

# معدل النمو والتكاثر للنماذج السكانية بعامل دوري بسيط

Math. Biosci. 210 (2007) 647-658

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement ، بوندي ، فرنسا  
nicolas.bacaer@ird.fr

رشيد عوفقي

SACEMA ، مركز DST / NRF للتميز في التحليل الوبائي والنمذجة ، جامعة ستيلينبوش ، جنوب أفريقيا

## الملخص

بالنسبة للنماذج السكانية التي لها معامل جيبي دوري ، نوضح أن معدل النمو وقابلية التكاثر هي حلول لمعادلات بسيطة تتضمن كسورًا مستمرة. كمثال ، نعيد النظر في نموذج SEIS مع فترة استجابة ثابتة ، وفترة معدية موزعة بشكل كبير ومعدل اتصال جيبي مأخوذ من [Math. Biosci. 145 (1997) 77-88]. نبين أنه بصرف النظر عن بعض القيم الاستثنائية للمعاملات ، فإن عتبة الوباء لا تعتمد فقط على متوسط معدل الاتصال ، ولكن أيضًا على اتساع التقلبات.

## 1. مقدمة

درس لوتكا (1939) نموذجًا سكانيًا خطيًا يربط العدد  $B(t)$  الولادات في وحدة الزمن في الوقت  $t$  مع الخصوبة  $f(x)$  والوفيات  $\mu(x)$  في سن  $x$ :

$$B(t) = \int_0^{\infty} \phi(x) B(t-x) dx, \quad (1)$$

أين  $\phi(x) = f(x) e^{-\int_0^x \mu(y) dy}$ . أظهر ذلك  $B(t)$  وإجمالي عدد السكان ينمو أضعافًا مضاعفة ، كما  $e^{rt}$  حيث  $r$  هو الجذر الوحيد للمعادلة

$$1 = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-rx} dx. \quad (2)$$

نظائرهما المنفصلة في (1) و (2) هي نموذج مصفوفة مجتمع ليزلي والمعادلة المميزة لمصفوفة ليزلي (1945). درس أويلر بالفعل حالة معينة في عام 1760. غالبًا ما نسمي (2) "معادلة أويلر-لوتكا". استخدم Lotka الترميز

$$R_0 = \int_0^{\infty} \phi(x) dx. \quad (3)$$

هو متوسط عدد الأحفاد الذين ولد لهم الفرد خلال حياته.  $R_0$  هو التكاثر. عدد السكان ينمو ( $r > 0$ ) إذا  $R_0 > 1$ . يقلل ( $r < 0$ ) إذا  $R_0 < 1$ . يظهر النموذج (1) أيضًا في دراسة الثبات الخطي للتوازن الخالي من الأمراض للنماذج الوبائية: ثم يمثل المتغير  $x$  الوقت المنقضي منذ الإصابة و  $B(t)$  الإصابة بالعدوى في بداية الوباء (ديكمان وهينستريك ، 2000).

تظهر على العديد من الحيوانات والنباتات والعديد من الأمراض المعدية تقلبات موسمية. تؤثر هذه التقلبات على معدل النمو وقابلية التكاثر. (Thieme، 1984؛ Jagers، 1985) استبدال النموذج (1) بـ

$$B(t) = \int_0^{\infty} \Phi(t, x) B(t-x) dx, \quad (4)$$

أين  $\Phi(t, x)$  هي وظيفة الدورية للفترة  $T$ . عندئذ يكون معدل النمو  $r$  هو الرقم الحقيقي الوحيد الذي يساوي نصف القطر الطيفي لعامل التكامل الخطي فيه ، على مساحة دالات  $T$ -الدورية المستمرة ، 1

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx. \quad (5)$$

(Bacaër, 2007 ; Bacaër and Guernaoui, 2006) اقترحوا أن قابلية التكاثر يمكن تعريفها بنفس طريقة نصف القطر الطيفي للمشغل.

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t - x) dx$$

على نفس مساحة الوظائف المستمرة  $T$ -الدورية. كما كان من قبل،  $r > 0$  إذا  $R_0 > 1$  و  $r < 0$  إذا  $R_0 < 1$ . إذا  $\Phi(t, x)$  لا تعتمد على  $t$ ، يتم تقليل هذه التعريفات والنتائج إلى تلك الموجودة في Lotka.

لنفترض الآن ذلك

$$\Phi(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t)] \phi(x), \quad (6)$$

أين  $\omega = 2\pi/T$ ،  $|\varepsilon| \leq 1$  و  $\phi \geq 0$ . نحدد

$$\xi = \inf \left\{ s \in \mathbb{R}, \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx} dx < +\infty \right\}.$$

ومن المفترض  $\xi < 0$ . نحدد

$$\phi_n(s) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{-sx - ni\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s > \xi. \quad (7)$$

وقد أظهر (Coale 1972 ، الفصل 6) مع تدوينات مختلفة  $\varepsilon^2 r_0 + r_2 \simeq r$  أين صغير  $r_0$  يعرف ضمناً و  $r_2$  صراحة من قبل

$$1 = \phi_0(r_0) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2\phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (8)$$

الرمز  $\operatorname{Re}(z)$  يدل على الجزء الحقيقي من العدد المركب  $z$ . في (باكير ، 2007) ، أظهرنا بنفس الطريقة  $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$  أين  $\varepsilon$  ل  $R_0$  أين صغير

$$R_{0,0} = \phi_0(0) \quad , \quad R_{0,2} = \frac{\phi_0(0)}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\phi_1(0)}{\phi_0(0) - \phi_1(0)} \right). \quad (9)$$

في هذه المقالة ، قمنا بتكييف طريقة يستخدمها (فقط ، 2000). نظهر في الحالة المعينة (6) أن معدل النمو وقابلية التكاثر هما أكبر الجذور الحقيقية للمعادلات ذات الكسور المستمرة.

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}, \quad (10)$$

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_1(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{R_0}{\phi_2(0)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\dots}}}. \quad (11)$$

للجميع  $|\varepsilon| \leq 1$ . لاحظ مرة أخرى على الجانب الأيمن أنه يجب أن تأخذ الجزء الحقيقي من الكسر المستمر. يمكن استخدام هذه المعادلات البسيطة نسبياً لحساب معدل النمو والتكاثر. إذا كتبنا على سبيل المثال  $r(\varepsilon)$  للإصرار على اعتماد معدل النمو على المعلمة ، ثم سنرى أن لدينا عدم المساواة بشكل عام  $r(\varepsilon) \neq r(0)$  ل  $\varepsilon \neq 0$  ، وبعبارة أخرى ، عتبة النمو السكاني ( $r > 0$ ) لا يمكن الحصول عليها ببساطة عن طريق حساب متوسط المعامل الدوري لأن هذا سيكون معادلاً  $\varepsilon = 0$ . وقد تم توضيح هذه النقطة بنموذج وبائي SEIS / SEIR من (Williams and Dye, 1997) ، والذي يتضمن فترة انتقال ثابتة وفترة معدية موزعة بشكل كبير.

نحصل على المعادلتين (10) و (11) في القسم 2. ونجد منهما الصيغ التقريبية (8) و (9) في القسم 3. نموذج وباء SEIS / SEIR لـ (Williams and Dye) 1997 كمثل في القسم 4. يذكر الاستنتاج أمثلة أخرى.

## 2. إثبات رقم (10) و (11)

وفقاً لـ (Thieme، 1984؛ Jagers، 1985) ، فإن نصف القطر الطيفي للعامل الخطي الإيجابي (5) هو دالة متناقصة لـ  $r$  ومعدل نمو النموذج (4) هو الرقم الحقيقي الوحيد بحيث نصف القطر الطيفي يساوي 1. وبالتالي ، فإن معدل النمو  $r$  هو أيضاً أكبر عدد حقيقي بحيث توجد وظيفة دورية غير تافهة  $u(t)$  مع

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) e^{-rx} u(t-x) dx = u(t), \quad \forall t. \quad (12)$$

دعونا ننظر أولاً في الحالة حيث  $\Phi(t, x) = p(t) \phi(x)$  مع وظيفة تي الدورية  $p(t)$ . تأمل تحليلات سلسلة فورييه

$$p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n e^{ni\omega t}, \quad u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{ni\omega t},$$

أين  $\omega = 2\pi/T$ . كما لوحظ (Coale، 1972؛ Williams and Dye، 1997) ، المعادلة (12) تعادل نظام لا نهائي من المعادلات الخطية

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_{k-n} \phi_n(r) u_n = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (13)$$

أين  $\phi_n$  يعرف بـ (7).

الآن النظر في الحالة الخاصة حيث  $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$  لأن  $p(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}$  ، النظام (13) مكتوب

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(r) u_{k-1} + \phi_k(r) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(r) u_{k+1} = u_k \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (14)$$

يمكننا تكييف الطريقة التي يستخدمها (فقط 2000) لنظام ثلاثي الأبعاد مماثل. لنعيد كتابة النظام (14)

$$\frac{1}{\phi_k(r)} - 1 = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k-1}}{u_k} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_k(r)} \frac{u_{k+1}}{u_k}. \quad (15)$$

إذا  $k = 0$  ، هذه المعادلة مكتوبة

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_{-1}(r)} \frac{u_0}{u_{-1}}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_0(r)}{\phi_1(r)} \frac{u_0}{u_1}}. \quad (16)$$

ولكن (15) ، مع استبدال  $k-1$  أو  $k+1$  ، تظهر أيضاً

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k-1}(r)} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k-1}(r)}{\phi_{k-2}(r)} \frac{u_{k-1}}{u_{k-2}}}, \quad (17)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_k(r)}{\phi_{k+1}(r)} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\phi_{k+1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{\varepsilon}{2} \frac{\phi_{k+1}(r)}{\phi_{k+2}(r)} \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}}. \quad (18)$$

دعونا نجمع (16) و (17) - (18) بشكل متكرر. نحصل على الكسور المستمرة

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 = \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_{-2}(r)} - 1 - \dots}} + \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_1(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{\frac{1}{\phi_2(r)} - 1 - \dots}}.$$

لأن  $\phi_k(r)$  و  $\phi_{-k}(r)$  هي أرقام مترافقة معقدة ، نصل إلى "المعادلة المميزة" (10). معدل نمو  $v$  هو أعظم الحل.

والدليل على (11) مشابه بدءاً من المشكلة

$$\int_0^{\infty} \Phi(t, x) u(t-x) dx = R_0 u(t). \quad (19)$$

$R_0$  هو أكبر عدد حقيقي ، حيث تحتوي هذه المعادلة على حل  $T$ -periodic غير صفري. لحالة محددة

$$\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_{k-1}(0) u_{k-1} + \phi_k(0) u_k + \frac{\varepsilon}{2} \phi_{k+1}(0) u_{k+1} = R_0 u_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

والمعادلة (11).

### 3. الصيغ التقريبية (8) - (9)

بدءًا من (10) - (11) ، يمكن للمرء بسهولة العثور على التقديرات (8) - (9) ، والتي تم إثباتها بطريقة أكثر تعقيدًا في (Coale ، 1972) ؛ (Bacaër ، 2007).

لنبدأ بمعدل النمو  $r$  . دعونا نبحث عن بداية تطوير المسلسل  $\varepsilon$  صغيرة في الشكل  $r \simeq r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2$  . إذا  $\varepsilon = 0$  ، الجانب الأيمن من (10) تم إلغاؤه و نحصل عليه  $r_0$  كحل (فريد) للمعادلة  $\phi_0(r_0) = 1$  ، وهو بالطبع مطابق لمعادلة أولر-لوتكا (2). بالمناسبة ، التغيير  $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$  يتوافق مع استبدال  $p(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t)$  مع  $p(t - T/2)$  . الآن العامل الخطي

$$u(t) \mapsto \int_0^\infty \Phi(t - T/2, x) e^{-rx} u(t - x) dx$$

على مساحة الدوال  $T$ -periodic لها نفس القيم الذاتية مثل العامل الخطي (5) ، يتم تحويل وظائف eigen فقط بواسطة  $T/2$  . لإبراز اعتماد  $r$  على  $\varepsilon$  دعنا نكتب  $r(\varepsilon)$  . لذا  $r(-\varepsilon) = r(\varepsilon)$  و  $r_1 = 0$  . (باكير ، 2007) استخدم حجة مماثلة لتقريب النكائر.

لذلك لدينا  $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$  ولا يزال يتعين تحديدها  $r_2$  . معدل النمو  $r$  هو حل المعادلة الضمنية (10). لان  $\phi_0(r_0) = 1$  ، لدينا

$$\phi_0(r_0) - \phi_k(r_0) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} (1 - e^{-kix}) dx \neq 0$$

لجميع  $k \geq 1$  (على سبيل المثال أن الوظيفة  $\phi(x)$  إيجابي بشكل صارم على الأقل خلال فترة زمنية صغيرة). لذا  $\phi_k(r_0) \neq 1$  و  $1/\phi_k(r_0) - 1 \neq 0$  لجميع  $k \geq 1$  . للحفاظ على التعبير التربيعي فقط في  $\varepsilon$  على الجانب الأيمن من المعادلة (10) ، نستبدل المقام بأقرب تقريب ترتيب له. نستبدل  $\phi_1(r)$  مع  $\phi_1(r_0)$  . نحن نهمل الباقي التربيعي  $\varepsilon$  من الكسر المستمر. نحصل

$$\frac{1}{\phi_0(r)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\varepsilon^2/4}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right). \quad (20)$$

لكن

$$\phi_0(r) \simeq \phi_0(r_0 + r_2 \varepsilon^2) \simeq \phi_0(r_0) + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0) = 1 + r_2 \varepsilon^2 \phi_0'(r_0).$$

نستخدم التقريب ل  $\phi_0(r)$  . نحدد التعبيرات التربيعية في  $\varepsilon$  في (20). هذا يعطي

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1} \right),$$

وهو ما يعادل (8). يمكن كتابة هذه الصيغة في شكل مختلف قليلاً. في الواقع ، مع

$$c_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \cos(\omega x) dx, \quad s_1 = \int_0^\infty \phi(x) e^{-r_0 x} \sin(\omega x) dx,$$

لدينا  $\phi_1(r_0) = c_1 - is_1$  لذا

$$r_2 = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \operatorname{Re} \left( \frac{c_1 - is_1}{1 - c_1 + is_1} \right) = -\frac{1}{2 \phi_0'(r_0)} \frac{(1 - c_1) c_1 - s_1^2}{(1 - c_1)^2 + s_1^2},$$

وهو مطابق بشكل أساسي لصيغة (6.27) من (Coale، 1972).

كذلك،  $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \varepsilon^2$  ل  $\varepsilon$  صغير. من المعادلة (3) أو المعادلة (11) مع  $\varepsilon = 0$ ، لدينا  $R_{0,0} = \phi_0(0)$ . للحفاظ على الجانب الأيمن من المعادلة (11) فقط التعبير التربيعي في  $\varepsilon$ ، نستبدل المقام بأدنى تقريب تقريب، باستخدام  $R_{0,0} = \phi_0(0)$ . نحن نهمل بقية الكسر المستمر لأنه تربيعي في  $\varepsilon$ . لقد فعلنا

$$\frac{R_0}{\phi_0(0)} - 1 \simeq 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\varepsilon^2/4}{\phi_0(0)/\phi_1(0) - 1} \right).$$

هذا يؤدي إلى الصيغة (9).

## 4. نموذج SEIS مع فترة الكمون الثابتة

### 4.1 الخلفية

النماذج الوبائية تسمى SEIR أو SEIS لها فترة كمون وحجرة معدية. لقد كانوا موضوعاً للعديد من الدراسات الرياضية أو العددية، علاوة على ذلك، يكون معدل الاتصال دورياً (Williams and Dye، 1997؛ Aron and Schwartz and Smith، 1983؛ Moneim and Greenhalgh، 2005؛ Kuznetsov and Piccardi، 1994؛ Schwartz، 1984؛ وآخرون، 2000) مهم بشكل خاص بالحصبة، (Deguen et al.، 2000) في جذري الماء، في حين يقدم (Altizer وآخرون، 2006؛ Williams and Dye، 1997) و (Ma and Ma، 2006) قد درسوا عتبة الوباء، التي تعتمد على المعادلات الخطية بالقرب من التوازن دون مرض. تركز المراجع الأخرى على المواقف المتوطنة، وتبحث عن الفوضى أو تحاول تقدير المعلمات، وتذكر فقط المشكلة قبل التحول مباشرة إلى نماذج أبسط بدون فترة تأخير. كل هذه المراجع تأخذ فترة معدية توزع أضعافاً مضاعفة.

(Williams and Dye، 1997) يستخدم سلسلة فورييه لتحليل الحالة التي تكون فيها فترة الكمون ثابتاً ثابتاً وحيث يكون معدل الاتصال وظيفية دورية اعتباطية. يؤكد المؤلفون أن معدل نمو المعادلات الخطية يعتمد على معدل الاتصال الدوري فقط بقيمته المتوسطة. يظهر أدناه للحالة الخاصة لمعدل الاتصال الجيبي أن هذا يمكن أن يكون صحيحاً فقط للقيم الاستثنائية للمعلمات. يمكن للمرء أن يدرك ذلك باستخدام الصيغة التقريبية (9) من (Coale، 1972).

(Ma and Ma، 2006) يدرس عددياً نموذج SEIR وهو نظام من المعادلات التفاضلية العادية، والذي يتوافق مع فترة الكمون الموزعة أسياً، مع معدل اتصال يختلف حسب  $1 + \varepsilon \cos \omega t$ . وجد الباحثون أن متوسط قيمة معدل الاتصال لم يكن كافياً لتحديد عتبة الوباء. (باكير، 2007) أكد تحليلياً هذه الملاحظة باستخدام الصيغة التقريبية (9)، والتي تظهر في هذا المثال أن التكاثر، وبالتالي عتبة الوباء، تعتمد على  $\varepsilon$ .

(فقط، 2000) يستخدم سلسلة فورييه لدراسة معادلة خطية تفاضلية تأخير، والتي هي نفسها رسمياً مثل الخطية لنموذج SEIS أو SEIR مع فترة زمنية ثابتة. ومع ذلك اختار المؤلف الوظيفة  $c(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$  للمعلمة المقابلة لمعدل الاتصال، وهو غير مناسب في سياق ديناميكيات السكان حيث يجب أن يكون معدل الاتصال إيجابياً (الدافع فقط، 2000) هو مشكلة مهندس). بالنسبة لمعدل نمو نموذج، وصل المؤلف إلى معادلة مميزة تنطوي على كسور مستمرة مماثلة لـ (11).

### 4.2 النموذج

دعونا نعود إلى حالة فترة الكمون الثابتة التي نظر فيها ويليامز وداي (1997) ونذكر الصيغ المختلفة الممكنة لنموذج SEIS نفسه. لاحظ أن نموذج SEIR يؤدي إلى نفس المعادلات الخطية بالقرب من التوازن دون مرض. لذا فإن لها نفس عتبة الوباء.

تحتوي الصيغة مع معادلة تفاضلية جزئية على ثلاثة أقسام:

- $S(t)$  هو السكان الأصحاء في الوقت  $t$
- $E(t, x)$  إصابة السكان ولكن ليس معدياً بعد، وهو في الوقت  $t$  قد أصيبوا بالعدوى منذ العاشر حدات الوقت
- $I(t)$  هو السكان المعدية في الوقت  $t$ .

معلمات النموذج

- $N$ : مجموع السكان، الذي لا يزال ثابتاً؛
- $L$ : فترة الكمون الثابتة؛
- $a$ : معدل شفاء الأشخاص المعديين، بحيث يتم توزيع الفترة المعدية بشكل كبير؛
- $c(t)$ : الاتصال معدل في وقت  $t$ ، التي هي وظيفة  $T$ -périodique.

النموذج هو

$$\frac{dS}{dt}(t) = -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t), \quad E(t, 0) = c(t) S(t) I(t)/N$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (0 < x < L), \quad \frac{dI}{dt}(t) = E(t, L) - a I(t),$$

مع  $E(t, x) = 0$  لـ  $x > L$ . من خلال دمج المعادلة التفاضلية الجزئية على طول الخطوط المميزة ، نحصل عليها  $E(t, L) = E(t - L, 0)$ . وبالتالي يمكن كتابة النظام بشكل أكثر إحكاما باستخدام معادلات التأخير التفاضلي:

$$\frac{dS}{dt}(t) = -c(t) S(t) I(t)/N + a I(t),$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = c(t - L) S(t - L) I(t - L)/N - a I(t).$$

نقوم بترتيب هذه المعادلات خطيا بالقرب من التوازن دون مرض ( $S = N, I = 0$ ). نحصل

$$\frac{dI^*}{dt}(t) = c(t - L) I^*(t - L) - a I^*(t).$$

إذا  $i^*(t) = c(t) I^*(t)$  هو عدد الإصابات الجديدة لكل وحدة زمنية في الوقت  $t$  في هذا النموذج الخطي ، ثم

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{at} I^*(t) \right] = e^{at} i^*(t - L).$$

نحن ندمج بين  $-\infty$  و  $t$  ونقوم بتغيير المتغير. نحصل على المعادلة المتكاملة التالية لـ  $i^*(t)$ :

$$i^*(t) = c(t) \int_0^\infty f(x) i^*(t - x) dx, \quad (21)$$

أين

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < L, \\ e^{-a(x-L)} & \forall x > L. \end{cases} \quad (22)$$

المعادلة (21) لها الشكل (4) مع  $\Phi(t, x) = c(t) f(x)$ .

### 4.3 مثال عددي

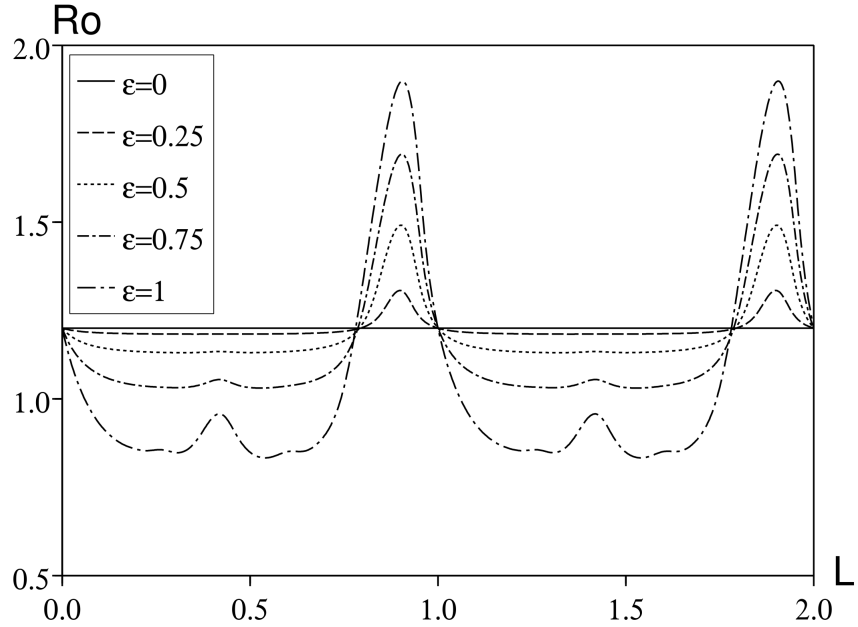
لنفترض الآن كما في المعادلة (6) ذلك  $c(t) = c_0 [1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$  بحيث  $\Phi(t, x) = (1 + \varepsilon \cos(\omega t)) \phi(x)$  مع  $\phi(x) = c_0 f(x)$  حسب التعريف (7) لدينا

$$\phi_n(s) = c_0 \int_L^\infty e^{-a(x-L)} e^{-sx - ni\omega x} dx = c_0 \frac{e^{-sL - ni\omega L}}{s + a + ni\omega}. \quad (23)$$

يمكننا بعد ذلك حل المعادلتين الضمنييتين (10) و (11) لمعدل النمو والتكاثر بقيم مختلفة من المعلمات باستخدام ثنائي الانقسام البسيط. لاحظ على سبيل المثال أن المقام على الجانب الأيمن من المعادلة (10) يمكن تقريبه بالرقم المركب  $z_1$ ، مع الخوارزمية التكرارية

$$z_n = \frac{1}{\phi_n(r)} - 1, \quad z_{k-1} = \frac{1}{\phi_{k-1}(r)} - 1 - \frac{\varepsilon^2/4}{z_k} \quad (k = n, n-1, \dots, 2).$$

الخطأ الذي تم إدخاله صغير جدًا إذا تم أخذ  $n$  بشكل كافٍ. استخدمنا  $n = 20$  ولكن النتيجة مع  $n = 2$  قريبة جدًا بالفعل. علاوة على ذلك ، يجب توخي الحذر مع الانقسام لأن المعادلتين (10) و (11) يمكن أن يكون لهما جذور حقيقية عديدة: ص و  $R_0$  هي الأكبر. يوضح الشكل 1 قابلية التكاثر كدالة لفترة الكمون  $L$  ، لقيم مختلفة من  $\varepsilon$ . لـ  $T$  و  $a$  أخذنا نفس القيم الموجودة في (Williams and Dye، 1997). لـ  $c_0$  ، أخذنا  $c_0/a = 1, 2$  في مكان  $c_0/a = 1, 5$  كما في (Williams and Dye، 1997). ولكن لاحظ مع المعادلة (11) أنه إذا  $c_0$  مضروبًا في ثابت ، ثم  $R_0$  يتم ضربه في نفس الثابت ؛ لذلك يظل شكل الشكل 1 كما هو ولكن بمقياس مختلف على المحور الرأسي.



الشكل 1. التكاثر  $R_0$  اعتمادًا على فترة الكمون  $L$  ل  $\epsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ . معلمات أخرى:  $T = 1$ ،  $c_0/a = 1,2$  و  $\log 2/a = 1/12$

لقيمة معينة من فترة الكمون ، يمكن أن تختلف قابلية التكاثر بشكل كبير كدالة  $\epsilon$ . ل  $\epsilon = 1$  جزء كبير من المنحنى  $R_0$  أقل من 1 ، أي تحت عتبة الوباء ، بينما  $R_{0,0} = c_0/a$  (القيمة المطابقة  $\epsilon = 0$ ) أعلى من هذا الحد: متوسط معدل الاتصال من شأنه توقع نتيجة خاطئة. فيما يلي بعض الملاحظات الأخرى:

- $R_0$  مستقل عن  $L$  إذا  $\epsilon = 0$
- $R_0$  هي دالة لـ  $L$  وهي دورية مع الفترة  $T$
- $R_0$  لا يعتمد على  $\epsilon$  إذا  $L = 0$  ، وبالتالي أيضًا إذا كان  $L$  مضاعفًا صحيحًا لـ  $T$  ؛
- لفترة زمنية محددة  $L$  ، يمكن أن تكون التكاثر وظيفة زيادة أو تناقص  $\epsilon$ .

النقطة الأولى معروفة جيدًا: باستخدام (3) أو (11) ، لدينا  $R_0 = \phi_0(0) = c_0/a$  إذا  $\epsilon = 0$ . بدون دورية ، لا تؤثر فترة الكمون على عدد الحالات الثانوية لأن جميع الأفراد ينجون من فترة الكمون ويصبحون معديين ولأن معدل الاتصال يبقى كما هو.

النقطة الثانية ناتجة عن المعادلة (11) وحقيقة ذلك

$$\phi_n(0) = c_0 e^{-ni\omega L} / (a + ni\omega)$$

لم يتغير عندما  $L$  يتم استبدال  $L + T$ . بشكل حدسي ، يعاني الفرد المصاب من نفس البيئة بعد فترة الكمون  $L$  أو بعد فترة الكمون  $L + T$  ؛ ينتج نفس العدد من الحالات الثانوية.

النقطة الثالثة معروفة أيضًا. إذا  $L = 0$  ، يتم تقليل النموذج إلى نموذج SIS مع فترة معدية يتم توزيعها بشكل كبير. في هذه الحالة بالذات ، يتم الحصول على التكاثر عن طريق حساب متوسط معدل الاتصال (Bacæer and Guernaoui، 2006، §5) ؛ Bacæer، 2007، §5.1.1 ، والمراجع المدرجة). في الواقع ،  $R_0 = c_0/a$  هو حل (11) متى  $L = 0$  لأن  $R_0/\phi_n(0) - 1 = R_0(a + ni\omega)/c_0 - 1 = ni\omega/a$  (11) يساوي 0.

لفهم النقطة الرابعة ، نستخدم الصيغة التقريبية (9). لقد فعلنا  $R_0 \simeq R_{0,0} + R_{0,2} \epsilon^2$  مع

$$R_{0,0} = \frac{c_0}{a} \quad , \quad R_{0,2} = \frac{c_0}{2a} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1} \right).$$

ل  $\epsilon$  صغير ،  $R_0$  هي وظيفة متزايدة (أو متناقصة) لـ  $\epsilon$  إذا  $R_{0,2} > 0$  (أو  $R_{0,2} < 0$ ).  $R_{0,2} = 0$  إذا فقط إذا  $e^{i\omega L} (1 + i\omega/a) - 1$  هو رقم وهمي خالص. هذا الشرط مكتوب

$$\cos(\omega L) - \frac{\omega}{a} \sin(\omega L) - 1 = 0.$$

نحدد  $\psi \in (0, \pi/2)$  الرقم الحقيقي الوحيد مع

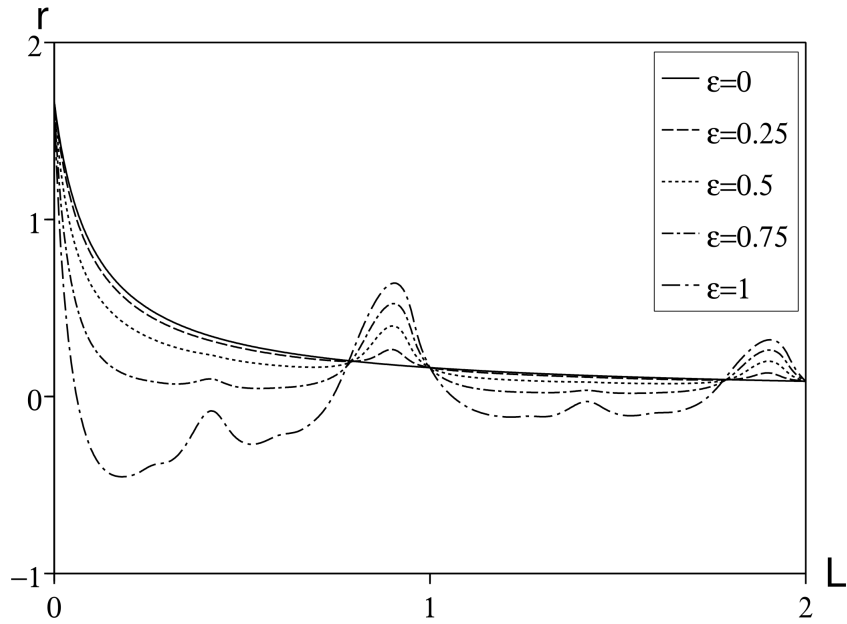
$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\omega/a}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}},$$

هذا يعني  $\psi = \arctan(\omega/a)$ . هذا depends يعتمد فقط على المنتج  $aT$ . لذا  $R_{0,2} = 0$  إذا فقط إذا

$$\cos(\omega L + \psi) = \cos(\omega L) \cos \psi - \sin(\omega L) \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} = \cos \psi,$$

هذا يعني  $\omega L + \psi = \pm \psi + 2k\pi$  ل  $k \in \mathbb{Z}$ . لان  $\omega = 2\pi/T$ ، لدينا  $R_{0,2} = 0$  إذا  $L = kT$  أين  $L = (k - \psi/\pi)T$  ل  $k \in \mathbb{Z}$ . على وجه الخصوص، مع القيم العددية في الشكل 1، إذا  $R_{0,2} = 0$ ،  $L/T = 1 - \psi/\pi \simeq 0,794$ . ولكن على عكس ما قد يوحي به الشكل 1، فإن المنحنيات الأربعة لا تعبر الخط الأفقي  $R_0 = c_0/a$  بالضبط في  $L/T = 1 - \psi/\pi$  لكن قريب جداً.

وبالمثل، يوضح الشكل 2 معدل النمو كدالة لفترة الكمون لقيم مختلفة  $\varepsilon$  لكن مع  $T$ ،  $c_0$  و  $a$  كما كان من قبل. معدل النمو ليست وظيفة الدورية لل  $L$ . ينخفض هذا المعدل مع فترة الكمون، ولكن ليس بشكل رتيب. هناك الأصداء بين  $L$  و  $T$ .



الشكل 2. معدل النمو  $r$  اعتماداً على فترة الكمون  $L$  ل  $\varepsilon \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ . المعلمات الأخرى هي كما في الشكل 1.

ومع ذلك،  $r$  لا يزال مستقلاً عن  $\varepsilon$  إذا كان  $L$  من مضاعفات  $T$ ، أي  $L = kT$  ل  $k = 0, 1, 2, \dots$  في الواقع، تذكر ذلك  $r_0$  هو الحل الوحيد للمعادلة

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 k T} / (r_0 + a) = 1.$$

لذا  $r = r_0$  هو أيضاً حل المعادلة (10) لأن

$$1/\phi_n(r) - 1 = (r_0 + a + ni\omega) e^{r_0 k T} / c_0 - 1 = ni\omega e^{r_0 k T} / c_0$$

هو خيالي بحت ل  $n \geq 1$ : الجانبين الأيسر والأيمن لـ (10) صفر.

لفترة الكمون العام  $L$ ، باستخدام (8) و (23)، لدينا  $r \simeq r_0 + r_2 \varepsilon^2$  ل  $\varepsilon$  صغير مع  $r_0$  تم تعريفه ضمناً بواسطة

$$\phi_0(r_0) = 1 \Leftrightarrow c_0 e^{-r_0 L} / (r_0 + a) = 1.$$

$r_2$  معطاة بواسطة (8) و (23). مع



$$\phi_1(r_0) = c_0 \frac{e^{-r_0 L - i\omega L}}{r_0 + a + i\omega} = c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \times \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega/(r_0 + a)} = \frac{e^{-i\omega L}}{1 + i\omega/(r_0 + a)},$$

$$\phi'_0(r_0) = -c_0 \frac{e^{-r_0 L}}{r_0 + a} \left( L + \frac{1}{r_0 + a} \right) = -\left( L + \frac{1}{r_0 + a} \right),$$

نحصل

$$r_2 = -\frac{1}{2\phi'_0(r_0)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1/\phi_1(r_0) - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2[L + 1/(r_0 + a)]} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{i\omega L}[1 + i\omega/(r_0 + a)] - 1}\right).$$

## 5. الخلاصة

بصرف النظر عن نماذج SEIS / SEIR المذكورة في القسم السابق ، يتم تقليل الاستقرار الخطي للتوازن التافه للعديد من النماذج السكانية الأخرى إلى المعادلة (4) ، حيث  $\Phi(t, x)$  تعطى بواسطة (6). هذا هو الحال بشكل خاص بالنسبة للنماذج الوبائية مع  $n$  المقصورات المصابة ، حيث تتبع العدوى دورة  $(I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1)$  وبوظيفة التلامس الجيبية فقط. انظر (باكير ، 2007) ومراجع الملاريا والكوليرا. نموذج وباء SIS / SIR مع فترة معدية ثابتة  $L$  ومعدل ملاسة جيبية يتوافق مع

$$\phi(x) = c_0 \quad \forall x < L, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x > L.$$

في هذه الحالة،

$$\phi_n(s) = c_0(1 - e^{-sL - ni\omega L})/(s + ni\omega).$$

كما هو الحال في الجزء السابق، واستنساخ ومعدل النمو تكون مستقلة عن  $\varepsilon$  إذا  $L$  من مضاعفات  $T$ . هذه حالة متدهورة ، حيث لا يوجد سبب لفترة العدوى لوجود أي علاقة حسابية بفترة الاتصال ، والتي عادة ما تكون أسبوعاً (اتصال أقل في عطلات نهاية الأسبوع) أو عام. (عدد أقل من الاتصالات خلال العطلة الصيفية لأمراض الطفولة ، وزيادة احتمال انتقال الأمراض المنقولة جواً خلال فصل الشتاء). إذا  $L = T$  تلقت مع ذلك الكثير من الاهتمام في الأدب الرياضية (كوك وكابلان، 1976؛ سميث، 1977؛ نوسباوم و 1977 و 1978).

إن الأهمية الأكثر عمومية لنتائجنا هي أن متوسط معدل التكاثر ومعدل النمو يجب أن يعتبر استثنائياً. بصرف النظر عن الحالات المتدهورة المشابهة لتلك التي سبق ذكرها ، فإن الوضع الوحيد لمعرفتنا حيث يكون المتوسط صحيحاً هو أنه مع حجرة معدية ، فترة معدية يتم توزيعها بشكل مضاعف ولا فترة الكمون (5) ، Bacaër and Guernaoui، 2006، §5.1.1؛ Bacaër، 2007، §5.1.1، ومراجعتها). لا يعد المتوسط صحيحاً لأي انحراف ، على سبيل المثال جزأين معديين لأمراض ناقلات الأمراض (4.1) ، Baca، r، 2007، §4.1 ، أو فترة معدية لا يتم توزيعها بشكل كبير (5.1.1) ، Baca، r، 2007، §5.1.1 ، أو فترة الكمون غير الصفيرية (5.1.2) ، Bacaër، 2007، §5.1.2).

شكر وتقدير

تم هذا العمل أثناء زيارة NB ل SACEMA في Stellenbosch.

المراجع

- S. Altizer, A. Dobson, P. Hosseini, P. Hudson, M. Pascual, P. Rohani (2006) Seasonality and the dynamics of infectious diseases, *Ecol. Lett.* 9, 467–484.
- J. L. Aron, I. B. Schwartz (1984) Seasonality and period–doubling bifurcations in an epidemic model, *J. Theor. Biol.* 110, 665–679.
- N. Bacaër, S. Guernaoui (2006) The epidemic threshold of vector–borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421–436.
- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector–borne diseases with a periodic vector, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- A. J. Coale (1972) *The Growth and Structure of Human Populations : A Mathematical Investigation.*

Princeton University Press.

- K. L. Cooke, J. L. Kaplan (1976)  
A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth,  
*Math. Biosci.* 31, 87–104.
- S. Deguen, G. Thomas, N. P. Chau (2000)  
Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model :  
application to chickenpox incidence in France, *Statist. Med.* 19, 1207–1216.
- O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek (2000)  
*Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and Interpretation*  
John Wiley & Sons, New York.
- D. J. D. Earn, P. Rohani, B. M. Bolker, B. T. Grenfell (2000)  
A simple model for complex dynamical transitions in epidemics, *Science* 287, 667–670.
- L. Euler (1760/1767)  
Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.  
*Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, 144–164.  
<http://bibliothek.bbaw.de>
- N. C. Grassly, C. Fraser (2006) Seasonal infectious disease epidemiology,  
*Proc. R. Soc. B* 273, 2541–2550.
- P. Jagers, O. Nerman (1985) Branching processes in periodically varying environment,  
*Ann. Prob.* 13, 254–268.
- W. Just (2000) On the eigenvalue spectrum for time-delayed Floquet problems,  
*Physica D* 142, 153–165.
- Yu. A. Kuznetsov, C. Piccardi (1994)  
Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models, *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- P. H. Leslie (1945) On the use of matrices in certain population mathematics,  
*Biometrika* 33, 213–245.
- A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques : analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine.* Hermann, Paris.
- J. Ma, Z. Ma (2006) Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models,  
*Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- I. A. Moneim, D. Greenhalgh (2005)  
Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying  
*Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- R. D. Nussbaum (1977)  
Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics.  
In : V. Lakshmikantham, ed., *Nonlinear Systems and Applications*, Academic Press, New York.
- R. D. Nussbaum (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations,  
*SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- I. B. Schwartz, H. L. Smith (1983)  
Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model, *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- H. L. Smith (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics,  
*J. Math. Biol.* 4, 69–80.
- H. R. Thieme (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations,  
*J. Integr. Equ.* 7, 253–277.
- B. G. Williams, C. Dye (1997)  
Infectious disease persistence when transmission varies seasonally, *Math. Biosci.* 145, 77–88.