



**HAL**  
open science

# Une propriété d'indépendance pour des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart

Angelo Efoévi Koudou

► **To cite this version:**

Angelo Efoévi Koudou. Une propriété d'indépendance pour des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart. 44èmes journées de Statistique, May 2012, Bruxelles, Belgique. hal-01289024

**HAL Id: hal-01289024**

**<https://hal.science/hal-01289024>**

Submitted on 16 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une propriété d'indépendance pour des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart

A. E. Koudou

*Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239,*

*F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex,*

*Efoevi.Koudou@iecn.u-nancy.fr*

February 17, 2012

## Abstract

For a positive integer  $r$ , let  $I$  denote the  $r \times r$  unit matrix. Let  $X$  and  $Y$  be two independent  $r \times r$  real symmetric and positive definite random matrices. Assume that  $X$  follows a Kummer distribution while  $Y$  follows a non-degenerate Wishart distribution, with suitable parameters. This note points out the following observation: the random matrices  $U := [I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}[I + X^{-1}]^{-1}[I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}$  and  $V := X + Y$  are independent and  $U$  follows a matrix beta distribution while  $V$  follows a Kummer distribution. This generalizes to the matrix case an independence property established in Koudou and Vallois (2010) for  $r = 1$ .

Résumé : Soit  $I$  la matrice unité  $r \times r$  à coefficients réels. soient  $X$  et  $Y$  des matrices aléatoires  $r \times r$  réelles symétriques définies positives, indépendantes. Sous l'hypothèse que  $X$  suit une loi de Kummer et que  $Y$  suit une loi de Wishart avec des paramètres adéquats, nous prouvons l'observation suivante : les matrices  $U := [I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}[I + X^{-1}]^{-1}[I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}$  et  $V := X + Y$  sont indépendantes,  $U$  suit une loi beta matricielle et  $V$  suit une loi de Kummer. Ceci constitue la version matricielle d'une propriété d'indépendance établie par Koudou et Vallois (2012) pour  $r = 1$ .

*Keywords:* Wishart distribution; Matsumoto-Yor property; Matrix Kummer distribution; Matrix Beta distribution.

## 1 Introduction

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires positives et indépendantes. Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction strictement décroissante et bijective. Considérons  $U := f(X + Y)$  et  $V := f(X) - f(X + Y)$ . Dans le cas  $f(x) = 1/x$ , si  $X$  suit une loi gaussienne inverse généralisée (GIG) et si  $Y$  suit une loi gamma avec une condition sur les paramètres, alors  $U$  et  $V$  sont indépendantes. Cette propriété, partiellement démontrée par Matsumoto et

Yor (2001) et complètement établie par Letac et Wesolowski (2000), est évoquée dans la littérature récente sous le terme *propriété de Matsumoto-Yor*. Il est prouvé dans Letac et Wesolowski (2000) que cette propriété caractérise le produit tensoriel des lois GIG et gamma (moyennant la condition sur les paramètres).

D'autres propriétés d'indépendance du type Matsumoto-Yor ont été prouvées par Koudou et Vallois (2010), en remarquant que les fonctions  $f$  possibles sont essentiellement au nombre de quatre et en exhibant les lois correspondantes sous les hypothèses d'existence et de régularité des densités (voir aussi Koudou et Vallois, 2011, où les hypothèses de régularité ont été légèrement assouplies). Pour  $f(x) = \log(1+x) - \log x$ , la propriété d'indépendance correspondante peut se réécrire de la manière suivante : si  $X, Y$  sont des variables aléatoires indépendantes telles que  $X$  suit la loi de Kummer

$$K^{(2)}(a, b, c)(dx) := Cx^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx, \quad a, c > 0, b \in \mathbb{R}$$

( $C$  étant la constante de normalisation) et  $Y$  suit la loi gamma  $\gamma(b, c)(dx) = \frac{c^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$ , alors les variables aléatoires

$$U := \frac{1 + \frac{1}{X+Y}}{1 + \frac{1}{X}}, \quad V := X + Y \quad (1.1)$$

sont indépendantes. De plus,  $U \sim \text{Beta}(a, b)$  et  $V \sim K^{(2)}(a+b, -b, c)$  où  $\text{Beta}(a, b)(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{0 < x < 1\}}dx$ .

La loi de Kummer et la loi gamma peuvent être définies sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives (dans le cas gamma, c'est la loi de Wishart). Par ailleurs, des versions matricielles existent pour la propriété de Matsumoto-Yor concernant les lois GIG et gamma (Letac et Wesolowski, 2000 et Massam et Wesolowski, 2006). Il est alors naturel de se demander si l'indépendance des variables aléatoires  $U$  et  $V$  définies par (1.1) est encore vérifiée si  $X$  et  $Y$  sont des matrices aléatoires  $r \times r$  définies positives (bien-sr,  $U$  et  $V$  doivent être réécrites en tant que matrices, cf (2.4)). Nous répondons à cette question par l'affirmative. Mieux si la preuve repose uniquement sur un calcul de jacobien, le contexte matriciel la rend non triviale.

Nous énonçons le résultat dans la section 2 après un rappel des définitions des lois de Kummer, de Wishart et beta pour des variables matricielles. La preuve est donnée dans la section 3, suivie d'une courte discussion en section 4.

## 2 Le résultat

Soit  $\mathcal{M}_r$  l'espace Euclidien des matrices réelles symétriques et soit  $I$  l'élément unité de  $\mathcal{M}_r$ . Considérons le produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$  sur  $\mathcal{M}_r$ . Désignons par  $\mathcal{M}_r^+$  le cône des matrices définies positives de  $\mathcal{M}_r$ .

Pour  $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$  et  $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{r-1}{2}\} \cup (\frac{r-1}{2}, \infty)$ , la loi de Wishart  $\gamma(b, \Sigma)$  (voir par exemple Letac et Wesolowski, 2000 et Massam and Wesolowski, 2006) est définie comme

étant celle d'une matrice aléatoire  $Y$  prenant ses valeurs dans la fermeture de  $\mathcal{M}_r^+$  et dont la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}(e^{\langle \sigma, Y \rangle}) = \left( \frac{\det \Sigma}{\det(\Sigma - \sigma)} \right)^b, \quad \Sigma - \sigma \in \mathcal{M}_r^+.$$

Si  $b > \frac{r-1}{2}$ , la loi de Wishart  $\gamma(b, \Sigma)$  a pour densité:

$$\gamma(b, \Sigma)(dy) = \frac{(\det \Sigma)^b}{\Gamma_r(b)} (\det y)^{b-(r+1)/2} \exp(-\langle \Sigma, y \rangle) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(y) dy, \quad (2.1)$$

où  $\Gamma_r$  est la fonction gamma multivariée, définie pour tout nombre complexe  $z$  vérifiant  $\operatorname{Re}(z) > (r-1)/2$ , par

$$\Gamma_r(z) = \pi^{r(r-1)/4} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(z - \frac{j-1}{2}\right).$$

Pour  $\alpha, \beta > \frac{r-1}{2}$ , la loi beta  $\operatorname{Beta}(\alpha, \beta)$  (aussi appelée loi beta matricielle de type I, cf Nagar and Gupta, 2002) sur  $\mathcal{M}_r^+$  est

$$\operatorname{Beta}(\alpha, \beta)(du) = \frac{\Gamma_r(\alpha + \beta)}{\Gamma_r(\alpha)\Gamma_r(\beta)} (\det u)^{\alpha - \frac{r+1}{2}} (\det(I - u))^{\beta - \frac{r+1}{2}} \mathbf{1}_{\mathcal{U}}(u) du, \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des matrices  $u$  de  $\mathcal{M}_r^+$  telles que  $I - u \in \mathcal{M}_r^+$ .

Pour  $a > \frac{r-1}{2}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$ , la loi de Kummer matricielle sur  $\mathcal{M}_r^+$  est définie par

$$K(a, b, \Sigma)(dx) = \frac{1}{\Gamma_r(a)\psi(a, a - b + \frac{r+1}{2}; \Sigma)} (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} (\det(I+x))^b \exp(-\langle \Sigma, x \rangle) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(x) dx, \quad (2.3)$$

où  $\psi$  est la fonction hypergéométrique confluyente de deuxième espèce à argument matriciel (cf Joshi and Joshi, 1985, formule (2)). Cette distribution est appelée dans la littérature (cf Gupta *et al*, 2001) la loi *Kummer-Gamma* ou la *loi de Kummer de type II*. Par souci de concision, nous l'appellerons simplement *loi de Kummer*.

Nous énonçons à présent le résultat.

**Theorem 2.1** *Soient  $a, b, \Sigma$  tels que  $a > \frac{r-1}{2}$ ,  $b - a > \frac{r-1}{2}$  et  $\Sigma \in \mathcal{M}_r^+$ . Soient  $X$  et  $Y$  des matrices aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathcal{M}_r^+$ , telles que  $X$  suit la loi de Kummer  $K(a, b, \Sigma)$  et  $Y$  la loi de Wishart  $\gamma(b - a, \Sigma)$ .*

*Alors les matrices aléatoires*

$$U := [I + (X + Y)^{-1}]^{1/2} [I + X^{-1}]^{-1} [I + (X + Y)^{-1}]^{1/2}, \quad V := X + Y \quad (2.4)$$

*sont indépendantes. De plus,  $U \sim \operatorname{Beta}(a, b - a)$  et  $V \sim K(b, a, \Sigma)$ .*

### 3 Proof

Pour  $x, y \in \mathcal{M}_r^+$ , définissons

$$u := [I + (x + y)^{-1}]^{1/2}[I + x^{-1}]^{-1}[I + (x + y)^{-1}]^{1/2}, \quad v := x + y. \quad (3.1)$$

Notons que, puisque  $x$  et  $y$  sont des matrices définies positives, alors  $u$ ,  $v$  et  $I - u$  le sont aussi. Il en résulte que la transformation

$$T : (x, y) \mapsto (u, v)$$

est bien définie de  $\mathcal{M}_r^+ \times \mathcal{M}_r^+$  vers  $\mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$ . Elle est clairement bijective. Calculons le jacobien de  $T^{-1}$ .

#### 3.1 Le jacobien

Il est commode d'écrire  $T = T_2 \circ T_1$ , où  $T_1 : \mathcal{M}_r^+ \times \mathcal{M}_r^+ \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$  and  $T_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+ \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$  sont définis par

$$T_1(x, y) = (w, z) := ([I + x^{-1}]^{-1}, x + y)$$

et

$$T_2(w, z) = (u, v) := ([I + z^{-1}]^{1/2}w[I + z^{-1}]^{1/2}, z).$$

On a

$$(x, y) = T_1^{-1}(w, z) = ([w^{-1} - I]^{-1}, z - [w^{-1} - I]^{-1}) \quad (3.2)$$

et

$$(w, z) = T_2^{-1}(u, v) = ([I + v^{-1}]^{-1/2}u[I + v^{-1}]^{-1/2}, v). \quad (3.3)$$

**Lemma 3.1** *Le jacobien de la transformation  $T^{-1}$  est*

$$J(u, v) = \det(I + v)^{\frac{r+1}{2}} \det(I + v - uv)^{-r-1} \det v^{\frac{r+1}{2}}. \quad (3.4)$$

Démonstration: Nous calculons le jacobien de  $T^{-1}$  via ceux de  $J_{(u,v) \rightarrow (w,z)}$  et  $J_{(w,z) \rightarrow (x,y)}$ .

$J_{(u,v) \rightarrow (w,z)}$  est le déterminant de la différentielle de  $T_2^{-1}$  en  $(u, v)$ . Cette différentielle est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_r$  qui, en utilisant (3.3), peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & Id_{\mathcal{M}_r} \end{pmatrix}$$

où  $E$  n'a pas besoin d'être calculé et  $D$  est la différentielle de la fonction  $u \mapsto [I + v^{-1}]^{-1/2}u[I + v^{-1}]^{-1/2}$  à  $v$  fixé. Par suite,  $J_{(u,v) \rightarrow (w,z)}$  est égal à  $\det D$  (nous notons de la même façon le déterminant d'une matrice et celui d'un opérateur linéaire). En utilisant le Théorème 2.1.7 de Muirhead (1982), nous avons

$$\det D = (\det[I + v^{-1}]^{-1/2})^{r+1} = (\det[I + v^{-1}])^{-\frac{r+1}{2}},$$

i.e.

$$J_{(u,v) \rightarrow (w,z)} = (\det[I + v^{-1}])^{-\frac{r+1}{2}}. \quad (3.5)$$

Calculons le jacobien de  $J_{(w,z) \rightarrow (x,y)}$ . Par (3.2), on a  $x = ([w^{-1} - I]^{-1})$ , donc la différentielle  $G(w)$  de  $x$  par rapport à  $w$  est l'endomorphisme

$$h \mapsto ([w^{-1} - I]^{-1}w^{-1}hw^{-1}[w^{-1} - I]^{-1})$$

de  $\mathcal{M}_r$ . Son déterminant est, en utilisant encore Muirhead (1982),

$$\det(G(w)) = \det([w^{-1} - I]^{-1}w^{-1})^{r+1} = \det(I - w)^{-(r+1)}.$$

Par conséquent, (3.2) donne

$$J_{(w,z) \rightarrow (x,y)} = \det \begin{pmatrix} G(w) & 0 \\ H & Id_{\mathcal{M}_r} \end{pmatrix} = \det(G(w)) = \det(I - w)^{-(r+1)}, \quad (3.6)$$

où l'expression explicite de  $H$  n'est pas utile. De (3.5) et (3.6) on déduit que

$$J(u, v) = J_{(u,v) \rightarrow (w,z)} J_{(w,z) \rightarrow (x,y)} = (\det[I + v^{-1}])^{-\frac{r+1}{2}} \det(I - w)^{-(r+1)}. \quad (3.7)$$

On a

$$\det[I + v^{-1}] = \det(v^{-1}) \det(I + v). \quad (3.8)$$

Puisque  $\det(I + AB) = \det(I + BA)$  pour toutes matrices symétriques  $A$  et  $B$ , on écrit

$$\begin{aligned} \det(I - w) &= \det(I - [I + v^{-1}]^{-1/2}u[I + v^{-1}]^{-1/2}) \\ &= \det(I - u[I + v^{-1}]^{-1}) \\ &= \det(I - uv[I + v]^{-1}) \\ &= \det(I + v)^{-1} \det(I + v - uv). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituant (3.8) et (3.9) dans (3.7), on obtient (3.4).  $\square$

### 3.2 Calcul de la densité de $(U, V)$

Notons  $f_X$  et  $f_Y$  les densités de  $X$  et  $Y$  respectivement, et  $f_{(U,V)}$  celle de  $(U, V)$ .  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on a

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_X(x)f_Y(y)J(u, v)\mathbf{1}_{\mathcal{U}}(u)\mathbf{1}_{\mathcal{M}_r^+}(v) \quad (3.10)$$

où  $(x, y) = T^{-1}(u, v)$  et  $J(u, v)$  est le jacobien donné par (3.4). Rappelons que  $X \sim K(a, b, \Sigma)$  and  $Y \sim \gamma(b - a, \Sigma)$ . Par (2.2) et (2.3), désignant par  $C$  le produit de toutes les constantes, (3.10) peut s'écrire, pour tous  $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{M}_r^+$ ,

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= C (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} (\det(I + x))^{-b} \exp(-\langle \Sigma, x \rangle) \\ &\quad \times (\det y)^{b - a - \frac{r+1}{2}} \exp(-\langle \Sigma, y \rangle) J(u, v) \\ &= C (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} (\det(I + x))^{-b} (\det y)^{b - a - \frac{r+1}{2}} \\ &\quad \times \exp(-\langle \Sigma, x + y \rangle) J(u, v). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le lemme suivant exprime  $\det x$ ,  $\det y$ ,  $\det(I + x)$  en fonction de  $u$  et  $v$ .

**Lemma 3.2** *Considérons  $x, y, u, v$  tels que  $T(x, y) = (u, v)$  comme dans (3.1). Alors,*

$$\det x = \det \left( (I + v - uv)^{-1} \right) \det u \det v, \quad (3.12)$$

$$\det(I + x) = \det \left( (I + v - uv)^{-1} \right) \det(I + v), \quad (3.13)$$

$$\det y = \det v \det \left( (I + v - uv)^{-1} \right) \det(I + v) \det(I - u). \quad (3.14)$$

Démonstration : Par (3.1) on a

$$\begin{aligned} x^{-1} &= (I + v^{-1})^{1/2} u^{-1} (I + v^{-1})^{1/2} - I \\ &= (I + v^{-1})^{1/2} (u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1}) (I + v^{-1})^{1/2}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$x = (I + v^{-1})^{-1/2} (u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1})^{-1} (I + v^{-1})^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Comme  $I + v^{-1} = v^{-1}(I + v)$ , on a  $u^{-1} - [I + v^{-1}]^{-1} = u^{-1}(I + v - uv)(I + v)^{-1}$ , donc (3.15) donne

$$\begin{aligned} x &= v^{1/2}(I + v)^{-1/2}(I + v)(I + v - uv)^{-1}uv^{1/2}(I + v)^{-1/2} \\ &= v^{1/2}(I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}uv^{1/2}(I + v)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Prenant le déterminant, on obtient (3.12).

Les définitions de  $u$  et  $v$  impliquent

$$\begin{aligned} \det u &= \det(I + v^{-1}) \det(I + x^{-1})^{-1} \\ &= (\det v)^{-1} \det(I + v) \det x \det(I + x)^{-1} \end{aligned}$$

qui permet d'obtenir  $\det(I + x) = (\det u)^{-1}(\det v)^{-1} \det(I + v) \det x$ . (3.13) s'ensuit en utilisant (3.12).

Pour obtenir (3.14), on utilise (3.16) pour écrire

$$\begin{aligned} y &= v - x \\ &= v^{1/2}Iv^{1/2} - v^{1/2}(I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}u(I + v)^{-1/2}v^{1/2} \\ &= v^{1/2}[I - (I + v)^{1/2}(I + v - uv)^{-1}u(I + v)^{-1/2}]v^{1/2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \det y &= \det v \det \left( I - (I + v - uv)^{-1}u \right) \\ &= \det v \det \left( (I + v - uv)^{-1}(I + v - uv - u) \right) \end{aligned}$$

et (3.14) s'ensuit puisque  $I + v - uv - u = (I - u)(I + v)$ .

□

Pour terminer la preuve du théorème, on substitue (3.12), (3.13), (3.14) et (3.4) dans (3.11), on remplace  $x + y$  par  $v$  et on obtient

$$f_{(U,V)}(u, v) = C (\det u)^{a - \frac{r+1}{2}} (\det(I - u))^{b - a - \frac{r+1}{2}} (\det v)^{b - \frac{r+1}{2}} (\det(I + v))^{-a},$$

ce qui montre que les matrices aléatoires  $U$  et  $V$  sont indépendantes et qu'elles suivent respectivement les lois Beta( $a, b - a$ ) et  $K(b, a, \Sigma)$  (cf (2.2) et (2.3)). □

## References

- [1] Gupta, A. K., Cardeno, L. and Nagar, D. K.(2001). Matrix-variate Kummer-Dirichlet distributions. *J. Applied. Math.*, 117-139.
- [2] Joshi, R. M. and Joshi, J. M. C. (1985). Confluent hypergeometric function of second kind with matrix argument. *Indian J. pure appl. Math.* **16** (6), 627-636.
- [3] Koudou, E. and Vallois, P. (2010). Independence properties of the Matsumoto-Yor type. To appear in *Bernoulli*.
- [4] Koudou, E. and Vallois, P. (2011). Which distributions have the Matsumoto-Yor property? To appear in *Electronic Communications in Probability*.
- [5] Letac, G. and Wesolowski, J. (2000). An independence property for the product of GIG and gamma laws. *Ann. Prob.* **28**, 1371-1383.
- [6] Massam, H. and Wesolowski, J. (2006). The Matsumoto-Yor property and the structure of the Wishart distribution. *Journal of Multivariate Analysis* **97**, 103-123.
- [7] Matsumoto, H. and Yor, M. (2001). An analogue of Pitman's  $2M - X$  theorem for exponential Wiener functional, Part II: the role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.* **162**, 65-86.
- [8] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, New York.
- [9] Nagar and Gupta (2002). Matrix-variate Kummer-beta distributions. *J. Austral. Math. Soc.* **73**, 11-25.