

# تقريب $R_0$ للأمراض المنقولة بالناقل مع عدد دوري من المتجهات

Bull. Math. Biol. 69 (2007) 1067–1091  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211>

Nicolas Bacaër

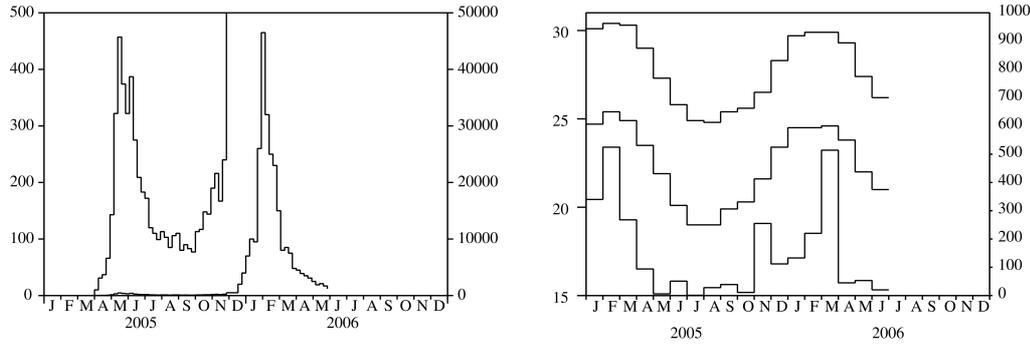
بوندي ، فرنسا ، Institut de Recherche pour le Développement،  
 nicolas.bacaer@ird.fr

## المخلص

الهدف الرئيسي من هذه المقالة هو الحصول على صيغة تقريبية لإعادة الإنتاج  $R_0$  للأمراض المنقولة بالناقل ، إذا كان لدى ناقلات النواقل تقلبات موسمية صغيرة:  $p(t) = p_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi))$  مع  $\varepsilon \ll 1$ . يشبه المصطلح الأول حالة عدد ثابت من المتجهات ، ولكن مع استبدال السكان بمتوسطه. أقصى تصحيح نسبي بسبب المصطلح الثاني هو  $2/8$  وتتميل دائمًا إلى تقليل التكاثر. هذا التكاثر هو نصف القطر الطيفي لعامل متكامل. قارنا أربع طرق حسابية لحساب  $R_0$  باستخدام كمثال نموذج لوباء الشيكونغونيا في ريونيون في 2005-2006. يمكن استخدام الصيغ التقريبية والطرق العددية للعديد من النماذج الوبائية الموسمية الأخرى.

## 1. مقدمة

منذ مارس 2005 ، ضرب وباء من الشيكونغونيا للمرة الأولى جزيرة ريونيون ، وهي قسم فرنسي في الخارج يقع في المحيط الهندي. بعد الذروة الأولية مع أكثر من 400 حالة إصابة بشرية جديدة أسبوعيًا في مايو 2005 ، تباطأ الوباء (الشكل 1 أ) بسبب الشتاء الأسترالي ، الذي يكون أكثر برودة وأقل أمطارًا (الشكل 1 ب) وبالتالي أقل ملاءمة لتكاثر البعوض *الزجاج* ، البعوض الذي ينقل فيروس الشيكونغونيا إلى البشر. لاحظ أن ريونيون تقع في نصف الكرة الجنوبي. *الزراعة البيضاء* كان مسؤولاً أيضًا عن وباء صغير من حمى الضنك استمر من أبريل إلى يوليو 2004 ، أي حتى بداية فصل الشتاء الجنوبي (بيير وآخرون ، 2005). وقد دفع هذا على الأرجح علماء الأوبئة المحليين إلى الاعتقاد بأن سيناريو وباء حمى الضنك سوف يتكرر مع الشيكونغونيا إن مكافحة ناقلات الأمراض على نطاق صغير ، إلى جانب البحث النشط عن الحالات البشرية ، ستكون كافية لوقف الوباء قبل نهاية الشتاء. لم يكن هذا هو الحال بعد الوصول إلى ما لا يقل عن 100 حالة جديدة أسبوعيًا في سبتمبر 2005 ، بدأ وباء الشيكونغونيا في النمو مرة أخرى ووصل إلى ذروة مذهلة 40 000 حالات جديدة في الأسبوع في فبراير 2006. وبحلول ذلك الوقت ، أصبح الوباء موضوع جدل علمي وسياسي. لماذا لم يتمكن علماء الأوبئة من التنبؤ بالوباء؟ لماذا لم تقم وزارة الصحة بإطلاق حملة واسعة النطاق لمكافحة ناقلات المرض في وقت مبكر بما فيه الكفاية؟ اعتبارًا من يوليو 2006 ، أكثر من 260 000 أصيب بالناس بالمرض منذ بداية الوباء ، أو حوالي ثلث سكان الجزيرة. ذكرت حوالي 200 شهادة وفاة من الشيكونغونيا هي أحد أسباب الوفاة. بالإضافة إلى ذلك ، كان للوباء تأثير كبير على اقتصاد الجزيرة ، ولا سيما السياحة ، التي تعد واحدة من الصناعات الرئيسية. أدى التأثير المشترك للشتاء ومكافحة النواقل الآن إلى انخفاض عدد الحالات الجديدة في الأسبوع إلى أقل من ألف حالة.



الشكل 1. (أ) العدد التقديري للحالات الجديدة في الأسبوع المرسومة على مقياسين مختلفين. على المحور الرأسي على اليسار ، يمكننا أن نرى بوضوح منحني الوباء لعام 2005. على المحور الرأسي على اليمين ، يمكننا أن نرى كيف تطورت في عام 2006. بيانات من معهد مراقبة الصحة. (ب) درجات الحرارة القصوى الدنيا بالدرجات المئوية (المنحنيات العلوية والمتوسطة ، المحور الأيسر) Météo France وهطول الأمطار بالمليمتر في الشهر (المنحني السفلي ، المحور الأيمن) في مدينة سانت ماري في ريونيون. بيانات

السؤال المهم ولكن الصعب هو ما إذا كان الوباء سيمر خلال الشتاء مرة أخرى ويسبب ذروة أخرى مهمة في الصيف المقبل. اعتاد العلماء على التفكير بطريقة مبسطة حول هذا النوع من الأسئلة. إنهم مهتمون بمعلمة رئيسية مرتبطة بالوباء ، التكاثر  $R_0$  ، يُعرّف بشكل فضفاض بأنه متوسط عدد الحالات الثانوية التي تسببها الحالة الأولى في بداية الوباء. إذا  $R_0 > 1$  ، تم تطور الوباء. إذا  $R_0 < 1$  ، تم توقفه. بعد عمل رونالد روس (1911) بشأن الملاريا ، تم الحصول على الصيغة التالية للتكاثر في حالة الأمراض المنقولة بالناقل:

$$R_0 = \frac{\beta^2 q q' p}{\alpha \mu P} , \quad (1)$$

أين  $\beta$  هو التردد الذي تلدغ به المتجهات ،  $q'$  هي احتمالات الانتقال من الناقل إلى الإنسان ومن الإنسان إلى الناقل ،  $p$  هو سكان النواقل ،  $P$  هو السكان البشر ،  $1/\alpha$  هو متوسط مدة العدوى في البشر و  $1/\mu$  من منظور تاريخي). تظهر هذه الصيغة على وجه الخصوص أن قابلية التكاثر (Heesterbeek، 2002) و (Bailey، 1982؛ Anderson and May، 1991) هو متوسط العمر المتوقع لناقلات البالغين (انظر متناسب مع عدد المتجهات. وبالتالي ، إذا استطاع نظام التردد تتبع التغيرات في كثافة ناقلات المرض قبل الوباء وخلالها ، وإذا كانت القيمة العددية لـ  $R_0$  كان معروفًا من وباء سابق أو تم تقديره بالصيغة (1) ، ثم يتوقع المرء أن يتوقف الوباء عندما يقسم التدخل ضد المتجهات كثافته  $R_0$ . ولكن نظرًا لعدم وجود نظام مراقبة يراقب حاليًا كثافة مرض الزهايمر في مدينة ريونيون ، فإن الطريقة التي تم وصفها للتو لا يمكن أن تعمل. لذلك يبدو من المستحيل ببساطة الإجابة بشكل معقول على سؤال ما إذا كان وباء الشيكونغونيا سيمر خلال الشتاء مرة أخرى.

في هذه المقالة ، نركز على الجزء النظري من المشكلة ، وهو تقدير قابلية التكاثر  $R_0$ . ومن الجوانب البارزة لوباء الشيكونغونيا الموسمية. الآن صيغة (1) تفترض أن السكان ص المتجهات ثابتة طوال العام. تنشأ عدة أسئلة: كيفية تحديد قابلية التكاثر إذا أخذنا في الاعتبار الموسمية ، على سبيل المثال إذا افترضنا أن مجموعة المتجه هي وظيفة دورية للوقت؟ كيف تحسب هذا التكاثر؟ هل هناك حالات خاصة يمكننا فيها الحصول على صيغة بسيطة مشابهة لـ (1)؟ من الواضح أن هذه الأسئلة ليست خاصة بالشيكونغونيا. تنشأ على سبيل المثال أثناء ظهور أمراض أخرى منقولة بالناقل وبشكل عام لمشاكل ديناميات السكان المتأثرة بالموسمية: ... وآخرون ، 2006) ، علم البيئة ، الديموغرافيا ، علم المناعة ، علم الوراثة السكانية (Altizer)

بدأت الأعمال الأخيرة (باقر وجرناوي ، 2006) في الإجابة عن بعض هذه الأسئلة. يحتوي على تعريف للتكاثر في بيئة دورية مثل نصف القطر الطيفي لعامل خطي متكامل على مساحة من الوظائف الدورية. وكتاب ديكنان (1998) ، Anita et al.، 1985؛ Jagers and Nerman، 1984؛ Thieme، 1972؛ Coale) التعريف مستوحى من العمل السابق على ديناميات السكان منظم حسب العمر مع المعاملات الدورية يحتوي أيضًا على حوارية مبينة على تقدير (Baca andr and Guernaoui، 2006) ، وهينستريك (2000) ، والتي تسلط الضوء على فكرة "مصنوفة الجيل التالي" و "مشغل الجيل التالي" لتحديد قابلية التكاثر من عامل التشغيل المتكامل. استخدمنا هذه الحوارية لتقدير التكاثر خلال وباء داء الليشمانيات في المغرب. تم التعرف على التقلبات في عدد ناقلات المرض بدقة من المسوحات الميدانية.

مقالتنا منظمة على النحو التالي في القسم الثاني ، أدخلنا تعديلًا صغيرًا على تعريف قابلية التكاثر الذي قدمه (باكر وجبرناوي ، 2006 ، § 5). نحن نذكر هنا  $r_0$  نصف القطر الطيفي لـ "مشغل الجيل التالي" ، ناقشوا هذه النقطة بإيجاز بالفعل في حالة "مصنوفات الجيل التالي". نظهر أيضًا لفظة معينة من (2.1) Heesterbeek and Roberts، 1995b) ، والتي تسلط الضوء على فكرة "مصنوفة الجيل التالي" و "مشغل الجيل التالي" لتحديد قابلية التكاثر تختزل إلى مشكلة أحادية البعد. في معظم المقالة ، نحن مهتمون بالحالة الخاصة حيث يكون جوهر المشكلة المصغرة هو الشكل  $n$  النماذج ، والتي نسميها "دورية" ، أن المشكلة المتكاملة للقيمة الذاتية في البعد  $K(x, t) = f(t) G(x)$  ، أين  $f(t)$  هي وظيفة دورية. تتضمن هذه الحالة بالفعل العديد من نماذج الأمراض المنقولة بالناقل والأمراض المنقولة مباشرة

(4: Baca andr and Guernaoui، 2006) في القسم 3 ، يتم عرض أربع طرق رقمية لحساب التكاثر في مشاكل القيمة الذاتية المتكاملة أحادية البعد. الطريقة الأولى هي الطريقة التي تم تقديمها بالفعل في وليس التكاثر. تعمل هاتان الطريقتان Malthusian التي تدرس المعلمة ، وهي مستوحاة من Fourier وهي مجرد تقدير بسيط للعامل المتكامل. تستخدم الطريقة الثانية سلسلة الفصل ، (Coale ، 1972) لوظيفة عامة  $G(x)$  ووظيفة دورية  $f(t)$ . الطريقة الثالثة تتعلق فقط بحالة معينة حيث  $f(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)$  ؛ يجمع بين سلسلة فورييه مع طريقة اضطراب ضعيف. يشبه ذلك وليس في التكاثر. تعمل الطريقة الرابعة مع عوامل الجيل التالي الدورية المرتبطة بالنظم الخطية للمعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الدورية. تستخدم نظرية Malthusian (6) ، الذي يهتم أيضًا بالمعلمة Floquet (Heesterbeek and Roberts، 1995a، 1995b) ولكن بطريقة مختلفة.

في القسم 4 ، نأخذ في الاعتبار الأمراض المنقولة بالناقل ونفترض أن عدد الناقل يعطى بواسطة

$$p(t) = p_0 [1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)] . \quad (2)$$

باستخدام أول نموذج بسيط للملاريا ونتائج القسم 3.3 ، نوضح أنه مع نفس الرموز كما في (1) ، يتم إعطاء التكاثر بواسطة

$$R_0 \simeq \frac{\beta^2 q q' p_0}{\alpha \mu P} \left( 1 - \frac{\alpha \mu}{\omega^2 + (\alpha + \mu)^2} \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \quad (3)$$

أين  $\varepsilon$  صغير. تعمم هذه الصيغة الجديدة على ما يبدو الصيغة (1). يشبه المصطلح الأول حالة عدد ثابت من المتجهات ولكن مع استبدال السكان بمتوسطه. أقصى تصحيح نسبي بسبب المصطلح الثاني هو  $8/2$  عموماً دافعاً إلى تقليل التكاثر. ثم تنتقل إلى وباء الشيكونغونيا باستخدام نموذج أكثر تعقيداً قليلاً. لا يبدو الشكل المبسط (2) لمجموعة المتجهات غير معقول للغاية عندما ننظر إلى منحنيات درجة الحرارة وهطول الأمطار في ريونيون (الشكل 1 ب): كلاهما فقط بحد أقصى كل عام حوالي شهر فبراير. بعد تقدير معلمات هذا النموذج ، قارنا الطرق العديدة الأربعة للقسم 3 لحساب التكاثر. ومع ذلك ، لا ينبغي أن تؤخذ القيمة العديدة التي تم الحصول عليها بهذه الطريقة على محمل الجد بالنسبة لاستنتاج وباء الشيكونغونيا. قيم المعلمات ليست معروفة بدقة ؛ الفرضية (2) تبسيطية. إنها تمرين لاختبار الأساليب العديدة المختلفة. إنه مصدر إلهام لتطوير النظرية. إنها أول محاولة للنمذجة في انتظار الدراسات الميدانية حول تقلبات البعوض

بمعدل اتصال SIR يناقش القسم الأخير قابلية تطبيق طريقة القسم 3.3 للحصول على صيغ تقريبية للتكاثر في سياق النماذج الرياضية الأخرى للأمراض المعدية ذات المعاملات الدورية ، خاصة بالنسبة لنموذج مع معدل اتصال دوري وفترات الكمون والعدوى موزعة أضعافاً مضاعفة. كما تم تقديم مؤشرات أولية حول أهمية التكاثر في النماذج الوبائية العشوائية مع SEIR دوري وفترة معدية ثابتة ، وكذلك لنموذج الموسمية.

## 2. تعريف $R_0$

$x \geq 0$  مع معاملات موجبة أو صفرية. نفترض ذلك  $K(t, x) = K(t + \theta, x)$  إذا  $n \in \mathbb{R}$  و  $t \geq 0$  ،  $x \geq 0$  نفترض ذلك  $K(t, x)$  هي مصفوفة بحجم

الفكرة وراء الوظيفة  $K(t, x)$  هو نموذج الوباء مع  $n$  المقصورات "المصابة"  $(I_1, I_2, \dots, I_n)$  والتي يمكن أن تكون معدية أو كامنة. المعامل  $K_{i,j}(t, x)$  في السطر  $i$  والعمود  $j$  يمثل العدد المتوقع للأفراد في المقصورة  $I_i$  أن الفرد في المقصورة  $I_j$  يصيب في بداية وباء لكل وحدة من الوقت في الوقت  $r$  ، إذا كان في المقصورة  $I_j$  منذ ذلك الحين  $x$  وحدات الوقت. يغطي هذا الحالة حيث الأفراد في المقصورة  $I_j$  يصيب الأفراد الذين ينتهي بهم المطاف في المقصورة  $I_i$  ، ولكن أيضاً الحالة التي يكون فيها الأفراد في المقصورة  $I_j$  ببساطة تغيير المقصورات في النهاية  $I_i$ . افتراض الدورية على  $K(t, x)$  يمثل بيئة دورية

النظر في عامل التشغيل الخطي المتكامل  $\mathcal{K}$  معرفة بواسطة

$$(\mathcal{K}v)(t) = \int_0^\infty K(t, x) v(t-x) dx \quad (4)$$

على مساحة وظيفية  $\theta$ -غير دورية بـ  $\mathbb{R}^n$ . لنكون أكثر دقة ، نلاحظ أنه مع فرضيات الدورية على  $K(t, x)$  و  $v(t)$  ، يمكن كتابة المعادلة (4)

$$(\mathcal{K}v)(t) = \int_0^\theta \widehat{K}(t, s) v(s) ds$$

أين

$$\widehat{K}(t, s) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} K(t, t-s+k\theta), & s < t, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} K(t, t-s+k\theta), & s > t. \end{cases}$$

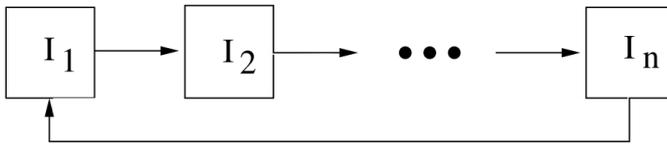
ذلك  $\mathcal{K}$  هو عامل خطي منموج لـ  $L^2((0, \theta), \mathbb{R}^n)$  في حد ذاته. كما في (Hochstadt, 1973, p. 51) نفترض ذلك  $\widehat{K}$  ينتمي إلى الفضاء  $L^2((0, \theta) \times (0, \theta), \mathbb{R}^{n \times n})$ . يوضح ملحق بسيط للنظرية 7 يمكننا تسمية  $\mathcal{K}$  "الجبل الخطي عامل" و  $K(t, x)$  النواة المرتبطة بها. إذا  $r_0$  هو نصف قطر الطيف  $\mathcal{K}$  ، نحدد التكاثر  $R_0$  بواسطة الصيغة  $R_0 = r_0^n$ . انظر ، (Diekmann and Heesterbeek, 2000, p. 77) ، من أجل مناقشة (§5 Baca andr and Guernaoui, 2006) للاطلاع على مناقشة لماذا يكون من الأسهل أحياناً اتخاذ  $R_0 = r_0^n$  ان  $R_0 = r_0$ . انظر أيضاً §2.1 (Heesterbeek and Roberts, 1995b) ، ص 74 (سبب هذا التعريف  $R_0$  يعمم التعريف المعتاد بدون الموسمية على أساس "مصفوفة الجبل التالي" (ديكمان وهيستر بيك ، 2000 ، ص 74

تظهر أن  $r_0$  هو قيمة ذاتية  $\mathcal{K}$  وأن هناك وظيفة ذاتية إيجابية (Krasnosel'skij et al., 1980, p. 87) عامل التشغيل الخطي  $\mathcal{K}$  أمر إيجابي. إذا  $r_0 > 0$  ، نظرية كيرين وروتمان (انظر النظرية 9.2 في  $L^2((0, \theta), \mathbb{R}^n)$  المرتبطة  $r_0$ . عن طريق التمديد  $v(t)$  بشكل دوري في  $\mathbb{R}$  ، يمكننا أن نكتب

$$\int_0^\infty K(t, x) v(t-x) dx = r_0 v(t) . \quad (5)$$

الشروط التي تضمن (Schaefer, 1974, p. 377) و (Krasnosel'skij et al., 1980) نجد في

في بقية هذه المقالة ، نعتبر النماذج "الدورية" التي لها الشكل الخاص التالي (الشكل 2): جميع العناصر  $K_{i,j}(t, x)$  النواة صفر باستثناء  $K_{1,n}(t, x)$  و  $K_{j+1,j}(t, x)$  لـ  $1 \leq j \leq n-1$ .



"الشكل 2. المقصورات المصابة في نموذج "دوري".

eigenvalue (5) وهذا يشمل بشكل خاص الحالة العامة ذات البعد الواحد  $n = 1$  مع جوهر تعسفي  $K(t, x)$ . إذا  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$  ، يتم كتابة المشكلة المتكاملة لـ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{1,n}(t, x) v_n(t-x) dx &= r_0 v_1(t), \\ \int_0^\infty K_{j+1,j}(t, x) v_j(t-x) dx &= r_0 v_{j+1}(t), \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

نستبدل المعادلة بالتتابع بـ  $j = n-1, j = n-2, \dots, j = 1$  زفي المعادلة الأولى. لان  $R_0 = r_0^n$  ، نحن نرى ذلك

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty K_{1,n}(t, x_1) K_{n,n-1}(t-x_1, x_2) \dots K_{2,1}(t-x_1-\dots-x_{n-1}, x_n) v_1(t-x_1-\dots-x_n) dx_1 \dots dx_n = R_0 v_1(t).$$

يجب ملاحظة خاصية مهمة: إذا كان عنصر غير صفري  $K_{i,j}(t, x)$  مضر وبتاً في ثابت معين  $R_0$  يتم ضربه أيضاً في نفس الثابت. تغيير المتغير  $(x_1 = x_1, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}, x = x_1 + \dots + x_n)$  يؤدي إلى

$$\int_0^\infty \widehat{K}(t, x) v_1(t-x) dx = R_0 v_1(t), \quad (6)$$

أين  $\widehat{K}(t, x)$  هو جزء لا يتجزأ من سطح الأرض

$$\bar{K}(t, x) = \int_{\sigma_x^n} K_{1,n}(t, x_1) K_{n,n-1}(t - x_1, x_2) \cdots K_{2,1}(t - x_1 - \cdots - x_{n-1}, x_n) d\sigma_x^n$$

6) (و)  $\sigma_x^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \cdots + x_n = x, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ . لذا قلنا من المشكلة المتكاملة  $n$ -قيمة الأبعاد المناسبة (5) لمشكلة أحادية البعد

في بقية المقالة باستثناء القسم 3.4 ، نعتبر الحالة الخاصة حيث

$$K_{1,n}(t, x) = f(t) g_n(x), \quad K_{j+1,j}(t, x) = g_j(x), \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (7)$$

6) تصبح المعادلة

$$f(t) \int_0^\infty G(x) v_1(t-x) dx = R_0 v_1(t), \quad (8)$$

أين

$$G(x) = \int_{\sigma_x^n} g_1(x_1) \cdots g_n(x_n) d\sigma_x. \quad (9)$$

لاحظ أنه إذا  $n = 1$  ، يتم تخفيض النواة إلى  $K(t, x) = f(t) g_1(x)$  بحيث  $G(x) = g_1(x)$ . لاحظ أيضًا أنه إذا

$$g_j(x) = a_j e^{-b_j x}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (10)$$

يمكننا أن نظهر (انظر الملحق) بدءًا من (9) ذلك

$$G(x) = a_1 \cdots a_n \sum_{j=1}^n \frac{e^{-b_j x}}{\prod_{k \neq j} (b_k - b_j)}. \quad (11)$$

هذه الصيغة لا تزال صالحة ل  $n = 1$  مع العرف المعتاد أن المنتج على مجموعة فارغة يساوي 1.

### 3. طرق حسابية $R_0$

#### 3.1 التمييز بين مشكلة القيمة الذاتية المتكاملة

و  $N t_k = (k-1)\theta/N$  تتكون هذه الطريقة من تعريف مشكلة التكامل الذاتي للقيمة الذاتية (8). وهي مقدمة في (باقر وجرناوي ، 2006 ، § 4) ؛ لذلك يتم استدعاؤها لفترة وجيزة فقط. نأخذ عددا كبيرا جدا  $N$  ونحدد  $k = 1, 2, \dots, N$  ،

$$\hat{G}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} G(x + k\theta). \quad (12)$$

نحن اسم  $\mathcal{R}_0$  نصف القطر الطيفي لمصفوفة مشكلة القيمة الذاتية

$$f(t_k) \frac{\theta}{N} \left[ \sum_{j=1}^{k-1} \hat{G}(t_k - t_j) \mathcal{V}_j + \sum_{j=k}^N \hat{G}(t_k - t_j + \theta) \mathcal{V}_j \right] = \mathcal{R}_0 \mathcal{V}_k, \quad (13)$$

لاحظ أنه إذا  $g_j(x) = a_j e^{-b_j x}$  للجميع Matlab وهو برنامج مجاني مشابه لـ Scilab (www.scilab.org) أين  $\mathcal{V}_j$  هو المتجه الذاتي. ثم  $\mathcal{R}_0 \rightarrow R_0$  إذا  $N \rightarrow +\infty$ . الحساب العددي  $\mathcal{R}_0$  يمكن القيام به مع  $1 \leq j \leq n$  ويتبرمج من (11) ذلك

$$\hat{G}(x) = a_1 \cdots a_n \sum_{j=1}^n \frac{e^{-b_j x}}{(1 - e^{-b_j \theta}) \prod_{i \neq j} (b_i - b_j)}. \quad (14)$$

#### 3.2 سلسلة فورييه: الحالة الدورية العامة

$f(t)$  : إذا  $\omega = 2\pi/\theta$  النظر في تحليل فورييه للوظيفة الدورية

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j e^{ji\omega t}, \quad f_j = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta f(t) e^{-ji\omega t} dt, \quad (15)$$

أين  $\mathbb{Z}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة (إيجابية أو سلبية) و  $i^2 = -1$ . إن  $f_j$  هي أرقام معقدة مع  $f_{-j} = f_j^*$  (\*يشير إلى الرقم المترافق المركب). نحن نبحت عن حل (8) وهو دالة حقيقية (وحتى إيجابية) للشكل

$$v_1(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ji\omega t}. \quad (16)$$

(ان)  $c_j$  هي أيضا أرقام معقدة مع  $c_{-j} = c_j^*$ . نستبدل (15) و (16) في (8) في

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j e^{ji\omega t} \right) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} G_j c_j e^{ji\omega t} \right) = R_0 \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ji\omega t}, \quad (17)$$

أين

$$G_j = \int_0^\infty G(x) e^{-ji\omega x} dx. \quad (18)$$

ويترتب على ذلك من (9) ذلك

$$G_j = \left( \int_0^\infty g_1(x) e^{-ji\omega x} dx \right) \cdots \left( \int_0^\infty g_n(x) e^{-ji\omega x} dx \right). \quad (19)$$

إذا  $1 \leq j \leq n$  ل  $g_j(x) = a_j e^{-b_j x}$  ثم

$$G_j = \frac{a_1 \cdots a_n}{(b_1 + ji\omega) \cdots (b_n + ji\omega)} \quad (20)$$

ل  $j \in \mathbb{Z}$  يمكن كتابة المعادلة (17)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j-k} G_k c_k \right) e^{j\omega t} = R_0 \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{j\omega t}.$$

هذه المساواة صحيحة إذا وفقط

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j-k} G_k c_k = R_0 c_j \quad (21)$$

بالنمو وإذا  $\mathcal{R}_0$  هو نصف القطر الطيفي للمصفوفة المربعة المقطوعة  $N$  لمصفوفة لا نهائية. لاحظ ذلك  $f_k \rightarrow 0$  و  $G_k \rightarrow \pm\infty$  إذا  $k \rightarrow \pm\infty$ . لذا إذا سمحنا لـ  $\lambda$  eigenvalue لـ  $j \in \mathbb{Z}$ . إنها مشكلة إذا  $\mathcal{R}_0 \rightarrow R_0$  ثم  $(f_{j-k} G_k)_{-N \leq j, k \leq N} \rightarrow +\infty$ .

### 3.3 سلسلة فورييه: الحالة الجيبية

نفترض ذلك

$$f(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi), \quad (22)$$

أين  $0 \leq \phi < 2\pi$  و  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . وهذا ما يسمى بالوظيفة "الجيبية". لمشكلة القيمة الذاتية (8)، فارق زمني من  $f(t)$  لا يتغير  $R_0$ . في الواقع، إذا  $R_0$  نصف القطر الطيفي المرتبط بـ  $f(t)$  بوظيفتها الخاصة  $v_1(t)$ ، ثم  $R_0$  لا يزال نصف القطر الطيفي المرتبط بـ  $f(t-h)$  بوظيفتها الخاصة  $v_1(t-h)$ . لحساب  $R_0$ ، يمكننا إذن أن نفترض ذلك  $\phi = 0$ ، بحيث

$$f(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\omega t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\omega t}.$$

(من الواضح أن لدينا  $f_0 = 1$ ،  $f_1 = f_{-1} = \frac{\varepsilon}{2}$  و  $f_k = 0$  لـ  $|k| > 1$ ). يصبح النظام (21)

$$\frac{\varepsilon}{2} G_{j-1} c_{j-1} + G_j c_j + \frac{\varepsilon}{2} G_{j+1} c_{j+1} = R_0 c_j \quad (23)$$

لـ  $j \in \mathbb{Z}$ . لأن  $G(x)$  مع القيم الحقيقية، لدينا  $G_{-j} = G_j^*$ . لذلك، يتبع ذلك المعادلة (23) بـ  $c_{-j}$  في الطرف الأيمن هو ببساطة المعقد المترافق (23) مع  $c_j$  في الجانب الأيمن. لذا يمكننا أن ننسى المعادلة (23) لـ  $j < 0$ . ننكر أن  $c_1^* = c_{-1}^*$  و  $G_{-1} = G_1^*$ . مشكلة القيمة الذاتية (23) مع  $j \in \mathbb{Z}$  يتم تخفيضه إلى

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} G_1^* c_1^* + G_0 c_0 + \frac{\varepsilon}{2} G_1 c_1 = R_0 c_0, \\ \frac{\varepsilon}{2} G_{j-1} c_{j-1} + G_j c_j + \frac{\varepsilon}{2} G_{j+1} c_{j+1} = R_0 c_j, \quad (j \geq 1). \end{cases} \quad (24)$$

الوظيفة المناسبة  $v_1(t)$  يمكن تطبيقه بحيث  $c_0 = 1$ . من الممكن لأنه  $v_1(t)$  هو أمر إيجابي للغاية بحيث  $c_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta v_1(t) dt > 0$ . دعونا نبحث عن حل لنظام (24) من النموذج

$$R_0 = \sum_{k \geq 0} \rho_k \varepsilon^k, \quad c_j = \sum_{k \geq 0} c_{j,k} \varepsilon^k, \quad (25)$$

الذي من المتوقع أن يكون صالحًا على الأقل لـ  $\varepsilon$  صغير. مع  $c_0 = 1$  لاحظ ذلك  $c_{0,0} = 1$  و  $c_{0,k} = 0$  لجميع  $k \geq 1$ . ندرج (25) في المعادلة الأولى (24) ونفصل بين قوى  $\varepsilon^k$ . نحصل  $G_0 = \rho_0$  و

$$\frac{G_1^*}{2} c_{1,k-1}^* + \frac{G_1}{2} c_{1,k-1} = \rho_k \quad (26)$$

لـ  $k \geq 1$ . وبالمثل ندخل (25) في المعادلة الثانية (24)  $G_j c_{j,0} = \rho_0 c_{j,0}$  لـ  $j \geq 1$  و

$$\frac{G_{j-1}}{2} c_{j-1,k-1} + G_j c_{j,k} + \frac{G_{j+1}}{2} c_{j+1,k-1} = \sum_{l=0}^k \rho_l c_{j,k-l} \quad (27)$$

لـ  $j \geq 1$  و  $k \geq 1$ . لذا  $c_{j,0} = 0$  لأن  $G(x)$  هو إيجابي وليس مطابقًا تمامًا لذلك  $\int_0^\infty (1 - e^{-j\omega x}) G(x) dx \neq 0$ .  $G_0 - G_j = \int_0^\infty (1 - e^{-j\omega x}) G(x) dx \neq 0$ . لذا

$$\rho_0 = G_0, \quad c_{j,0} = 0 \quad (j \geq 1), \quad c_{0,0} = 1, \quad c_{0,k} = 0 \quad (k \geq 1),$$

نرى مع (26) و (27) أن المعاملات  $\rho_k$  و  $c_{j,k}$  لـ  $j \geq 1$  و  $k \geq 1$  يتم حسابها بشكل متكرر:

$$\rho_k = \Re(G_1 c_{1,k-1}), \quad (28)$$

$$c_{j,k} = \frac{1}{G_0 - G_j} \left[ \frac{G_{j-1}}{2} c_{j-1,k-1} + \frac{G_{j+1}}{2} c_{j+1,k-1} - \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l c_{j,k-l} \right], \quad (29)$$

أين  $\Re(z)$  يدل على الجزء الحقيقي من العدد المركب  $z$ . بشكل أكثر تحديدًا، إذا كانت المعاملات  $\rho_l$  و  $c_{j,l}$  تحسب لـ  $l \leq k-1$  و  $j \geq 1$ ، ثم تعطي الصيغ تعبيرًا لـ  $\rho_k$  و  $c_{j,k}$  لـ  $j \geq 1$ . يمكن أن تبدأ هذه الخوارزمية بسبب  $\rho_0$  والمعاملات  $c_{j,0}$  معروفة. باستخدام (28) - (29)، يمكننا أن نرى ذلك بسهولة  $c_{j,k} = 0$  لـ  $j > k$ ، ان  $\rho_k = 0$  لأي عدد صحيح فردي  $k$  وذلك  $c_{j,k} = 0$  إذا  $j \geq 1$  غريب بينما  $k \geq 1$  حتى.

من الناحية العملية، دعنا نصلح عددًا صحيحًا  $\kappa > 1$  والنظر في المتجه  $(\rho_k)_{0 \leq k \leq \kappa}$  والمصفوفة المستطيلة  $(c_{j,k})_{0 \leq j \leq \kappa+1, 0 \leq k \leq \kappa}$ . دعونا نصلح  $G_0 = \rho_0$ ،  $c_{0,0} = 1$ ،  $c_{j,k} = 0$  لـ  $j > k$  في المصفوفة، و  $c_{0,k} = 0$  لـ  $1 \leq k \leq \kappa$ . تعمل الخوارزمية على النحو التالي:

لـ  $k=1$  إلى  $\kappa$ ،

(احسب  $\rho_k$  باستخدام (28))

لـ  $k=1$  إلى  $\kappa$ ،

(احسب  $c_{j,k}$  باستخدام (29))

نهاية؛

النهاية.

بهذه الطريقة، يمكننا أن نرى ذلك بسهولة

$$\rho_1 = 0, \quad c_{1,1} = \frac{G_0}{2(G_0 - G_1)}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{G_0 G_1}{G_0 - G_1} \right), \quad (30)$$

وأخيرًا نجد

$$R_0 \simeq G_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \Re \left( \frac{G_0 G_1}{G_0 - G_1} \right) \quad (31)$$

ل: تغيير  $\varepsilon$ ؛ وهو أدنى تصحيح للترتيب عندما يتم أخذ الاختلافات الموسمية في الانتعاش الصغير في الاعتبار. دعنا نقدم بعض التعليقات الإضافية

- نلاحظ ذلك

$$1 - \varepsilon \cos(\omega t - \phi) = 1 + \varepsilon \cos(\omega(t + \theta/2) - \phi).$$

لذا، تغيير  $\varepsilon$  في  $-\varepsilon$  يتوافق مع اختلاف الوقت  $f(t)$ . إذاً، وفقاً للملاحظة الواردة في بداية القسم 3.3،  $R_0$  يجب أن تبقى دون تغيير. هذا يفسر لماذا المعاملات الغربية  $\rho_{2k+1}$  ( $k \geq 0$ ) في تطوير المسلسل صفر  $R_0$ .

- الوظيفة الجيبية (22) ليست خاصة كما تبدو للوهلة الأولى. في الواقع، لأي وظيفة إيجابية  $\theta$  غير دورية  $f(t)$  على سبيل المثال بمتوسط يساوي 1، فإن الشروط الأولى لتطوير فورييه هي  $\phi = \arctan(f'_1/f_1) + 1 + f_1 \cos(\omega t) + f'_1 \sin(\omega t)$ ، والتي يمكن أن تأخذ الشكل  $1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)$  مع  $\varepsilon = \sqrt{(f_1)^2 + (f'_1)^2}$  و يبدو من الصعب تحديد نصف قطر تقارب السلسلة الكاملة (25). تظهر النظريات العامة حول الاضطرابات التحليلية للعوامل الخطية (كاتو، 1984) أن نصف القطر من التقارب إيجابي تماماً، لأن  $r_0$  هو بسيطة معزولة عن "مشغل الجيل القادم". (كاتو، 1984) طور أيضاً طرقاً غير تافهة للحصول على حدود أقل لهذه الاقطار: يلزم عمل إضافي لمحاولة تطبيقها في هذه الحالة. في eigenvalue قيمة الممارسة العملية، تعطي الخوارزمية في هذا القسم بسهولة  $\rho_k$  دعنا نقول  $k \leq 20$  أين  $k \leq 50$ . إذا كان التفتيش على النتائج يوحي بذلك  $\rho_k$  عندما  $k \rightarrow +\infty$ ، ثم هناك فرصة جيدة أن نصف قطر التقارب في سلسلة العطاء  $R_0$  أكبر من أو يساوي 1
- يمكن الاطلاع على طريقة الاضطراب الرسمية المستخدمة في هذا القسم من وجهة نظر النظرية الرياضية العامة التي طورتها (كاتو، 1984). لنأخذ على سبيل المثال الجانب الأيسر من (8) مع  $f(t)$  (22) كعامل خطي  $\mathcal{L}_\varepsilon$  على فضاء هيلبرت للوظائف الحقيقية  $\theta$ -فترة مربعة قابلة للتكامل مع منتج العدد العادي  $\int_0^\theta \psi_1(t) \psi_2(t) dt = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ . خذ بعين الاعتبار مشكلة القيمة الذاتية الذاتية  $\psi = \lambda \mathcal{L}_\varepsilon \psi$ ، وهذا يعني

$$\int_0^\infty G(x) \psi(t-x) dx = \lambda \psi(t).$$

دعونا نبحث عن حل للنموذج  $\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ki\omega t}$ . نجد ذلك  $a_k = 0$  للجميع  $k$ . لذلك يتم إعطاء القيم الذاتية من قبل  $\lambda_k = G_k$  ل  $k \in \mathbb{Z}$ ، والمساحة النظيفة المرتبطة  $\lambda_k$  يتم إنشاؤها بواسطة  $\psi_k(t) = e^{ki\omega t}$ . إن  $\psi_k$  يشكلون قاعدة. النظر في الأساس المزدوج  $\hat{\psi}_k(t) = e^{-ki\omega t}/\theta$ ، مثل  $(n \in \mathbb{Z})$   $\langle \psi_j, \hat{\psi}_k \rangle = 1$  ل  $j = k$  و  $0$  ل  $j \neq k$ . عامل التشغيل الخطي  $\mathcal{L}_\varepsilon$  في النموذج  $\mathcal{L}'$ ،  $\mathcal{L}' \psi = \lambda \mathcal{L}' \psi$ ، أين

$$(\mathcal{L}' \psi)(t) = \cos(\omega t - \phi) \int_0^\infty G(x) \psi(t-x) dx.$$

أمر إيجابي. باستخدام الصيغ التي قدمها (كاتو، 1984، ص 1) eigenfunction  $\psi_0 = 1$  نحن مهتمون بالاضطراب  $R_0 = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots$  القيمة الذاتية  $G_0$ ،  $\lambda_0 = \rho_0$ ، الذي يرتبط به (الفصل الحادي عشر) عندما يكون المشغلون المفصلات التلقائية) (Cohen-Tannoudji et al.، 1986، ص 81) في البعد المحدود (تظل هذه الصيغ صالحة في البعد اللانهائي ومعروفة جيداً في ميكانيكا الكم نحصل

$$\rho_1 = \langle \mathcal{L}' \psi_0, \hat{\psi}_0 \rangle = \frac{G_0}{\theta} \int_0^\theta \cos(\omega t - \phi) dt = 0,$$

و

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \mathcal{L}' \psi_0, \hat{\psi}_k \rangle \langle \mathcal{L}' \psi_k, \hat{\psi}_0 \rangle}{\lambda_0 - \lambda_k} \\ &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{k \neq 0} \frac{G_0 G_k}{G_0 - G_k} \left| \int_0^\theta \cos(\omega t - \phi) e^{ki\omega t} dt \right|^2 = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{G_0 G_1}{G_0 - G_1} \right), \end{aligned}$$

وهو مطابق لـ (30). إن التعابير الخاصة بالتصححات ذات الترتيب الأعلى تكون أكثر تعقيداً: الطريقة المخصصة والخوارزمية التي استخدمناها لحساب  $\rho_k$  تبدو أكثر عملية

### 3.4 تطبيق نظرية فلوكويت

في هذا القسم، نعتبر النظام الخطي للمعادلات التفاضلية العادية

$$\frac{dI_1}{dt} = -\alpha_1(t) I_1(t) + \beta_n(t) I_n(t), \quad (32)$$

$$\frac{dI_{j+1}}{dt} = -\alpha_{j+1}(t) I_{j+1}(t) + \beta_j I_j(t), \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (33)$$

حيث جميع الوظائف  $\alpha_j(t)$  و  $\beta_j(t)$  هم  $\theta$  غير دورية. يمكن أن يأتي هذا النظام من خطية بالقرب من التوازن الخالي من الأمراض لنموذج البوب غير الخطي. يتم إعطاء نواة عامل الجيل التالي المرتبط بها

$$\begin{aligned} K_{1,n}(t, x) &= \beta_n(t) e^{-\int_{t-x}^t \alpha_n(s) ds}, \\ K_{j+1,j}(x, t) &= \beta_j(t) e^{-\int_{t-x}^t \alpha_{j+1}(s) ds}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

و  $K_{i,j}(t, x) = 0$  لجميع المؤشرات الأخرى. وبالتالي فهو نموذج "دوري" بالمعنى المقصود في القسم 2. وتظهر ملاحظة في هذا القسم أنه على سبيل المثال  $\beta_n(t)$  مضروباً في ثابت معين، ثم يتم ضرب قابلية التكاثر بنفس الثابت.

تظهر نظرية فلوكويت المطبقة على النظام (32) - (33) أن التوازن الصفري غير مستقر إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة العام المقبل، المسمى أيضاً بمصفوفة أحادية، أكبر من 1. لذلك الاستنتاج هو أيضاً الرقم الحقيقي الإيجابي الوحيد، الذي  $\rho(X(\theta)) = 1$ ، أين  $\rho$  هو نصف القطر الطيفي للمصفوفة و

$$\frac{dX}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 & \frac{\beta_n(t)}{R_0} \\ \beta_1(t) & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1}(t) & -\alpha_n(t) \end{pmatrix} X(t)$$

Scilab مع الشرط الأولي  $X(0) = 1_n$  (مصفوفة هوية الحجم  $n$ ). لذا  $R_0$  يتم حسابها عن طريق الجمع بين طريقة الانقسام وبين حل المعادلات التفاضلية العادية رقمياً مثل

## 4. الأمراض المنقولة بالنواقل

### 4.1 الملاريا

نعتبر في هذا القسم نموذجاً بسيطاً جداً للملاريا، وهو اختلاف في أحد النماذج الأولى التي اقترحها رونالد روس (1911) مع عدد من المتجهات الدورية. دعنا نقدم الرموز التالية:  $S(t)$  هو السكان الأصحاء،  $I(t)$  السكان البشر المصابين،  $P = S(t) + I(t)$  إجمالي عدد السكان. كذلك،  $s(t)$  هو العدد الصحي لمتجه،  $i(t)$  عدد ناقلات المرض  $s(t) + i(t) = p(t)$  إجمالي عدد ناقلات المرض. بالإضافة إلى ذلك،

تعتبر المعلمات التالية  $\alpha$ : هي سرعة الشفاء من البشر.  $\beta$  هو التردد الذي تلدغ فيه المتجهات  $q$  (أو  $q'$ ) هو احتمال الانتقال من الناقل إلى الإنسان (أو من الإنسان إلى الناقل)؛  $\lambda(t)$  هو عدد المتجهات الجديدة البالغة التي تظهر لكل وحدة زمنية، وهي دالة  $\theta$ - دورية.  $\mu$  هو وفيات النواقل. النموذج كما يلي:

$$\frac{ds}{dt} = \lambda(t) - \beta q' s(t) \frac{I(t)}{P} - \mu s(t), \quad (34)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta q' s(t) \frac{I(t)}{P} - \mu i(t), \quad (35)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta q i(t) \frac{S(t)}{P} + \alpha I(t), \quad (36)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta q i(t) \frac{S(t)}{P} - \alpha I(t). \quad (37)$$

بإضافة (34) و (35) نرى ذلك  $\frac{dp}{dt} = \lambda(t) - \mu p(t)$  نفترض ذلك  $p(t)$  من قبل

$$p(t) = p_0 [1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)].$$

كما  $\mu$  معروف، هذا يحدد  $\lambda(t)$ . من خلال خط النظام (34) - (37) بالقرب من التوازن دون مرض، نحصل عليه

$$\frac{di_*}{dt} = \beta q' p(t) \frac{I_*(t)}{P} - \mu i_*(t), \quad \frac{dI_*}{dt} = \beta q i_*(t) - \alpha I_*(t). \quad (38)$$

جوهر مشغل الجيل التالي المرتبط هو

$$K(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta q' p(t)}{P} e^{-\alpha x} \\ \beta q e^{-\mu x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

هو "دوري" من شكل معين (7)، مع الوظائف  $g_j(x)$  ( $1 \leq j \leq 2$ ) للنموذج (10) و  $f(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)$  تعطي الصيغة (20)

$$G_j = \frac{\beta^2 q q' p_0}{(\alpha + j i \omega)(\mu + j i \omega) P} \quad (40)$$

ل  $j \in \mathbb{Z}$ . وأخيراً (31) من النموذج

$$R_0 \simeq \frac{\beta^2 q q' p_0}{\alpha \mu P} \left( 1 - \frac{\alpha \mu}{\omega^2 + (\alpha + \mu)^2} \frac{\varepsilon^2}{2} \right), \quad (41)$$

هذا هو أدنى تصنيف للترتيب (1). لاحظ أن لدينا عدم مساواة

$$0 \leq \frac{\alpha \mu}{\omega^2 + (\alpha + \mu)^2} \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

يتم الوصول إلى الحد الأعلى عندما  $\omega \gg \mu \simeq \alpha$ . لذلك نصل إلى الاستنتاج التالي:

المصطلح الأول في صيغة  $R_0$  هو نفسه بالنسبة للسكان  $p$  ثابت ناقل لكن مع  $p$  تم استبدالها بمتوسط سكان النواقل  $p_0$ . أقصى تصحيح نسبي بسبب المصطلح الثاني هو  $\varepsilon^2/8$  ويميل دائماً إلى الانخفاض  $R_0$ . لذا من الأصعب بقليل أن يعضو مرض ينقله النواقل السكان الذين يعانون من التقلبات.

نذكر أيضاً اثنين من الخصائص الأساسية لـ  $R_0$  في سياق الأمراض المنقولة: يمكن أن يتطور الوباء إذا فقط  $R_0 > 1$ ؛ يمكن تجنب الوباء إذا كان السكان  $p(t)$  من ناقلات ينقسم بشكل موحد  $R_0$  على مدار العام

## وباء الشيكونغونيا في ريونيون 2-4

الشيكونغونيا مرض فيروسي يبدو أنه يؤدي إلى مناعة دائمة. إذا أردنا أيضاً أن نأخذ في الاعتبار فترة الحضانة عند البشر وناقلات الأمراض، فإن النموذج التالي يبدو مناسباً:

$$\frac{ds}{dt} = \lambda(t) - \beta s(t) \frac{I(t)}{P} - \mu s(t), \quad (42)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta s(t) \frac{I(t)}{P} - (\gamma + \mu) e(t), \quad \frac{di}{dt} = \gamma e(t) - \mu i(t), \quad (43)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta i(t) \frac{S(t)}{P}, \quad (44)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta i(t) \frac{S(t)}{P} - \delta E(t), \quad \frac{dI}{dt} = \delta E(t) - \alpha I(t), \quad (44)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I(t), \quad (45)$$

أين  $e(t)$  (على التوالي  $E(t)$ ) هو عدد المتجهات المصابة ولكنها غير المعدية (على التوالي)،  $1/\gamma$  (على التوالي  $1/\delta$ ) هو متوسط فترة الحضانة في المتجهات (البشر على التوالي) و  $R(t)$  هو تعداد المناعة البشرية. لاحظ أن احتمالات الإرسال في المقصورات  $e$  و  $E$  هي باطلة وأولئك في المقصورات  $i$  و  $I$  يساوي 1. إجمالي عدد السكان  $P = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ ، بينما إجمالي عدد ناقلات  $\frac{dp}{dt} = \lambda(t) - \mu p(t)$ .

يستخدم هذا النموذج لمحاولة تقدير قابلية التكاثر لوباء الشيكونغونيا لعامي 2005 و 2006 في ريونيون. نظرًا لأن تقلبات المتجهات غير معروفة، فإننا نأخذ الشكل البسيط  $p(t) = p_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi))$ ، وهو أمر غير معقول للغاية عندما نلاحظ منحنيات درجة الحرارة وهطول الأمطار في ريونيون (الشكل ب)، ولديها حد أقصى سنوي واحد في شهر فبراير تقريباً وحد أدنى في يوليو. حتى الفترة  $\theta = \frac{2\pi}{365}$  من العمر سنة واحدة ويمكننا أخذها  $\phi = \frac{2\pi}{12}$ . الوظيفة  $s(t)$  يمكن التخلص من النظام (42) - (45) منذ ذلك الحين  $i(t) = e(t) - i(t) - p(t) = s(t)$ . يتم تلخيص القيم الأخرى للمعلمات المستخدمة للمحاكاة في وهو موقع مكان من قبل علماء الأوبئة المكرسة لوباء [chikungunya.net](http://chikungunya.net) رقم 83 يشير إلى السؤال 83 في قائمة الأسئلة الشائعة على موقع [chikungunya.net](http://chikungunya.net) (83/385/442). لاحظ على سبيل المثال أن الشيكونغونيا في ريونيون.

ولكن وفقاً لـ (156 #)، يمكن أن يبدأ الإنسان في [chikungunya.net](http://chikungunya.net) # 101 أو بين 4 و 7 أيام (Duhamel et al., 2006, p. 6) تشير التقديرات إلى أن الحضانة عند البشر تستمر ما بين 3 و 7 أيام أو بين 5 و 7 أيام (49،52 #). بالنظر إلى (Duhamel et al., 2006, p. 7) العدوى قبل يومين أو 3 أيام من الأعراض. لذلك اخترنا 4 أيام لفترة الحضانة. تقدر الفترة المعدية بعد الأعراض في البشر بنحو 5 أيام الملاحظة السابقة، نأخذ قيمة 7 أيام لكامل الفترة المعدية.

رقم 83)، أو ما بين 4 و 5 أيام (253 #)، أو بين أسبوعين وأسابيع (395 #). اخترنا 7 أيام. بمجرد [chikungunya.net](http://chikungunya.net) تشير التقديرات إلى أن فترة الحضانة في المتجهات تتراوح بين 9 و 14 يوماً الإصابة، يبدو أن المتجهات تبقى مصابة حتى تموت (83 #). يقدر أن عمر ناقلات البالغين يتراوح بين 4 و 10 أسابيع (83 #) أو "عدة" أسابيع (404 #). لقد اخترنا شهراً. يمكن للمتعلم أن يعض 5 أو 6 مرات خلال حياته (404 #): لقد اخترنا متوسط لدغة واحدة كل 4 أيام. من غير المعروف ما إذا كان الناقل المصاب يمكنه نقل الفيروس إلى بيضه (83/385/442): لا يأخذ نموذجنا هذه الإمكانية في الاعتبار.

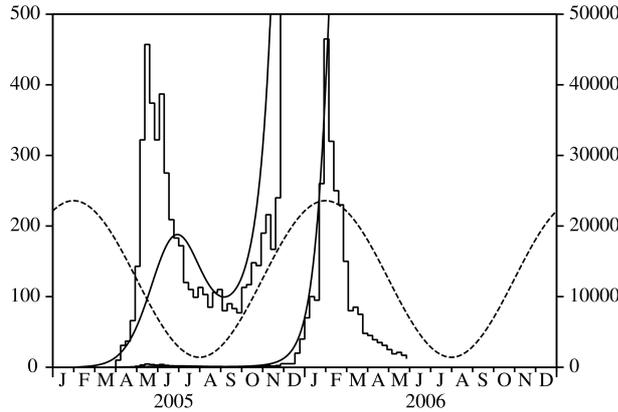
تؤدي العدوى في البشر إلى حالة من الحضانة (10/385 #)، والتي ربما تستمر لعدة سنوات على الأقل حيث لا يبدو أن أحداً قد عانى مرتين من الشيكونغونيا أثناء الوباء في ريونيون. تمثل الحالات بدون أعراض بين 10 و 15٪ من الحالات وفقاً لـ (385 #) ولكن لا يبدو أنها مدرجة في تقدير عدد الحالات في الشكل 1؛ لا يؤخذ في الاعتبار في النموذج.

الجدول 1. قيم المعلمات المستخدمة للمحاكاة

المعلمة	الرمز	القيمة
فترة الحضانة في المتجهات	$1/\gamma$	أيام 7
ناقلات الحياة	$1/\mu$	شهر واحد
فترة الحضانة عند البشر	$1/\delta$	أيام 4
الفترة المعدية في البشر	$1/\alpha$	أيام 7
الفترة بين لدغتين	$1/\beta$	أيام 4
سكان ريونيون	$P$	785 000
تحول موسمي	$\phi$	$\frac{2\pi}{12}$

تم اكتشاف أول حالة إصابة بالشيكونغونيا في ريونيون في 22 فبراير 2005. وربما تم استيرادها من جزر القمر ، حيث أصيب بالفعل عدة آلاف من الأشخاص. مع الأخذ في الاعتبار فترة الحضانة ومدة الإصابة يدخل سكان لاريونيون في بداية الأسبوع الخامس من 2005. نواصل محاكاة النموذج حتى بداية فبراير 2006 ، أي حتى تنفيذ مكافحة ناقلات الأمراض على نطاق  $E$  ، يفترض أن المحاكاة أن الإنسان في المقصورة واسع بعد الذروة العالية ؛ لا يتم تضمين عنصر التحكم هذا في النموذج. من المفترض أن مكافحة ناقلات صغيرة قبل هذا التاريخ لا تكاد تذكر في النموذج.

المعلمات  $p_0$  و  $\varepsilon$  بالنسبة لسكان الناقلات غير معروفة ويجب تقديرها باستخدام منحني الوباء (الشكل 1). دعونا نحدد  $p_{\min} = p_0(1 - \varepsilon)$  و  $p_{\max} = p_0(1 + \varepsilon)$ . بالخطأ ، نجد ملائمة مناسبة للمنحنى الوبائي ، بالنظر إلى بساطة النموذج ، مع الحد الأقصى لعدد اللدغات التي يتلقاها الإنسان في الأسبوع تساوي  $\beta p_{\max}/P = 1,2$  والحد الأدنى لعدد اللدغات لكل فرد في الأسبوع يساوي 6% من هذا الحد الأقصى ، أي  $p_{\min}/p_{\max} = 6\%$  (الشكل 3). نحصل من هذا  $\varepsilon = (p_{\max} - p_{\min})/(p_{\max} + p_{\min})$  و  $p_0 = (p_{\max} + p_{\min})/2$  ، رقمياً  $\varepsilon \simeq 0,8877$  و  $p_0 \simeq 20000$ .  $\varepsilon = (p_{\max} - p_{\min})/(p_{\max} + p_{\min})$  و  $p_0 = (p_{\max} + p_{\min})/2$  ، رقمياً  $\varepsilon \simeq 0,8877$  و  $p_0 \simeq 20000$ . يمكننا التحقق بسهولة من ذلك  $\varepsilon \leq 1/\sqrt{1 + (\omega/\mu)^2}$ .



الشكل 3. تقدير المعلمة  $p_0$  و  $\varepsilon$  عن طريق ملائمة المنحنى السلس الناتج عن النموذج إلى منحنى الوباء قبل مكافحة ناقلات الأمراض على نطاق واسع في فبراير 2006. يوضح المنحنى المنقطع (التيابن المقترض في عدد ناقلات المرض بدون مقياس).

الآن بعد أن تم إصلاح جميع معلمات هذا النموذج ، ننتقل إلى تقدير التكاثر. من خلال المعادلات الخطية (43) و (44) بالقرب من التوازن بدون مرض ، نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{de_*}{dt} &= \beta p(t) \frac{I_*(t)}{P} - (\gamma + \mu) e_*(t), & \frac{di_*}{dt} &= \gamma e_*(t) - \mu i_*(t), \\ \frac{dE_*}{dt} &= \beta i_*(t) - \delta E_*(t), & \frac{dI_*}{dt} &= \delta E_*(t) - \alpha I_*(t). \end{aligned}$$

جوهر مشغل الجيل التالي المرتبط هو

$$K(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\beta p(t)}{P} e^{-\alpha x} \\ \gamma e^{-(\gamma+\mu)x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta e^{-\mu x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta e^{-\delta x} & 0 \end{pmatrix}.$$

(هو "دوري" وشكل معين (7) مع  $f(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)$  بينما الوظائف  $g_j(x)$  (بصيغة (10)). لذا  $G(x)$  (11) ،  $\hat{G}(x)$  بواسطة (14) و  $G_k$  بواقع (20)

مع القيم العددية للمعلمات على النحو الوارد أعلاه ، نحصل  $R_0 \simeq 3,4$  باستخدام أي من الطرق الأربعة في القسم 3. يمكن تنزيل البرنامج من

[www.ummisco.ird.fr/perso/bacaer/chikungunya.sci](http://www.ummisco.ird.fr/perso/bacaer/chikungunya.sci).

توضح الجداول أدناه التقارب بين الطرق الثلاث الأولى. يبدو أن الطريقة الأولى (القسم 3.1) تتقارب ببطء أكثر من غيرها. ربما هذا لأنه يحل محل الوظيفة  $f(t)$  بواسطة وظيفة الدرج  $(f(t_k))_{1 \leq k \leq N}$  ، وهو ليس تقريباً جيداً لحالة معينة حيث  $f(t)$  هو جيبي. تستخدم الطريقة الثانية (القسم 3.2) معاملات فورييه  $f_k$  من  $f(t)$  ، وهو في حالتنا الخاصة ببساطة  $f_0 = 1$  ،  $f_1 = f_{-1} = \frac{\varepsilon}{2}$  ،  $f_k = 0$  لـ  $|k| > 1$ . وبسبب هذا ، فإن تقارب الطريقة سريع جداً. تتطلب هاتان الطريقتان حساب نصف القطر الطيفي لمصفوفة معينة. على العكس من ذلك ، فإن الطريقة الثالثة (القسم 3.3) تتطلب فقط عمليات أولية ويمكن تنفيذها تقريباً باستخدام آلة حاسبة بسيطة. نذكر أن  $\kappa$  هو عدد المصطلحات التي نحتفظ بها في التعبير  $R_0$  في سلسلة من صلاحيات  $\varepsilon$ . يمكن أن نلاحظ أن التقريب المعطى بالصيغة (1) مع  $p$  تم استبداله بالمعدل  $p_0$  عدد ناقلات المرض ، يتوافق مع  $\kappa = 0$  في الجدول. الفرق مع القيمة "الدقيقة"  $R_0$  من 14%. إذا قمنا بتضمين مصطلح النظام  $\kappa^2$  كما في الصيغة (31) ، يتم تخفيض الفرق إلى 2% و لو عاينست صغيرة جداً. يتم تحديد تقارب الطريقة يمكنك بسهولة العثور على القيمة الصحيحة  $R_0 \simeq 3,389$  بعد عدد من تكرارات ، Scilab الرابعة (القسم 3.4) من خلال تقدير المعادلة التفاضلية. وهي المعادلة التفاضلية التي تتحكم بشكل عام في ذلك. مع الانقسام.

تقارب الطريقة الأولى:

$N$	12	25	50	100	200
$R_0$	3,100	3,399	3,392	3,389	3,389

تقارب الطريقة الثانية:

$N$	0	1	2	3	4
$R_0$	3,868	3,496	3,418	3,389	3,389

تقارب الطريقة الثالثة:

$\kappa$	0	2	4	10	12
----------	---	---	---	----	----

دعونا نكرر: القيمة العددية التي تم الحصول عليها  $R_0$  لوباء الشيكونغونيا لا ينبغي أن تؤخذ على محمل الجد لأن قيم المعلمات غير دقيقة وبالنظر إلى بساطة الفرضية (2). يمكننا أن ننظر إلى هذا على أنه تمرين لاختبار الأساليب العددية المختلفة، كمصدر للإلهام لتطوير النظرية، أو كمحاولة أولى للنمذجة أثناء انتظار المسوحات الميدانية المتعلقة بتقلبات السكان في مرض الزهايمر الأبيض.

## 5. ملاحظات ختامية

### 5.1 تطبيقات أخرى

$n = 1$  نماذج وبائية مع

ضع في اعتبارك نموذجًا وبائيًا يحتوي على حجرة مصابة ونواة من النموذج

$$K(t, x) = [1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)] g(x). \quad (46)$$

بمعدل اتصال جيبية SIS / SIR / SIRS ثم  $G(x) = g(x)$  كما لوحظ بالفعل في القسم 2 و  $R_0$  يمكن تناوله بالصيغة (31). تظهر النواة (46) على سبيل المثال في نماذج وباء

ثم  $G(x) = a e^{-bx}$  ويمكننا التحقق بسهولة من ذلك، (Kuznetsov and Piccardi، 1994؛ Grossman et al.، 1977؛ Dietz، 1976) إذا تم توزيع الفترة المعدية بشكل كبير كما هو الحال في أظهرت الصيغة الدقيقة  $R_0 = a/b$  في هذه الحالة. بالطبع هذه "النتيجة" (5) (Bacaër and Guernaoui، 2006؛  $G_0 = a/b$  وأن معامل  $\varepsilon^2$  في (31) يلغى  $a/b \simeq R_0$ . بنفس التعريف لـ  $R_0$  أن تلك المقالة لوحظت منذ فترة طويلة، حيث تظهر النواة (46) مرتبطة بالمعادلة

$$\frac{dI}{dt} = a(1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)) I(t) - b I(t),$$

التي يمكننا حلها بشكل صريح، والتي تظهر لها بسهولة أن حالة التوازن الصفري غير مستقرة إذا وفقط إذا  $a/b > 1$ . قياسًا على حالة تافهة حيث  $\varepsilon = 0$ ، وقد طرح العديد من المؤلفين  $R_0 = a/b$  كتعريف، لاحظت ذلك  $R_0$  كان متوسط الوقت للوظيفة  $a(1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi))/b$ ، ويعتقد أن خاصية المتوسط هذه لا تزال صالحة للنماذج الأكثر تعقيدًا؛ ليست هذه هي القضية

ثم  $G(x) = a$  لـ  $x < \tau$  و  $x > \tau$ ، (Cooke and Kaplan، 1976؛ Smith، 1977؛ Nussbaum، 1977؛ Nussbaum، 1978؛ Grossman، 1980) إذا كانت الفترة المعدية ثابتة  $\tau$  تم إصلاحه كما في  $G_1 = a \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{i\omega}$ ،  $G_0 = a\tau$  ثم  $x > \tau \cup G(x) = 0$  و (31) يعطي

$$R_0 \simeq a\tau + \varepsilon^2 \frac{2a\tau \sin^2(\omega\tau/2)}{[\omega\tau - \sin(\omega\tau)]^2 + [1 - \cos(\omega\tau)]^2} \left[ \frac{\omega\tau/2}{\tan(\omega\tau/2)} - 1 \right]. \quad (47)$$

(Cooke and Kaplan، 1976؛ Smith، 1977؛ Nussbaum، 1977؛ Nussbaum، 1978) توضح هذه الصيغة أنه، على عكس نموذج الملايا في القسم 4.1، يمكن أن تزداد الموسمية أو تتخفف  $R_0$  حسب القيمة العددية لـ  $\omega\tau$ . لاحظ أنه في حالة استثنائية حيث  $\omega = 2\pi$  و  $a = 1$  نظرت فيه تقول الصيغة (47) أن  $R_0 = 1 + o(\varepsilon^2)$  متى  $\tau = 1$ . نتوقع أن يكون لدينا الصيغة الدقيقة  $R_0 = 1$  للجميع  $\varepsilon$  متى، (Nussbaum، 1977؛ Nussbaum، 1978؛ Smith، 1977؛ Nussbaum، 1978) أظهرت أن الحلول الدورية لنموذج الوباء الكامل غير الخطي موجودة إذا وفقط إذا  $\tau = 1$  منذ (سميث، 1977؛ نوسبوم، 1977).

$n = 2$  نماذج وبائية مع

ضع في اعتبارك نموذجًا وبائيًا يحتوي على حجرتين مصابتين، والذي بمجرد أن يصبح خطيًا بالقرب من التوازن دون مرض، يأخذ

$$\frac{dI_1}{dt} \simeq -b_1 I_1(t) + a_2 [1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)] I_2(t), \quad \frac{dI_2}{dt} \simeq a_1 I_1(t) - b_2 I_2(t).$$

علما بأن النظام (38) كان بهذا الشكل. جوهر مشغل الجبل التالي المرتبط هو

$$K(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & [1 + \varepsilon \cos(\omega t - \phi)] a_2 e^{-b_2 x} \\ a_1 e^{-b_1 x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

(تعطي الصيغة 31)

$$R_0 \simeq \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \left( 1 - \frac{b_1 b_2}{\omega^2 + (b_1 + b_2)^2} \frac{\varepsilon^2}{2} \right). \quad (49)$$

القيم الرقمية المستخدمة في هذا المرجع هي:  $\omega = 2\pi$ ،  $\varepsilon = 15/25$ ،  $a_1 = 20$  سنويًا،  $a_2 = 20 \times 25$  سنويًا، (Anderson and May، 1991، p. 404) مثال على هذا النوع هو نموذج الملايا  $R_0 \simeq 49.4$  (49) والصيغة التقريبية 3 و  $b_1 = 50\rho_0 = 50$  في السنة و  $b_2 = 4$  سنويًا. وتعطي الطرق العددية الأربع للقسام والصيغة التقريبية (49)  $R_0 \simeq 49.4$  لاحظ أن مصطلح الحد الأدنى هو

(Kuznetsov and Piccardi، 1984؛ Aron and Schwartz، 1983؛ Schwartz and Smith، 1983) مع معدل اتصال جيبية يعتبر على سبيل المثال في SEIR أو SEIRS مثال آخر هو نموذج وباء هي:  $\omega = 1$ ،  $\varepsilon = 0.8$ ،  $a_1 = 0.3$ ،  $a_2 = 1$ ،  $b_1 = 0.3$ ،  $b_2 = 0.99$  (Ma and Ma، 2006، §4) و (ما وما، 2006، §4). القيم العددية المستخدمة من قبل (Altizer et al.، 2006، Box 1) (الوحدات غير محددة). وقد أظهرت المحاكاة العددية أنه لا يمكن تحديد أي وباء في هذه الحالة. لكن مع  $\varepsilon = 0$ ، لاحظ المؤلفون أن  $R_0 = \rho_0 = (a_1 a_2) / (b_1 b_2) = 1/0.99 > 1$  وكان الاستنتاج هو أن  $R_0 \simeq 0.974$  (متوسط معدل التلامس ليس الطريقة الصحيحة لتحديد عتبة الوباء. وبالفعل، فإن الطرق العددية الأربع للقسام تعطي  $R_0 \simeq 0.973 < 1$  تعطي الصيغة التقريبية (49).

يعتبر هذا المرجع أيضًا الحالة التي يكون فيها المعامل  $b_2$  يمثل معدل اختفاء الضمة الكوليرية في الماء. (Codeço، 2001) مثال آخر هو نموذج الكوليرا بمعدل تلامس جيبية بالماء أو معدل تلوث جيبية بالماء وظيفية جيبية للوقت. لا تقدم هذه المقالة صيغة تقريبية للتكاثر في الحالة الأخيرة، ولكن  $R_0$  لا يزال يمكن حسابها رقميًا باستخدام الطريقة الواردة في القسم 3.4 على سبيل المثال

مع التطعيم ومعدل الاتصال الدوري يتم حسابها بواسطة صيغة بسيطة بعد أخذ SEIRS والذي يشير إلى أن قابلية التكاثر (مع حد 1) لنموذج، (Moneim and Greenhalgh، 2005) نذكر أيضًا "التخمين" لمتوسط معاملات النظام الخطي على مدى فترة. لا يعطي هذا المرجع أي مثال رقمي. ولكن إذا افترضنا أن معدل الاتصال ثابت وأن معدل التطعيم يكون لدرجة أن السكان المعرضين للحالة في حالة خالية من المرض هم جيبيون، ثم  $K(t, x)$  هو بالضبط شكل (48) و  $R_0$  (49). إذا كان المتوسط صحيحًا، فلا يجب أن تعتمد النتيجة على  $\varepsilon$ . لذا يبدو أن "التخمين" خطأ

### 5.3 الحالة العشوائية

سيكون من المفيد لوباء الشيكونغونيا في ريبونيون الحصول على تقدير لاحتمال وفاة الوباء بسبب فصل الشتاء، مع معرفة حجم السكان المصابين في بداية فصل الشتاء. للإجابة على هذا السؤال، من الواضح أننا بحاجة إلى نموذج عشوائي. ولكن من الصعب تحليل النماذج العشوائية للأمراض المنقولة بالناقل الموسمية. في هذا القسم، نعرض الصلة بين احتمال الانقراض في الوقت المناسب  $t$  والاستنساخ  $R_0$  باستخدام نموذج وبائي بسيط للغاية مع الموسمية

فكر في عملية الولادة والموت بالمعاملات  $a(t)$  و  $b(t)$  من هم  $\theta$ -دورية

$$\frac{dW_k}{dt} = a(t) (k-1) W_{k-1}(t) - [a(t) + b(t)] k W_k(t) + b(t) (k+1) W_{k+1}(t), \quad k \geq 1$$

ثم  $W_Z(T) = 0$  و  $W_Z(T) = 1$  إذا  $Z$  المصابين ( $Z \geq 1$ ) يتم تقديمها أو حضورها في وقت  $t$ . هنا  $dW_0/dt = b(t) W_1(t)$  و  $W_k(t)$  هو احتمال إصابتك بالعدوى في الوقت عن طريق حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الأولى التي تم التحقق منها بواسطة دالة التوليد  $g(t, x) = \sum_{k \geq 0} W_k(t) x^k$ . النتيجة، التي قدمها (بارتليت،  $t$ ،  $W_0(t)$  يتم حساب الانقراض في الوقت (1960)، لا تزال صالحة حتى لو  $a(t)$  و  $b(t)$  ليست دورية

$$W_0(t) = \left[ 1 - \frac{e^{-\int_0^t (b(\tau) - a(\tau)) d\tau}}{1 + \int_0^t a(\tau) e^{-\int_0^\tau (b(\sigma) - a(\sigma)) d\sigma} d\tau} \right]^Z.$$

لاحظ أن التوقع  $I(t)$  عدد المصابين في ذلك الوقت  $t$  من قبل

$$I(t) = \sum_{k \geq 1} k W_k(t), \quad \frac{dI}{dt} = a(t) I(t) - b(t) I(t).$$

للوظائف  $a(t)$  و  $b(t)$  والتي هي دورية ، استنتاج  $R_0$  المحددة في القسم 2 من قبل (Bacaër and Guernaoui, 2006, §5) كما يمكننا أن نخمن مع هذه المعادلة التفاضلية ، وكما هو موضح

$$R_0 = \left( \int_0^\theta a(\tau) d\tau \right) / \left( \int_0^\theta b(\tau) d\tau \right).$$

لاحظ أنه إذا  $R_0 < 1$  ، ثم  $W_0(t) \rightarrow 0$  ، ثم  $W_0(t) \rightarrow +\infty$  : الوء ينتهي. إذا  $R_0 > 1$  ، ثم

$$W_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left[ 1 - 1 / \int_0^\infty a(\tau) e^{\int_0^\tau (b(\sigma) - a(\sigma)) d\sigma} d\tau \right]^Z$$

وهناك احتمال معين بأن يستمر الوء.

استنتاج ذلك  $R_0$  كما أنه بمثابة عتبة بين الحالة التي يموت فيها الوء باحتمال يساوي 1 مهما كان الوقت الأولي لإدخال الحالة المصابة الأولى ، ومن ناحية أخرى الحالة التي يكون فيها الوء ق 'مطفأة باحتمالية صارمة بين 0 و 1 وتعتمد على الوقت الأولي. يمكننا أن نأمل في الحصول على ظاهرة عتبة مماثلة لنماذج أمراض ناقلات العنوشانية مع الموسمية. ولكن هناك حاجة إلى مزيد من العمل للتحقق من هذه النقطة

لاحظ أن هذا القسم يتجنب تقديم إنتاجية تعتمد على الوقت ، "  $R_0(t)$  " ، تعرف على سبيل المثال في حالة الأمراض المنقولة بواسطة الصيغة (1) مع  $p$  تم استبداله بـ  $p(t)$ . يبدو أن هذا التعبير مرشح جيد لمناقشة الغزو كدالة لوقت إدخال العامل الممرض. لكن مثال (هيل ، 1980 ، ص 121) المذكور في (ديكمان وهينستريك ، 2000 ، ص 149) يشير بالفعل إلى أن الحالة التالية قد تحدث بشكل جيد:  $R_0(t) < 1$  لجميع  $t$  لكن التوازن الخالي من الأمراض غير مستقر ، وهذا يعني  $R_0 > 1$  مع  $R_0$  كما هو موضح في هذه المقالة. من جهة أخرى،  $R_0$  بشكل عام ليس متوسط الوقت "  $R_0(t)$  " (مع بعض الاستثناءات مثل الحالة حيث  $K(t, x) = a(t) e^{-bx}$  درس في القسم 5.1.1). من وجهة نظر بيولوجية ، من الواضح أن القدرة على غزو عامل ممرض في بيئة متغيرة موسمية تعتمد بوضوح على تاريخ إدخال العامل الممرض خلال العام. لأن الغزو يتحدد بالكامل  $R_0$  في النماذج القطعية ، على عكس النماذج العشوائية ، يعطي هذا انطباعاً بأن النماذج القطعية غير مناسبة ببساطة لمناقشة الغزو وفقاً لتاريخ إدخال العامل الممرض

## ملحق

بداً من التعريف (9) لـ  $G(x)$  وباقتراض (10) ، نظهر (11) عن طريق الحث. بالطبع ، نحن لا نخسر بشكل عام باقتراض ذلك  $a_j = 1$  لجميع  $j$ . لـ  $n = 2$  ، يظهر حساب بسيط أن

$$G(x) = \int_0^x e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 (x - x_1)} dx_1 = \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

افترض أن الرقم (11) صحيح لعدد صحيح معين  $n$ . ثم

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{\sigma_2^{n+1}} e^{-\lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_n x_n - \lambda_{n+1} x_{n+1}} d\sigma_x^{n+1} \\ &= \int_0^x \left( \int_{\sigma_2^{n+1}} e^{-\lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_n x_n} d\sigma_{x-x_{n+1}}^n \right) e^{-\lambda_{n+1} x_{n+1}} dx_{n+1} \\ &= \int_0^x \left( \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j (x - x_{n+1})}}{\prod_{\substack{k \neq j \\ k \leq n}} (\lambda_k - \lambda_j)} \right) e^{-\lambda_{n+1} x_{n+1}} dx_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{\substack{k \neq j \\ k \leq n}} (\lambda_k - \lambda_j)} \int_0^x e^{(\lambda_j - \lambda_{n+1}) x_{n+1}} dx_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{\substack{k \neq j \\ k \leq n+1}} (\lambda_k - \lambda_j)} + e^{-\lambda_{n+1} x} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_{n+1}) \prod_{\substack{k \neq j \\ k \leq n}} (\lambda_k - \lambda_j)}. \end{aligned}$$

$\lambda_{n+1}$  لاحظ أن المجموع الثاني للسطر الأخير هو التحلل إلى عناصر بسيطة للكسر العلقاني في

$$\frac{1}{\prod_{1 \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_{n+1})}.$$

لذا

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{\substack{k \neq j \\ k \leq n+1}} (\lambda_k - \lambda_j)},$$

$n + 1$  والصيغة (11) صحيحة

## المراجع

- Altizer, S., Dobson, A., Hosseini, P., Hudson, P., Pascual, M., Rohani, P., 2006. Seasonality and the dynamics of infectious diseases. Ecology Letters 9, 467–484.
- Anderson, R. M., May, R. M., 1991. Infectious Diseases of Humans, Dynamics and Control. Oxford University Press.
- Anita, S., Iannelli, M., Kim, M. Y., Park E. J., 1998. Optimal harvesting for periodic age-dependent population dynamics. SIAM J. Appl. Math. 58, 1648–1666.
- Aron, J. L., Schwartz, I. B., 1984. Seasonality and period-doubling bifurcations in an epidemic model. J. Theor. Biol. 110, 665–679.
- Bacaër, N., Guernaoui, S., 2006. The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality – The case of cutaneous leishmaniasis in Chichaoua, Morocco. J. Math. Biol. 53, 421–436.
- Bailey, N. T. J., 1982. The Biomathematics of Malaria. Charles Griffin & Company, Londres.
- Bartlett M. S., 1960. Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology. Methuen, Londres.
- [chikungunya.net](http://chikungunya.net) ، [www.chikungunya.net/faq/faq.htm](http://www.chikungunya.net/faq/faq.htm)
- Coale A. J., 1972. The Growth and Structure of Human Populations – A Mathematical Investigation. Princeton University Press.
- Codeço, C. T., 2001. Endemic and epidemic dynamics of cholera : the role of the aquatic reservoir. BMC Infect. Dis. 289, 2801–2810.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F., 1986. Mécanique quantique, 3e édition. Hermann, Paris.
- Cooke, K. L., Kaplan, J. L., 1976. A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth. Math. Biosci. 31, 87–104.

- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases – Model Building, Analysis and Interpretation*. Wiley, Chichester.
- Dietz, K., 1976. The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations. In : *Mathematical Modelling in Medicine*, Berger J., Bühler W., Reppes R., Tautu P. (Eds). Springer, Berlin, p. 1–15.
- Duhamel, G., Gombert, D., Paupy, C., Quatresous, I., 2006. Mission d'appui à la lutte contre l'épidémie de chikungunya à la Réunion. Inspection générale des affaires sociales, Paris. [www.invs.sante.fr/publications/2006/chikungunya\\_janvier\\_2006/chikungunya.pdf](http://www.invs.sante.fr/publications/2006/chikungunya_janvier_2006/chikungunya.pdf).
- Grossman, Z., Gumowski, I., Dietz, K., 1977. The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations – Analytical approach. In : *Nonlinear Systems and Applications*, V. Lakshmikantham (Ed.), Academic Press, New York, p. 525–546.
- Grossman, Z., 1980. Oscillatory phenomena in a model of infectious diseases. *Theor. Popul. Biol.* 18, 204–243.
- Hale, J. K., 1980. *Ordinary Differential Equations*. Krieger, New York.
- Heesterbeek, J. A. P., Roberts, M. G., 1995a. Threshold quantities for helminth infections. *J. Math. Biol.* 33, 415–434.
- Heesterbeek, J. A. P., Roberts, M. G., 1995b. Threshold quantities for infectious diseases in periodic environments. *J. Biol. Syst.* 3, 779–787.
- Heesterbeek, J. A. P., 2002. A brief history of  $R_0$  and a recipe for its calculation. *Acta Biotheor.* 50, 189–204.
- Hochstadt, H., 1973. *Integral Equations*. Wiley, New York.
- Institut de Veille Sanitaire, [www.invs.sante.fr/surveillance/chikungunya](http://www.invs.sante.fr/surveillance/chikungunya).
- Jagers, P., Nerman, O., 1985. Branching processes in periodically varying environment. *Ann. Prob.* 13, 254–268.
- Kato, T., 1984. *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2e édition. Springer, Berlin.
- Krasnoselskij, M. A., Lifshits, Je. A., Sobolev, A. V., 1980. *Positive Linear Systems : The Method of Positive Operators*. Heldermann, Berlin.
- Kuznetsov, Yu. A., Piccardi, C., 1994. Bifurcation analysis of periodic SEIR and SIR epidemic models. *J. Math. Biol.* 32, 109–121.
- Ma, J., Ma, Z., 2006. Epidemic threshold conditions for seasonally forced SEIR models. *Math. Biosci. Eng.* 3, 161–172.
- Météo France, [www.ac-reunion.fr/pedagogie/cotamarp/temps/temperatures.html](http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/cotamarp/temps/temperatures.html)
- Moneim, I. A., Greenhalgh, D., 2005. Use of a periodic vaccination strategy to control the spread of epidemics with seasonally varying contact rate. *Math. Biosci. Eng.* 2, 591–611.
- Nussbaum, R. D., 1977. Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : *Nonlinear Systems and Applications*, V. Lakshmikantham (éd.), Academic Press, New York, p. 235–257.
- Nussbaum, R. D., 1978. A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations. *SIAM J. Math. Anal.* 9, 356–376.
- Pierre, V., Thiria, J., Rachou, E., Sissoko, D., Lassalle, C., Renault, P., 2005. Epidémie de dengue à la Réunion en 2004. Journées de veille sanitaire 2005, Poster no. 13. [www.invs.sante.fr/publications/2005/jvs\\_2005/poster\\_13.pdf](http://www.invs.sante.fr/publications/2005/jvs_2005/poster_13.pdf)
- Ross, R., 1911. *The Prevention of Malaria*, 2e édition. John Murray, Londres.
- Schaefer, H. H., 1974. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer, New York.
- Schwartz, I. B., Smith, H. L., 1983. Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model. *J. Math. Biol.* 18, 233–253.
- Smith, H. L., 1977. On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics. *J. Math. Biol.* 4, 69–80.
- Thieme, H. R., 1984. Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations. *J. Integral Equations* 7, 253–277.
- Williams, B. G., Dye, C., 1997. Infectious disease persistence when transmission varies seasonally. *Math. Biosci.* 145, 77–88.