

# DÉMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHÉMATIQUES : L'EXEMPLE DES ATELIERS MATH.EN.JEANS

Isabelle DUBOIS\*

**Résumé** – Après avoir présenté l'association MATH.en.JEANS et ses activités, nous expliquons le principe et l'organisation des ateliers MATH.en.JEANS. Ces ateliers scientifiques permettent à des groupes d'élèves de tout niveau scolaire de mener des recherches en mathématiques. Nous mettons ensuite en évidence les différentes caractéristiques de ces ateliers favorisant la mise en oeuvre d'une véritable démarche d'investigation en mathématiques. Nous terminons par la présentation de quelques exemples issus d'ateliers que nous avons encadrés.

**Mots-clés** : démarche d'investigation, recherche en mathématiques en milieu scolaire, ateliers MATH.en.JEANS, ateliers scientifiques

**Abstract** – After having presented MATH.en.JEANS association and its activities, we explain the principle and the organization of the MATH.en.JEANS workshops. These scientific workshops make it possible groups of pupils of any school level to undertake research in mathematics. We then highlight the various characteristics of these workshops supporting the implementation of a true inquiry-based approach in mathematics. We finish by the presentation of some examples resulting from workshops which we supervised.

**Keywords**: inquiry-based approach, research in mathematics at school, MATH.en.JEANS workshops, scientific workshops

## ANNEXE 1

Voici des exemples (non exhaustifs) de sujets que nous avons élaborés et proposés aux ateliers jumelés des collèges J. Mermoz de Marly et Hauts-de-Blémont de Metz. Le sujet donné aux élèves est celui appelé « Point de départ ». Le paragraphe « Le point de vue du mathématicien » était fourni aux enseignants encadrant l'atelier.

### **Année 2007-2008**

Sujet 1. *Des cellules qui naissent et qui meurent, quels êtres étranges apparaissent ?*

Point de départ: Prenons un quadrillage (supposé infini), et déposons-y des cellules. L'évolution des cellules se déroule selon la règle suivante:

- une cellule meurt (disparaît) si elle possède 0, ou 1, ou 4 à 8 voisines sur les 8 cases adjacentes
- une cellule naît (apparaît) dans une case vide si on trouve exactement 3 cellules parmi les 8 cases adjacentes.

Après un grand nombre de tours de jeu, quels phénomènes apparaissent ? Peut-on prévoir l'évolution d'un groupe de cellules ?

Le point de vue du mathématicien: Il s'agit de découvrir le "Jeu de la vie", un automate cellulaire inventé dans les années 1970 par le mathématicien Conway. Les élèves pourront jouer dans un premier temps "à la main" afin de découvrir les notions de structures stables, périodiques, ... La complexité des phénomènes observés, et l'impossibilité de prévoir totalement l'avenir d'une structure de départ, pourra faire émerger différentes questions. Par la suite, des programmes informatiques simulant le jeu (trouvables sur internet) permettront d'aller plus loin. On peut aussi essayer de changer les règles du jeu (et inventer d'autres

---

\* IUFM de Lorraine – France – [dubois@univ-metz.fr](mailto:dubois@univ-metz.fr)

automates cellulaires) et constater des différences et/ou ressemblances. La théorie des automates cellulaires revêt également un aspect philosophique : la complexité de la Vie peut-elle provenir de règles logiques ?

Sujet 2. La fabrication du hasard.

Point de départ: Peut-on fabriquer des solides autres que le dé cubique permettant de jouer à des jeux de hasard ? On essaiera en particulier de trouver des solides ayant un nombre de faces autres que 6. Comment s'assurer que notre objet est équitable, que toutes les faces ont la même chance d'apparaître ?

Le point de vue du mathématicien: De nombreux solides, et pas seulement les polyèdres réguliers, peuvent servir de support à des dés à  $n$  faces. La question est assez ouverte, bien qu'un article répertorie tous les polyèdres convexes possédant une face identique. On pourra éventuellement approfondir sur des notions élémentaires de probabilités, et élaborer des protocoles permettant de vérifier, par l'expérience, l'équité des solides fabriqués.

**Année 2008-2009**

Sujet 1. Alignements de jetons.

Point de départ: Je possède un nombre entier de jetons et je désire les disposer sur une ou plusieurs lignes de telle sorte que chaque ligne comporte le même nombre de jetons. De combien de façons puis-je le faire ? Que remarque-t-on concernant les nombres de lignes possibles ? Dans quels cas n'ai-je que deux dispositions possibles ?

Quelques exemples:

Avec 4 jetons: O O O O ou bien O O ou bien O

O O      O  
            O  
            O  
            O

Avec 6 jetons : (exemple donné)

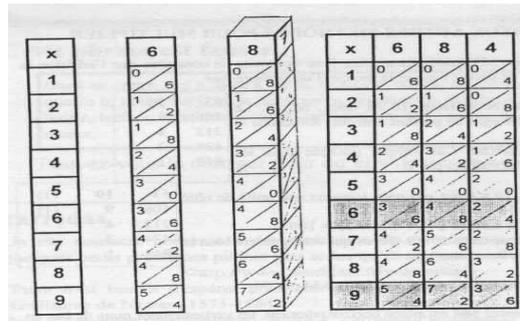
Le point de vue du mathématicien: Il s'agit bien sûr de dégager la notion de diviseur d'un nombre entier, de nombre premier, et de faire émerger par exemple: l'infinitude des nombres premiers, la décomposition d'un entier en facteurs premiers, le nombre de diviseurs d'un nombre entier...

Sujet 2. Fabrication de réglettes à calculer.

Point de départ: Au 17<sup>e</sup> siècle, Neper invente des bâtons permettant d'effectuer de façon plus aisée des multiplications. En voici un exemplaire:



Et voici un exemple d'utilisation:

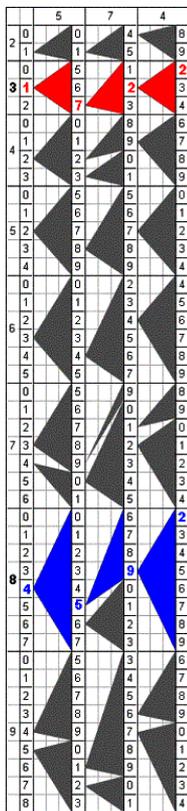


On a:  $684 \times 6 = 4104$ ,  $684 \times 9 = 6156$ , d'où:  $684 \times 96 = 61560 + 4104 = 65664$ .

Comment fabrique-t-on ces bâtons ? Comment les utilise-t-on ? Pourquoi ?

Au 19e siècle, cette technique est améliorée, de nouvelles "réglettes" à calculer sont inventées.

À partir de l'exemple suivant, essayez de reconstituer ces réglettes, de les fabriquer, d'en expliquer le fonctionnement et de les utiliser.



On a:  $574 \times 3 = 1722$  et  $574 \times 8 = 4592$ , d'où  $574 \times 83 = 47642$ .

Sauriez-vous fabriquer des réglettes permettant d'effectuer des divisions euclidiennes ?

Le point de vue du mathématicien: Il s'agit de découvrir des techniques de calcul instrumentées datant du 17ème et 19ème siècle. Il s'agit de bien comprendre les techniques opératoires pour en comprendre le fonctionnement et pouvoir les reconstituer, et maîtriser la numération décimale. On peut ouvrir le thème à d'autres techniques de calcul instrumentées historiques: abaqes, boulier...

Sujet 3. Jeu de Yam's.

Point de départ: Le jeu de Yam's ou Yahtzee (et leurs variantes) est un jeu de société se jouant avec cinq dés. En voici le principe:

Chaque joueur lance les dés lorsque vient son tour. Son but est, à l'aide des cinq dés, de réaliser une figure (5 dés identiques, une paire, un full ...). Pour réaliser cette figure, il a le droit à trois jets de dés par tour, et il est à chaque jet libre de les relancer tous, ou juste ceux de son choix. Le gagnant est celui qui a fait le plus de points, certaines figures donnant des points supplémentaires si elles sont réussies. Chaque joueur dispose d'une feuille de score sur laquelle est inscrite la liste des figures qu'il doit réaliser. À chaque tour, une case doit nécessairement être remplie, avec le score correspondant.

Ce jeu est dit "de hasard raisonné". En effet, les jeux de hasard raisonné sont des jeux où le hasard intervient mais n'est pas le seul élément déterminant la victoire. Le joueur doit opérer des choix pour tirer le meilleur parti du résultat des dés.

Ainsi, se posent les questions suivantes:

Quelles sont les figures les plus facilement réalisables en un seul lancer ? Après le premier jet de dés, et à la vue du résultat obtenu, quelle figure faut-il mieux essayer de réaliser ? Comment remplir au mieux la case "Chance" du Yahtzee ? ...

Ces questions sont complexes et on pourra s'attacher à répondre à des questions plus simples et se référant à des situations bien déterminées. Par exemple:

- En lançant 5 dés, quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un 6 ?

- Supposons que le premier lancer de 5 dés soit: 5 5 4 3 2. On garde 5 4 3 2, et on relance le cinquième dé, une ou deux fois. Quelle chance a-t-on d'obtenir une grande suite ?

Même question, avec comme résultat du premier lancer: 6 5 5 3 2, et en gardant 6 5 3 2. Obtient-on la même probabilité ?

- Supposons que le premier lancer de 5 dés soit: 6 6 5 2 1. On garde les deux 6, et on relance aux deux tours suivants tous les dés ne donnant pas un 6. Quelles sont les probabilités d'obtenir au moins trois 6 ? un carré de 6 ? un Yam's ou Yahtzee de 6 ?

Le point de vue du mathématicien: Il s'agit d'utiliser le calcul des probabilités pour répondre à ces questions, ou bien s'appuyer sur des statistiques obtenues "à la main" ou par des simulateurs de hasard. La recherche de stratégies optimales pour le jeu de Yam's est complexe, et a fait l'objet de recherches récentes par des mathématiciens (fin des années 1990, début des années 2000), des programmes en découlant ont été implémentés sur ordinateur.

### Année 2009-2010

Sujet 1. *Exploitation de photos d'éclipse de lune.*

Point de départ: A partir de photos d'éclipse de lune, et en se basant sur la connaissance du rayon de la Terre, il faut imaginer un procédé permettant de déterminer le rayon de la lune. On supposera bien sûr que la Terre et la Lune sont des sphères.

Voici des photos d'éclipse de Lune, où l'on aperçoit l'ombre de la Terre:



On pourra également essayer d'en déduire la distance Terre-Lune.

Pour finir, on pourra ensuite s'intéresser à la façon dont Erathostène a pu effectuer une mesure du rayon de la Terre.

Le point de vue du mathématicien: A partir de connaissances assez naïves du système Terre-Lune-Soleil, et à l'aide de connaissances en géométrie dans l'espace et géométrie plane (cercles, théorème de Pythagore, Thalès), il est possible d'obtenir des ordres de grandeur du rayon de la lune et de la distance Terre-Lune. On pourra amener des apports pour obtenir une mesure plus fiable, en particulier, le fait que l'ombre de la Terre n'est pas cylindrique (première approche naïve) mais conique, et les connaissances nécessaires pour exploiter ce fait.

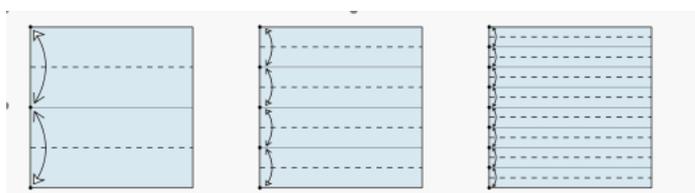
### Sujet 2. Origami : constructions géométriques de longueurs

Point de départ: Nous allons nous intéresser aux mathématiques cachées dans l'art de l'origami, une discipline artistique de pliage de papier. Notre point de départ ici est de déterminer des techniques permettant de plier une feuille en 2, ou en 3, ..., ou en  $n$ , ou plus généralement, de plier une feuille au quart, ou au deux-tiers, ou au trois-septième, ..., ou au  $\frac{a}{b}$ -ième de sa longueur. Plusieurs approches sont possibles, on pourra les traiter dans l'ordre que l'on voudra.

A noter que les seuls outils à disposition sont : une feuille de papier (en général carrée) et ses mains. Il est interdit d'utiliser règle, ciseaux ou autres instruments pendant les constructions.

#### *Première investigation: Pliages en 2.*

Par des pliages successifs en 2, il est aisé de plier une feuille (carrée ou non) en 4 dans sa longueur (ou largeur), ou en 8, etc... De même, il est aisé de faire un pli au trois quarts de sa longueur (ou largeur), ou au sept-huitième ...



Quels sont les nombres (fractionnaires) ainsi accessibles par de tels pliages ? Pour un tel nombre, seriez-vous capable de trouver le minimum de pliages à effectuer ? la procédure optimale à effectuer ?

#### *Deuxième investigation: Pliages approximatifs.*

Voici une technique, inventée par S. Fujimoto, qui permet de plier une feuille en 5:

(1) Faire une marque à l'endroit où vous pensez que se trouve le cinquième de la longueur de votre feuille.

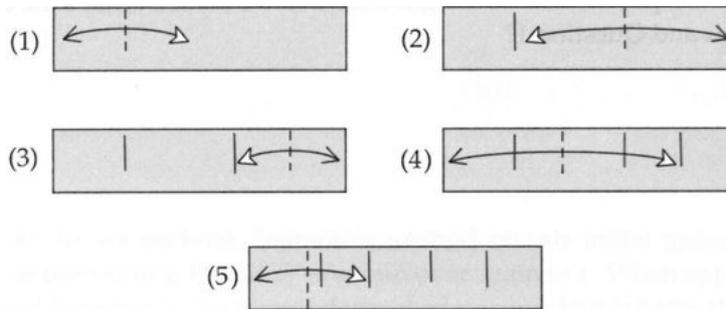
(2) Faire une marque (en n'appuyant pas le pli sur toute sa longueur) à la moitié de la partie droite de la feuille, délimitée par la marque précédente et le bord droit de la feuille.

(3) Idem.

(4) Faire une marque à la moitié de la partie gauche de la feuille (délimitée par la marque précédente et le bord gauche de la feuille).

(5) Idem.

(6) Recommencez les procédures (2) à (5), à partir de la dernière marque. Vous pouvez cette fois-ci bien appuyer sur les différents plis effectués.



Cette technique marche-t-elle ? Donne-t-elle un pliage exact en 5 ? Que se passe-t-il si l'on itère de nombreuses fois les procédures (2) à (5) ?

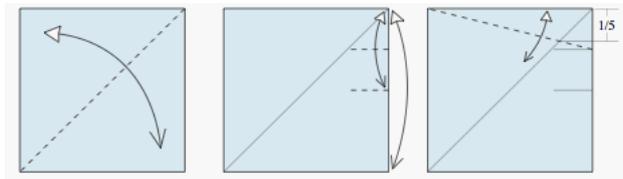
Comment adapter cette méthode pour plier une feuille en 3 ? ou plus généralement en  $n$  ?

*Troisième investigation: Pliages exacts.*

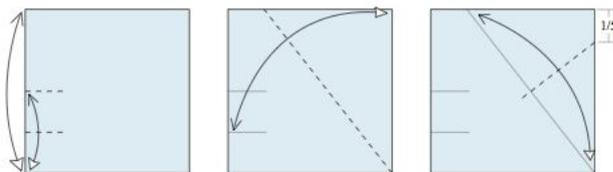
Il s'agit cette fois-ci d'obtenir des méthodes de constructions exactes, permettant de plier la feuille au  $\frac{a}{b}$ -ième de sa longueur. Il est nécessaire ici de partir d'une **feuille carrée**.

Voici différentes techniques de pliage au cinquième de la longueur:

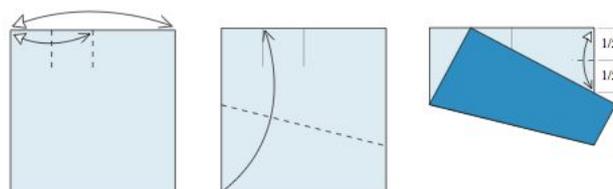
a) Méthode de "croisement de diagonales":



b) Méthode de Shuzo Fujimoto (encore lui !)



c) Méthode de Kazuo Haga:



Pourquoi ces méthodes de construction marchent-elles ?

À l'aide de chacune de ces méthodes, pouvez-vous plier une feuille au deux-tiers ? au trois-septième ? etc ... Comparez les méthodes entre elles.

Le point de vue du mathématicien: Les outils nécessaires sont, pour les deux premières investigations, le calcul fractionnaire, la notion de valeurs approchées, et de façon sous-jacente les décompositions binaires. Pour la troisième investigation, on retrouve des outils simples de géométrie plane: théorème de Pythagore, triangles semblables, symétries, et calcul fractionnaire.

Sujet 3. Jouons au Mu Torere, jeu traditionnel Néo-Zélandais.

Point de départ:

Ce jeu se joue à deux, sur un panneau de jeu ("papa takaro"), ou en dessinant le jeu dans le sable ou l'argile.



Il y a généralement huit cases ("kewai") autour du panneau de jeu – bien que certaines tribus jouent avec plus de quarante cases – et il y a une case centrale ou "putahi". Dans le jeu à huit cases, chaque joueur a quatre pièces de jeu (le plus souvent des petites pierres de couleurs différentes) qu'il dispose de son côté du jeu, dans quatre cases adjacentes.

Ensuite, chaque joueur à son tour doit bouger une de ses pièces, soit sur le "putahi", au centre, soit sur un des "kewai" contigus, ou bien du "putahi" vers un "kewai" libre. Vous ne pouvez pas sauter par-dessus une autre pièce, ni en avoir plus d'une en même temps sur un "kewai" ou sur le "putahi". Pour gagner, il faut placer ses pièces de façon à rendre l'adversaire incapable de bouger les siennes.

On disait qu'un joueur confirmé, dans un jeu à huit cases, pouvait prévoir quarante déplacements à l'avance.

Le jeu paraît très facile, mais il n'en est rien et les premiers colons l'ont vite compris : beaucoup d'entre eux ont raconté dans leur journal comment ils se sont, à maintes reprises, fait battre "à plate couture" par des joueurs Maori. Il est arrivé qu'un Maori jouant simultanément contre pas moins de dix Européens arrive encore à les battre sans problème.

Ce n'est qu'après 1850 que l'on a enregistré la première victoire d'un colon sur un Maori. Mais à cette époque, les compétences des Maoris en la matière avaient grandement diminué, et le jeu ne présentait plus que peu d'intérêt.

On pourrait étudier des variantes (plus simples dans un premier temps) et le jeu classique pour définir des stratégies gagnantes.

Voici les variantes possibles :

a) Modifier le nombre de cases sur le plateau de jeu (et donc le nombre de pièces par joueur): jeu à 4 cases, à 6 cases, à 10 cases. Le jeu devient alors plus simple à analyser, ou possède des stratégies gagnantes plus évidentes.

b) Ajout d'une règle permettant de rendre le jeu plus intéressant:

"Il est interdit de déplacer sa pièce d'un "kewai" au "putahi" si celle-ci est encadrée par deux pions de la même couleur que la sienne."

Selon les variantes, cette règle s'applique lors du premier coup, ou bien lors des deux premiers coups, ou bien tout le long de la partie.

C'est ce dernier cas qui correspond au jeu le plus couramment joué; pourquoi ?

Le point de vue du mathématicien: Il est possible de réaliser un graphe répertoriant de façon exhaustive toutes les possibilités de jeu (92 configurations distinctes) et les coups permettant de passer d'une configuration à une autre. Dans le cas du jeu à 4 cases ou à 6 cases, cela est assez facilement réalisable (respectivement 12 et 30 configurations). Il sera sans doute plus facile d'exhiber des configurations gagnantes, et peut-être des stratégies permettant d'y accéder.

### **Année 2010-2011**

Sujet 1. *Divisons 1 par un nombre entier: après la virgule, que se passe-t-il ?*

Effectuons la division de 1 par un entier naturel. Par exemple:

$$1/3 = 0,333333\dots$$

$$1/4 = 0,25$$

$$1/7 = 0,142857142857\dots$$

Observations:

Quels phénomènes observe-t-on concernant les chiffres "après la virgule" ?

Dans quels cas le nombre de chiffre est-il fini ? infini ?

Des séries de chiffres se répètent-elles ?

Explications:

Peut-on comprendre et prévoir les phénomènes observés ?

Le point de vue du mathématicien: Il s'agit de faire découvrir la notion de développement décimal illimité, la périodicité de ce développement pour un nombre rationnel. L'étude des périodes, de la longueur des périodes fait appel à des outils sophistiqués de l'arithmétique. On pourra aussi s'intéresser aux fractions inverses de nombres premiers, aux développements des fractions multiples de  $1/n$ , à l'opération inverse (étant donné un développement décimal illimité périodique, retrouver la fraction),... Tout ceci pouvant déboucher sur des notions d'arithmétique et/ou des notions sur les nombres réels.

ANNEXE 2

Voici quelques exemples d'objets réalisés par les élèves lors d'ateliers jumelés des collèges J. Mermoz de Marly et Hauts-de-Blémont de Metz.



Figure 1 – Affiche réalisée pour le sujet « La fabrique du hasard » - 2007-2008

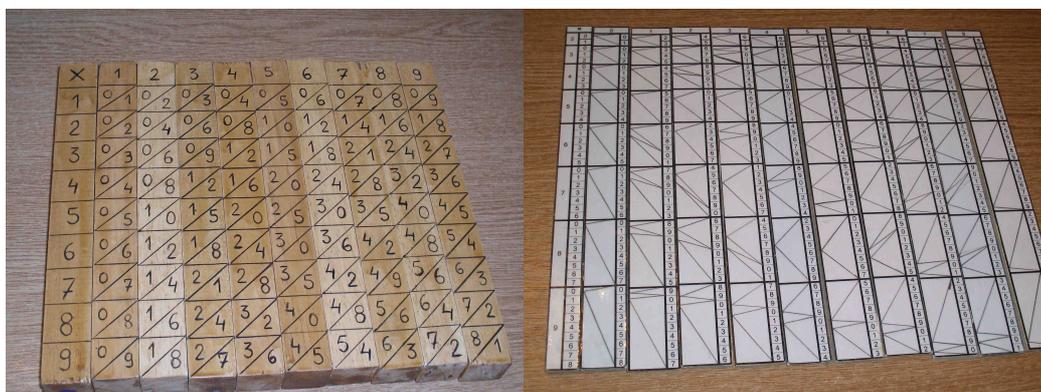


Figure 2 – Réglettes réalisées pour le sujet « Fabrication de réglettes à calculer » - 2008-2009