリアとコレラの参考文献を参照してください。一定の感染期間 L と正弦波接触率の SIS / SIR 流行モデルは、

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

この場合、

$$\phi_n(s) = c_0 (1 - e^{-sL - ni\omega L}) / (s + ni\omega).$$

場合前節と同様に、再現性及び成長速度が ε から独立している L がの倍数である T 。これは、感染期間が通常1週間（週末の連絡が少ない）または1年の連絡期間と算術的な関係を持つ理由がないため、退行したケースです。（子供の病気のための夏休みの間のより少ない接触、冬の間の中伝染病の伝染のより高い確率）。場合は $L = T$ は、それにもかかわらず、数学の文献で多くの注目を集めている（クック&カプラン、1976; スミス、1977; スバウム、1977年と1978年）。

私たちの結果のより一般的な重要性は、再現性と成長率の平均化は例外的であると考えられるべきであるということです。既に述べたものと同様の退化したケースを除いて、平均化が正しいという私たちの知る限りの唯一の状況は、感染コンパートメントがあり、感染期間が指数関数的に分布し、潜伏期間がないことです (Bacaër and Guernaoui, 2006, §5; Bacaër, 2007, §5.1.1、およびその参照)。平均化は、偏差については正しくありません。たとえば、ベクター疾患の場合の2つの感染性区画 (BacaBr, 2007, §4.1)、または指数関数的に分布しない感染期間 (Bacaër, 2007, §5.1.1)、またはゼロ以外の待ち時間 (Bacaër, 2007, §5.1.2)。

謝辞

この作業は、NBがステレンボッシュのSACEMAを訪問したときに行われました。

参考文献

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period-doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.

- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations : A Mathematical Investigation*. Princeton University Press.
- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976) A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth, *Math. Biosci.* 31, 87–104.
- S. Deguen, G. Thomas, N. P. Chau (2000) Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model : application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000) *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*. John Wiley & Sons, New York.
- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000) A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767) *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*. Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 144–164. <http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology, *Proc. R. Soc. B* 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment, *Ann. Prob.* 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time-delayed Floquet problems, *Physica D* 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994) Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine*. Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models, *Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005) Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying contact rate, *Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977) Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York. 235–257.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations, *SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983) Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics, *J. Math. Biol.* 4, 69–80.
- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations, *J. Integr. Equ.* 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997) Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.