



## Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID : 15508

### To link to this article :

Official URL: <http://dx.doi.org/10.3166/RIA.29.493-514>

<p><b>To cite this version</b> : Dubois, Didier and Prade, Henri and Rico, Agnès <i>Capacités qualitatives et information incomplète</i>. (2015) Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 29 (n° 5). pp. 493-514. ISSN 0992-499X</p>
---

Any correspondance concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Capacités qualitatives et information incomplète

Didier Dubois<sup>1</sup>, Henri Prade<sup>1</sup>, Agnès Rico<sup>2</sup>

1. IRIT, CNRS et Université de Toulouse, France

{dubois,prade}@irit.fr

2. ERIC, Université Claude Bernard Lyon 1, Villeurbanne, France

agnes.rico@univ-lyon1.fr

*RÉSUMÉ.* Cet article étudie les capacités qualitatives, qui sont des fonctions d'ensemble monotones croissantes à valeurs sur un ensemble totalement ordonné muni d'une fonction de renversement de l'ordre. En nous inspirant du rôle joué par les probabilités pour les capacités quantitatives, nous cherchons à savoir si les capacités qualitatives peuvent être considérées comme des ensembles de mesures de possibilité. Plus précisément nous montrons que toute capacité qualitative est caractérisée par une classe de mesures de possibilité. De plus, les bornes inférieures de cette classe sont suffisantes pour reconstruire la capacité et leur nombre caractérise sa complexité. Nous présentons aussi un axiome généralisant la maxitivité des mesures de possibilité qui revient à préciser le nombre de mesures de possibilité nécessaires à la reconstruction de la capacité. Cet axiome nous permet aussi d'établir un lien entre capacité qualitative et logique modale non régulière. Enfin nous donnons quelques résultats pour caractériser la quantité d'information contenue dans une capacité.

*ABSTRACT.* This paper investigates the structure of qualitative capacities, which are monotonic increasing set functions ranging on a finite totally ordered scale equipped with an order-reversing map. More specifically, we study whether these qualitative set-functions can be viewed as classes of more particular set functions, namely possibility measures, paralleling the situation of quantitative capacities with respect to imprecise probability theory. We show that any capacity is characterized by a non empty class of possibility measures having the structure of an upper semi-lattice. The lower bounds of this class are enough to reconstruct the capacity, and their number is characteristic of its complexity. We introduce a sequence of axioms generalizing the maxitivity property of possibility measures, and related to the number of possibility measures needed for this reconstruction. In the Boolean case, capacities are closely related to non regular multi-source modal logics and their neighborhood semantics can be described. Finally we study how to characterize the quantity of information contained in a capacity.

*MOTS-CLÉS :* capacité, mesure de possibilité, logique modale.

*KEYWORDS:* capacity, possibility measure, modal logic.

## 1. Introduction

Une mesure floue (Sugeno, 1977) (ou capacité (Choquet, 1953 ; Denneberg, 1994)) qualitative est une fonction d'ensemble monotone à valeurs dans un ensemble totalement ordonné. On suppose donc que seuls le minimum et le maximum sont utilisables, même si on considère un intervalle réel. Dans ce contexte, il est impossible d'établir un lien avec les probabilités. Par conséquent un certain nombre de notions pertinentes et utiles dans un cadre quantitatif sont perdues. Par exemple, il est impossible d'utiliser la transformée de Möbius (Shafer, 1976), la capacité conjuguée, ou la supermodularité (Denneberg, 1994), ...

Cependant il apparaît que beaucoup de notions quantitatives ont une contrepartie dans le cadre qualitatif en remplaçant les mesures de probabilités par les mesures de possibilité. La notion de capacité conjuguée peut être récupérée si on utilise une échelle munie d'une fonction qui renverse l'ordre. De plus, une contrepartie qualitative de la transformée de Möbius a été introduite par Mesiar et Grabisch (Mesiar, 1997 ; Grabisch, 1997), puis étudiée dans (Grabisch, 2004). La transformée qualitative de Möbius peut être vue comme la contrepartie possibiliste d'une fonction de masse probabiliste. Ainsi dans le cadre qualitatif, une capacité est définie par une contrepartie de la définition des fonctions de croyance. De plus, le processus de génération de fonctions de croyance présenté dans (Dempster, 1967) a déjà été appliqué aux mesures de possibilité (Dubois, Prade, 1984 ; 1985) pour générer des possibilités et nécessités inférieures et supérieures. Il a été démontré que les possibilités supérieures et les nécessités inférieures sont encore respectivement des possibilités et des nécessités. Mais ce n'est pas le cas des nécessités supérieures et des possibilités inférieures.

L'analogie formelle entre fonctions de croyance et capacités qualitatives via la transformée de Möbius qualitative peut cependant induire en erreur au niveau interprétatif. Cette situation mène à des questions naturelles comme : une capacité qualitative peut-elle être exprimée en termes de famille de mesures de possibilité et, si oui, est ce que la transformée de Möbius peut coder cette famille. Des travaux récents (Dubois, 2011 ; Prade, Rico, 2011) ont commencé à aborder cette question, en prenant pour point de départ un travail pionnier (Banon, 1995). Plus récemment dans le cadre qualitatif fini, des sous-ensembles spéciaux de mesures de possibilité jouent un rôle semblable aux ensembles convexes de mesures de probabilité dans le cadre quantitatif (Dubois *et al.*, 2015). On comprend alors que toute capacité peut être définie en termes d'un ensemble fini de mesures de possibilité, comme une possibilité inférieure ou une nécessité supérieure. Ce résultat n'est pas surprenant car il a été démontré que les mesures de possibilité peuvent être raffinées par des mesures de probabilité en utilisant un raffinement lexicographique de l'axiome principal des mesures de possibilité, et que les capacités sur un ensemble fini peuvent être raffinées par des fonctions de croyance (Dubois, Fargier, 2009a ; 2009b). Ce résultat permet de généraliser les axiomes de maxitivité et minitivité de la théorie des possibilités. On définit alors des familles de capacités qualitatives de complexité croissante. Ces résultats vont permettre de considérer les capacités qualitatives comme des modalités de nécessité dans le cadre d'une logique modale non régulière, étendant ainsi aux capacités les liens

connus (Banerjee, Dubois, 2009) entre la théorie des possibilités et la logique modale. Ces résultats vont aussi permettre de déterminer le pouvoir informatif d'une capacité en différenciant sa part pessimiste et sa part optimiste.

Cet article, qui réunit et développe la matière de (Dubois *et al.*, 2013 ; 2014), est structuré de la manière suivante : la section 2 rappelle les définitions utiles. La section 3 explique pourquoi les capacités peuvent être vues comme des possibilités imprécises. Dans la section 4 on présente un algorithme pour décomposer une capacité en un nombre minimal de distributions de possibilité. La section 5 s'intéresse à la généralisation des axiomes de maxitivité et minitivité dans un contexte qualitatif. La section 6 propose un lien avec la logique modale, et dans la section 7 on s'intéresse à l'information contenue dans une capacité qualitative afin de pouvoir comparer de telles capacités.

## 2. Capacités qualitatives et transformée de Möbius qualitative

Soit  $S$  un ensemble fini. Soit  $L$  un ensemble fini totalement ordonné  $L = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_l = 1\}$  muni d'une fonction  $\nu$  qui renverse l'ordre. Plus précisément  $\nu : L \rightarrow L$  est décroissante et vérifie  $\nu(1) = 0$ ,  $\nu(0) = 1$ , 1 et 0 étant respectivement l'élément maximum et minimum de  $L$ . La fonction  $\nu$  vérifie donc  $\nu(\lambda_i) = \lambda_{l-i}$ .

DÉFINITION 1. — Une capacité est une fonction d'ensemble  $\gamma : 2^S \rightarrow L$ , croissante pour l'inclusion, et telle que  $\gamma(\emptyset) = 0$ ;  $\gamma(S) = 1$ .

Dans cet article, on parlera de capacités qualitatives, ou q-capacités, pour rappeler qu'on utilise uniquement une structure ordonnée, même si  $L$  est l'intervalle réel  $[0, 1]$ . En théorie de la décision dans l'incertain, la valeur  $\gamma(A)$  est interprétée comme un degré de confiance dans la situation représentée par un ensemble  $A$  d'états possibles. Dans le cadre de l'agrégation multicritères,  $\gamma(A)$  est interprétée comme l'importance du groupe de critères  $A$  (Grabisch *et al.*, 2000).

Dans la théorie des possibilités, l'information disponible est représentée par une distribution de possibilité  $\pi : S \rightarrow L$  (Zadeh, 1978 ; Dubois, Prade, 1985; 2e édit. 1987 ; 1998). La valeur  $\pi(s)$  est la possibilité que  $s$  soit l'état actuel du monde. L'information précise correspond au cas où  $\exists s^*, \pi(s^*) = 1$ , et  $\forall s \neq s^*, \pi(s) = 0$ , tandis que l'ignorance complète est représentée par la distribution  $\pi^?$  telle que  $\forall s \in S, \pi^?(s) = 1$ .

DÉFINITION 2. — La mesure de possibilité associée à une distribution  $\pi$  est la capacité  $\Pi(A) = \max_{s \in A} \pi(s)$ .

Une mesure de possibilité est une capacité  $\gamma$  satisfaisant l'axiome de maxitivité:  $\gamma(A \cup B) = \max(\gamma(A), \gamma(B)) \forall A, B \subseteq S$ .

Une distribution de possibilité  $\pi$  est dite plus spécifique qu'une autre distribution  $\rho$  si  $\forall s \in S, \pi(s) \leq \rho(s)$  ( $\pi$  fournit une information plus précise que  $\rho$ ).  $\gamma^c$  est la capacité conjuguée de  $\gamma$ , définie par  $\gamma^c(A) = \nu(\gamma(A^c)), \forall A \subseteq S$ , où  $A^c$  est le complémentaire de  $A$ . La conjuguée d'une mesure de possibilité s'appelle une mesure de nécessité :  $N(A) = \nu(\max_{s \notin A} \pi(s)) = \min_{s \notin A} N(S \setminus \{s\})$ .

Une mesure de nécessité est une capacité  $\gamma$  satisfaisant l'axiome de minitivité :  $\gamma(A \cap B) = \min(\gamma(A), \gamma(B)) \forall A, B \subseteq S$ .

Dans un cadre qualitatif, les distributions de possibilités semblent, en remplaçant la somme par le maximum, jouer le même rôle que celui des distributions de probabilité dans le cadre quantitatif. Or dans un contexte fini, on sait que la distribution de probabilité se généralise par la transformée de Möbius d'une capacité. Rappelons brièvement ce qu'est la transformée de Möbius qualitative (Grabisch, 1997 ; Mesiar, 1997) ce qui nous permettra de présenter l'analogie entre les fonctions de croyance et les capacités qualitatives.

**DÉFINITION 3.** — *La transformée inférieure de Möbius d'une  $q$ -capacité  $\gamma$  est une fonction  $\gamma_{\#} : 2^S \rightarrow L$  définie par  $\gamma_{\#}(E) = \gamma(E)$  si  $\gamma(E) > \max_{B \subsetneq E} \gamma(B)$  et 0 sinon.*

Comme  $\gamma$  est monotone, la condition  $\gamma(E) > \max_{B \subsetneq E} \gamma(B)$  peut être remplacée par  $\gamma(E) > \max_{x \in E} \gamma(E \setminus \{x\})$ . On note  $\mathcal{F}^{\gamma} = \{E, \gamma_{\#}(E) > 0\}$  la famille des éléments (ou ensembles) focaux de  $\gamma$ . On peut facilement vérifier que  $\gamma_{\#}(\emptyset) = 0$ ,  $\max_{A \subseteq S} \gamma_{\#}(A) = 1$  et que si  $A \subset B$ , et  $\gamma_{\#}(B) > 0$ , alors  $\gamma_{\#}(A) < \gamma_{\#}(B)$ .

**EXEMPLE 4.** — La transformée qualitative de Möbius d'une mesure de possibilité est sa distribution de possibilité. Ses ensembles focaux ne sont que des singletons.  $\square$

**EXEMPLE 5.** — Les ensembles focaux associés à une mesure de nécessité  $N$  forment une collection d'ensembles emboîtés  $E_1 \subset \dots \subset E_k$  tels que  $N(A) = \max_{E_i \subseteq A} N_{\#}(E_i)$ . Si  $N$  est basée sur la distribution  $\pi$ , alors  $N(A) = \min_{s \notin A} \nu(\pi(s))$  et  $\mathcal{F}^N = \{E_i = \{s : \pi(s) \geq \lambda_i\} : \lambda_i \in L \setminus \{0\}\}$  avec  $N_{\#}(E_i) = \nu(\lambda_{i-1})$ . Les ensembles  $E_i$  sont des coupes de  $\pi$ . Les ensembles focaux d'une nécessité  $N$  sont donc les coupes de la distribution de possibilité de sa conjuguée.  $\square$

**EXEMPLE 6.** — On considère  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  et  $L = \{0, \alpha, 1 - \alpha, 1\}$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \leq 1 - \alpha$  (sur  $[0, 1], 0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ). Soit la capacité  $\gamma$  définie par  $\gamma(\{s_1\}) = \gamma(\{s_1, s_3\}) = \alpha$ ,  $\gamma(\{s_1, s_2\}) = 1 - \alpha$ ,  $\gamma(\{s_2, s_3\}) = \gamma(\{s_1, s_2, s_3\}) = 1$  et  $\gamma(A) = 0$  sinon. Alors  $\mathcal{F}^{\gamma} = \{\{s_1\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}\}$ , avec  $\gamma_{\#}(\{s_1\}) = \alpha$ ,  $\gamma_{\#}(\{s_1, s_2\}) = 1 - \alpha$  et  $\gamma_{\#}(\{s_2, s_3\}) = 1$ .  $\square$

La transformée de Möbius apparaît comme la généralisation de la notion de distribution de possibilité sur l'ensemble des parties de  $S$ . De plus,  $\gamma_{\#}$  contient l'information minimale nécessaire pour reconstruire la capacité  $\gamma$  (Grabisch, 1997 ; Dubois, Fargier, 2009b), car

$$\gamma(A) = \max_{E \subseteq A} \gamma_{\#}(E).$$

Cette équation fait apparaître la similarité entre les capacités qualitatives et les fonctions de croyance (Shafer, 1976). Une fonction de croyance est une fonction d'ensemble  $2^S \rightarrow [0, 1]$  définie par  $Bel(A) = \sum_{E \subseteq A} m(E)$ ,  $\forall A \subseteq S$  où la fonction de masse  $m$  est une affectation probabiliste, soit une distribution de probabilité sur  $2^S \setminus \{\emptyset\}$ .  $\gamma_{\#}$  apparaît comme la contrepartie qualitative de la fonction de masse probabiliste. Par analogie  $\gamma_{\#}$  peut être nommée affectation ou fonction de masse possibi-

liste. Malgré cette similarité, il existe une différence entre les fonctions de croyance et les capacités qualitatives. Par exemple, dans le cadre qualitatif il n'y a pas équivalence entre se donner une affectation possibiliste et se donner une capacité. Effectivement à une q-capacité on peut associer plusieurs affectations possibilistes dont la plus petite sera la transformée de Möbius de la q-capacité, alors qu'il existe une bijection entre fonctions de croyance et affectations probabilistes.

### 3. Les capacités vues comme des possibilités imprécises

Certaines capacités quantitatives  $g$  peuvent être représentées par un ensemble convexe de probabilités :  $\mathcal{P}(g) = \{P, P(A) \geq g(A), \forall A \subseteq S\}$ . Une condition suffisante pour que  $\mathcal{P}(g)$  soit non vide est la super-modularité. Par exemple, une capacité convexe  $g$  (c.-à-d., telle que  $g(A \cup B) \geq g(A) + g(B) - g(A \cap B)$ ), ou une fonction de croyance sont représentables par  $\mathcal{P}(g)$ . On retrouve les probabilités inférieures cohérentes au sens de (Walley, 1991), car on peut montrer que dans ces deux exemples,  $g(A) = \min_{P \in \mathcal{P}(g)} P(A)$ .

Si l'échelle d'évaluation utilisée n'est pas équipée de l'addition et du produit, la construction faite dans le cadre quantitatif est impossible. Une question naturelle est alors : dans le cadre qualitatif est-il possible d'avoir une construction similaire en remplaçant les mesures de probabilité par des mesures de possibilité ?

Considérons l'ensemble  $\mathcal{R}(\gamma) = \{\pi : \Pi(A) \geq \gamma(A), \forall A \subseteq S\}$  des distributions de possibilité dont la mesure de possibilité associée  $\Pi$  domine la q-capacité  $\gamma$ . Cet ensemble n'est jamais vide car il contient toujours  $\Pi^\gamma$ , la possibilité vide basée sur la distribution  $\pi^\gamma$ . Cette distribution est l'élément maximal de tout  $\mathcal{R}(\gamma)$  qui par contre a plusieurs éléments minimaux. L'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{R}(\gamma)$  est noté  $\mathcal{R}_*(\gamma)$ .

Rappelons brièvement comment toute q-capacité  $\gamma$  peut être reconstruite à partir des mesures de possibilité induites par les permutations. Soit  $\sigma$  une permutation des  $n = |S|$  éléments de  $S$ . Le  $i^{\text{ème}}$  élément de la permutation est noté  $s_{\sigma(i)}$  et  $S_\sigma^i = \{s_{\sigma(i)}, \dots, s_{\sigma(n)}\}$ . On définit alors la distribution de possibilité  $\pi_\sigma^\gamma$  par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \pi_\sigma^\gamma(s_{\sigma(i)}) = \gamma(S_\sigma^i).$$

Pour toute permutation  $\sigma$  la mesure de possibilité  $\Pi_\sigma^\gamma$  associée à  $\pi_\sigma^\gamma$  appartient à  $\mathcal{R}(\gamma)$  et  $\forall A \subseteq S, \gamma(A) = \min_\sigma \Pi_\sigma^\gamma(A)$  (Banon, 1995). De plus, nous avons  $\mathcal{R}(\gamma) = \{\pi, \exists \sigma, \pi \geq \pi_\sigma^\gamma\}$  (Dubois *et al.*, 2015). Mais toutes les  $n!$  distributions de possibilité  $\pi_\sigma^\gamma$  ne sont pas des éléments minimaux de  $\mathcal{R}(\gamma)$ . Par exemple, si  $\gamma = \Pi$ , l'élément minimum de  $\mathcal{R}(\Pi)$  est unique et c'est  $\pi$ .

Réciproquement, pour tout ensemble de distributions de possibilité  $\mathcal{T}$ ,  $\gamma(A) = \min_{\pi \in \mathcal{T}} \Pi(A)$  est une capacité et  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}(\gamma)$ . Si  $\mathcal{T}$  contient des distributions de possibilité non comparables,  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{R}(\gamma)$ . Par ailleurs,  $\gamma(A) = \max_{\pi \in \mathcal{T}} \Pi(A)$  est une mesure de possibilité dont la distribution est  $\pi^{\max}(s) = \max_{\pi \in \mathcal{T}} \pi(s)$  (Dubois, Prade, 1990).

$\mathcal{R}_*(\gamma)$  est un ensemble fini de distributions de possibilité dont aucune n'est plus spécifique que les autres, c.-à-d., si  $\pi, \rho$  appartiennent à  $\mathcal{R}_*(\gamma)$  il existe  $s_1 \neq s_2$  tels que  $\pi(s_1) > \rho(s_2)$  et  $\rho(s_1) < \pi(s_2)$ . Toute capacité peut donc être vue comme une mesure de possibilité inférieure (Dubois *et al.*, 2015) :

$$\gamma(A) = \min_{\pi \in \mathcal{R}_*(\gamma)} \Pi(A).$$

Ce résultat est similaire à celui des capacités convexes qui sont vues comme des probabilités inférieures (Walley, 1991). La complexité de  $\gamma$  est mesurée par le nombre d'éléments dans  $\mathcal{R}_*(\gamma)$ .

De manière duale en passant par la conjuguée, les capacités peuvent aussi être décrites comme des nécessités supérieures. A partir de  $\gamma$  on peut définir deux ensembles de mesures de possibilité :  $\mathcal{R}(\gamma)$  et  $\mathcal{R}(\gamma^c)$ . Les possibilités qui dominent  $\gamma^c$  sont les conjuguées des mesures de nécessité dominées par  $\gamma$ . L'ensemble  $\{\pi : N(A) \leq \gamma(A), \forall A \subseteq S\}$  des distributions de possibilités dont les mesures de nécessité associées sont dominées par  $\gamma$  est donc  $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$  puisque  $\gamma(A) \leq \Pi$  si et seulement si  $\gamma^c(A) \geq N$ , soit

$$\gamma(A) = \max_{\pi \in \mathcal{R}_*(\gamma^c)} N(A).$$

où  $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$  est l'ensemble des distributions de possibilités associées aux mesures de nécessité maximales dominées par  $\gamma$ . Une des deux représentations ( $\mathcal{R}_*(\gamma)$  ou  $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$ ) peut être plus simple que l'autre. Par exemple, si  $\gamma$  est une mesure de nécessité induite par la distribution  $\pi$ , alors  $\mathcal{R}_*(\gamma^c) = \{\pi\}$  tandis que  $\mathcal{R}_*(\gamma)$  contient plusieurs distributions dont  $\pi$ . Comme  $\Pi(A) \geq N(A) = \Pi^c(A)$ , il semble plus naturel d'approcher  $N$  par en dessous et  $\Pi$  par au dessus. Plus généralement si  $\gamma$  est telle que  $\gamma(A) \geq \gamma^c(A), \forall A \subseteq S$ , alors  $\mathcal{R}_*(\gamma)$  est plus naturel que  $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$ .

#### 4. Construction d'une décomposition minimale

Cette partie s'intéresse à la détermination de l'ensemble minimal de  $n$  mesures de possibilité qu'il est suffisant d'avoir pour définir une q-capacité  $\gamma$ :  $\gamma = \min_{i=1}^n \Pi_i$ . La transformée de Möbius qualitative joue un rôle important dans la recherche de cet ensemble. Pour plus de détails voir (Dubois *et al.*, 2015).

Nous avons besoin de considérer une fonction de sélection  $sel : \mathcal{F}^\gamma \rightarrow S$  qui attribue à chaque ensemble focal  $A$  un élément  $s = sel(A) \in A$ . L'ensemble des fonctions de sélection sur  $\mathcal{F}^\gamma$  est noté  $\Sigma(\mathcal{F}^\gamma)$ . Pour une q-capacité donnée  $\gamma$  et une fonction de sélection  $sel$  de  $\Sigma(\mathcal{F}^\gamma)$  on définit la distribution de possibilité  $\pi_{sel}^\gamma$  en supposant  $\max \emptyset = 0$  :

$$\pi_{sel}^\gamma(s) = \max_{E: sel(E)=s} \gamma_{\#}(E), \forall s \in S.$$

Quelques remarques :

– Si  $\gamma = \Pi$ , alors il existe une seule fonction de sélection car les ensembles focaux sont des singletons et dans ce cas  $\pi_{sel}^\Pi = \pi$ .

– Pour toute fonction de sélection  $sel$  associée à  $\gamma$ ,  $\Pi_{sel}^\gamma(A) \geq \gamma(A), \forall A \subseteq S$ .

– Toutes les distributions  $\pi_{sel}^\gamma$  ne sont pas de la forme  $\pi_\sigma^\gamma$  avec  $\sigma$  une permutation.

Un contre-exemple : Soient  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ ,  $\gamma_\#(\{s_1, s_3\}) = 1$ ,  $\gamma_\#(\{s_2, s_3\}) = \lambda < 1$ . On considère  $sel(\{s_1, s_3\}) = s_3$  et  $sel(\{s_2, s_3\}) = s_2$ , alors  $\pi_{sel}^\gamma(s_3) = 1 > \pi_{sel}^\gamma(s_2) = \lambda > \pi_{sel}^\gamma(s_1) = 0$ .

En utilisant la permutation correspondante nous avons  $\pi_\sigma^\gamma(s_3) = 1$  mais  $\pi_\sigma^\gamma(s_2) = \gamma(\{s_1, s_2\}) = 0$ .

Mais si on choisit la fonction de sélection  $sel'$  telle que  $sel'(\{s_1, s_3\}) = sel'(\{s_2, s_3\}) = s_3$ ,  $\pi_{sel'}^\gamma$  correspond à  $\pi_\sigma^\gamma$ .

L'ensemble  $\{\pi_{sel}^\gamma : sel \in \Sigma(\mathcal{F}^\gamma)\}$  permet de reconstruire  $\gamma$  (Dubois, 2011 ; Dubois *et al.*, 2015):

$$\forall A \subseteq S, \gamma(A) = \min_{sel \in \Sigma(\mathcal{F}^\gamma)} \Pi_{sel}^\gamma(A).$$

L'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{R}(\gamma)$  est inclus dans  $\{\pi_{sel}^\gamma : sel \in \Sigma(\mathcal{F}^\gamma)\}$ , mais toutes les fonctions de sélection ne sont pas intéressantes car on peut avoir des distributions redondantes.

EXEMPLE 7. — Considérons une  $q$ -capacité  $\gamma$  avec deux ensembles focaux ayant une intersection commune  $I$ . Soit  $E$  l'ensemble focal tel que  $\gamma_\#(E) = 1$  et  $F$  l'ensemble focal tel que  $\gamma_\#(F) < 1$ .

On peut définir une possibilité de la manière suivante:  $\pi_{sel}^\gamma(s^*) = 1$  pour un certain  $s^* \in I \subseteq E$  et  $\pi_{sel}^\gamma(s) = \gamma_\#(F)$  pour un  $s \in F \setminus I$ .

Mais on peut définir une distribution plus spécifique dominant  $\gamma$ :  $\pi_{sel}^\gamma(s^*) = 1$  pour  $s^* \in I$  et 0 sinon.  $\square$

La définition suivante vient donc naturellement.

DÉFINITION 8. — Une fonction de sélection  $sel$  est dite utile pour une  $q$ -capacité  $\gamma$  si c'est un élément minimal de  $\{\pi_{sel}^\gamma : sel \in \Sigma(\mathcal{F}^\gamma)\}$ .

L'algorithme MSUP permet de calculer des fonctions de sélection  $sel$  et les distributions de possibilité associées  $\pi_{sel}^\gamma$ . Si  $\Sigma_*(\mathcal{F}^\gamma)$  est l'ensemble des fonctions de sélection générées par l'application répétée de l'algorithme MSUP, et  $MSUP(\gamma)$  l'ensemble des distributions de possibilités correspondantes, on a (Dubois *et al.*, 2015) :

$$MSUP(\gamma) = \mathcal{R}_*(\gamma).$$

Bien que toute fonction de sélection  $\pi_{sel}$  ne soit pas associée à une permutation  $\sigma$  telle que  $\pi_{sel} = \pi_\sigma$ , cette propriété est vraie pour les fonctions de sélection utiles. Cela vient du fait que les éléments sont ordonnés dans l'ordre décroissant de  $\gamma_\#(E_j)$ . Si on définit  $\sigma$  à partir de la suite des éléments  $s_j$  obtenue par une application de l'algorithme qui donne  $sel$ , il est clair que  $\pi_{sel}(s_{\sigma(i)}) \leq \pi_{sel}(s_{\sigma(j)}), \forall i > j$ . Alors  $\pi_\sigma(i) = \gamma(S_i^\sigma) = \Pi_{sel}(S_i^\sigma) = \pi_{sel}(i)$ . De plus, si deux distributions de possibilité sont générées par l'algorithme, elles correspondent à des permutations différentes car à chaque fois les éléments recevant un poids positif sont différents.



**Algorithme MSUP : Génération de possibilités supérieures spécifiques maximales**

**Input :**  $n$  ensembles focaux  $E_k$   $k = 1, \dots, n$  rangés dans l'ordre décroissant de

$$\gamma_{\#}(E_k) \text{ c.-à-d., } \gamma_{\#}(E_1) \geq \dots \geq \gamma_{\#}(E_n)$$

$\mathcal{F} \leftarrow \{E_1, \dots, E_n\}$

pour tout  $s \in S$  soit  $\pi(s) = 0$

**repeat**

$E \leftarrow$  le premier élément de  $\mathcal{F}$

Définissons  $sel(E) = s$  pour un  $s \in E$

Soit  $\pi(s) = \gamma_{\#}(E)$

On supprime  $E$  de  $\mathcal{F}$

$\mathcal{T} \leftarrow \{G \in \mathcal{F} \text{ tel que } s \in G\}$

**repeat**

$G \leftarrow$  le premier élément de  $\mathcal{T}$

Définissons  $sel(G) = s$

supprimons  $G$  de  $\mathcal{T}$

supprimons  $G$  de  $\mathcal{F}$ .

**until**  $\mathcal{T} = \emptyset$ ;

**until**  $\mathcal{F} = \emptyset$ ;

**Result :** Une distribution de possibilité  $\pi_{sel}^{\gamma}$ .

EXEMPLE 9. — Soit  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ . On prend  $L = [0, 1]$  mais on considère  $L$  seulement comme un ensemble ordonné. Soit une q-capacité  $\gamma$  dont les focaux sont :  $\mathcal{F}^{\gamma} = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$  avec  $\gamma_{\#}(\{s_1, s_2\}) = 1 > \gamma_{\#}(\{s_1, s_3\}) = .8 > \gamma_{\#}(\{s_2, s_3\}) = .4 > \gamma_{\#}(\{s_2, s_4\}) = .2$ .

Montrons toutes les applications possibles de l'algorithme MSUP qui commence avec  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\gamma}$ . Dans ce qui suit, si on a choisi  $s \in E \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{T}$  contient tous les focaux de  $\mathcal{F}$  autres que  $E$  tels que  $s \in E$ . Dans ce cas, on sélectionne l'élément  $s$  dans tous les focaux de  $\mathcal{T}$ , ce qui permet d'enlever ces focaux ainsi que  $E$  de  $\mathcal{F}$  et de passer à la sélection suivante. Dans la suite on donne le focal  $E$  de plus grand poids, l'élément sélectionné, son degré de possibilité, l'ensemble des focaux à supprimer de  $\mathcal{F}$  et le  $\mathcal{F}$  résultant après suppression.

1.  $E = \{s_1, s_2\}$ ,  $sel(\{s_1, s_2\}) = s_1$ ,  $\pi(s_1) = \gamma_{\#}(\{s_1, s_2\}) = 1$ ,  $\mathcal{T} = \{\{s_1, s_3\}\}$ , et  $\mathcal{F} = \{\{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$ .

a)  $E = \{s_2, s_3\}$ ,  $sel(\{s_2, s_3\}) = s_2$ ,  $\pi(s_2) = \gamma_{\#}(\{s_2, s_3\}) = .4$ ,  $\mathcal{T} = \{\{s_2, s_4\}\}$ , et  $\mathcal{F} = \emptyset$ .

La distribution trouvée est  $\pi^1$  définie par  $\pi^1(s_1) = 1$ ,  $\pi^1(s_2) = .4$ ,  $\pi^1(s_3) = \pi^1(s_4) = 0$  et la permutation associée est  $(1, 2, 3, 4)$ .

b)  $E = \{s_2, s_3\}$ ,  $sel(\{s_2, s_3\}) = s_3$ ,  $\pi(s_3) = \gamma_{\#}(\{s_2, s_3\}) = .4$ ,  $\mathcal{T} = \emptyset$  et  $\mathcal{F} = \{\{s_2, s_4\}\}$ .

(b<sub>1</sub>)  $E = \{s_2, s_4\}$ ,  $sel(\{s_2, s_4\}) = s_2$ ,  $\pi(s_2) = \gamma_{\#}(\{s_2, s_4\}) = .2$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$ .

La distribution trouvée est  $\pi^2$  définie par  $\pi^2(s_1) = 1$ ,  $\pi^2(s_2) = .2$ ,  $\pi^2(s_3) =$

.4,  $\pi^2(s_4) = 0$ . La permutation associée est (1, 3, 2, 4).

(b<sub>2</sub>)  $E = \{s_2, s_4\}$ ,  $sel(\{s_2, s_4\}) = s_4$ ,  $\pi(s_4) = \gamma_{\#}(\{s_2, s_4\}) = .2$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$ .

La distribution trouvée est  $\pi^3$  définie par  $\pi^3(s_1) = 1$ ,  $\pi^3(s_2) = 0$ ,  $\pi^3(s_3) = .4$ ,  $\pi^3(s_4) = .2$ . La permutation associée est (1, 3, 4, 2).

2.  $E = \{s_1, s_2\}$ ,  $sel(\{s_1, s_2\}) = s_2$ ,  $\pi(s_2) = \gamma_{\#}(\{s_1, s_2\}) = 1$ ,  $\mathcal{T} = \{\{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$  et  $\mathcal{F} = \{\{s_1, s_3\}\}$ .

a)  $E = \{s_1, s_3\}$ ,  $sel(\{s_1, s_3\}) = s_1$ ,  $\pi(s_1) = \gamma_{\#}(\{s_1, s_3\}) = .8$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$ .

La distribution trouvée est  $\pi^4$  définie par  $\pi^4(s_1) = .8$ ,  $\pi^4(s_2) = 1$ ,  $\pi^4(s_3) = \pi^4(s_4) = 0$ . La permutation associée est (2, 1, 3, 4).

b)  $E = \{s_1, s_3\}$ ,  $sel(\{s_1, s_3\}) = s_3$ ,  $\pi(s_3) = \gamma_{\#}(\{s_1, s_3\}) = .8$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$ .

La distribution trouvée est  $\pi^5$  définie par  $\pi^5(s_1) = 0$ ,  $\pi^5(s_2) = 1$ ,  $\pi^5(s_3) = .8$ ,  $\pi^5(s_4) = 0$ . La permutation  $\sigma^5$  associée est (2, 3, 4, 1).

Pour tout ensemble  $A$ , on vérifie  $\gamma(A) = \min_{i=1}^5 \Pi^i(A)$ . □

## 5. Généralisation des axiomes de maxitivité et minitivité

D'après les décompositions que nous venons de présenter, la complexité d'une q-capacité  $\gamma$  est mesurée par la cardinalité de  $\mathcal{R}_*(\gamma)$  ou de  $\mathcal{R}_*(\gamma^c)$ . Cette cardinalité est équivalente à des propriétés qui sont une généralisation des axiomes de maxitivité et minitivité que nous allons présenter.

Nous commençons par l'axiome de  $n$ -adjonction.

AXIOME 10. —  $n$ -adjonction

$$\forall A_i, i = 1, \dots, n+1, \min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \leq \max_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cap A_j).$$

Lorsque  $n = 1$ , la 1-adjonction s'écrit :  $\min(\gamma(A), \gamma(B)) \leq \gamma(A \cap B)$ . Comme  $\gamma$  est monotone croissante, les capacités 1-adjonctives sont les mesures de nécessité.

La correspondance suivante a été démontrée (Dubois *et al.*, 2015) :

PROPOSITION 11. —  $\gamma$  est une capacité  $n$ -adjonctive si et seulement si il existe  $n$  mesures de nécessité telles que  $\forall A, \gamma(A) = \max_{j=1}^n N_j(A)$ .

PREUVE 12. —  $\Leftarrow$  Supposons que  $\forall A, \gamma(A) = \max_{j=1}^n N_j(A)$ , on a alors  $\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) = \min_{i=1}^{n+1} \max_{j=1}^n N_j(A_i) = \min_{i=1}^{n+1} N_{j_i}(A_i)$  avec  $N_{j_i}(A_i) \geq N_k(A_i), \forall k \neq j_i, k$  variant de 1 à  $n$  et  $i$  de 1 à  $n+1$ . Au moins deux indices  $j_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n+1$  sont égaux car  $j$  ne prend que  $n$  valeurs distinctes. Sans perdre de généralité supposons que  $j_1 = 1 = j_2$ , c.-à-d.,

$$\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) = \min(N_1(A_1), N_1(A_2), \min_{i=3}^{n+1} N_{j_i}(A_i)).$$

On a donc  $\gamma(A_1 \cap A_2) = \max_{i=1}^n N_i(A_1 \cap A_2) = \max_{i=1}^n \min(N_i(A_1), N_i(A_2))$ . De plus,  $N_1(A_1) \geq N_k(A_1)$  et  $N_1(A_2) \geq N_k(A_2)$  pour tout  $k$  de 2 à  $n$ , donc  $\min(N_1(A_1), N_1(A_2)) \geq \min(N_k(A_1), N_k(A_2))$  pour  $k$  de 2 à  $n$ . Nous avons donc  $\gamma(A_1 \cap A_2) = \min(N_1(A_1), N_1(A_2)) = \min(\gamma(A_1), \gamma(A_2)) \geq \min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i)$ .

⇒ supposons que de manière non triviale  $\gamma(A) = \max_{i=1}^{n+1} N_i(A)$ . Alors on peut trouver une famille de  $n + 1$  ensembles distincts  $A_i$  tels que  $\gamma(A_i) = N_i(A_i)$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$  et on peut les choisir de façon à avoir

$$\min_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) > \max_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cap A_j).$$

En effet choisissons les  $n + 1$  ensembles distincts  $A_i$  avec  $\gamma(A_i) = N_i(A_i)$  et  $\gamma(A) = 0, \forall A \subset A_i, i = 1, \dots, n + 1$ . Ce sont les plus petits éléments de la famille :  $\{D : \gamma(D) > 0\}$  qui sont formés par l'union d'exactly  $n + 1$  filtres<sup>1</sup> (ce sont les noyaux de la distribution de possibilité induisant  $N_i, i = 1, n + 1$ ). Il est alors évident que les  $A_i$  ne sont pas inclus les uns dans les autres, donc on a  $\forall i < j, A_i \cap A_j \subset A_i$  et  $A_i \cap A_j \subset A_j$  (inclusion stricte) alors  $\gamma(A_i \cap A_j) = 0$  par construction; donc,  $\max_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cap A_j) = 0$ . ■

Les mesures de nécessité peuvent être remplacées par les mesures de possibilité et on peut affaiblir la maxitivité. Plus précisément on aura un axiome dual et une propriété similaire :

AXIOME 13. — *n-max-dominance*

$$\forall A_i, i = 1, \dots, n + 1, \max_{i=1}^{n+1} \gamma(A_i) \geq \min_{1 \leq i < j \leq n+1} \gamma(A_i \cup A_j).$$

PROPOSITION 14. —  $\gamma$  est une q-capacité vérifiant la n-max-dominance si et seulement si il existe n mesures de possibilité telles que  $\gamma(A) = \min_{i=1}^n \Pi_i(A)$ .

Quelques remarques :

- Le concept de n-adjonction semble jouer dans le cadre qualitatif un rôle similaire à celui de la n-super-modularité dans le cadre quantitatif.
- Une q-capacité n-adjonctive a exactement n chaînes d'ensembles focaux emboîtés.
- Une q-capacité  $\gamma$  satisfait l'axiome de n-adjonction si et seulement si sa conjuguée  $\gamma^c$  satisfait l'axiome de n-max-dominance.

Il est possible d'établir un lien entre la n-adjonction et la n maxitivité au sens de Grabisch-Mesiar (Mesiar, 1997; Grabisch, 1997).

DÉFINITION 15. —  $\gamma$  est k-maxitive si et seulement si

- $\gamma_{\#}(A) = 0$  si  $|A| > k$
- $\exists A$  tel que  $\gamma_{\#}(A) \neq 0$  avec  $|A| = k$ .

La k-maxitivité est une autre façon de réduire la complexité d'une capacité. Regardons le lien existant entre toutes ces notions. Pour présenter les résultats nous avons besoin de la notion de famille duale et de regarder le lien entre les ensembles focaux d'une q-capacité et de sa conjuguée.

1. Pour une algèbre booléenne  $2^S$ , un filtre est une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles tels que pour tout  $A, B \in \mathcal{F}$  on a  $A \cap B \in \mathcal{F}$  et si  $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$  alors  $B \in \mathcal{F}$ .

DÉFINITION 16. — Soit  $\mathcal{F} = \{E_1, \dots, E_k\}$  un ensemble d'ensembles. La famille duale de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{D}(\mathcal{F})$ , est définie par  $\mathbb{D}(\mathcal{F}) = \min_{\subseteq} \{\{s_1, \dots, s_k\}, s_i \in E_i, i = 1, \dots, k\}$ , où  $\min_{\subseteq}$  choisit les plus petits sous-ensembles pour l'inclusion.

Cette notion de dualité est connue en théorie des graphes. En voyant  $\mathcal{F}$  comme un hypergraphe,  $\mathbb{D}(\mathcal{F})$  est l'hypergraphe transversal de  $\mathcal{F}$  (Berge, 1987). Un élément de  $\mathbb{D}(\mathcal{F})$  est appelé "hitting set" par Reiter (Reiter, 1987).

DÉFINITION 17. — Une capacité booléenne est une capacité à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

PROPOSITION 18. — Pour une capacité booléenne  $\beta$ , l'ensemble des ensembles focaux de  $\beta^c$  est  $\mathcal{F}^{\beta^c} = \mathbb{D}(\mathcal{F}(\beta))$ .

PREUVE 19. — Nous avons  $\mathcal{F}^{\gamma^c} = \min_{\subseteq} \{A, \gamma^c(A) = 1\}$ . Or  $\gamma^c(A) = 1$  ssi  $A$  contient un ensemble de la forme  $\{s_1, \dots, s_k\}, s_i \in E_i, i = 1, \dots, k$ . En effet,  $\gamma^c(A) = 1 \iff \gamma(A^c) = 0 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, E \not\subseteq A^c$  donc  $\gamma^c(A) = 1 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, E \cap A \neq \emptyset$ . On peut donc écrire  $\gamma^c(A) = 1 \iff \forall E \in \mathcal{F}^\gamma, \exists s_E \in E \cap A \iff \exists F = \{s_E : E \in \mathcal{F}^\gamma\}, F \subseteq A$ , où pour chaque ensemble focal  $E$  de  $\gamma$ ,  $s_E$  est choisi dans  $E$ . ■

EXEMPLE 20. — Une mesure de nécessité booléenne possède un unique ensemble focal  $E$ . Les ensembles focaux de sa conjuguée  $\Pi(A) = 1 - N(A^c)$  sont les singletons  $\{s\}$  tels que  $s \in E$ . □

EXEMPLE 21. — Soit  $\mathcal{F}(\beta) = \{E_1, E_2\}$  avec  $E_1 = \{s_0, s_1, s_3\}, E_2 = \{s_0, s_2, s_4\}$ , alors les ensembles focaux de la conjuguée sont les plus petits éléments de la famille

$$\{\{s_0\}\} \cup \{\{s_0, s_i\}, i = 1, \dots, 4\} \cup \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_3, s_2\}, \{s_3, s_4\}\},$$

c'est à dire  $\mathcal{F}^{\beta^c} = \{\{s_0\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_3, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$ . □

On peut vérifier que  $\mathbb{D}(\mathbb{D}(\mathcal{F}(\beta))) = \mathcal{F}(\beta)$ .

EXEMPLE 22. — On reprend l'exemple précédent mais en considérant  $\beta^c$ .  $\mathcal{F}^{\beta^c} = \{\{s\} : s \in E_1 \cap E_2\} \cup \{\{s', s''\} : s' \in E_1 \setminus E_2, s'' \in E_2 \setminus E_1\}$ . Reconstruisons les ensembles focaux de  $\beta$ . Pour construire les ensembles focaux duaux, chaque ensemble focal doit contenir  $E_1 \cap E_2 (= \{s_0\})$ . Supposons alors que nous choisissons  $s_1 \in E_1 \setminus E_2 = \{s_1, s_2\}$ . Ce choix élimine les ensembles focaux  $\{s_1, s\}, s \in E_2 \setminus E_1$  c'est à dire,  $\{s_1, s_4\}$ . Cela nous empêche de choisir l'élément suivant dans  $E_2 \setminus E_1$ . Donc les prochains éléments appartiennent à  $E_1$ , ici  $s_3$ . En fait les ensembles focaux  $\{s, s_2\}, s \neq s_1$  peuvent être privés de  $s_2$  car il y a l'ensemble focal  $\{s_1, s_2\}$  qui interdit  $s_2$ . Donc ce procédé reconstruit l'ensemble focal  $E_1$ . On peut construire  $E_2$  de manière similaire. Un autre choix engendrerait des ensembles contenant  $E_1$  ou  $E_2$ . □

Les résultats ci-dessus montrent un lien entre la  $k$ -adjonction et la  $k$ -maxitivité dans le cas booléen. Plus précisément une capacité booléenne est  $k$ -adjonctive si et seulement si sa conjuguée est  $k$ -maxitive.

EXEMPLE 23. — Soient  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  et  $N_1, N_2$  deux mesures de nécessités associées aux distributions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  avec  $\pi_1(s_1) = 1, \pi_1(s_2) = 1, \pi_1(s_3) = 0$

et  $\pi_2(s_1) = 0, \pi_2(s_2) = 1, \pi_2(s_3) = 1$ . Les ensembles focaux sont  $\{s_1, s_2\}$  et  $\{s_3, s_2\}$ . Soit  $\beta$  la capacité 2-adjonctive définie par  $\beta(A) = \max(N_1(A), N_2(A))$ . Alors  $\mathcal{F}^{\beta^c} = \{\{s_2\}, \{s_1, s_3\}\}$  et  $\beta^c$  est 2-maxitive.  $\square$

Dans le cas général, pour trouver les ensembles focaux de  $\gamma^c$  on peut utiliser les coupes de  $\gamma$ .  $\gamma_\lambda$ , la coupe  $\lambda$  de  $\gamma$ , est une capacité booléenne définie par  $\gamma_\lambda(A) = 1$  si et seulement si  $\gamma(A) \geq \lambda$ . On a  $\gamma_{\lambda_i}^c(A) = 1$  si et seulement si  $\forall E \in \mathcal{F}^{\gamma_{\lambda_i}}$ ,  $E \cap A \neq \emptyset$ . Donc  $E$  est un ensemble focal de  $\gamma_{\lambda_i}^c$  si et seulement si c'est un élément minimal de  $\{E = \{s_F : \gamma_\#(F) > \lambda_{\ell-i}\}\} = \{E = \{s_F : F \in \mathcal{F}^{\gamma_{\lambda_{\ell-i+1}}}\}\}$ . On a donc  $\mathcal{F}^{\gamma_{\lambda_i}^c} = \mathbb{D}(\mathcal{F}^{\gamma_{\lambda_{\ell-i+1}}})$  et  $\gamma_\#^c(E) = \max_{\lambda: E \in \mathcal{F}^{\gamma_\lambda}} \lambda$ .

EXEMPLE 24. — On considère  $\gamma$  une q-capacité dont les focaux sont  $\gamma_\#(\{s_1\}) = 0.3, \gamma_\#(\{s_1, s_2\}) = 0.7$  et  $\gamma_\#(\{s_2, s_3\}) = 1$ . Calculons les ensembles focaux de sa conjuguée.

–  $\gamma_\#^c(E) = \lambda_3 = 1$ , si et seulement si  $E \in \mathbb{D}(\mathcal{F}^\gamma)$ . Donc  $\gamma_\#^c(\{s_1, s_2\}) = \gamma_\#^c(\{s_1, s_3\}) = 1$ .

–  $\gamma_\#^c(E) = \lambda_2 = 0.7$ , si et seulement si  $E \in \mathbb{D}(\mathcal{F}^{\gamma_{0.7}})$  ( $\ell = 3$  donc  $0.7 = \lambda_{\ell-2+1}$ ) et il ne doit pas contenir  $s_1$ . Donc  $\gamma_\#^c(\{s_2\}) = 0.7$ .

–  $\gamma_\#^c(E) = \lambda_1 = 0.3$ , si et seulement si  $E \in \mathbb{D}(\mathcal{F}^{\gamma_{0.3}})$  (ensemble focaux de  $\gamma$  de poids 1) et ne doit pas toucher  $\{s_1, s_2\}$ . Donc  $\gamma_\#^c(\{s_3\}) = 0.3$ .

$\gamma^c$  peut être facilement calculé à partir des ensembles focaux trouvés  $\gamma^c(\{s_1\}) = 0, \gamma^c(\{s_2\}) = 0.7, \gamma^c(\{s_3\}) = 0.3, \gamma^c(\{s_1, s_3\}) = 1, \gamma(\{s_1, s_2\}) = 1, \gamma^c(\{s_2, s_3\}) = 0.7$ .  $\square$

Pour conclure cette partie on peut remarquer que si une capacité a des ensembles focaux de cardinalité  $k$  sa conjuguée sera  $k$ -maxitive.

La figure qui ci-après résume tous les passages entre  $\gamma$  et sa conjuguée  $\gamma^c$ .

Figure 1. Passages entre représentations

## 6. Un point de vue logique modale

Dans cette section nous allons montrer que les résultats précédents suggèrent une nouvelle sémantique pour des logiques modales générales.

Considérons un langage propositionnel  $\mathcal{L}$  ayant des variables  $V = \{a, b, c, \dots\}$  et des connecteurs  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ . La tautologie et la contradiction seront notées respectivement  $\top$  et  $\perp$ . En d'autres termes les formules  $p$  de  $\mathcal{L}$  sont générées de la manière suivante :

- si  $a \in V$  alors  $a \in \mathcal{L}$ ,
- si  $p, q \in \mathcal{L}$  alors  $\neg p \in \mathcal{L}, p \wedge q \in \mathcal{L}$
- $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Soit  $S$  l'ensemble des interprétations de ce langage. Etant données une proposition  $p \in \mathcal{L}$ , une mesure de nécessité  $N$  sur  $S$  dont la distribution de possibilité est  $\pi$ ,  $\Box p$  représente  $N(A) \geq \lambda > 0$ , avec  $A = [p] \subseteq S$  l'ensemble des modèles de  $p$ .  $\Box p$  correspond à la mesure de nécessité booléenne dont la distribution de possibilité est la fonction caractéristique de  $E = \{s | \pi(s) > \nu(\lambda)\}$ .

Considérons un langage propositionnel de niveau supérieur  $\mathcal{L}_\Box$  défini par

- $\forall p \in \mathcal{L}, \Box p \in \mathcal{L}_\Box$ ,
- si  $\phi, \psi \in \mathcal{L}_\Box$ , alors  $\neg\phi \in \mathcal{L}_\Box$ , et  $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_\Box$ .

Les variables de  $\mathcal{L}_\Box$  sont alors  $\{\Box p : p \in \mathcal{L}\}$ .  $\Diamond p$  est une notation simplifiée de  $\neg\Box\neg p$ . Alors  $\Diamond p$  modélise  $\Pi(A) \geq \nu(\lambda)$  où  $\Pi$  est la conjuguée de  $N$ . Cela définit un fragment très élémentaire de la logique modale KD connue sous le nom de MEL (Banerjee, Dubois, 2009 ; 2014). En effet les axiomes suivants sont vérifiés

- (K) :  $\vdash \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ .
- (N) :  $\vdash \Box p$  si  $p$  est une tautologie ( $\vdash p$ ).
- (D) :  $\vdash \Box p \rightarrow \Diamond p$ .

Ces axiomes impliquent la forme booléenne de l'axiome de minitivité, soit l'axiome (C) :  $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$ .

Un modèle pour une formule  $\phi \in \mathcal{L}_\Box$  est un ensemble non vide  $E \subseteq S$ . L'ensemble  $E$  est compris comme l'état épistémique d'un agent. La satisfaction des formules de MEL est alors définie de la façon suivante pour  $\phi, \psi \in \mathcal{L}_\Box$ :

- $E \models \Box p$ , si et seulement si  $E \subseteq [p]$ ;
- $E \models \neg\phi$ , si et seulement si  $E \not\models \phi$ ;
- $E \models \phi \wedge \psi$ , si et seulement si  $E \models \phi$  et  $E \models \psi$ ;
- alors,  $E \models \Diamond p$  si et seulement si  $E \cap [p] \neq \emptyset$ .

Pour tout ensemble  $\Gamma \cup \{\phi\}$  de  $\mathcal{L}_\Box$ -formules,  $\phi$  est une conséquence sémantique de  $\Gamma$ , notée  $\Gamma \models \phi$ , lorsque pour chaque état épistémique  $E$ ,  $E \models \Gamma$  implique  $E \models \phi$ . Si  $N$  est une mesure de nécessité booléenne induite par  $E$ , on lui associe une interprétation classique de  $\mathcal{L}_\Box$ , de la forme  $\bigwedge_{p \in \mathcal{L}: N([p])=1} \Box p \wedge \bigwedge_{p \in \mathcal{L}: N([p])=0} \neg\Box p$ . La preuve de complétude de MEL se base donc sur le fait qu'on peut voir cette logique comme une logique propositionnelle dont les interprétations sont induites par un état épistémique (via une mesure nécessité booléenne) si et seulement si elles satisfont les axiomes (propositionnels) K, N, et D.

En utilisant le même langage  $\models \Box p$  peut aussi représenter  $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$  pour toute capacité qualitative  $\gamma$ .  $\Box p$  correspond alors à la capacité booléenne définie par  $\gamma_\lambda(A) = 1$  si  $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$  et 0 sinon. On peut alors vérifier les axiomes suivants (Dubois, 2012) :

- (RE) :  $\vdash \Box p \equiv \Box q$  lorsque  $\vdash p \equiv q$ .
- (RM) :  $\vdash \Box p \rightarrow \Box q$ , lorsque  $\vdash p \rightarrow q$ .
- (N) :  $\vdash \Box p$  si  $\vdash p$ ; (P) :  $\vdash \Diamond p$ , si  $\vdash p$ .

C'est une logique modale non régulière. Plus précisément c'est un fragment de la logique modale monotone EMN (Chellas, 1980), où les modalités ne s'appliquent qu'aux propositions. Sa sémantique habituelle est basée sur les voisinages (familles de sous-ensembles de mondes possibles ayant certaines propriétés). Cette logique ne satisfait pas les axiomes K, C et D. Cette logique modale est le point de vue logique naturel des capacités qualitatives. En effet, toute interprétation classique de  $\mathcal{L}_\square$  satisfaisant les axiomes précédents est définie par une capacité booléenne  $\beta$ . De plus, elle est de la forme  $\bigwedge_{p \in \mathcal{L}: \beta([p])=1} \square p \wedge \bigwedge_{p \in \mathcal{L}: \beta([p])=0} \neg \square p$ .

Nous pouvons alors traduire la propriété de  $n$ -adjonction dans le cadre de la logique modale (lire (Dubois, 2012) pour le cas  $n = 2$ ). Soit  $n$  le plus petit entier pour lequel  $\gamma(A) = \max_{i=1}^n N_i(A)$ . En notant  $\square_i p$  pour  $N_i([p]) \geq \lambda > 0$ , il est clair que  $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$  représente  $\square p \equiv \bigvee_{i=1}^n \square_i p$ , où les  $\square_i$  sont des KD modalités. Par dualité,  $\diamond p$  veut dire  $\neg \square \neg p$ , et on a alors  $\diamond p \equiv \bigwedge_{i=1}^n \diamond_i p$ . On peut écrire alors l'axiome de  $n$ -adjonction dans le cadre logique:

$$(n\text{-C}) : \vdash \left( \bigwedge_{i=1}^{n+1} \square p_i \right) \rightarrow \bigvee_{i \neq j=1}^{n+1} \square (p_i \wedge p_j)$$

Cela implique que si les  $p_i, i = 1 \dots, n+1$  sont mutuellement inconsistants alors  $\vdash \neg \bigwedge_{i=1}^{n+1} \square p_i$ . Cette propriété montre qu'on ne peut pas avoir  $\gamma([p_i]) \geq \lambda > 0$  pour tout  $i = 1 \dots, n+1$ .

La sémantique de la logique EMNP+ $n$ -C peut s'exprimer de deux façons :

- Sous la forme de  $n$  états épistémiques (sous-ensembles de  $S$ ) :  $(E_1, \dots, E_n) \models \square p$  si  $\exists i \in [1, n], E_i \models \square_i p$ . Par construction,  $E_1, \dots, E_n$  sont les ensembles focaux de la capacité booléenne définie par  $\gamma_\lambda(A) = 1$  si  $\gamma([p]) \geq \lambda > 0$  et 0 sinon.

- En termes de voisinage : ce sont les sous-ensembles non vides  $\mathcal{N}$  de  $2^S$  tels que  $\mathcal{N} \models \square p$  si et seulement si  $[p] \in \mathcal{N}$  et  $\mathcal{N} \models \diamond$  si et seulement si  $[\neg p] \notin \mathcal{N}$ .

Pour une KD modalité, il est clair que  $\mathcal{N} = \{A, N(A) \geq \lambda\} = \{A | A \supseteq E\}$  pour un ensemble non vide  $E \subseteq S$  ( $\mathcal{N}$  est un filtre propre). Pour une modalité EMNP  $\mathcal{N} = \{A, \gamma(A) \geq \lambda > 0\} \neq 2^S$  est fermé pour l'inclusion et non vide. Pour une modalité EMNP+ $n$ -C,  $\mathcal{N} = \{A, \gamma(A) \geq \lambda > 0\}$  est l'union de  $n$  filtres propres de la forme  $\{A, N_i(A) \geq \lambda\} = \{A | A \supseteq E_i\}$ .

Dans le cas extrême où les ensembles  $(E_1, \dots, E_n)$  sont des singletons, la modalité  $\square p$  vérifie la distributivité par rapport à la disjonction :  $\vdash \square (p \vee q) \equiv \square p \vee \square q$  (mais non par rapport à la conjonction), ainsi que l'opposé de l'axiome D :  $\vdash \diamond p \rightarrow \square p$ . En d'autres termes, les modalités de nécessité et de possibilité sont échangées. Nous sommes ramenés à la logique MEL en échangeant les modalités de base  $\square$  et  $\diamond$ . En fait, cet échange des modalités est une simple instance d'une question plus générale, considérée dans la section précédente, celle de calculer les éléments focaux d'une capacité à partir de ceux de sa conjuguée. Cela revient au niveau sémantique à la transformation d'une logique basée sur les états épistémiques de  $k$  agents dans la situation duale d'une logique multi-source associée à un ensemble d'agents dont la connais-

sance a une imprécision limitée (c.-à-d., où chaque état épistémique met en jeu au plus  $k$  mondes possibles).

## 7. Information contenue dans une capacité qualitative

En théorie des fonctions de croyance, il y a plusieurs façons de comparer deux fonctions de croyance  $Bel_i(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m_i(E)$ , du point de vue de leur contenu informatif. On retiendra ici, par simplicité deux définitions :

- $Bel_2$  est moins informative que  $Bel_1$  si  $Bel_1 \geq Bel_2$ , c.-à-d., l'ensemble de probabilités dominant  $Bel_1$  est contenu dans celui relatif à  $Bel_2$ .
- $m_1$  est plus spécialisé que  $m_2$  s'il y a une masse jointe  $x(A, B)$ , dont les marginales sont égales à  $m_1$  et  $m_2$ , et telle que  $x(A, B) = 0$  chaque fois que les focaux ne sont pas inclus :  $A \not\subseteq B$ .

Il est connu que la seconde propriété est plus forte que la première (Dubois, Prade, 1986). La propriété  $\gamma(A) = \max_{E \subseteq A} \gamma_{\#}(E)$  peut faire penser que des relations analogues vont pouvoir être décrites dans le cas qualitatif. Et de fait on prouve un résultat similaire et techniquement plus fort entre deux q-capacités  $\gamma$  et  $\delta$  (Prade, Rico, 2011) :

PROPOSITION 25. — *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

- $\forall A \subseteq S, \gamma(A) \geq \delta(A)$ ;
- $\forall F \in \mathcal{F}^{\delta}, \exists E \in \mathcal{F}^{\gamma} : E \subseteq F$ , et  $\gamma_{\#}(E) \geq \delta_{\#}(F)$ .

La seconde condition est le pendant qualitatif de la relation de spécialisation. Cela veut dire formellement que pour tout focal  $F$  de  $\delta$  il y a un focal plus petit et de poids au moins aussi fort pour  $\gamma$ , ce qui explique la domination de  $\gamma$  sur  $\delta$ . Ici on a même une équivalence. Mais ce résultat est trompeur. Ni les valeurs des transformées de Möbius qualitatives  $\gamma_{\#}$  et  $\delta_{\#}$ , ni la taille des ensembles focaux  $A, B$  ne nous renseignent sur le contenu informatif d'une q-capacité. Car, dans la proposition 25, on compare toute paire de q-capacités. Notons que cela autoriserait à comparer une fonction de croyance et sa plausibilité duale  $Pl$  : par définition,  $Bel \leq Pl$ , ce qui n'apporte rien, car elles ont par définition le même contenu informatif. Par exemple, dans le cas qualitatif, les focaux de la mesure de possibilité vide  $\Pi^?$  sont tous les singletons, et le focal de la mesure de nécessité vide  $N^?$  est l'ensemble  $S$ . Mais ils représentent la même information (la distribution de possibilité la moins spécifique) ; cependant,  $\Pi^?$  est optimiste,  $N^?$  est pessimiste.

Dans ce contexte, les questions qui se posent sont : quelles sont les q-capacités qui représentent l'idée de certitude comme les fonctions de croyance ? quelles sont les q-capacités pessimistes et les optimistes ? Quand peut-on dire qu'une q-capacité est plus informative qu'une autre ? Comment séparer le caractère pessimiste du caractère informatif d'une q-capacité ?



### 7.1. Pessimisme, optimisme

Ces considérations nous amènent aux définitions suivantes (Dubois *et al.*, 2001) :

DÉFINITION 26. — Une  $q$ -capacité  $\gamma$  telle que  $\gamma \leq \gamma^c$  (resp. si  $\gamma \geq \gamma^c$ ) est pessimiste (resp. optimiste).

Ceci est en parfait accord avec le cadre numérique des fonctions de croyance et des probabilités imprécises.

On voit que:

- une  $q$ -capacité peut n'être ni pessimiste ni optimiste. Il peut exister  $A, B$  tels que  $\gamma(A) < \gamma^c(A)$  (pessimiste pour  $A$ ), et  $\gamma(B) > \gamma^c(B)$  (optimiste pour  $B$ ).
- une  $q$ -capacité peut être les deux, lorsque  $\gamma = \gamma^c$ . Par exemple, une  $q$ -capacité booléenne ( $L = \{0, 1\}$ ) sur un ensemble à  $2n + 1$  éléments,  $\gamma_n(A) = 1$  si  $|A| > n$  et 0 sinon.

Pour vérifier qu'une  $q$ -capacité est pessimiste, on peut montrer facilement qu'il suffit de vérifier la propriété  $\gamma(A) \leq \gamma^c(A)$  sur les focaux.

On a aussi quelques conditions nécessaires ou suffisantes :

- une  $q$ -capacité telle que pour tout ensemble  $A$ ,  $\min(\gamma(A), \gamma(A^c)) = 0$  est pessimiste.
- $\gamma$  est pessimiste si et seulement si pour toute paire disjointe de focaux  $E$  and  $F$  on a  $\gamma_{\#}(E) \leq \nu(\gamma_{\#}(F))$ .
- Si  $\gamma$  est optimiste et  $A$  est focal pour  $\gamma$  avec  $\gamma(A) \neq 1$  alors  $A^c$  contient un focal de  $\gamma$ .

La condition  $\gamma_{\#}(F) > \nu(\gamma_{\#}(E))$  indique que les focaux d'une capacité pessimiste ne sont pas disjoints quand les poids  $\gamma_{\#}(F), \gamma_{\#}(E)$  sont tous les deux élevés. En particulier, tous les focaux  $E$  d'une  $\gamma$  pessimiste intersectent les focaux de poids 1. Si chaque paire de focaux d'une  $q$ -capacité est non disjointe, la  $q$ -capacité est pessimiste. Pour les capacités booléennes, la propriété est caractéristique: l'intersection de deux focaux n'est jamais vide.

EXEMPLE 27. — Soit une  $q$ -capacité avec 4 focaux,  $E, F, G_1, G_2$  tels que  $F \subseteq E$ ,  $G_i \cap E \neq \emptyset$  pour  $i = 1, 2$ , et  $F, G_1, G_2$  sont disjoints (Fig. 27). Supposons  $\gamma_{\#}(E) = 1, \gamma_{\#}(F) = \alpha > \nu(\alpha)$ , et  $\gamma_{\#}(G_i) = \beta_i < \nu(\alpha)$ . Alors on peut voir que  $\gamma$  est pessimiste, car  $\gamma^c(E) = 1, \gamma^c(F) = \nu(\max(\beta_1, \beta_2)) > \alpha, \gamma^c(G_i) = \nu(\alpha) > \beta_i$ .

Figure 2. Focaux d'une  $q$ -capacité pessimiste

□

## 7.2. Informativité relative

On peut construire des versions pessimistes et optimistes de toute q-capacité  $\gamma$  (respectivement appelées fonctions d'*assurance* et d'*opportunité* dans (Yager, 2012)):

DÉFINITION 28. — *La version pessimiste de  $\gamma$  est  $\gamma_*(A) = \min(\gamma(A), \gamma^c(A))$  et sa version optimiste est  $\gamma^*(A) = \max(\gamma(A), \gamma^c(A))$ .*

On voit que  $\gamma_*$  et  $\gamma^*$  sont des q-capacités (monotones croissantes pour l'inclusion), et, par construction,  $\gamma^*$  est la  $\nu$ -conjuguée de  $\gamma_*$  (c.-à-d.,  $\gamma^* = \gamma_*^c$ ). Elles ont donc la même informativité.

On peut maintenant introduire une relation  $\approx$  entre q-capacités exprimant l'idée de contenir la même quantité d'information avec la même précision:

DÉFINITION 29. —  *$\gamma$  et  $\delta$  contiennent la même quantité d'information, que l'on note  $\gamma \approx \delta$ , si et seulement si  $\gamma^* = \delta^*$  et  $\gamma_* = \delta_*$ .*

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des q-capacités. On a bien sûr  $\gamma_* = \delta_*$  si et seulement si  $\gamma^* = \delta^*$ ; donc une égalité suffit.  $\gamma_* = \delta_*$  veut dire que sur tous les sous-ensembles  $A$  de  $S$ , les paires de valeurs  $\{\gamma(A), \gamma(A^c)\}$  et  $\{\delta(A), \delta(A^c)\}$  sont égales. Donc pour tout événement  $A$  on doit choisir une attitude face à l'incertain: pessimiste si on affecte la plus petite valeur, optimiste sinon (pourvu qu'on respecte la monotonie). La classe d'équivalence  $\mathcal{C}_{\approx}(\gamma)$  de  $\gamma$  est bornée supérieurement par  $\gamma^*$  et inférieurement par  $\gamma_*$ .

Si  $\delta \in \mathcal{C}_{\approx}(\gamma)$  est une q-capacité pessimiste, alors, bien sûr  $\min(\delta, \delta^c) = \delta = \gamma_*$  et  $\gamma_*$  est l'unique q-capacité pessimiste dans  $\mathcal{C}_{\approx}(\gamma)$ . De même,  $\gamma^*$  est l'unique q-capacité optimiste dans  $\mathcal{C}_{\approx}(\gamma)$ . En conséquence, pour comparer les q-capacités en termes d'informativité, il faut le faire au travers de leurs classes d'équivalence  $\mathcal{C}_{\approx}(\gamma)$ , ce qui justifie la définition suivante:

DÉFINITION 30. — *Une q-capacité  $\gamma$  est dite au moins aussi informative qu'une q-capacité  $\delta$  si et seulement si  $\gamma_* \geq \delta_*$ .*

Une autre relation permet de comparer deux q-capacités quant à leur pessimisme relatif face à l'incertitude:

DÉFINITION 31. — *Une q-capacité  $\gamma$  est dite moins pessimiste qu'une q-capacité  $\delta$  au sens large si et seulement si  $\{A : \gamma(A) = \gamma_*(A)\} \subseteq \{A : \delta(A) = \delta_*(A)\}$ .*

Ces définitions dissocient complètement les deux aspects de l'information contenue dans une q-capacité: l'attitude face à l'incertain et la quantité d'information, au sens de la spécificité possibiliste.

Notons que la Proposition 25, même appliquée à des q-capacités dites strictement pessimistes dont les focaux s'intersectent deux à deux (dans ce cas,  $\min(\gamma(A), \gamma(A^c)) = 0$ ), doit être prise avec précaution. La notion de *plus informatif* peut prendre ici un sens paraconsistant en accord avec l'ordre d'informativité au sens de (Belnap, 1977): si on reçoit trop d'information, celle-ci risque d'être contradictoire. Ainsi, une pro-

position déclarée à la fois vraie et fausse peut être considérée comme plus informée qu'une proposition déclarée simplement vraie ou fausse.

Par exemple, considérons des capacités booléennes,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  telles que  $\mathcal{F}(\beta_1) = \{E_1\}$  et  $\mathcal{F}(\beta_2) = \{E_1, E_2\}$  avec  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ; on observe qu'elles sont pessimistes, que  $\beta_1(A) < \beta_2(A)$  si  $E_2 \subseteq A, E_1 \not\subseteq A$ , et  $\beta_1(A) = \beta_2(A)$  sinon. Cependant, on peut trouver l'information fournie par  $\beta_2$  moins claire que celle fournie par  $\beta_1$  puisque la première correspond à deux agents partiellement en désaccord, affirmant respectivement  $x \in E_1$  et  $x \in E_2$  (sans qu'on puisse conclure  $x \in E_1 \cap E_2$ ). Cette remarque suggère qu'en plus du caractère optimiste ou pessimiste d'une q-capacité, et sa spécificité, il faudrait aussi mesurer son niveau de paraconsistance.

EXEMPLE 32. — Ignorance totale. On considère la q-capacité  $N^?$  définie par  $N^?(S) = 1$  et  $N^?(A) = 0$  sinon. Sa conjuguée est  $\Pi^?$ .  $N^?$  est pessimiste et elle est moins informative que toute q-capacité car  $[N^?(A), \Pi^?(A)] = [0, 1]$  pour  $A \neq S, \emptyset$ .  $\square$

EXEMPLE 33. — Information précise. Pour chaque élément  $s_i$  de  $S$  on définit la q-capacité  $\sigma_i$  par  $\sigma_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Elle représente l'information précise  $x = s_i$ . Comme  $\sigma_i = \sigma_i^c$  on a  $\sigma_{i*} = \sigma_i^* = \sigma_i$ . Quelques remarques concernant cette famille de q-capacités :

- Si on considère deux q-capacités  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  avec  $s_i \neq s_j$  alors aucune des deux n'est plus informative que l'autre.
- $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  contiennent la même information si et seulement si  $s_i = s_j$ .
- $\mathcal{C}_{\approx}(\sigma_i) = \{\sigma_i\}$ .
- Il n'existe pas de q-capacité pessimiste  $\gamma \neq \sigma_i$  telle que  $\gamma \geq \sigma_i$ . On a  $[\sigma_{i*}(A), \sigma_i^*(A)]$  qui est réduit à 0 ou 1. Donc  $[\sigma_{i*}(A), \sigma_i^*(A)]$  ne peut pas contenir l'intervalle non trivial  $[\gamma_*(A), \gamma^*(A)]$ . Pour toute q-capacité  $\gamma$ , soit les informations contenues dans  $\gamma$  et  $\sigma_i$  sont incomparables, soit  $\gamma$  est moins informative que  $\sigma_i$ .  $\square$

EXEMPLE 34. — Les q-capacités auto-conjuguées. Les q-capacités auto-conjuguées  $\sigma$  sont telles que  $\forall A \subseteq S, \sigma(A) = \nu(\sigma(A^c)) = \sigma^c(A)$ . Elles sont à la fois pessimistes et optimistes. Il n'existe pas de q-capacité plus informative car l'intervalle  $[\sigma_*(A), \sigma^*(A)]$  est réduit à un point et ne peut donc contenir  $[\gamma_*(A), \gamma^*(A)]$  pour toute autre capacité  $\gamma \neq \sigma$ .  $\square$

Une sous-classe importante de q-capacités auto-conjuguées est formée par les capacités symétriques où  $\gamma(A) = \alpha_{|A|}$  dépend seulement de la cardinalité de  $A$ ,  $\alpha_{|A|} = \nu(\alpha_{|S \setminus A|}) \geq \alpha_{|S \setminus A|}$  si  $|A| \geq |S|/2$ . Elles sont entièrement définies par une suite strictement croissante de  $n = |S|$  coefficients  $\alpha_i$  tels que  $\alpha_i = \nu(\alpha_{n-i+1})$ . Les q-capacités précises sont une sous-classe des q-capacités auto-conjuguées.

## 8. Conclusion

Nous avons étudié la représentation des capacités prenant des valeurs sur une échelle finie totalement ordonnée par une famille de distributions de possibilité qualitatives. Il se trouve que toute capacité peut être vue soit comme une mesure de possibilité inférieure soit comme une mesure de nécessité supérieure par rapport à deux familles distinctes de distributions de possibilité. Cette remarque a conduit à proposer une généralisation des propriétés de maxitivité et de minitivité en théorie des possibilités, offrant ainsi une classification des capacités qualitatives en termes de niveaux croissants de complexité et de généralité, basée sur le nombre minimal de distributions de possibilité dont on a besoin pour les représenter. De plus, l'étude des relations entre les ensembles focaux d'une capacité et ceux de sa conjuguée a mis en évidence les liens entre capacités  $k$ -adjonctives et  $k$ -maxitives. On a également montré un lien entre les capacités qualitatives et les logiques modales non régulières, qui généralisent les logiques modales de type KD au même sens où les capacités généralisent les mesures de nécessité. Enfin nous avons présenté une approche pour comparer des capacités en termes d'informativité et de pessimisme.

De nombreuses directions de recherche s'ouvrent à partir de ces résultats :

- Du côté de la logique, on peut reconsidérer l'étude des logiques modales non régulières à la lumière d'une sémantique basée sur les capacités. Le fait que cela conduise à des disjonctions d'opérateurs de nécessité de type KD rappelle le cadre épistémique de (Belnap, 1977), et les logiques paraconsistantes. Le fait qu'un cas extrême de logique EMN revienne à une logique modale similaire à celles de type KD, où possibilité et nécessité sont échangées, reflète la symétrie qui existe entre les valeurs épistémiques représentant l'information contradictoire et l'absence d'information dans le bitreillis de Belnap.

- Il faut approfondir la question de l'information représentée par une  $q$ -capacité, en liaison avec la gestion des connaissances contradictoires et celle de la fusion d'information symbolique. Par exemple, il est facile de définir des contreparties de la règle de combinaison de Dempster pour les  $q$ -capacités (Prade, Rico, 2011), mais moins facile d'en interpréter les résultats.

On peut imaginer plusieurs types d'applications de ce cadre formel. Citons en quelques-unes :

- Les résultats suggèrent qu'on peut fusionner des distributions de possibilité sans détruire l'information qu'elles contiennent, sous la forme d'une  $q$ -capacité. Une première tentative pour appliquer cette démarche se trouve dans (Assaghir *et al.*, 2011).

- Les connections mises en évidence avec la logique modale nous invitent à reconsidérer les méthodes de traitement de l'inconsistance basées sur la logique de Belnap (Dubois, 2012), les logiques paraconsistantes (Ciucci, Dubois, 2016) et la logique possibiliste (Benferhat *et al.*, 1999) et à en chercher un cadre unificateur.

- Dans un tout autre registre, l'intégrale de Sugeno est une opération d'agrégation qualitative utile en analyse multicritère notamment, et basée sur les  $q$ -capacités

(Grabisch *et al.*, 2000). Nos résultats indiquent qu'une intégrale de Sugeno est la borne inférieure de maxima pondérés induits par les mesures de possibilité minimales qui dominant la  $q$ -capacité. Si ce nombre est petit, la complexité de calcul de l'intégrale de Sugeno est réduite, ce qui est déjà exploité avec la  $k$ -maxitivité. Nous offrons donc un outil de simplification complémentaire.

## Bibliographie

- Assaghir Z., Napoli A., Kaytoue M., Dubois D., Prade H. (2011). Numerical information fusion: Lattice of answers with supporting arguments. In *Proc. int. conf on tools for ai (ictai 2011, boca raton*, p. 621-628. Piscataway, N.J., IEEE.
- Banerjee M., Dubois D. (2009). A simple modal logic for reasoning about revealed beliefs. In C. Sossai, G. Chemello (Eds.), *Proc. 10th Europ. conf. on symbolic and quantitative approaches to reasoning with uncertainty (ECSQARU'09), Verona, july 1-3*, vol. 5590, p. 805-816. Berlin, Springer.
- Banerjee M., Dubois D. (2014). A simple logic for reasoning about incomplete knowledge. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 55, p. 639–653.
- Banon G. (1995). Constructive decomposition of fuzzy measures in terms of possibility and necessity measures. In *Proc. 6th int. fuzzy systems assoc. world congress*, vol. 1, p. 217-220. Sao Paulo, IFSA.
- Belnap N. D. (1977). *How a computer should think*. Boston, Oriel Press.
- Benferhat S., Dubois D., Prade H. (1999). An overview of inconsistency-tolerant inferences in prioritized knowledge bases. In D. Dubois, H. Prade, E. Klement (Eds.), *Fuzzy sets, logics and reasoning about knowledge*, p. 395-417. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ.
- Berge C. (1987). *Hypergraphes. combinatoires des ensembles finis*. Paris, Gauthier-Villars.
- Chellas B. F. (1980). *Modal logic: an introduction*. Cambridge, UK, Cambridge University Press.
- Choquet G. (1953). Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 5, p. 131–295.
- Ciucci D., Dubois D. (2016). From possibility theory to paraconsistency. In J.-Y. Beziau, M. Chakraborty, S. Dutta (Eds.), *New directions in paraconsistent logics*, vol. 152, p. to appear. India, Springer.
- Dempster A. P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 38, p. 325-339.
- Denneberg D. (1994). *Non-additive measure and integral*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Dubois D. (2011). Fuzzy measures on finite scales as families of possibility measures. In *Proc. 7th Europ. conf. society for fuzzy logic and technology (EUSFLAT-LFA'11), Aix-les-bains*, p. 822-829. Paris, Atlantis Press.
- Dubois D. (2012). Reasoning about ignorance and contradiction: many-valued logics versus epistemic logic. *Soft Comput.*, vol. 16, n° 11, p. 1817-1831.
- Dubois D., Fargier H. (2009a). Capacity refinements and their application to qualitative decision evaluation. In C. Sossai, G. Chemello (Eds.), *Proc. 10th Europ. conf. on symbolic and*

- quantitative approaches to reasoning with uncertainty (ECSQARU'09), Verona, july 1-3, vol. LNAI 5590, p. 311-322. Berlin, Springer.*
- Dubois D., Fargier H. (2009b). Making discrete Sugeno integrals more discriminant. *Int. J. Approx. Reasoning*, vol. 50, n° 6, p. 880-898.
- Dubois D., Prade H. (1984). Upper and lower possibilities induced by a multivalued mapping. In E. Sanchez (Ed.), *Proc. IFAC symp. on fuzzy information, knowledge representation and decision analysis*, p. 152-174. Oxford, U.K., Pergamon Press.
- Dubois D., Prade H. (1985). Evidence measures based on fuzzy information. *Automatica*, vol. 21, p. 547-562.
- Dubois D., Prade H. (1985; 2e édit.1987). *Théorie des possibilités. applications à la représentation des connaissances en informatique*. Paris, (avec la collaboration de H. Fargier, R. Martin-Clouaire, C. Testemale), Masson.
- Dubois D., Prade H. (1986). A set-theoretic view of belief functions - Logical operations and approximation by fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, vol. 12 (3), p. 193-226.
- Dubois D., Prade H. (1990). Aggregation of possibility measures. In J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (Eds.), *Multiperson decision making using fuzzy sets and possibility theory*, p. 55-63. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer.
- Dubois D., Prade H. (1998). Possibility theory: Qualitative and quantitative aspects. In D. M. Gabbay, P. Smets (Eds.), *Handbook of defeasible reasoning and uncertainty management systems, vol. 1*, p. 169-226. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic.
- Dubois D., Prade H., Rico A. (2013). *Les capacités qualitatives sont des possibilités imprécises*. (Actes 22ème Rencontres sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'13), Reims, 10-11 Oct.)
- Dubois D., Prade H., Rico A. (2014). La structure des capacités qualitatives. In *Actes 23ème rencontres sur la logique floue et ses applications (LFA'14), Cargèse, 22-24 oct.*, p. 217-224. Toulouse, Cépaduès.
- Dubois D., Prade H., Rico A. (2015). Representing qualitative capacities as families of possibility measures. *Int. J. Approx. Reasoning*, vol. 58, p. 3-24.
- Dubois D., Prade H., Roubens M., Sabbadin R., Marichal J.-L. (2001). The use of the discrete Sugeno integral in decision-making: a survey. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 9 (5), p. 539-561.
- Grabisch M. (1997). On the representation of k-decomposable measures. In *Proc. 7th int. fuzzy systems assoc. world congress (IFSA'97), Prague, june 25-29*, vol. 1, p. 478-483. Prague, Academia.
- Grabisch M. (2004). The Möbius transform on symmetric ordered structures and its application to capacities on finite sets. *Discrete Mathematics*, vol. 287, p. 17-34.
- Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M. (Eds.). (2000). *Fuzzy measures and integrals: Theory and applications*. Heidelberg, Physica-Verlag.
- Mesiar R. (1997). k-order pan-discrete fuzzy measures. In *Proc. 7th int. fuzzy systems assoc. world congress (IFSA'97), Prague, june 25-29*, vol. 1, p. 488-490. Prague, Academia.

- Prade H., Rico A. (2011). Possibilistic evidence. In Weiru Liu (Ed.), *Proc. 11th Europ. conf. on symbolic and quantitative approaches to reasoning with uncertainty (ECSQARU'11), Belfast, june 29-july 1*, vol. 6717, p. 713-724. Berlin, Springer.
- Reiter R. (1987). A theory of diagnosis from first principles. *Artif. Intell.*, vol. 32, n° 1, p. 57–95.
- Shafer G. (1976). *A mathematical theory of evidence*. Princeton, N. J., Princeton University Press.
- Sugeno M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. In M. M. Gupta, G. N. Saridis, B. R. Gaines (Eds.), *Fuzzy Automata and Decision Processes*, p. 89-102. Amsterdam, North-Holland.
- Walley P. (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. London, Chapman and Hall.
- Yager R. R. (2012). Measures of assurance and opportunity in modeling uncertain information. *Int. J. Intell. Syst.*, vol. 27 (8), p. 776-797.
- Zadeh L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1 (1), p. 3-28.