



HAL
open science

Étude des groupes et algèbres de Lie. Théorème de réduction/reconstruction de Lie-Poisson. Application aux groupes spécial orthogonal $SO(3)$ et spécial euclidien $SE(3)$ et à leurs algèbres $so(3)$ et $se(3)$.

Marc Renaud

► **To cite this version:**

Marc Renaud. Étude des groupes et algèbres de Lie. Théorème de réduction/reconstruction de Lie-Poisson. Application aux groupes spécial orthogonal $SO(3)$ et spécial euclidien $SE(3)$ et à leurs algèbres $so(3)$ et $se(3)$. [Rapport de recherche] Rapport LAAS n° 16042, LAAS-CNRS; INSA Toulouse. 2016. hal-01286542

HAL Id: hal-01286542

<https://hal.science/hal-01286542>

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude des groupes et algèbres de Lie.
Théorème de réduction/reconstruction de
Lie-Poisson. Application aux groupes spécial
orthogonal $SO(3)$ et spécial euclidien $SE(3)$
et à leurs algèbres $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{se}(3)$

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

1 Introduction

L'une des tâches principales de la robotique de manipulation consiste à positionner et orienter – on peut dire situer – un organe terminal (objet, outil, caméra, ...) dans l'espace. La situation correspondante est un élément du groupe spécial euclidien $SE(3)$. Un déplacement infinitésimal, ou une vitesse, de cette situation est un élément de l'algèbre de lie $\mathfrak{se}(3)$ du groupe de Lie précédent alors qu'un effort (force et couple) qui lui est appliqué est un élément du dual $\mathfrak{se}(3)^*$, de l'algèbre de Lie précédente.

Dans le cas particulier – plus simple – où il suffit d'orienter et non de situer dans l'espace l'orientation correspondante est un élément du groupe spécial orthogonal $SO(3)$. Un déplacement infinitésimal, ou une vitesse, de cette orientation est un élément de l'algèbre de lie $\mathfrak{so}(3)$ du groupe de Lie précédent alors qu'un effort (force et couple) qui lui est appliqué est un élément du dual $\mathfrak{so}(3)^*$, de l'algèbre de Lie précédente.

Le but de ce rapport de recherche est d'étudier ces groupes, leurs algèbres de Lie et leurs duals, de manière quasi exhaustive dans la mesure où une étude complète fait défaut actuellement dans la littérature, au moins pour $SE(3)$, $\mathfrak{se}(3)$ et $\mathfrak{se}(3)^*$.

Cette étude nécessite celle – générale – des groupes de lie [76] et algèbres de Lie [77], qui elle même nécessite des rappels essentiels de la théorie des variétés et des applications différentielles. Nous nous sommes restreint aux variétés de dimension finie. Puis, pour définir dans certains cas la notion de crochet, nous nous sommes placés dans le cadre des variétés dites de Poisson (cf. ci-après) (terme proposé par [44]) [5]¹, [49]², [72] et [78], qui sont de dimensions quelconques, plus général que celui des variétés dites symplectiques [5]³, [49]⁴ et [79], qui sont de dimensions paires. En effet les variétés symplectiques sont des variétés de Poisson mais les variétés de Poisson ne sont pas toujours des variétés symplectiques : elles ne sont que des unions de variétés symplectiques [49]⁵.

L'étude des groupes spécial euclidien et spécial orthogonal, de leurs algèbres de Lie et de leurs duals est un excellent exemple d'application des groupes et algèbre de Lie, dans la mesure où tous les calculs analytiques sont possibles, grâce à la théorie des matrices. Les calculs numériques sont alors possibles à l'aide d'ordinateurs.

-
1. pp. 51-63 Chapitre 5
 2. pp. 11-12 et pp. 327-364 Chapitre 10 Poisson Manifolds
 3. pp. 16-18 Chapitre 2 § 2.1
 4. pp. 147-150 Chapitre 5 § 5.1 et p. 328 Exemple a
 5. p. 345

Tous les espaces considérés sont réels, “ssi” signifie “si et seulement si”, \cong signifie isomorphe et $\not\cong$ signifie non isomorphe. Dans tout le rapport les applications f , g , \mathbf{f} et \mathbf{g} sont des difféomorphismes.

Les propositions annoncées sont presque toutes démontrées. Pour celles qui ne le sont pas des références bibliographiques des démonstrations sont indiquées.

Nous avons évité au maximum les lettres ayant plusieurs significations ; bien qu’il en demeure quelques unes le contexte permet de lever toute ambiguïté.

Les références essentielles utilisées sont les ouvrages de R. A. Abraham et J. E. Marsden [1], J. E. Marsden et T.S. Ratiu [49] la thèse de A. Aymerich [5] et l’article de J. Butterfield [15].

Nous avons repris les notations essentielles de ces ouvrages.

L’auteur remercie par avance tout personne qui lui ferait des critiques ou lui signalerait des erreurs.

2 Préliminaires : rappels d'algèbre

Les notations utilisées sont restreintes à ces préliminaires.

2.1 Action d'un ensemble Ω sur un ensemble E

On pourra consulter [12]⁶.

2.1.1 Action à gauche

L'action à gauche d'un ensemble Ω sur un ensemble E est une application $\Omega \times E \longrightarrow E$; c'est donc une loi de composition externe sur E et on dit que Ω opère sur E .

2.1.2 Action à droite

L'action à droite d'un ensemble Ω sur un ensemble E est une application $E \times \Omega \longrightarrow E$; c'est donc une loi de composition externe sur E et on dit que Ω opère sur E .

2.2 Espaces vectoriels, applications linéaires, espaces vectoriels duals, applications linéaires duales, matrices

Soient E un espace vectoriel de dimension n ($\dim(E) = n$) et F un espace vectoriel de dimension p ($\dim(F) = p$). Soit l une application linéaire de E dans F :

$$E \xrightarrow{l} F \\ v \mapsto w=l(v)$$

Soient $e_1, \dots, e_j, \dots, e_n$ une base de E et $f_1, \dots, f_i, \dots, f_p$ une base de F .

Soient $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$ (i.e. les v_j sont les composantes du vecteur v de E dans la base $e_1, \dots, e_j, \dots, e_n$ de E) et $w = \sum_{i=1}^p w_i f_i$ (i.e. les w_i sont les composantes du vecteur w de F dans la base $f_1, \dots, f_i, \dots, f_p$ de F).

Et soit $l(e_j) = \sum_{i=1}^p l_{ij} f_i \in F$ (i.e. les l_{ij} sont les composantes du vecteur $l(e_j)$ de F dans la base $f_1, \dots, f_i, \dots, f_p$ de F).

Alors, l'application l étant linéaire :

6. p. 8

$w = l(v) = \sum_{j=1}^n v_j l(e_j) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n l_{ij} v_j f_i = \sum_{i=1}^p w_i f_i$, avec
 $w_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} v_j$.

$$\text{Si on pose } \llbracket w \rrbracket = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}, \llbracket l \rrbracket = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{p1} & \cdots & l_{pn} \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket v \rrbracket = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$\llbracket w \rrbracket = \llbracket l \rrbracket \llbracket v \rrbracket.$$

Soient E^* et F^* les espaces duals algébriques de E et F respectivement i.e. les espaces des formes linéaires de E et F :

$$E \xrightarrow{v^*} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F \xrightarrow{w^*} \mathbb{R} \\ v \mapsto \langle v^*, v \rangle \triangleq v^*(v) \quad w \mapsto \langle w^*, w \rangle \triangleq w^*(w)$$

Soient $e_1^*, \dots, e_j^*, \dots, e_n^*$ la base de E^* duale de la base $e_1, \dots, e_j, \dots, e_n$ de E et $f_1^*, \dots, f_i^*, \dots, f_p^*$ la base de F^* duale de la base $f_1, \dots, f_i, \dots, f_p$ de F i.e. telles que : $\langle e_j^*, e_l \rangle = \delta_{jl}$ (symbole de Kronecker) et $\langle f_i^*, f_k \rangle = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker).

Soient $w^* = \sum_{i=1}^p w_i^* f_i^*$ (i.e. les w_i^* sont les composantes du vecteur w^* de F^* dans la base $f_1^*, \dots, f_i^*, \dots, f_p^*$ de F^*) et $v^* = \sum_{j=1}^n v_j^* e_j^*$ (i.e. les v_j^* sont les composantes du vecteur v^* de E^* dans la base $e_1^*, \dots, e_j^*, \dots, e_n^*$ de E^*).

Soit l^* l'application duale ou transposée de l :

$$F^* \xrightarrow{l^*} E^* \\ w^* \mapsto v^* = l^*(w^*)$$

$$\langle l^*(w^*), v \rangle = \langle w^*, l(v) \rangle; \forall v \in E \text{ et } \forall w^* \in F^*.$$

Soit $l^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^n l_{ji}^* e_j^* \in E^*$ (i.e. les l_{ji}^* sont les composantes du vecteur $l^*(f_i^*)$ de E^* dans la base $e_1^*, \dots, e_j^*, \dots, e_n^*$ de E^*).

Alors l'application l^* étant linéaire :

$$v^* = l^*(w^*) = \sum_{i=1}^p w_i^* l^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p l_{ji}^* w_i^* e_j^* = \sum_{j=1}^n v_j^* e_j^*, \text{ avec} \\ v_j^* = \sum_{i=1}^p l_{ji}^* w_i^*.$$

$$\text{Si on pose } \llbracket v^* \rrbracket = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix}, \llbracket l^* \rrbracket = \begin{pmatrix} l_{11}^* & \cdots & l_{p1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n}^* & \cdots & l_{pn}^* \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket w^* \rrbracket = \begin{pmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_p^* \end{pmatrix}$$

on a :

$$\llbracket v^* \rrbracket = \llbracket l^* \rrbracket \llbracket w^* \rrbracket.$$

Comme $\langle v^*, v \rangle = \langle w^*, w \rangle$ on a $[[v^*]]^T [[v]] = [[w^*]]^T [[w]]$, soit :

$$[[w^*]]^T [[l^*]]^T [[v]] = [[w^*]]^T [[l^*]] [[v]]; \forall v \in E \text{ et } \forall w^* \in F^*.$$

Alors $[[l^*]]^T = [[l]]$ ou $[[l^*]] = [[l]]^T$.

2.3 Algèbre de Lie

On pourra consulter [49]⁷, [70]⁸ et [77].

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel E doté d'une opération interne notée $[,]$ (ou $\{, \}$) et appelée crochet qui est bilinéaire et antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi :

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0; \forall u, v, w \in E.$$

2.4 Relèvement d'une fonction

On pourra consulter [29]⁹.

Le relèvement est qualifié de "lift" en anglais [26]¹⁰.

La fonction H relèvement de la fonction h est une fonction qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow H & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Elle est donc telle que : $p \circ H = h$.

7. p. 9, p. 85, p. 143, p. 161 et p. 270

8. pp. 178-188 § 16

9. pp. 115-117 chapitre VII no. 6 relèvement des applications

10. p. 157 Proposition 11.8 "homotopy lifting"

3 Variétés différentielles

On pourra consulter [10]¹¹ et [70]¹².

Soient M , N et P trois variétés différentielles (M un “Manifold”, N un “Nanifold” et P un “Panifold”¹³).

3.1 Applications différentielles entre deux variétés différentielles et en particulier difféomorphismes

Considérons une application différentielle f de M sur N : $M \xrightarrow{f} N$.
 $x \mapsto y=f(x)$

Dans le cas particulier où f est un difféomorphisme¹⁴ [12]¹⁵ alors f^{-1} est un difféomorphisme de N sur M : $N \xrightarrow{f^{-1}} M$.
 $y \mapsto x=f^{-1}(y)$

3.2 Espace tangent, en un point et vecteurs tangents, en ce point

On pourra consulter [1]¹⁶, [49]¹⁷, [51]¹⁸ et [70]¹⁹.

Nous reprenons la présentation de cette avant-dernière référence.

Soient $x \in M$ et $C^\infty(x)$ l'ensemble des fonctions réelles différentielles dont le domaine de définition inclut un voisinage ouvert de x .

Une application $C^\infty(x) \xrightarrow{f_x} \mathbb{R}$ est appelée *dérivation* ssi $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \bar{f}, \bar{g} \in C^\infty(x)$ elle satisfait :

- (i) $f_x(\alpha \bar{f} + \beta \bar{g}) = \alpha(f_x(\bar{f})) + \beta(f_x(\bar{g}))$ (linéarité) et :
- (ii) $f_x(\bar{f} \bar{g}) = (f_x(\bar{f}))(\bar{g}(x)) + (\bar{f}(x))(f_x(\bar{g}))$ (règle de Liebniz).

L'ensemble des f_x définit alors un espace vectoriel sur \mathbb{R} avec les opérations :

- (i) $(f_x + g_x)(\bar{f}) = f_x(\bar{f}) + g_x(\bar{f})$ et :
- (ii) $(\alpha f_x)(\bar{f}) = \alpha(f_x(\bar{f}))$.

11. pp. 1-19 Chapitre I

12. pp. 47-83 Chapitre 2

13. elle est bien bonne!

14. un difféomorphisme est une application bijective différentielle dont la réciproque est aussi différentielle

15. p. 222

16. p. 44 Définition 1.6.3

17. p. 123

18. pp. 404-405 § 1.2

19. pp. 86-128 Chapitre 3 § 8-9-10-11

L'espace tangent à M , au point x , noté $T_x M$ est l'ensemble de toutes les dérivations f_x .

Les éléments d'un espace tangent, en un point, sont appelés vecteurs tangents, en ce point.

3.3 Application tangente, ou différentielle, en un point, à une application différentielle et, en particulier, à un difféomorphisme

Une courbe différentielle c de M est une application différentielle :

$$\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \mapsto c(t) \end{array} M \text{ et une courbe différentielle } d \text{ de } N \text{ une application différentielle :}$$

$$\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \mapsto d(t) \end{array} N.$$

Remarque : il suffit en fait de considérer que c et d sont définies sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0.

Si f est une application différentielle : $M \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \mapsto y=f(x) \end{array} N$ l'application tangente, ou différentielle, $T_x f$, au point x , à l'application différentielle f , est une application *linéaire* de l'espace tangent $T_x M$ à M , au point x , dans l'espace tangent $T_y N$ à N , au point y :

$$T_x M \begin{array}{c} \xrightarrow{T_x f} \\ \mapsto w_y=(T_x f)(v_x) \end{array} T_y N \quad ; \quad T_x \in L(T_x M ; T_y N) \text{ où } L \text{ représente un ensemble d'applications linéaires.}$$

v_x et w_y sont donc des vecteurs tangents, aux points x et y respectivement.

$T_x f$ est définie de la façon suivante, grâce à n'importe quelle courbe différentielle c de M et à la courbe différentielle $d = f \circ c$ de N qui s'en déduit :

$$\text{si } x = c(0) \text{ et } v_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(t) \text{ alors :} \\ w_y = w_{f(x)} = (T_x f)(v_x) \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t).$$

Dans le cas particulier où f est un difféomorphisme :

$$T_{f(x)} N \begin{array}{c} \xrightarrow{(T_x f)^{-1}} \\ \mapsto v_x \end{array} T_x M \text{ et } T_y N \begin{array}{c} \xrightarrow{T_y f^{-1}} \\ \mapsto v_{f^{-1}(y)} \end{array} T_{f^{-1}(y)} M. \text{ On en conclut que :}$$

$$T_{f(x)} f^{-1} = (T_x f)^{-1} \text{ et } T_{f^{-1}(y)} f = (T_y f^{-1})^{-1}.$$

3.3.1 Composition d'applications tangentes en un point

Si f et g sont deux applications différentielles et étant donné que :

$$M \xrightarrow[f]{f} N \xrightarrow[g]{g} P \text{ est identique à } M \xrightarrow[g \circ f]{g \circ f} P \text{ on a :}$$

$$x \mapsto y=f(x) \mapsto z=g(y)=g(f(x)) \quad x \mapsto z=(g \circ f)(x)$$

$$T_x M \xrightarrow[T_x f]{T_x f} T_y N \xrightarrow[T_y g]{T_y g} T_z P \text{ qui est identique à}$$

$$v_x \mapsto w_y=(T_x f)(v_x) \mapsto u_z=(T_y g)(w_y)$$

$$T_x M \xrightarrow[T_x(g \circ f)]{T_x(g \circ f)} T_z P \text{ et par conséquent :}$$

$$v_x \mapsto u_z=(T_x(g \circ f))(v_x)$$

$T_x(g \circ f) = (T_y g) \circ (T_x f)$; règle de composition qualifiée de “chain-rule” en anglais [11]²⁰.

$$\text{En particulier } (T_x(g \circ f))(1) = (T_{f(x)}g)((T_x f)(1)).$$

Si on pose $\frac{d}{dx}f(x) \triangleq (T_x f)(1)$ et

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) \triangleq (T_x(g \circ f))(1); \text{ alors :}$$

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = (T_{f(x)}g)\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) : \text{ règle de dérivation composée [11]²¹.$$

3.4 Application numérique différentielle sur une variété différentielle

Soit $M \xrightarrow[U]{U} \mathbb{R}$ une application numérique différentielle sur M . Alors

$U \in \mathcal{F}(M)$; $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des applications numériques différentielles sur M .

$$\text{On a } T_x M \xrightarrow[T_x U]{T_x U} T_{U(x)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}; T_x U \in L(T_x M; \mathbb{R})$$

$$v_x \mapsto (T_x U)(v_x)$$

$$\text{Et donc } \frac{d}{dx}U(x) \triangleq (T_x U)(1).$$

En fait $T_x U$ est une *forme* linéaire et donc $T_x U \in T_x^* M \triangleq L(T_x M; \mathbb{R})$ où $T_x^* M$ est le dual algébrique de l'espace vectoriel $T_x M$; il s'agit d'un espace vectoriel.

Soit $N \xrightarrow[U']{U'} \mathbb{R}$ une application numérique différentielle sur N . Alors

$U' \in \mathcal{F}(N)$; $\mathcal{F}(N)$ l'ensemble des applications numériques différentielles sur N .

20. p. 73

21. p. 75

On a $T_y N \xrightarrow[w_y]{T_y U'} T_{U'(y)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ et donc :

$$\frac{d}{dy} U'(y) \triangleq (T_y U')(1).$$

$T_y U'$ est une application linéaire et donc $T_y U' \in T_y^* N \triangleq L(T_y N; \mathbb{R})$ où $T_y^* N$ est le dual algébrique de l'espace vectoriel $T_y N$; il s'agit d'un espace vectoriel.

3.5 Fibrés tangents

On pourra consulter [70]²².

$TM \triangleq \bigcup_{x \in M} T_x M$, $TN \triangleq \bigcup_{y \in N} T_y N$ et $TP \triangleq \bigcup_{z \in M} T_z P$, où \bigcup est une union disjointe [49]²³, [69]²⁴ et [70]²⁵.

$T_x M$, $T_y N$ et $T_z P$ sont appelées *fibres* au dessus de x , y et z respectivement.

Soient τ_M , τ_N et τ_P les *projections canoniques* (souvent appelées *pieds*) respectives de TM sur M , TN sur N et TP sur P . Si $v \in TM$ alors $v = (x, v_x)$, avec $x \triangleq \tau_M(v)$ et $v_x \in T_x M$. Si $w \in TN$ alors $w = (y, w_y)$, avec $y \triangleq \tau_N(w)$ et $w_y \in T_y N$. Si $u \in TP$ alors $u = (z, u_z)$, avec $z \triangleq \tau_P(u)$ et $u_z \in T_z P$.

3.6 Relèvement tangent d'une application différentielle

On pourra consulter [49]²⁶.

Si f est une application différentielle son relèvement tangent, noté Tf , est l'application tangente ou différentielle :

$$TM \xrightarrow{Tf} TN \\ v=(x, v_x) \mapsto w=(Tf)(v)=(y, w_y)=(f(x), (T_x f)(v_x))$$

Le diagramme suivant est commutatif :

22. pp. 129-139 Chapitre 3 § 12

23. p. 123

24. p. 107 B/

25. p. 129 § 12

26. p. 124

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \begin{array}{c} v \\ w \\ x \\ y \end{array},$$

i.e. $f \circ \tau_M = \tau_N \circ Tf$ [1]²⁷.

3.6.1 Composition d'applications tangentes

Si f et g sont deux applications différentielles et étant donné que :

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \text{ est identique à } M \xrightarrow{g \circ f} P \text{ on a :}$$

$x \mapsto y=f(x) \mapsto z=g(y)=g(f(x)) \qquad x \mapsto z=(g \circ f)(x)$

$TM \xrightarrow{Tf} TN \xrightarrow{Tg} TP$ qui est identique à $TM \xrightarrow{T(g \circ f)} TP$ et par conséquent :

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \text{ [1]}^{28} \text{ et [49]}^{29}.$$

Dans le cas particulier où f est un difféomorphisme : $Tf^{-1} = (Tf)^{-1}$.

3.7 Images d'une application numérique différentielle sur une variété différentielle par une application différentielle ou un difféomorphisme

On pourra consulter [49]³⁰.

3.7.1 Image réciproque par une application différentielle

L'image *réciproque* est qualifiée de "pull-back" en anglais et on utilise un indice * supérieur pour définir une image réciproque.

Soit f une application différentielle de M sur N et U' une application numérique différentielle sur N ($U' \in \mathcal{F}(N)$). L'image réciproque f^*U' de U' par f est l'application numérique différentielle sur M :

$$f^*U' \triangleq U' \circ f \in \mathcal{F}(M).$$

$$\text{Donc } \mathcal{F}(N) \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}(M).$$

$U' \mapsto f^*U'$

27. p. 42 § 16

28. p. 45 Théorème 1.6.7

29. p. 124

30. p. 71

Et donc, d'après ce qui précède :

$$T_x(f^*U') = T_x(U' \circ f) = (T_{f(x)}U') \circ (T_x f) \text{ (règle de composition) et :}$$

$$T(f^*U') = T(U' \circ f) = (TU') \circ (Tf).$$

Action à gauche de TN sur $\mathcal{F}(N)$

C'est l'application : $TN \times \mathcal{F}(N) \longrightarrow \mathcal{F}(N)$ avec :

$$(w, U') \qquad w \bullet U'$$

$$N \xrightarrow{w \bullet U'} \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto (w \bullet U')(y) \triangleq (T_y U')(w_y)$$

3.7.2 Image *directe* par un difféomorphisme

L'image *directe* est qualifiée de “push-forward” en anglais et on utilise un indice $*$ inférieur pour définir une image directe.

Soit f un difféomorphisme de M sur N et U une application numérique différentielle sur M ($U \in \mathcal{F}(M)$). L'image directe f_*U de U par f est l'application numérique différentielle sur N :

$$f_*U \triangleq U \circ f^{-1} \in \mathcal{F}(N).$$

$$\text{Donc } \mathcal{F}(M) \xrightarrow{f_*} \mathcal{F}(N)$$

$$U \longmapsto f_*U$$

Et donc, d'après ce qui précède :

$$T_y(f_*U) = T_y(U \circ f^{-1}) = (T_{f^{-1}(y)}U) \circ (T_y f^{-1}) \text{ (règle de composition) et :}$$

$$T(f_*U) = T(U \circ f^{-1}) = (TU) \circ (Tf^{-1}).$$

Action à gauche de TM sur $\mathcal{F}(M)$

C'est l'application : $TM \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ avec :

$$(v, U) \qquad v \bullet U$$

$$M \xrightarrow{v \bullet U} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (v \bullet U)(x) \triangleq (T_x U)(v_x)$$

3.7.3 Relations entre les images réciproque et directe ssi f est un difféomorphisme

$$\diamond f^*U' = U' \circ f \text{ donc } (f^{-1})^*U' = U' \circ f^{-1} \text{ et donc } (f^{-1})^* = f_*.$$

$$\diamond f_*U = U \circ f^{-1} \text{ donc } (f^{-1})_*U = U \circ f = f^*U \text{ et donc } (f^{-1})_* = f^*.$$

3.8 Champs de vecteurs différentiels sur les variétés différentielles

On pourra consulter [10]³¹ et [70]³².

Ce sont les applications suivantes, que nous supposons différentielles :

$$M \xrightarrow{X} TM \quad \text{et} \quad N \xrightarrow{X'} TN$$

$x \mapsto X(x)=(x, X_x), \text{ avec } X_x \in T_x M$ $y \mapsto X'(y)=(y, X'_y), \text{ avec } X'_y \in T_y N$

Alors $X \in \mathcal{X}(M)$ et $X' \in \mathcal{X}(N)$, respectivement ensembles des champs de vecteurs sur M et N . On verra que $\mathcal{X}(M)$ et $\mathcal{X}(N)$ sont des algèbres de Lie.

Remarque : dans un but de simplification les champs de vecteurs que nous considérons dans ce rapport sont définis sur les variétés toutes entières ; ils sont dits *complets*.

3.8.1 Courbe intégrale du champ de vecteurs X sur la variété M

On pourra consulter [1]³³, [49]³⁴ et [51]³⁵.

La courbe intégrale du champ de vecteurs X , avec la condition initiale x à $t = 0$, est la courbe différentielle $\theta.(x)$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta.(x)} M, \text{ telle que :}$$

$t \mapsto \theta_t(x) \triangleq \theta.(x)(t)$

$$\frac{d}{dt} \theta_t(x) = X_{\theta_t(x)} \in T_{\theta_t(x)} M \text{ et } \theta_0(x) = x ; \forall x \in M. \text{ Donc :}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_t(x) = X_{\theta_0(x)} = X_x \in T_x M ; \forall x \in M.$$

On a $T_t \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \xrightarrow{T_t \theta.(x)} T_{\theta_t(x)} M$ et on a posé (rappel) :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_t(x) = (T_0 \theta.(x))(1), \text{ soit } X_x = (T_0 \theta.(x))(1) \text{ et}$$

$$\frac{d}{dt} \theta_t(x) = (T_t \theta.(x))(1), \text{ soit } X_{\theta_t(x)} = (T_t \theta.(x))(1).$$

3.8.2 Flot du champ de vecteurs X sur la variété M

On pourra consulter [1]³⁶, [11]³⁷ et [49]³⁸.

31. pp. 107-175 Chapitre IV

32. pp. 149-162 § 14

33. p. 61 Définition 2.1.1

34. p. 127

35. p. 412

36. pp. 60-61

37. p. 111 qui parle de coulée et non de flot

38. p. 127

C'est la collection $\{\theta_t\}$ des difféomorphismes :

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_t} \\ \xrightarrow{x \mapsto \theta_t(x)} \end{array} M.$$

Étant donné que le champ de vecteurs X est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété [49]³⁹ :

$$\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s = \theta_{s+t} = \theta_s \circ \theta_t; \forall t, s \in \mathbb{R}. \text{ Donc } \theta_0 = \text{id} \text{ et } \theta_t^{-1} = \theta_{-t}.$$

On a la propriété $X_{\theta_t(x)} = (T_x \theta_t)(X_x) \in T_{\theta_t(x)} M$ [49]⁴⁰.

Démonstration [69]⁴¹

$$\text{Soit } \mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_s(x')} \\ \xrightarrow{x=\theta_s(x')} \end{array} M \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_t} \\ \xrightarrow{\theta_t(x)=\theta_{t+s}(x')=\theta_s(\theta_t(x'))} \end{array} M \text{ qui est identique à } \\ \mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_t \circ \theta_s(x')=\theta_s(\theta_t(x'))} \\ \xrightarrow{\theta_s(\theta_t(x'))} \end{array} M. \text{ Et par conséquent, d'après la règle de composition :}$$

$T_s(\theta_t \circ \theta_s(x')) = T_s(\theta_s(\theta_t(x')))$ $= (T_x \theta_t) \circ (T_s \theta_s(x'))$, d'où on déduit la règle de dérivation composée :

$$(T_s(\theta_s(\theta_t(x'))))(1) = (T_x \theta_t)((T_s \theta_s(x'))(1)). \text{ Mais :}$$

$$(T_s(\theta_s(\theta_t(x'))))(1) = \frac{d}{ds} \theta_s(\theta_t(x')) = X_{\theta_s(\theta_t(x'))} = X_{\theta_t(\theta_s(x'))} = X_{\theta_t(x)} \text{ et}$$

$$(T_s \theta_s(x'))(1) = \frac{d}{ds} \theta_s(x') = X_{\theta_s(x')} = X_x, \text{ soit finalement :}$$

$$X_{\theta_t(x)} = (T_x \theta_t)(X_x) \text{ QED.}$$

Action à gauche de \mathbb{R} sur M

C'est l'application $\mathbb{R} \times M \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{(t,x) \mapsto \theta_t(x)} \end{array} M$ qui est appelée groupe à un paramètre de difféomorphismes [3]⁴². Cependant certains auteurs disent que c'est cette action qui est le flot.

39. p. 127

40. p. 334 indiquée pour un champ de vecteur hamiltonien (cf. ci-après)

41. p. 122 PR19

42. p. 16 et pour lui le flot est $(M, \{\theta^t\})$

3.8.3 Image réciproque d'un champ de vecteurs sur une variété par un difféomorphisme

On pourra consulter [1]⁴³, [46]⁴⁴, [49]⁴⁵, [51]⁴⁶, [56]⁴⁷ et [75]⁴⁸.

Soit X' un champ de vecteurs sur N ($X' \in \mathcal{X}(N)$) alors on va lui associer un champ de vecteurs X sur M ($X \in \mathcal{X}(M)$) :

$X = f^*X' \triangleq Tf^{-1} \circ X' \circ f = (Tf)^{-1} \circ X' \circ f$ et on dit que X est l'image réciproque de X' par f . Alors $X(x) = (x, X_x)$, avec :

$$X_x = (T_{f(x)}f^{-1})(X'_{f(x)}) = (T_xf)^{-1}(X'_{f(x)}) \in T_xM.$$

Alors $(Tf) \circ X = X' \circ f$ et on dit que $X = f^*X'$ et X' sont en f -relation.

3.8.4 Image directe d'un champ de vecteurs sur une variété par un difféomorphisme

On pourra consulter [1]⁴⁹, [46]⁵⁰, [49]⁵¹, [56]⁵² et [51]⁵³.

Soit X un champ de vecteurs sur M ($X \in \mathcal{X}(M)$) alors on va lui associer un champ de vecteurs X' sur N ($X' \in \mathcal{X}(N)$) :

$X' = f_*X \triangleq (Tf) \circ X \circ f^{-1}$ et on dit que X' est l'image directe de X par f . Alors $X'(y) = (y, X'_y)$, avec :

$$X'_y = (T_{f^{-1}(y)}f)(X_{f^{-1}(y)}) \in T_yN.$$

Alors $X' \circ f = (Tf) \circ X$ et on dit que X et $X' = f_*X$ sont en f -relation.

3.8.5 Relations entre les images réciproque et directe d'un champ de vecteurs sur une variété par un difféomorphisme

$\diamond f^*X' \triangleq (Tf)^{-1} \circ X' \circ f$; donc :
 $(f^{-1})^*X' = (Tf^{-1})^{-1} \circ X' \circ f^{-1} = Tf \circ X' \circ f^{-1} = f_*X'$.

43. p. 58, p. 108

44. p. 73 § 7.6; c'est lui qui utilise le terme d'image réciproque

45. p. 71, p. 131, p. 137 (avec une erreur éq. (4.3.5) où il faut remplacer T_x par T_y)

46. pp. 407-408

47. pp. 27-28

48. p. 1461 Pullback Map

49. p. 58, p. 108

50. p. 70 définition 7.4.6; c'est lui qui utilise le terme d'image directe

51. p. 71, p. 72, p. 131, p. 137

52. pp. 27-28

53. p. 407

◇ $f_*X \triangleq Tf \circ X \circ f^{-1}$; donc $(f^{-1})_*X = Tf^{-1} \circ X \circ f = f_*X$ [1]⁵⁴ et [51]⁵⁵.

3.8.6 Action à gauche de $\mathcal{X}(M)$ sur $\mathcal{F}(M)$

C'est l'application $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ telle que

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}(M) \\ & & \longleftarrow \\ & & X[U] \\ & & \longleftarrow \\ (X, U) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X[U]} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (X[U])(x) \triangleq (T_x U)(X_x) \end{array} .$$

Un lemme

On pourra consulter [5]⁵⁶

Si $U \circ \theta_t = U \in \mathcal{F}(M)$; $\forall t \in \mathbb{R}$ alors $X[U] = 0 \in \mathcal{F}(M)$ et réciproquement.

Démonstration

$$\text{Soit } \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta_t(x)} & M & \xrightarrow{U} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \theta_t(x) & \longmapsto & U(\theta_t(x)) \end{array} .$$

D'après la règle de dérivation composée on a :

$$\frac{d}{dt} U(\theta_t(x)) = (T_{\theta_t(x)} U) \left(\frac{d}{dt} \theta_t(x) \right) = (T_{\theta_t(x)} U)(X_{\theta_t(x)}) = X[U](\theta_t(x)).$$

• Donc si $X[U] = 0$ on a $X[U](\theta_t(x)) = 0$ soit $\frac{d}{dt} (U \circ \theta_t)(x) = 0$. Alors $(U \circ \theta_t)(x) = (U \circ \theta_0)(x) = U(x)$; $\forall x \in M$. Et donc $U \circ \theta_t = U \in \mathcal{F}(M)$ QED.

• Si $U \circ \theta_t = U \in \mathcal{F}(M)$ alors $U(\theta_t(x)) = U(x)$; $\forall x \in M$. Donc $\frac{d}{dt} U(\theta_t(x)) = 0$. Soit $X[U](\theta_t(x)) = 0$; $\forall x \in M$ et finalement $X[U] = 0$ QED.

3.8.7 Dérivée de Lie d'une application numérique différentielle selon un champ de vecteurs sur une variété

On pourra consulter [1]⁵⁷, [13] et [70]⁵⁸.

Soit $U \in \mathcal{F}(M)$ et $X \in \mathcal{X}(M)$, alors la dérivée de Lie de U selon X est l'application :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathcal{L}_X U} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\mathcal{L}_X U)(x) \triangleq (T_x U)(X_x) \end{array} \quad \text{et alors } \mathcal{L}_X U \in \mathcal{F}(M).$$

54. p. 58

55. p. 407

56. p. 48 Lemme 4.10

57. p. 79 Définition 2.2.1

58. pp. 221-234 Chapitre 5 § 20

On constate que $\mathcal{L}_X U = X[U]$.

Propriété 1 : [1]⁵⁹

$\mathcal{F}(M) \xrightarrow[U]{\mathcal{L}_X} \mathcal{F}(M)$ est une \mathbb{R} -linéaire dérivation de $\mathcal{F}(M)$ i. e. \mathcal{L}_X est \mathbb{R} -linéaire et pour $U, V \in \mathcal{F}(M)$:

$\mathcal{L}_X(UV) = (\mathcal{L}_X U)V + U(\mathcal{L}_X V)$ et $\mathcal{L}_X c = 0$ si c est une application constante.

Propriété 2 : [1]⁶⁰

Si f est un difféomorphisme de M sur N alors $\mathcal{F}(M) \xrightarrow[U]{\mathcal{L}_X} \mathcal{F}(M)$ est *naturelle* par rapport à l'image directe f_* par f ; ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{F}(N) \\
 U & & f_* U \\
 \mathcal{L}_X \downarrow & f_* \circ \mathcal{L}_X \searrow \swarrow \mathcal{L}_{f_* X} \circ f_* & \downarrow \mathcal{L}_{f_* X} \quad \text{i. e.} \\
 \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{F}(N) \\
 \mathcal{L}_X U & & \mathcal{L}_{f_* X}(f_* U)
 \end{array}$$

$f_* \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{f_* X} \circ f_*$ soit :

$f_*(\mathcal{L}_X U) = \mathcal{L}_{f_* X}(f_* U)$ soit :

$(\mathcal{L}_X U) \circ f^{-1} = \mathcal{L}_{f_* X}(U \circ f^{-1})$.

Propriété 3 : [1]⁶¹

Si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ soit $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \triangleq \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$, alors $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ est une \mathbb{R} -linéaire dérivation de $\mathcal{F}(M)$.

3.8.8 Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs sur une variété selon un autre champ de vecteurs sur cette variété

On pourra consulter [1]⁶² et [70]⁶³.

59. pp. 80-81 Proposition 2.2.4

60. pp. 79-80 Proposition 2.2.3

61. p. 84 Proposition 2.2.11

62. p. 85 Définition 2.2.12

63. pp. 221-234 Chapitre 5 § 20

Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteurs sur M et $\{\theta_t\}$ le flot du champ de vecteurs X . Considérons l'image réciproque $\theta_t^*Y \in \mathcal{X}(M)$ du champ de vecteurs Y par le difféomorphisme θ_t . On a, avec $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$:

$$\theta_t^*Y \triangleq T\theta_t^{-1} \circ Y \circ \theta_t ; \text{ soit } (\theta_t^*Y)_x = (T_{\theta_t(x)}\theta_t^{-1})(Y_{\theta_t(x)}).$$

La dérivée de Lie du champ de vecteurs Y , sur M , selon le champ de vecteurs X , sur M , est le champ de vecteurs $\mathcal{L}_X Y$, sur M ($\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{X}(M)$) tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Y &\triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta_t^*Y \text{ [49]}^{64}. \text{ Alors :} \\ (\mathcal{L}_X Y)_x &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta_t^*Y \right)_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^*Y)_x \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\theta_t(x)}\theta_t^{-1})(Y_{\theta_t(x)}). \end{aligned}$$

3.8.9 Crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(M)$

Pour $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(M)$ est :

$$[X, Y] \triangleq \mathcal{L}_X Y.$$

Doté de ce crochet $\mathcal{X}(M)$ devient une algèbre de Lie.

Propriété 1 [1]⁶⁵ : on a :

$$\text{Pour } X, Y \in \mathcal{X}(M) : \mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y].$$

Donc $\forall U \in \mathcal{F}(M)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X, Y]}U &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y U) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X U) \text{ [49]}^{66} \text{ ou} \\ [X, Y][U] &\triangleq X[Y[U]] - Y[X[U]] \text{ [13]}^{67}. \end{aligned}$$

Propriété 2 : [1]⁶⁸

Si f est un difféomorphisme de M sur N alors $\mathcal{X}(M) \xrightarrow[\mathcal{L}_X Y]{\mathcal{L}_X}$ $\mathcal{X}(M)$ est naturelle par rapport à l'image directe f_* par f ; ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif :

64. p. 138 éq. (4.3.7)

65. pp. 83-85 Théorème 2.2.10, Proposition 2.2.11 et Définition 2.2.12

66. p. 84

67. p. 6

68. pp. 85-86 Proposition 2.2.14

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}(M) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{X}(N) \\
Y & & f_*Y \\
\mathcal{L}_X \downarrow & f_* \circ \mathcal{L}_X \searrow & \mathcal{L}_{f_*X} \circ f_* \downarrow \mathcal{L}_{f_*X} \quad \text{i. e.} \\
\mathcal{X}(M) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{X}(N) \\
\mathcal{L}_X Y & & \mathcal{L}_{f_*X}(f_*Y)
\end{array}$$

$f_* \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{f_*X} \circ f_*$; soit

$f_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{f_*X}(f_*Y)$ ou

$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$.

3.9 Espace cotangent, en un point et vecteurs cotangents, en ce point

On pourra consulter, pour la définition de l'espace cotangent, [70]⁶⁹.

L'espace cotangent à M , au point x , est le dual T_x^*M de l'espace tangent T_xM (qui est un espace vectoriel), en ce point x .

Les éléments de l'espace cotangent, en un point sont appelés vecteurs cotangents, en ce point (ou, parfois, covecteurs tangents, en ce point) [10]⁷⁰.

3.10 Application cotangente, en un point

Si f est une application différentielle on a vu que l'application tangente de f , au point x de M est :

$$\begin{array}{ccc}
T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_y N \\
v_x \mapsto & & w_y = (T_x f)(v_x)
\end{array}$$

Si $v_x^* \in T_x^*M$ et $w_y^* \in T_y^*N$ sont des vecteurs cotangents, à M , au point x et à N , au point y respectivement on a alors les produits scalaires :

$$\text{Sur } T_x M : T_x^*M \times T_x M \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_x} \mathbb{R} \\
(v_x^*, v_x) \mapsto \langle v_x^*, v_x \rangle_x \triangleq v_x^*(v_x)$$

Alors l'application cotangente de f , au point y de N est l'application *linéaire* :

$$\begin{array}{ccc}
T_y^* N & \xrightarrow{T_x^* f} & T_x^* M \\
w_y^* \mapsto & & v_x^* = (T_x^* f)(w_y^*)
\end{array}
; T_x^* f \in L(T_y^* N; T_x^* M), \text{ telle que :}$$

69. pp. 190-199 Chapitre 5 § 17

70. pp. 177-180

$\langle v_x^*, v_x \rangle_x = \langle w_y^*, w_y \rangle_y \in \mathbb{R}; \forall v_x \in T_x M; \forall w_y^* \in T_y^* N$ i.e.
 $((T_x^* f)(w_y^*))(v_x) = w_y^*((T_x f)(v_x)) \in \mathbb{R}; \forall v_x \in T_x M; \forall w_y^* \in T_y^* N$ [49]⁷¹.

3.10.1 Composition d'applications cotangentes en un point

Si f et g sont des applications différentielles et étant donné que (avec $y = f(x)$ et $z = g(y)$) :

$$T_x M \xrightarrow[v_x]{T_x f} T_y N \xrightarrow[w_y=(T_x f)(v_x)]{T_y g} T_z P \quad \text{est identique à}$$

$$T_x M \xrightarrow[v_x]{T_x(g \circ f)} P \quad \text{on a :}$$

$$T_z^* P \xrightarrow[u_z^*]{T_y^* g} T_y^* N \xrightarrow[v_y^*=(T_y^* g)(u_z^*)]{T_x^* f} T_x^* M \quad \text{qui est identique à}$$

$$T_z^* P \xrightarrow[u_z^*]{T_x^*(g \circ f)} P \quad \text{. Donc :}$$

$T_x^*(g \circ f) = (T_x^* f) \circ (T_y^* g)$; règle de composition.

Et on a $\langle v_x^*, v_x \rangle_x = \langle w_y^*, w_y \rangle_y = \langle u_z^*, u_z \rangle_z \in \mathbb{R}$.

3.11 Fibrés cotangents

On pourra consulter [70]⁷².

$T^* M \triangleq \bigcup_{x \in M} T_x^* M$, $T^* N \triangleq \bigcup_{y \in N} T_y^* N$ et $T^* P \triangleq \bigcup_{z \in P} T_z^* P$, où \bigcup est une union disjointe [38]⁷³, [69]⁷⁴ et [70]⁷⁵.

$T_x^* M$, $T_y^* N$ et $T_z^* P$ sont appelées fibres au dessus de x , y et z respectivement.

Soient τ_M^* , τ_N^* et τ_P^* les projections canoniques (souvent appelées pieds) respectives de $T^* M$ sur M , $T^* N$ sur N et $T^* P$ sur P . Si $v^* \in T^* M$ alors $v^* = (x, v_x^*)$, avec $x \triangleq \tau_M^*(v^*)$ et $v_x^* \in T_x^* M$. Si $w^* \in T^* N$ alors $w^* = (y, w_y^*)$, avec $y \triangleq \tau_N^*(w^*)$ et $w_y^* \in T_y^* N$. Si $u \in T^* P$ alors $u^* = (z, u_z^*)$, avec $z \triangleq \tau_P^*(u^*)$ et $u_z^* \in T_z^* P$.

71. p. 170 éq. (6.3.1)

72. pp. 192-193 Chapitre 5 § 17.3

73. p. 129 textsection 4

74. p. 144 éq. (4-9) dans le cas où M et N sont des espaces vectoriels

75. p. 192 § 17.3

3.12 Relèvement cotangent d'un difféomorphisme

Si f est un difféomorphisme son relèvement cotangent, noté T^*f , est l'application cotangente [1]⁷⁶, [5]⁷⁷ et [49]⁷⁸ ou adjointe [49]⁷⁹ :

$$\begin{array}{ccc} T^*N & \xrightarrow{T^*f} & T^*M \\ w^*=(y, w_y^*) & \mapsto & v^*=(T^*f)(w^*)=(x, v_x^*)=(f^{-1}(y), (T_x^*f)(w_y^*)) \end{array}.$$

3.12.1 Composition d'applications cotangentes

Si f et g sont difféomorphismes et étant donné que :

$$TM \xrightarrow{Tf} TN \xrightarrow{Tg} TP \quad \text{qui est identique à } TM \xrightarrow{T(g \circ f)} TP \quad \text{on a :}$$

$$v \mapsto (Tf)(v) \mapsto (Tg)((Tf)(v)) \mapsto (Tg \circ Tf)(v)$$

$$\begin{array}{ccc} T^*P & \xrightarrow{T^*g} & T^*N & \xrightarrow{T^*f} & T^*M & \text{qui est identique à} \\ z^* & \mapsto & w^*=(T^*g)(z^*) & \mapsto & v^*=(T^*f)(w^*)=(T^*f)((T^*g)(z^*)) \end{array}$$

$$T^*P \xrightarrow{T^*(g \circ f)} T^*M \quad \text{et par conséquent :}$$

$$z^* \mapsto v^*=(T^*(g \circ f))(z^*)$$

$$T^*(g \circ f) = T^*f \circ T^*g \quad [1]^{80} \text{ et } [49]^{81}.$$

$$\text{Donc : } T^*f^{-1} = (T^*f)^{-1}.$$

3.13 Fonction moment d'un champ de vecteurs sur une variété

On pourra consulter [49]⁸².

$$\text{Soit } \mathcal{X}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{F}(T^*M) \text{ telle que :}$$

$$X \mapsto \mathcal{P}(X)$$

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\mathcal{P}(X)} & \mathbb{R} \\ v^* & \mapsto & \mathcal{P}(X)(v^*) \triangleq \langle v_x^*, X_x \rangle_x \quad (\text{avec } x = \tau_M^*(v^*)) \end{array}.$$

$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}(T^*M)$ est la fonction moment du champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$.

76. p. 180 Théorème 3.2.12, mais les auteurs n'utilisent pas l'adjectif "cotangent"

77. p. 18 éq. (2.5)

78. p. 170 Définition 6.3.1

79. p. 172

80. p. 181

81. p. 172 éq. (6.3.7)

82. p. 15 et p. 383

3.14 Variété de Poisson

On pourra consulter [5]⁸³, [49]⁸⁴ et [78].

Une variété de Poisson est une variété différentielle dont l'ensemble des applications numériques différentielles peut être doté d'une application bilinéaire antisymétrique qui fait de cet ensemble une algèbre de Lie, tout en étant une dérivation en chaque facteur (cf. ci-après). Cette application est appelée crochet de Poisson.

3.15 Les fibrés cotangents sont des variétés de Poisson

Les fibrés cotangents T^*M sont des variétés de Poisson car $\mathcal{F}(T^*M)$ peut être doté d'un crochet de Poisson défini ci-après. Nous donnons par la suite deux exemples d'un tel crochet : le crochet de Poisson canonique et un crochet de Poisson non canonique .

3.15.1 Crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(T^*M)$

On pourra consulter [49]⁸⁵

On note par des lettres grasses \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} les éléments de $\mathcal{F}(T^*M)$.

Un crochet de Poisson est une application bilinéaire $\{, \}$ sur $\mathcal{F}(T^*M)$ telle que :

(i) $\mathcal{F}(T^*M)$ doté de $\{, \}$ est une algèbre de Lie, donc telle que :

$\{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} + \{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}, \mathbf{F}\} + \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}, \mathbf{G}\} = 0; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$
identité de Jacobi et :

(ii) $\{, \}$ est une dérivation en chaque facteur, donc telle que :

$\{\mathbf{F}\mathbf{G}, \mathbf{H}\} = \mathbf{F}\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}\mathbf{G}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ identité de Leibniz.

Remarquons que cette dernière relation à une signification car $\mathbf{F}\mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$, avec $(\mathbf{F}\mathbf{G})(v^*) \triangleq \mathbf{F}(v^*)\mathbf{G}(v^*); \forall v^* \in T^*M$. Et idem pour $\mathbf{F}\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}$ et $\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}\mathbf{G}$.

3.16 Champs de vecteurs sur les fibrés cotangents

Ce sont les applications suivantes, que nous supposons différentielles :

83. pp. 51-63 Chapitre 5

84. pp. 327-362 Chapitre 10

85. p. 11 et p. 328 Définition 10.1.1

$$T^*M \xrightarrow[\begin{smallmatrix} v^* \\ \mapsto \mathbf{X}(v^*)=(v^*, \mathbf{X}_{v^*}) \text{ avec } \mathbf{X}_{v^*} \in T_{v^*}(T^*M) \end{smallmatrix}]{\mathbf{X}} T(T^*M) \quad \text{et}$$

$$T^*N \xrightarrow[\begin{smallmatrix} w^* \\ \mapsto \mathbf{X}'(w^*)=(w^*, \mathbf{X}'_{w^*}) \text{ avec } \mathbf{X}'_{w^*} \in T_{w^*}(T^*N) \end{smallmatrix}]{\mathbf{X}'} T(T^*N) \quad . \text{ Alors } \mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M) \text{ et}$$

$$\mathbf{X}' \in \mathcal{X}(T^*N), \text{ respectivement ensembles des champs de vecteurs sur } T^*M \text{ et } T^*N.$$

3.16.1 Courbe intégrale du champ de vecteurs \mathbf{X} sur le fibré cotangent T^*M

La courbe intégrale du champ de vecteurs \mathbf{X} , avec la condition initiale v^* à $t = 0$, est la courbe différentielle $\boldsymbol{\theta} \cdot (v^*)$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} t \\ \mapsto \boldsymbol{\theta}_t(v^*) \end{smallmatrix}]{\boldsymbol{\theta} \cdot (v^*)} T^*M, \text{ telle que :}$$

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}_t(v^*) = \mathbf{X}_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)} \in T_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)}(T^*M) \text{ et } \boldsymbol{\theta}_0(v^*) = v^*; \forall v^* \in T^*M. \text{ Donc :}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \boldsymbol{\theta}_t(v^*) = \mathbf{X}_{\boldsymbol{\theta}_0(v^*)} = \mathbf{X}_{v^*} \in T_{v^*}(T^*M); \forall v^* \in T^*M.$$

3.16.2 Flot du champ de vecteurs \mathbf{X} sur la variété T^*M

C'est la collection $\{\boldsymbol{\theta}_t\}$ des difféomorphismes :

$$T^*M \xrightarrow[\begin{smallmatrix} v^* \\ \mapsto \boldsymbol{\theta}_t(v^*) \end{smallmatrix}]{\boldsymbol{\theta}_t} T^*M.$$

Étant donné que le champ de vecteurs \mathbf{X} est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété :

$$\boldsymbol{\theta}_{t+s} = \boldsymbol{\theta}_t \circ \boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\theta}_{s+t} = \boldsymbol{\theta}_s \circ \boldsymbol{\theta}_t; \forall t, s \in \mathbb{R}. \text{ Donc } \boldsymbol{\theta}_0 = \text{id} \text{ et } \boldsymbol{\theta}_t^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{-t}.$$

$$\text{On a la propriété } \mathbf{X}_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)} = (T_{v^*}\boldsymbol{\theta}_t)(\mathbf{X}_{v^*}) \in T_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)}(T^*M).$$

3.17 Images d'une application numérique différentielle sur le fibré cotangent par une application différentielle ou un difféomorphisme

Soit \mathbf{f} une application différentielle de T^*M sur T^*N .

Dans le cas particulier où \mathbf{f} un difféomorphisme de T^*M sur T^*N alors \mathbf{f}^{-1} un difféomorphisme de T^*N sur T^*M . Un exemple d'un tel difféomorphisme \mathbf{f} est $(T^*f)^{-1} = T^*f^{-1}$ et un exemple d'un tel difféomorphisme \mathbf{f}^{-1} est T^*f , où f est un difféomorphisme de M sur N .

3.17.1 Image réciproque par une application différentielle

Soit \mathbf{F}' une application numérique différentielle sur T^*N ($\mathbf{F}' \in \mathcal{F}(T^*N)$). L'image réciproque $\mathbf{f}^*\mathbf{F}'$ de \mathbf{F}' par l'application différentielle \mathbf{f} est l'application numérique différentielle sur T^*M :

$$\mathbf{f}^*\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{F}' \circ \mathbf{f} \in \mathcal{F}(T^*M). \text{ Donc } \mathcal{F}(T^*N) \xrightarrow[\mathbf{F}']{\mathbf{f}^*} \mathcal{F}(T^*M).$$

3.17.2 Image directe par un difféomorphisme

Soit \mathbf{F} une application numérique différentielle sur T^*M ($\mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M)$). L'image directe $\mathbf{f}_*\mathbf{F}$ de \mathbf{F} par le difféomorphisme \mathbf{f} est l'application numérique différentielle sur T^*N :

$$\mathbf{f}_*\mathbf{F} \triangleq \mathbf{F} \circ \mathbf{f}^{-1} \in \mathcal{F}(T^*N). \text{ Donc } \mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow[\mathbf{F}]{\mathbf{f}_*} \mathcal{F}(T^*N).$$

3.17.3 Relations entre les images réciproque et directe ssi \mathbf{f} est un difféomorphisme

- ◇ $\mathbf{f}^*\mathbf{F}' = \mathbf{F}' \circ \mathbf{f}$ donc $(\mathbf{f}^{-1})^*\mathbf{F}' = \mathbf{F}' \circ \mathbf{f}^{-1}$ et donc $(\mathbf{f}^{-1})^* = \mathbf{f}_*$.
- ◇ $\mathbf{f}_*\mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{f}^{-1}$ donc $(\mathbf{f}^{-1})_*\mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}^*\mathbf{F}$ et donc $(\mathbf{f}^{-1})_* = \mathbf{f}^*$.

3.17.4 Image réciproque d'un champ de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M par un difféomorphisme

Soit \mathbf{X}' un champ de vecteurs sur T^*N ($\mathbf{X}' \in \mathcal{X}(T^*N)$) alors on va lui associer un champ de vecteurs \mathbf{X} sur T^*M ($\mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M)$) :

$\mathbf{X} = \mathbf{f}^*\mathbf{X}' \triangleq T\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{X}' \circ \mathbf{f} = (T\mathbf{f})^{-1} \circ \mathbf{X}' \circ \mathbf{f}$ et on dit que \mathbf{X} est l'image réciproque de \mathbf{X}' par \mathbf{f} . Alors :

$$\mathbf{X}_{v^*} = (T_{\mathbf{f}(v^*)}\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{X}'_{\mathbf{f}(v^*)}) = (T_{v^*}\mathbf{f})^{-1}(\mathbf{X}'_{\mathbf{f}(v^*)}) \in T_{v^*}(T^*M).$$

Alors $(T\mathbf{f}) \circ \mathbf{X} = \mathbf{X}' \circ \mathbf{f}$ et on dit que $\mathbf{X} = \mathbf{f}^*\mathbf{X}'$ et \mathbf{X}' sont en \mathbf{f} -relation.

3.17.5 Image directe d'un champ de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M par un difféomorphisme

Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs sur T^*M ($\mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M)$) alors on va lui associer un champ de vecteurs \mathbf{X}' sur T^*N ($\mathbf{X}' \in \mathcal{X}(T^*N)$) :

$\mathbf{X}' = \mathbf{f}_*\mathbf{X} \triangleq (T\mathbf{f}) \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{f}^{-1}$ et on dit que \mathbf{X}' est l'image directe de \mathbf{X} par \mathbf{f} . Alors :

$$\mathbf{X}'_{w^*} = (T_{\mathbf{f}^{-1}(w^*)}\mathbf{f})(\mathbf{X}_{\mathbf{f}^{-1}(w^*)}) \in T_{w^*}(T^*N)$$

Alors $\mathbf{X}' \circ \mathbf{f} = (T\mathbf{f}) \circ \mathbf{X}$ et on dit que \mathbf{X} et $\mathbf{X}' = \mathbf{f}_*\mathbf{X}$ sont en \mathbf{f} -relation.

3.17.6 Relations entre les images réciproque et directe d'un champ de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M par un difféomorphisme

◇ $\mathbf{f}^*\mathbf{X}' \triangleq (T\mathbf{f})^{-1} \circ \mathbf{X}' \circ \mathbf{f}$; donc :

$$(\mathbf{f}^{-1})^*\mathbf{X}' = (T\mathbf{f}^{-1})^{-1} \circ \mathbf{X}' \circ \mathbf{f}^{-1} = T\mathbf{f} \circ \mathbf{X}' \circ \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}_*\mathbf{X}'.$$

◇ $\mathbf{f}_*\mathbf{X} \triangleq T\mathbf{f} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{f}^{-1}$; donc $(\mathbf{f}^{-1})_*\mathbf{X} = T\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}^*\mathbf{X}$.

3.17.7 Action à gauche de $\mathcal{X}(T^*M)$ sur $\mathcal{F}(T^*M)$

C'est l'application $\mathcal{X}(T^*M) \times \mathcal{F}(T^*M) \longrightarrow \mathcal{F}(T^*M)$ telle que

$$T^*M \xrightarrow[v^*]{\mathbf{X}[\mathbf{F}]} \mathbb{R} \quad \cdot$$

$$\longmapsto (\mathbf{X}[\mathbf{F}])(v^*) \triangleq (T_{v^*}\mathbf{F})(\mathbf{X}_{v^*}) = \langle T_{v^*}\mathbf{F}, \mathbf{X}_{v^*} \rangle_{v^*}$$

3.17.8 Dérivée de Lie d'une application numérique différentielle selon un champ de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M

Soit $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M)$ et $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M)$, alors la dérivée de Lie de \mathbf{F} selon \mathbf{X} est l'application :

$$T^*M \xrightarrow[v^*]{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}} \mathbb{R} \quad \text{et alors } \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M).$$

$$\longmapsto (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F})(v^*) \triangleq (T_{v^*}\mathbf{F})(\mathbf{X}_{v^*}) = \langle T_{v^*}\mathbf{F}, \mathbf{X}_{v^*} \rangle_{v^*}$$

On constate que $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F} = \mathbf{X}[\mathbf{F}]$.

Propriété 1 :

$\mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow[\mathbf{F}]{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}(T^*M)$ est une \mathbb{R} -linéaire dérivation de $\mathcal{F}(T^*M)$ i. e. $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ est \mathbb{R} -linéaire et pour $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$:

$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}\mathbf{G}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F})\mathbf{G} + \mathbf{F}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{G})$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} = 0$ si \mathbf{c} est une application constante.

Propriété 2 :

Si \mathbf{f} est un difféomorphisme de T^*M sur T^*N alors $\mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow[\mathbf{F}]{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}(T^*M)$ est *naturelle* par rapport à l'image directe \mathbf{f}_* par \mathbf{f} ; ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(T^*M) & \xrightarrow{\mathbf{f}_*} & \mathcal{F}(T^*N) \\
\mathbf{F} & & \mathbf{f}_*\mathbf{F} \\
\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \downarrow & \mathbf{f}_* \circ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \searrow \swarrow \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}} \circ \mathbf{f}_* & \downarrow \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}} \quad \text{i. e.} \\
\mathcal{F}(T^*M) & \xrightarrow{\mathbf{f}_*} & \mathcal{F}(T^*N) \\
\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F} & & \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}}(\mathbf{f}_*\mathbf{F})
\end{array}$$

$\mathbf{f}_* \circ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}} \circ \mathbf{f}_*$ soit :

$\mathbf{f}_*(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}) = \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}}(\mathbf{f}_*\mathbf{F})$ soit :

$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F}) \circ \mathbf{f}^{-1} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}_*\mathbf{X}}(\mathbf{F} \circ \mathbf{f}^{-1})$.

Propriété 3 :

Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ soit $[\mathcal{L}_{\mathbf{X}}, \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}] \triangleq \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} - \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \circ \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$, alors $[\mathcal{L}_{\mathbf{X}}, \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}]$ est une \mathbb{R} -linéaire dérivation de $\mathcal{F}(T^*M)$.

3.17.9 Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs sur le fibré cotangent T^*M selon un autre champ de vecteurs sur ce fibré cotangent T^*M

Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ deux champs de vecteurs sur T^*M et $\{\boldsymbol{\theta}_t\}$ le flot du champ de vecteurs \mathbf{X} . Considérons l'image réciproque $\boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ du champ de vecteurs \mathbf{Y} par le difféomorphisme $\boldsymbol{\theta}_t$. On a, avec $\boldsymbol{\theta}_t^{-1} = \boldsymbol{\theta}_{-t}$:

$$\boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y} \triangleq T\boldsymbol{\theta}_t^{-1} \circ \mathbf{Y} \circ \boldsymbol{\theta}_t; \text{ soit } (\boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y})_{v^*} = (T_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)}\boldsymbol{\theta}_t^{-1})(\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)}).$$

La dérivée de Lie du champ de vecteurs \mathbf{Y} , sur T^*M , selon le champ de vecteurs \mathbf{X} , sur T^*M , est le champ de vecteurs $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, sur T^*M ($\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$) tel que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &\triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y}. \text{ Alors :} \\
(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_{v^*} &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y} \right)_{v^*} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\boldsymbol{\theta}_t^*\mathbf{Y})_{v^*} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\boldsymbol{\theta}_t(x)}\boldsymbol{\theta}_t^{-1})(\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}_t(v^*)}).
\end{aligned}$$

3.17.10 Crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(T^*M)$

Pour $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(T^*M)$ est :

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \triangleq \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}.$$

Doté de ce crochet $\mathcal{X}(T^*M)$ devient une algèbre de Lie.

Propriété 1 : on a :

$$\text{Pour } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M) : \mathcal{L}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} = [\mathcal{L}_{\mathbf{X}}, \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}].$$

Donc $\forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{F} &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{F}) - \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{F}) \\ [\mathbf{X}, \mathbf{Y}][\mathbf{F}] &\triangleq \mathbf{X}[\mathbf{Y}[\mathbf{F}]] - \mathbf{Y}[\mathbf{X}[\mathbf{F}]]. \end{aligned}$$

Propriété 2 :

Si \mathbf{f} est un difféomorphisme de T^*M sur T^*N alors $\mathcal{X}(T^*M) \xrightarrow[\mathbf{Y}]{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}} \mathcal{X}(T^*M) \xrightarrow[\mathcal{L}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}]{\mathbf{f}_*}$ est naturelle par rapport à l'image directe \mathbf{f}_* par \mathbf{f} ; ce qui signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(T^*M) & \xrightarrow{\mathbf{f}_*} & \mathcal{X}(T^*N) \\ \mathbf{Y} & & \mathbf{f}_* \mathbf{Y} \\ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \downarrow & \mathbf{f}_* \circ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \searrow \swarrow \mathcal{L}_{\mathbf{f}_* \mathbf{X}} \circ \mathbf{f}_* & \downarrow \mathcal{L}_{\mathbf{f}_* \mathbf{X}} \quad \text{i. e.} \\ \mathcal{X}(T^*M) & \xrightarrow{\mathbf{f}_*} & \mathcal{X}(T^*N) \\ \mathcal{L}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} & & \mathcal{L}_{\mathbf{f}_* \mathbf{X}}(\mathbf{f}_* \mathbf{Y}) \end{array}$$

$\mathbf{f}_* \circ \mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}_* \mathbf{X}} \circ \mathbf{f}_*$; soit

$\mathbf{f}_*(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) = \mathcal{L}_{\mathbf{f}_* \mathbf{X}}(\mathbf{f}_* \mathbf{Y})$ ou

$\mathbf{f}_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathbf{f}_* \mathbf{X}, \mathbf{f}_* \mathbf{Y}]$.

3.17.11 Champ de vecteurs hamiltonien sur le fibré cotangent T^*M

On pourra consulter [49]⁸⁶.

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ il existe alors un unique champ de vecteurs $X_{\mathbf{H}}$ sur T^*M ($X_{\mathbf{H}} \in \mathcal{X}(T^*M)$) tel que :

$X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] \triangleq \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \in \mathcal{F}(T^*M)$; $\forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M)$. Alors :

$$(X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}])(v^*) = (T_{v^*} \mathbf{F})(X_{\mathbf{H}v^*}) = \langle T_{v^*} \mathbf{F}, X_{\mathbf{H}v^*} \rangle_{v^*}.$$

$X_{\mathbf{H}}$ est appelé champ de vecteur hamiltonien de \mathbf{H} sur T^*M et son flot $\{\varphi_t\}$ est appelé flot hamiltonien⁸⁷.

Rappel : on a $X_{\mathbf{H}\varphi_t(v^*)} = \frac{d}{dt} \varphi_t(v^*) = (T_{v^*} \varphi_t)(X_{\mathbf{H}v^*})$.

Soit $\mathcal{H}(T^*M) \triangleq \{X_{\mathbf{H}} \in \mathcal{X}(T^*M) \mid \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)\}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens sur T^*M . En effet c'est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{X}(T^*M)$ et l'application X :

86. p. 333 Proposition 10.2.1

87. on note donc $\{\theta_t\}$ les flots de \mathbf{X} et $\{\varphi_t\}$ les flots hamiltoniens de $X_{\mathbf{H}}$

$\mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow[X_{\mathbf{H}}]{X_{\mathbf{H}}} \mathcal{H}(T^*M)$ est un antihomomorphisme, i.e. :

$$[X_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{G}}] = -X_{\{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}} \in \mathcal{H}(T^*M) \text{ [49] }^{88}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & [X_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{G}}][\mathbf{F}] \triangleq X_{\mathbf{H}}[X_{\mathbf{G}}[\mathbf{F}]] - X_{\mathbf{G}}[X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}]] \\ & = \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} - \{\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}, \mathbf{G}\} \\ & = \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} + \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}, \mathbf{G}\}; \forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M). \end{aligned}$$

D'après l'identité de Jacobi on a donc :

$$\begin{aligned} & [X_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{G}}][\mathbf{F}] = -\{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}, \mathbf{F}\} = -\{\mathbf{F}, \{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}\} = -X_{\{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}}[\mathbf{F}]; \\ & \forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M). \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$[X_{\mathbf{H}}, X_{\mathbf{G}}] = -X_{\{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}} \in \mathcal{H}(T^*M) \text{ QED.}$$

Il y a l'action à gauche de $\mathcal{H}(T^*M)$ sur $\mathcal{F}(T^*M)$:

$$\mathcal{H}(T^*M) \times \mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow[X_{\mathbf{H}, \mathbf{F}}]{X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}]} \mathcal{F}(T^*M), \text{ avec :}$$

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}(v^*) = (X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}])(v^*) = (T_{v^*}\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}v^*}) \in \mathbb{R}; \forall v^* \in T^*M.$$

$$\text{Et on a } X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] = \mathcal{L}_{X_{\mathbf{H}}}\mathbf{F}.$$

3.17.12 Automorphisme de Poisson infinitésimal sur le fibré cotangent T^*M

On pourra consulter [49] ⁸⁹.

Un champ de vecteur $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M)$ satisfaisant la relation :

$\mathbf{X}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mathbf{X}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{X}[\mathbf{G}]\}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$ est appelé automorphisme de Poisson infinitésimal.

Soit $\mathcal{P}(T^*M) \triangleq \{\mathbf{X} \in \mathcal{X}(T^*M) \mid \mathbf{X}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mathbf{X}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{X}[\mathbf{G}]\}$ l'algèbre de Lie des automorphismes de Poisson infinitésimaux sur T^*M . C'est une sur algèbre de Lie de $\mathcal{H}(T^*M)$ car le champ de vecteur hamiltonien $X_{\mathbf{H}}$ de \mathbf{H} est un automorphisme de Poisson infinitésimal.

Démonstration

$X_{\mathbf{H}}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} = -\{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}, \mathbf{F}\} - \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}, \mathbf{G}\}$, d'après l'identité de Jacobi. Donc :

88. p. 333

89. p. 366 éq. (11.1.8)

$X_{\mathbf{H}}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}, \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}\} = \{X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, X_{\mathbf{H}}[\mathbf{G}]\}$
 QED.

Un automorphisme de Poisson infinitésimal n'est pas nécessairement un champ de vecteur hamiltonien

Démonstration

Nous en donnons un exemple ci-après (cf. Exemple B) QED.

On a donc $\mathcal{H}(T^*M) \subset \mathcal{P}(T^*M) \subset \mathcal{X}(T^*M)$.

3.18 Relèvement cotangent d'un champ de vecteurs

On pourra consulter [49]⁹⁰.

Le champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathcal{P}(X)}$ de $\mathcal{P}(X)$ sur T^*M ($X_{\mathcal{P}(X)} \in \mathcal{H}(T^*M)$) est appelé relèvement cotangent sur T^*M du champ de vecteurs X sur M ($X \in \mathcal{X}(M)$).

Soit $\mathcal{L}(T^*M)$ l'espace des applications différentielles :

$$T^*M \xrightarrow[\mathbf{v}^*]{\mathbf{F}} \mathbb{R}, \text{ qui sont linéaires sur les fibres de } T^*M.$$

Ainsi $\mathcal{L}(T^*M)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{F}(T^*M)$.

Lemme du commutateur des moments

Les algèbres de Lie :

- $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M , dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$ et

- $\mathcal{H}(T^*M)$ des champs de vecteurs hamiltoniens $X_{\mathbf{H}}$ ($\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$) sur T^*M , dotée du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, sont isomorphes.

De plus chacune de ces algèbres de Lie est anti-isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(T^*M)$, dotée du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. En particulier :

$$\{\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)\} = -\mathcal{P}([X, Y]); \text{ avec } X, Y \in \mathcal{X}(M) \text{ [49]}^{91}$$

Démonstration cf. [49]⁹².

90. p. 386

91. p. 384 Lemme 12.1.2 et éq (12.1.3)

92. pp. 384-385

Flots hamiltoniens et fonctions moments

Si le champ de vecteurs X sur M ($X \in \mathcal{X}(M)$) à pour flot $\{\theta_t\}$ alors le flot dit hamiltonien du champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathcal{P}(X)}$ sur T^*M est $\{T^*\theta_{-t}\}$ [49]⁹³

Démonstration cf. [49]⁹⁴.

Alors $X_x = \frac{d}{dt}|_{t=0} \theta_t(x)$ et $X_{\mathcal{P}(X)v^*} = \frac{d}{dt}|_{t=0} (T^*\theta_{-t})(v^*)$ [49]⁹⁵.

3.18.1 Équations du mouvement sous la forme d'un crochet de Poisson

On pourra consulter [49]⁹⁶.

Soient $\mathbf{F}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ et soit $\{\varphi_t\}$ le flot du champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathbf{H}}$ de \mathbf{H} . Soit $v_0^* = (x_0, v_{x_0}^*) \in T^*M$ quelconque avec $x_0 \in M$ et $v_{x_0}^* \in T_{x_0}^*M$; alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \circ \varphi_t(v_0^*))(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\varphi_t(v_0^*)) = \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \circ \varphi_t)(v_0^*) = (\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) \\ &= \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}(\varphi_t(v_0^*)) = \{\mathbf{F} \circ \varphi_t, \mathbf{H}\}(v_0^*) = \{\mathbf{F} \circ \varphi_t, \mathbf{H} \circ \varphi_t\}(v_0^*) \in \mathbb{R} \text{ [49]}^{97}, \text{ car :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} \circ \varphi_t = \mathbf{H}; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Et, en particulier, $\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t = \{\mathbf{F} \circ \varphi_t, \mathbf{H} \circ \varphi_t\} \in \mathcal{F}(T^*M)$; soit :

$\varphi_t \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} = \{\varphi_t \mathbf{F}, \varphi_t \mathbf{H}\} \in \mathcal{F}(T^*M)$. Mais on va généraliser ce résultat ci-après en remplaçant \mathbf{H} par $\mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$ quelconque.

Démonstrations

Soit $\varphi_t(v_0^*) \triangleq \varphi_t(v_0^*)(t)$; alors $(\mathbf{F} \circ \varphi_t(v_0^*))(t) = \mathbf{F}(\varphi_t(v_0^*)) = (\mathbf{F} \circ \varphi_t)(v_0^*)$ et :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{F} \circ \varphi_t(v_0^*))(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\varphi_t(v_0^*)) = \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \circ \varphi_t)(v_0^*).$$

• On a $\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}(v_0^*) = X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}](v_0^*) = (T_{v_0^*}\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}v_0^*})$ donc :

$$(\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}(\varphi_t(v_0^*)) = (T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}\varphi_t(v_0^*)}). \text{ Mais :}$$

◇ $X_{\mathbf{H}\varphi_t(v_0^*)} = \frac{d}{dt} \varphi_t(v_0^*)$ et donc :

$$(\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = (T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F})(\frac{d}{dt} \varphi_t(v_0^*)) \text{ et :}$$

93. p. 385 Proposition 12.1.3

94. pp. 385-386

95. p. 385 éq. (12.1.10)

96. pp. 334-335

97. p. 5 éq. (1.1.16), p. 8 éq. (1.2.11) pour le corps rigide et p. 9 exercice 1.2-3

◇ $X_{\mathbf{H}\varphi_t(v_0^*)} = (T_{v_0^*}\varphi_t)(X_{\mathbf{H}v_0^*})$ et donc :

$$\begin{aligned} (\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) &= (T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F})((T_{v_0^*}\varphi_t)(X_{\mathbf{H}v_0^*})) \\ &= ((T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F}) \circ (T_{v_0^*}\varphi_t))(X_{\mathbf{H}v_0^*}). \end{aligned}$$

• Étant donné que $\mathbb{R} \xrightarrow[\varphi_t(v_0^*)]{\varphi_t(v_0^*)} T^*M \xrightarrow[\mathbf{F}]{\mathbf{F}} \mathbb{R}$ on a, par la règle de dérivation composée :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\varphi_t(v_0^*)) = (T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F})\left(\frac{d}{dt} \varphi_t(v_0^*)\right); \text{ soit :}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\varphi_t(v_0^*)) = (\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*).$$

• Étant donné que $T^*M \xrightarrow[\varphi_t(v_0^*)]{\varphi_t} T^*M \xrightarrow[\mathbf{F}]{\mathbf{F}} \mathbb{R}$ on a, par la règle de composition :

$$T_{v_0^*}(\mathbf{F} \circ \varphi_t) = (T_{\varphi_t(v_0^*)}\mathbf{F}) \circ (T_{v_0^*}\varphi_t) \text{ et donc, d'après ce qui précède :}$$

$$(\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = (T_{v_0^*}(\mathbf{F} \circ \varphi_t))(X_{\mathbf{H}v_0^*}); \text{ soit :}$$

$$(\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = \{\mathbf{F} \circ \varphi_t, \mathbf{H}\}(v_0^*).$$

• Si on remplace \mathbf{F} par \mathbf{H} dans cette dernière expression on a :

$$0 = (\{\mathbf{H}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = \{\mathbf{H} \circ \varphi_t, \mathbf{H}\}(v_0^*); \forall v_0^* \in T^*M. \text{ Soit :}$$

$$\mathbf{H} \circ \varphi_t = \mathbf{H}; \forall t \in \mathbb{R} \text{ et :}$$

$$(\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v_0^*) = \{\mathbf{F} \circ \varphi_t, \mathbf{H} \circ \varphi_t\}(v_0^*) \text{ QED.}$$

Équations du mouvement sous forme d'un crochet de Poisson

Soit $v^*(t) = \varphi_t(v_0^*)$ avec $v^*(t) = (x(t), v_{x(t)}^*)$; $x(t) \in M$ et

$v_{x(t)}^*(t) \in T_{x(t)}^*M$ et posons $\bar{\mathbf{F}} \triangleq \mathbf{F} \circ \varphi_t(v_0^*)$. Alors on a, en particulier :

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}(t) = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}(v^*(t)) \in \mathbb{R}.$$

Ce sont les équations du mouvement sous la forme d'un crochet de Poisson⁹⁸.

Application de Poisson (ou canonique)

On pourra consulter [15]⁹⁹ et [49]¹⁰⁰.

98. ce que [49] note par abus de notation $\dot{\mathbf{F}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}$ p. 5 éq. (1.1.16) et p. 162 éq. (5.5.8)

99. p. 57

100. p. 339

Soient P_1 et P_2 deux variétés de Poisson et $\{, \}_1$ et $\{, \}_2$ les crochets de Poisson respectivement sur $\mathcal{F}(P_1)$ et $\mathcal{F}(P_2)$.

Soit $P_1 \xrightarrow{\mathbb{f}} P_2$ une application différentielle. On dit que \mathbb{f} est une application de Poisson (ou canonique) par rapport aux crochets de Poisson $\{, \}_1$ sur $\mathcal{F}(P_1)$ et $\{, \}_2$ sur $\mathcal{F}(P_2)$ ssi $\mathbb{f}^* \{F, G\}_2 = \{\mathbb{f}^* F, \mathbb{f}^* G\}_1; \forall F, G \in \mathcal{F}(P_2)$ ou, en d'autres termes :

$$\{F, G\}_2 \circ \mathbb{f} = \{F \circ \mathbb{f}, G \circ \mathbb{f}\}_1; \forall F, G \in \mathcal{F}(P_2).$$

En particulier soit $T^*M \xrightarrow{\mathbf{f}} T^*M$ une application différentielle. \mathbf{f} est une application de Poisson ssi $\mathbf{f}^* \{F, G\} = \{\mathbf{f}^* F, \mathbf{f}^* G\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(T^*M)$ ou, en d'autres termes :

$$\{F, G\} \circ \mathbf{f} = \{F \circ \mathbf{f}, G \circ \mathbf{f}\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Propriété du flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

On pourra consulter [49]¹⁰¹.

Si φ_t est le flot de $X_{\mathbf{H}}$ on a :

$\varphi_t \{F, G\} = \{\varphi_t F, \varphi_t G\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(T^*M)$ ou, en d'autres termes :

$\{F, G\} \circ \varphi_t = \{F \circ \varphi_t, G \circ \varphi_t\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(T^*M)$ i.e. φ_t est une application de Poisson.

On dit que les flots des champs de vecteurs hamiltoniens préservent la structure de Poisson.

Démonstration

Soit $\mathbf{K}(t) \triangleq \{F \circ \varphi_t, G \circ \varphi_t\} - \{F, G\} \circ \varphi_t \in \mathcal{F}(T^*M)$. On constate que $\mathbf{K}(0) = 0$. D'après l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{K}(t) &= \left\{ \frac{d}{dt} (F \circ \varphi_t), G \circ \varphi_t \right\} + \left\{ F \circ \varphi_t, \frac{d}{dt} (G \circ \varphi_t) \right\} - \frac{d}{dt} (\{F, G\} \circ \varphi_t) \\ &= \left\{ \left\{ F \circ \varphi_t, \mathbf{H} \right\}, G \circ \varphi_t \right\} + \left\{ F \circ \varphi_t, \left\{ G \circ \varphi_t, \mathbf{H} \right\} \right\} - \left\{ \left\{ F, G \right\} \circ \varphi_t, \mathbf{H} \right\} \\ &= \left\{ \left\{ F \circ \varphi_t, G \circ \varphi_t \right\}, \mathbf{H} \right\} - \left\{ \left\{ F, G \right\} \circ \varphi_t, \mathbf{H} \right\} = \left\{ \mathbf{K}(t), \mathbf{H} \right\} = X_{\mathbf{H}}(\mathbf{K}(t)). \end{aligned}$$

La seule solution de l'équation $\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t) = X_{\mathbf{H}}(\mathbf{K}(t))$ est $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(0) \circ \varphi_t$. Étant donné que $\mathbf{K}(0) = 0$ on a $\mathbf{K}(t) = 0; \forall t \in \mathbb{R}$ QED.

101. pp. 338-340 § 10.3

3.19 Exemples de crochets de Poisson

3.19.1 Exemple A : le crochet de Poisson canonique

Nous nous sommes placés dans le cas où la variété M est de dimension finie : $\dim(M) = n$. Alors $\dim(T^*M) = 2n$ et *localement* $T^*M \cong M \times T_x^*M$. Ce fibré cotangent T^*M peut donc être doté de coordonnées *locales* $q = (q_1, \dots, q_n)$ pour $x \in M$ et $p = (p_1, \dots, p_n)$ pour $v_x^* \in T_x^*M$, soit de coordonnées *locales* $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ pour $v^* \in T^*M$.

De même $\dim(TM) = 2n$ et *localement* $TM \cong M \times T_xM$. Ce fibré tangent TM peut donc être doté de coordonnées *locales* $q = (q_1, \dots, q_n)$ pour $x \in M$ et $v = (v_1, \dots, v_n) = \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ pour $v_x \in T_xM$, soit de coordonnées *locales* $(q, v) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ pour $v \in TM$. Soient :

$$\begin{aligned} T^*M &\xrightarrow{\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}} \mathbb{R} \\ (q, p) &\mapsto \mathbf{F}(q, p), \mathbf{G}(q, p), \mathbf{H}(q, p), \\ \\ T^*M &\xrightarrow{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i}} \mathbb{R} \quad : i = 1, \dots, n \text{ et } : \\ (q, p) &\mapsto \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i}(q, p), \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i}(q, p), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i}(q, p) \\ \\ T^*M &\xrightarrow{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}} \mathbb{R} \quad : i = 1, \dots, n. \\ (q, p) &\mapsto \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i}(q, p), \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i}(q, p), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}(q, p) \end{aligned}$$

Dans ces conditions T^*M devient une variété de Poisson en dotant $\mathcal{F}(T^*M)$ du crochet de Poisson $\{, \}_{\text{can}}$, dit canonique tel que :

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} \triangleq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} \right) \in T^*M \quad [49]^{102}.$$

Démonstration :

- Bilinéarité :

$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}}$ est bilinéaire en \mathbf{F} et \mathbf{G} ; c'est évident.

- Antisymétrie :

$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}}$ est antisymétrique : $\{\mathbf{G}, \mathbf{F}\}_{\text{can}} = -\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}}$; c'est évident.

- Identité de Jacobi :

$$\begin{aligned} &\{ \{ \mathbf{F}, \mathbf{G} \}_{\text{can}}, \mathbf{H} \}_{\text{can}} \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_j} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \right] \end{aligned}$$

102. p. 5 éq. (1.1.17) et p. 83 éq. (2.7.3)

et :

$$\begin{aligned} & \{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}_{\text{can}}, \mathbf{F}\}_{\text{can}} \\ = & \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_j} \right. \\ - & \left. \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_j} \right] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}_{\text{can}}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} \\ = & \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_j} \right. \\ - & \left. \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_j} \right]. \end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned} & \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}}, \mathbf{H}\}_{\text{can}} + \{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}_{\text{can}}, \mathbf{F}\}_{\text{can}} + \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}_{\text{can}}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} = 0; \\ \forall \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M) & \text{ car les termes s'annulent deux à deux.} \end{aligned}$$

• Identité de Liebniz :

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{F} \mathbf{G}, \mathbf{H}\}_{\text{can}} \triangleq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(\mathbf{F} \mathbf{G})}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial(\mathbf{F} \mathbf{G})}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right) \\ = & \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} \mathbf{F} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \mathbf{F} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right] \\ = & \mathbf{F} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right) + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right) \right] \mathbf{G} \\ = & \mathbf{F} \{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}_{\text{can}} + \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}_{\text{can}} \mathbf{G}. \end{aligned}$$

$$X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\}_{\text{can}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} \right), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} & X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] = (T.\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}}) \\ = & \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_n} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_n} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_n} \quad - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_1} \quad \dots \quad - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_n} \right)^T. \end{aligned}$$

Et, par conséquent :

$$X_{\mathbf{H}} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_n} \quad - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_1} \quad \dots \quad - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_n} \right)^T \quad [49]^{103}$$

Soit un système mécanique décrit par un lagrangien :

$$\begin{aligned} TM & \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathbb{R}, \\ (q, \dot{q}) & \mapsto \mathbf{L}(q, \dot{q}), \end{aligned}$$

Alors ce système mécanique est décrit, à partir de ce lagrangien $\mathbf{L}(q, \dot{q})$, par les n équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n.$$

Posons $p_i \triangleq \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}$; $i = 1, \dots, n$ que l'on qualifie de moments conjugués. Alors d'après les équations de Lagrange on a $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i}$; $i = 1, \dots, n$.

103. p. 12 éq. (1.3.9)

Faisons le changement de variables, souvent qualifié de transformation de Legendre [49]¹⁰⁴ :

$(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p)$. Le système mécanique peut maintenant être décrit par l'hamiltonien :

$$T^*M \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbb{R} \quad ; \text{ avec } \dot{q} = \dot{q}(q, p). \text{ Alors :}$$

$$(q, p) \longmapsto \mathbf{H}(q, p) \triangleq \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathbf{L}(q, \dot{q})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right) = \dot{q}_i, \text{ car } p_j = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j}. \text{ Et :}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i}, \text{ car } p_j = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_j} \text{ et finalement}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \text{ d'après les équations de Lagrange.}$$

Le système mécanique est donc décrit, à partir de l'hamiltonien $\mathbf{H}(q, p)$, par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}; i = 1, \dots, n$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_i}; i = 1, \dots, n \text{ [49]}^{105}.$$

3.19.2 Exemple B : un crochet de Poisson non canonique

Supposons que la variété M est de dimension un : $\dim(M) = 1$. Alors $\dim(T^*M) = 2$ et *localement* $T^*M \cong M \times T_x^*M$. Ce fibré cotangent T^*M peut donc être doté de coordonnées *locales* q pour $x \in M$ et p pour $v_x^* \in T_x^*M$, soit de coordonnées *locales* (q, p) pour $v^* \in T^*M$.

Dans ces conditions T^*M devient une variété de Poisson en dotant $\mathcal{F}(T^*M)$ du crochet de Poisson non canonique $\{, \}$, tel que :

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \triangleq q \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right) \in T^*M \text{ [49]}^{106}.$$

Démonstration :

- Bilinéarité :

$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ est bilinéaire en \mathbf{F} et \mathbf{G} ; c'est évident.

- Antisymétrie :

$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ est antisymétrique : $\{\mathbf{G}, \mathbf{F}\} = -\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$; c'est évident.

104. pp. 183-185 § 7.2

105. p. 4 éq. (1.1.13)

106. p. 344

- Identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}
& \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} + q \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q^2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \\
&- q \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p^2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p^2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right), \\
& \{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}, \mathbf{F}\} \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} + q \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \\
&- q \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p^2} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) \text{ et} \\
& \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}, \mathbf{G}\} \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} + q \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \\
&- q \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p^2} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \right).
\end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned}
& \{\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \mathbf{H}\} + \{\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}, \mathbf{F}\} + \{\{\mathbf{H}, \mathbf{F}\}, \mathbf{G}\} = 0; \\
& \forall \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M) \text{ car les termes s'annulent deux à deux.}
\end{aligned}$$

- Identité de Liebniz :

$$\begin{aligned}
& \{\mathbf{F} \mathbf{G}, \mathbf{H}\} \triangleq q \left(\frac{\partial(\mathbf{F} \mathbf{G})}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \frac{\partial(\mathbf{F} \mathbf{G})}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) \\
&= q \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \mathbf{F} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \mathbf{F} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right] \\
&= \mathbf{F} \left[q \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) \right] + \left[q \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) \right] \mathbf{G} \\
&= \mathbf{F} \{\mathbf{G}, \mathbf{H}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \mathbf{G}.
\end{aligned}$$

Donc $\{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \triangleq q \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} q \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \\ -q \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \end{array} \right)$. et par conséquent :

$$X_{\mathbf{H}} = \left(\begin{array}{c} q \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} \\ -q \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q} \end{array} \right).$$

Soit $\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$. \mathbf{X} n'est donc pas hamiltonien. Cependant :

$$\mathbf{X}[\mathbf{F}] = (T\mathbf{F})(\mathbf{X}) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}. \text{ Soit :}$$

$$\mathbf{X}[\mathbf{F}] = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \text{ et de même } \mathbf{X}[\mathbf{G}] = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \text{ et :}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{X}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \frac{\partial \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[q \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right) \right] \\
&= q \left[\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p^2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p^2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right] \text{ et :}
\end{aligned}$$

$$\{\mathbf{X}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}, \mathbf{G} \right\} = q \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial q \partial p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p^2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q} \right) \text{ et :}$$

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{X}[\mathbf{G}]\} = \left\{ \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \right\} = q \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p^2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial q \partial p} \right).$$

Par conséquent :

$\mathbf{X}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mathbf{X}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{X}[\mathbf{G}]\}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$. \mathbf{X} est un automorphisme de Poisson sans être un champ de vecteurs hamiltonien.

4 Le groupe de Lie G

On pourra consulter [1]¹⁰⁷, [4]¹⁰⁸, [10]¹⁰⁹, [19]¹¹⁰, [23]¹¹¹, [38]¹¹², [46]¹¹³, [49]¹¹⁴, [51]¹¹⁵, [52]¹¹⁶, [56], [69]¹¹⁷, [70]¹¹⁸, [75]¹¹⁹ et [76].

Un groupe de Lie G est une variété différentielle, ayant une structure de groupe dont l'opération m , notée multiplicativement \cdot , est différentiable :

$$G \times G \xrightarrow{m} G \\ (g, h) \longmapsto m(g, h) \triangleq g \cdot h$$

Alors l'application d'inversion i :

$$G \xrightarrow{i} G \text{ est différentiable.} \\ g \longmapsto i(g) \triangleq g^{-1}$$

Soit alors G un groupe de Lie dont l'élément neutre est noté e et soient g, h, k des éléments de G .

4.1 Difféomorphismes du groupe sur lui-même

Considérons un difféomorphisme f de G sur G : $G \xrightarrow{f} G$.
 $g \longmapsto k=f(g)$

Alors f^{-1} est un difféomorphisme de G sur G : $G \xrightarrow{f^{-1}} G$.
 $k \longmapsto g=f^{-1}(k)$

4.2 Sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie G

C'est un homomorphisme différentiel :

-
- 107. pp. 253-276 § 4.1 Lie group and group action
 - 108. pp. 318-342 Appendix 2. Geodesics of left-invariant metrics on Lie groups and the hydrodynamics of ideal fluids
 - 109. pp. 81-89 Chapitre III § 6
 - 110. p. 6, pp. 16-17 et pp. 154-163 § 7, 8, 9, 10
 - 111. pp. 28-36 Chapitre I § 3
 - 112. pp. 138-143 § 6 A
 - 113. pp. 156-254 Chapitre III
 - 114. pp. 265-326 Ch. 9. An Introduction to Lie Group. En particulier : pp. 309-326 § 9.3 Actions of Lie Group
 - 115. pp. 408-416 § 2 Lie Groups
 - 116. pp. 139-182 Chapitre III
 - 117. pp. 225-239 § 5
 - 118. pp. 164-177 § 15
 - 119. p. 1074 Lie Group p. 1073 Lie Algebra

$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} G$, ce qui signifie que γ est une application différentielle telle que $t \mapsto \gamma(t)$.
 $\gamma(t+s) = \gamma(t) \cdot \gamma(s) = \gamma(s) \cdot \gamma(t) = \gamma(s+t)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Alors $\gamma(0) = e$ et $\gamma(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de G .

4.3 La translation à gauche L_h

Elle est parfois notée l_h ou γ_h . La translation à gauche est une conception lagrangienne. Le terme “translation” se réfère à une conception additive de l’opération \cdot ; il vaudrait mieux utiliser le terme “multiplication” avec une conception multiplicative de l’opération \cdot du groupe.

4.3.1 Définition

$$G \xrightarrow{L_h} G \quad . \\ g \mapsto L_h(g) \triangleq h \cdot g$$

4.3.2 Propriétés

* $L_h(e) = h$,

* $G \xrightarrow{L_{h_1}} G \xrightarrow{L_{h_2}} G$ est identique à $G \xrightarrow{L_{h_2 \cdot h_1}} G$; donc :

$$L_{h_2} \circ L_{h_1} = L_{h_2 \cdot h_1},$$

* $L_e = \text{id}$,

* $G \xrightarrow{L_h^{-1}} G$ et $G \xrightarrow{L_h^{-1}} G$; donc :

$$L_h^{-1} = L_{h^{-1}},$$

* L_h est un difféomorphisme.

4.4 La translation à droite R_h

Elle est parfois notée r_h ou δ_h . La translation à droite est une conception eulerienne.

4.4.1 Définition

$$G \xrightarrow{R_h} G \quad . \\ g \mapsto R_h(g) \triangleq g \cdot h$$

4.4.2 Propriétés

$$* R_h(e) = h,$$

$$* G \xrightarrow{R_{h_1}} G \xrightarrow{R_{h_2}} G \text{ est identique à } G \xrightarrow{R_{h_1 \cdot h_2}} G; \text{ donc :}$$

$$g \mapsto g \cdot h_1 \mapsto g \cdot h_1 \cdot h_2 \quad g \mapsto g \cdot h_1 \cdot h_2$$

$$R_{h_2} \circ R_{h_1} = R_{h_1 \cdot h_2},$$

$$* R_e = \text{id},$$

$$* G \xrightarrow{R_h^{-1}} G \text{ et } G \xrightarrow{R_{h^{-1}}} G; \text{ donc :}$$

$$g \cdot h \mapsto g = (g \cdot h) \cdot h^{-1} \quad g \cdot h \mapsto (g \cdot h) \cdot h^{-1} = g$$

$$R_h^{-1} = R_{h^{-1}},$$

* R_h est un difféomorphisme.

4.5 Propriété mixte

$$G \xrightarrow{L_h} G \xrightarrow{R_k} G \text{ et } G \xrightarrow{R_k} G \xrightarrow{L_h} G; \text{ donc :}$$

$$g \mapsto h \cdot g \mapsto h \cdot g \cdot k \quad g \mapsto g \cdot k \mapsto h \cdot g \cdot k$$

$$R_k \circ L_h = L_h \circ R_k; L_h \text{ et } R_k \text{ commutent } \forall h \in G \text{ et } \forall k \in G.$$

4.6 L'automorphisme intérieur I_h

On pourra consulter [30]¹²⁰.

Il est parfois noté int_h . Il s'agit d'un automorphisme de G .
Donc $I_h \in \text{Int}(G) \subset \text{Aut}(G)$, comme nous allons le montrer où $\text{Int}(G)$ est le groupe des automorphismes intérieurs et $\text{Aut}(G)$, le groupe de tous les automorphismes de G .

$$G \xrightarrow{I_h} G$$

$$g \mapsto I_h(g) \triangleq h \cdot g \cdot h^{-1}.$$

Puisque L_h et $R_{h^{-1}}$ commutent :

$$G \xrightarrow{L_h} G \xrightarrow{R_{h^{-1}}} G \text{ et}$$

$$g \mapsto h \cdot g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$$

$$G \xrightarrow{R_{h^{-1}}} G \xrightarrow{L_h} G, \text{ on a :}$$

$$g \mapsto g \cdot h^{-1} \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1},$$

$$I_h \triangleq R_{h^{-1}} \circ L_h \text{ ou } I_h \triangleq L_h \circ R_{h^{-1}}.$$

120. p. 130 exemple 16

4.6.1 Propriété de I_h

$$\begin{aligned} * I_h(g_1 \cdot g_2) &\triangleq h \cdot (g_1 \cdot g_2) \cdot h^{-1} = h \cdot g_1 \cdot (h^{-1} \cdot h) \cdot g_2 \cdot h^{-1} \\ &= (h \cdot g_1 \cdot h^{-1}) \cdot (h \cdot g_2 \cdot h^{-1}) = I_h(g_1) \cdot I_h(g_2); \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$I_h(g_1 \cdot g_2) = I_h(g_1) \cdot I_h(g_2).$$

4.6.2 Propriétés de l'ensemble des I_h

$$\begin{aligned} * (I_{h_1} \circ I_{h_2})(g) &= I_{h_1}((I_{h_2})(g)) = I_{h_1}(h_2 \cdot g \cdot h_2^{-1}) = h_1 \cdot (h_2 \cdot g \cdot h_2^{-1}) \cdot h_1^{-1} \\ &= (h_1 \cdot h_2) \cdot g \cdot (h_1 \cdot h_2)^{-1} = I_{h_1 \cdot h_2}(g); \forall g \in G \text{ donc } I_{h_1} \circ I_{h_2} = I_{h_1 \cdot h_2}. \end{aligned}$$

$$* I_e(g) = g; \text{ donc } I_e = \text{id}.$$

$$\begin{aligned} * \text{ Soit } k &\triangleq I_h(k) \triangleq h \cdot k \cdot h^{-1}. \text{ Alors :} \\ I_{h^{-1}}(k) &\triangleq h^{-1} \cdot k \cdot h \text{ et } I_h^{-1}(k) = h^{-1} \cdot k \cdot h. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$I_h^{-1} = I_{h^{-1}} = R_h \circ L_{h^{-1}} = L_{h^{-1}} \circ R_h \text{ et } I_h \text{ est inversible.}$$

Donc $\text{Int}(G)$ l'ensemble des I_h ; $h \in G$ est un groupe et c'est un sous groupe du groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphisme intérieurs.

Remarque : si $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n , h peut être représenté par une matrice \tilde{h} réelle régulière d'ordre n et alors $\widetilde{I_h(g)} = \tilde{h} \tilde{g} \tilde{h}^{-1} = \tilde{h} \tilde{g} \tilde{h}^{-1}$.

5 Les espaces tangents au groupe de Lie G et en particulier l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et les applications tangentes (ou différentielles), en un point

Soient $T_g G$ l'espace tangent, en g , au groupe de Lie G et donc $\mathfrak{g} \triangleq T_e G$ l'espace tangent, en e ; ce sont deux espaces vectoriels, mais $T_g G$ n'a pas de bonnes propriétés alors que \mathfrak{g} en a.

On verra que \mathfrak{g} peut être dotée d'un crochet de Lie qui en fera une algèbre de Lie appelée algèbre de Lie du groupe de Lie G .

Soient $v_g \in T_g G$, $w_h \in T_h G$, $u_k \in T_k G$, $a_{g,h} \in T_{g \cdot h} G$ et $b_{h,g} \in T_{h \cdot g} G$ et en particulier $\dot{g} = \frac{dg}{dt} \in T_g G$, $\dot{h} = \frac{dh}{dt} \in T_h G$, $\frac{d(g \cdot h)}{dt} \in T_{g \cdot h} G$ et $\frac{d(h \cdot g)}{dt} \in T_{h \cdot g} G$.

Dans \mathfrak{g} on va considérer les éléments suivants :

- σ, σ' (génériques et indépendants),
- pour une conception à gauche : μ, μ' (génériques et indépendants) et $\zeta, \theta, \delta, \xi, \chi$ (particuliers) et
- pour une conception à droite : ν, ν' (génériques et indépendants) et $\alpha, \beta, \varepsilon, \eta, \kappa$ (particuliers).

L'espace vectoriel \mathfrak{g} étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}) = n$ on va y choisir une base e_1, \dots, e_n et on va représenter chacun de ses éléments par la matrice colonne (donc de dimension $n \times 1$), notée $\llbracket \cdot \rrbracket$, de ses composantes dans cette base. Ainsi si $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i$ on a $\llbracket \sigma \rrbracket \triangleq (\sigma_1 \dots \sigma_n)^T$ et de même pour les autres éléments de \mathfrak{g} .

5.1 Application tangente, ou différentielle, en un point, à un difféomorphisme

Étant donné que $G \xrightarrow{f} G$ l'application tangente, ou différentielle, $T_g f$, au point g , au difféomorphisme f , est une application *linéaire* de l'espace tangent $T_g G$ à G , au point g , sur l'espace tangent $T_k G$ à G , au point k :

$$T_g G \xrightarrow{T_g f} T_k G \quad ; \quad T_g f \in L(T_g G; T_k G).$$

$$v_g \longmapsto u_k = (T_g f)(v_g)$$

La définition de $T_g f$ a été donnée précédemment dans le cas de variétés quelconques.

5.2 Les applications tangentées, en un point, aux translations à gauche

En mécanique ces applications sont utiles pour les vitesses.

Étant donné que $G \xrightarrow{L_h} G$ on a :

$$T_g G \xrightarrow{v_g} T_{h \cdot g} G \quad \text{et, en particulier} \quad T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} T_h G .$$

Rappel : si $\mathbb{R} \xrightarrow{c} G$ est une courbe différentielle de G avec $c(0) = g$ et $\frac{d}{dt}|_{t=0} c(t) = v_g$ alors $b_{h \cdot g} = (T_g L_h)(v_g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} L_h(c(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (h \cdot c(t))$.

On a vu que $G \xrightarrow{L_{h_1}} G \xrightarrow{L_{h_2}} G$ est identique à $G \xrightarrow{L_{h_2 \cdot h_1}} G$ et par conséquent :

$T_g G \xrightarrow{T_g L_{h_1}} T_{h_1 \cdot g} G \xrightarrow{T_{h_1 \cdot g} L_{h_2}} T_{h_2 \cdot h_1 \cdot g} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g L_{h_2 \cdot h_1}} T_{h_2 \cdot h_1 \cdot g} G$; soit :

$$T_g L_{h_2 \cdot h_1} = (T_{h_1 \cdot g} L_{h_2}) \circ (T_g L_{h_1}) .$$

* En particulier si $h_1 = g^{-1}$ et $h_2 = g$:

$\text{id} = T_g L_e = (T_e L_g) \circ (T_g L_{g^{-1}})$ et par conséquent :

$$\diamond T_g G \xrightarrow{v_g} T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\zeta} T_g G .$$

ζ est la composante lagrangienne de v_g ou composante dans le corps ou composante à gauche [4]¹²¹ et [51]¹²².

$$\diamond T_g G \xrightarrow{v'_g} T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\theta} T_g G .$$

θ est la composante lagrangienne de v'_g ou composante dans le corps ou composante à gauche.

Cas particulier : soit $\xi \triangleq (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$ alors $\dot{g} = (T_e L_g)(\xi)$.

121. p. 323

122. p. 419

5.3 Les applications tangentes, en un point, aux translations à droite

En mécanique ces applications sont utiles pour les vitesses.

Étant donné que $G \xrightarrow{R_h} G$ on a :

$$T_g G \xrightarrow{v_g} T_{g \cdot h} G \quad \text{et, en particulier} \quad T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} T_h G \quad .$$

Rappel : si $\mathbb{R} \xrightarrow{c} G$ est une courbe différentielle avec $c(0) = g$ et $\frac{d}{dt}|_{t=0} c(t) = v_g$ alors $a_{g \cdot h} = (T_g R_h)(v_g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} R_h(c(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (c(t) \cdot h)$.

On a vu que $G \xrightarrow{R_{h_1}} G \xrightarrow{R_{h_2}} G$ est identique à $G \xrightarrow{R_{h_1 \cdot h_2}} G$ et par conséquent :

$T_g G \xrightarrow{T_g R_{h_1}} T_{g \cdot h_1} G \xrightarrow{T_{g \cdot h_1} R_{h_2}} T_{g \cdot h_1 \cdot h_2} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g R_{h_1 \cdot h_2}} T_{g \cdot h_1 \cdot h_2} G$; soit :

$$T_g R_{h_1 \cdot h_2} = (T_{g \cdot h_1} R_{h_2}) \circ (T_g R_{h_1}).$$

* En particulier si $h_1 = g^{-1}$ et $h_2 = g$:

$\text{id} = T_g R_e = (T_e R_g) \circ (T_g R_{g^{-1}})$ et par conséquent :

$$\diamond T_g G \xrightarrow{v_g} T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{v_g} T_g G \quad .$$

α est la composante eulérienne de v_g ou composante dans l'espace ou composante à droite [4]¹²³ et [51]¹²⁴.

$$\diamond T_g G \xrightarrow{v'_g} T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{v'_g} T_g G \quad .$$

β est la composante eulérienne de v'_g ou composante dans l'espace ou composante à droite.

Cas particulier : soit $\eta \triangleq (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$ alors $\dot{g} = (T_e R_g)(\eta)$.

123. p. 323

124. p. 419

5.4 Les applications tangentes, en un point, aux compositions de translations à gauche et à droite

On a vu que $G \xrightarrow[g \mapsto h \cdot g]{L_h} G \xrightarrow[h \cdot g \cdot k]{R_k} G$ est identique à $G \xrightarrow[g \mapsto h \cdot g \cdot k]{R_k \circ L_h} G$ donc :

$T_g G \xrightarrow{T_g L_h} T_{h \cdot g} G \xrightarrow{T_{h \cdot g} R_k} T_{h \cdot g \cdot k} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g (R_k \circ L_h)} T_{h \cdot g \cdot k} G$ donc :

$$T_g (R_k \circ L_h) = (T_{h \cdot g} R_k) \circ (T_g L_h).$$

* En particulier si $k = h^{-1}$:

$$T_g I_h = (T_{h \cdot g} R_{h^{-1}}) \circ (T_g L_h) \text{ et si, de plus } g = e \text{ on a :}$$

$$T_e I_h = (T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h).$$

On a vu également que $G \xrightarrow[g \mapsto g \cdot k]{R_k} G \xrightarrow[h \cdot g \cdot k]{L_h} G$ est identique à $G \xrightarrow[g \mapsto h \cdot g \cdot k]{L_h \circ R_k} G$ donc :

$T_g G \xrightarrow{T_g R_k} T_{g \cdot k} G \xrightarrow{T_{g \cdot k} L_h} T_{h \cdot g \cdot k} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g (L_h \circ R_k)} T_{h \cdot g \cdot k} G$ donc :

$$T_g (L_h \circ R_k) = (T_{g \cdot k} L_h) \circ (T_g R_k).$$

* En particulier si $k = h^{-1}$:

$$T_g I_h = (T_{g \cdot h^{-1}} L_h) \circ (T_g R_{h^{-1}}) \text{ et si, de plus } g = e \text{ on a :}$$

$$T_e I_h = (T_{h^{-1}} L_h) \circ (T_e R_{h^{-1}}).$$

5.5 Les applications tangentes, en un point, aux automorphismes intérieurs

Étant donné que $G \xrightarrow[g \mapsto I_h(g)=h \cdot g \cdot h^{-1}]{I_h} G$ on vient de voir que :

$$T_g G \xrightarrow[v_g \mapsto (T_g I_h)(v_g)=(T_{h \cdot g} R_{h^{-1}})((T_g L_h)(v_g))=(T_{g \cdot h^{-1}} L_h)((T_g R_{h^{-1}})(v_g))]{T_g I_h} T_{h \cdot g \cdot h^{-1}} G$$

5.5.1 Les opérateurs adjoints Ad_h

On pourra consulter [1]¹²⁵, [4]¹²⁶ et [49]¹²⁷.

125. pp. 267-268

126. pp. 319-320

127. p. 311

Étant donné que $G \xrightarrow[e]{I_h} G$ on a :

$$T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow[\mu]{T_e I_h} T_e G = \mathfrak{g} ; T_e I_h \in L(\mathfrak{g} ; \mathfrak{g}).$$

On pose $\text{Ad}_h \triangleq T_e I_h ; \forall h \in G$ et on dit que Ad_h est l'opérateur adjoint .

Étant donné que $I_h \triangleq R_{h^{-1}} \circ L_h \triangleq L_h \circ R_{h^{-1}}$ on a, d'après ce qui précède :

$$\text{Ad}_h = (T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h) = (T_{h^{-1}} L_h) \circ (T_e R_{h^{-1}}) \text{ [49]}^{128}. \text{ Donc :}$$

$$\diamond \text{Ad}_h(\mu) = (T_h R_{h^{-1}})((T_e L_h)(\mu)) = (T_{h^{-1}} L_h)((T_e R_{h^{-1}})(\mu)) = \nu \text{ et,}$$

$$\diamond \text{Ad}_h(\mu') = (T_h R_{h^{-1}})((T_e L_h)(\mu')) = (T_{h^{-1}} L_h)((T_e R_{h^{-1}})(\mu')) = \nu'.$$

Et particulier :

$$\diamond \text{Ad}_g(\zeta) = (T_g R_{g^{-1}})((T_e L_g)(\zeta)) = (T_g R_{g^{-1}})(v_g) = \alpha.$$

$$\diamond \text{Ad}_g(\theta) = (T_g R_{g^{-1}})((T_e L_g)(\theta)) = (T_g R_{g^{-1}})(v'_g) = \beta.$$

$$\diamond \text{Ad}_g(\xi) = (T_g R_{g^{-1}})((T_e L_g)(\xi)) = (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g}) = \eta.$$

Propriétés

$$* \text{Ad}_{h_1} \circ \text{Ad}_{h_2} = \text{Ad}_{h_1 \cdot h_2}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{h_1} \circ \text{Ad}_{h_2} &= [(T_{h_1} R_{h_1^{-1}}) \circ (T_e L_{h_1})] \circ [(T_{h_2^{-1}} L_{h_2}) \circ (T_e R_{h_2^{-1}})] \\ &= (T_{h_1} R_{h_1^{-1}}) \circ [(T_e L_{h_1}) \circ (T_{h_2^{-1}} L_{h_2})] \circ (T_e R_{h_2^{-1}}) \\ &= (T_{h_1} R_{h_1^{-1}}) \circ (T_{h_2^{-1}} L_{h_1 \cdot h_2}) \circ (T_e R_{h_2^{-1}}) \\ &= [(T_{h_1} R_{h_1^{-1}}) \circ (T_{h_2^{-1}} L_{h_1 \cdot h_2})] \circ (T_e R_{h_2^{-1}}) \\ &= [(T_{(h_1 \cdot h_2)^{-1}} L_{h_1 \cdot h_2}) \circ (T_{h_2^{-1}} R_{h_1^{-1}})] \circ (T_e R_{h_2^{-1}}) \\ &= (T_{(h_1 \cdot h_2)^{-1}} L_{h_1 \cdot h_2}) \circ [(T_{h_2^{-1}} R_{h_1^{-1}}) \circ (T_e R_{h_2^{-1}})] \\ &= (T_{(h_1 \cdot h_2)^{-1}} L_{h_1 \cdot h_2}) \circ [(T_e R_{(h_1 \cdot h_2)^{-1}})] = \text{Ad}_{h_1 \cdot h_2} \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\text{Ad}_{h_1} \circ \text{Ad}_{h_2} = \text{Ad}_{h_1 \cdot h_2} \text{ QED.}$$

$$* \text{Ad}_h^{-1} = \text{Ad}_{h^{-1}} = T_e I_{h^{-1}}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Ad}_h^{-1} &= [(T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h)]^{-1} = (T_e L_h)^{-1} \circ (T_h R_{h^{-1}})^{-1} \\ &= (T_h L_{h^{-1}}) \circ (T_e R_h) = \text{Ad}_{h^{-1}} \text{ (ou } \text{Ad}_h^{-1} = (T_{h^{-1}} R_h) \circ (T_e L_{h^{-1}}) = \text{Ad}_{h^{-1}}) \\ &\text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\text{Ad}_h^{-1} = \text{Ad}_{h^{-1}} = T_e I_{h^{-1}} \text{ QED.}$$

128. p. 275 pour la dernière égalité

Donc $\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu) = \mu$, $\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu') = \mu'$.

Et, en particulier :

$\text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha) = \zeta$, $\text{Ad}_{g^{-1}}(\beta) = \theta$ et $\text{Ad}_{g^{-1}}(\eta) = \xi$.

* $\text{Ad}_e = \text{id}_{\text{GL}(\mathfrak{g})}$

Démonstration

$\text{Ad}_h \circ \text{Ad}_e = \text{Ad}_e \circ \text{Ad}_h = \text{Ad}_h$. Donc $\text{Ad}_e = \text{id}_{\text{GL}(\mathfrak{g})}$ QED.

Finalement $\text{Ad}_h \in \text{GL}(\mathfrak{g})$ où $\text{GL}(\mathfrak{g})$ est un groupe linéaire, ayant pour unité $\text{Ad}_e = \text{id}_{\text{GL}(\mathfrak{g})}$.

L'espace vectoriel \mathfrak{g} étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}) = n$ soit $[[\text{Ad}_h]]$ la matrice carrée, d'ordre n (donc de dimension $n \times n$) qui représente Ad_h dans la base e_1, \dots, e_n . Alors $[[\text{Ad}_{h^{-1}}]] = [[\text{Ad}_h]]^{-1}$ et on a les égalités matricielles :

$$[[\nu]] = [[\text{Ad}_h]] [[\mu]] \text{ et } [[\mu]] = [[\text{Ad}_h]]^{-1} [[\nu]].$$

Soit $[[\text{Ad}_h]]_{ij}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $[[\text{Ad}_h]]$ alors on a $\nu_i = (\text{Ad}_h(\mu))_i = \sum_{j=1}^n [[\text{Ad}_h]]_{ij} \mu_j$.

5.6 L'application tangente, en un couple de points, à l'opération m du groupe G

Étant donné que $G \times G \xrightarrow{m} G$ on montre que :

$$T_g G \times T_h G \xrightarrow{T_{(g,h)} m} T_{g \cdot h} G \quad [49]^{129}.$$

$(v_g, w_h) \mapsto (T_{(g,h)} m)(v_g, w_h) \hat{=} (T_h L_g)(w_h) + (T_g R_h)(v_g)$

5.7 L'application tangente, en un point, à l'inversion i du groupe G

Étant donné que $G \xrightarrow{i} G$ on montre que :

$$T_g G \xrightarrow{T_g i} T_{g^{-1}} G \quad [49]^{130}. \text{ Donc :}$$

$v_g \mapsto (T_g i)(v_g) \hat{=} -((T_e R_{g^{-1}}) \circ (T_g L_{g^{-1}}))(v_g) = -((T_e L_{g^{-1}}) \circ (T_g R_{g^{-1}}))(v_g)$

$$T_g i = -(T_e R_{g^{-1}}) \circ (T_g L_{g^{-1}}) = -(T_e L_{g^{-1}}) \circ (T_g R_{g^{-1}}).$$

Remarque : $(T_g i)(v_g) = -(T_e R_{g^{-1}})(\zeta) = -(T_e L_{g^{-1}})(\alpha)$.

129. p. 270 éq. (9.1.2)

130. p. 271 éq. (9.1.3) pour la première égalité

5.8 Le fibré tangent TG et les opérations tangentes Tf , TL_h , TR_h , TI_h , Tm et Ti

Un pourra consulter [49] ¹³¹.

5.8.1 Définition

$TG \triangleq \bigcup_{g \in G} T_g G$, où \bigcup est une union disjointe. Soient $v, w, a, b \in TG$.

$T_g G$ est la fibre au dessus de g .

Soit τ_G la projection canonique (souvent appelée pied) de TG sur G . Si $v \in TG$ alors $v = (g, v_g)$, avec $g \triangleq \tau_G(v)$ et $v_g \in T_g G$.

En fait, G étant un groupe de Lie, on peut trivialisier TG car $TG \cong G \times \mathfrak{g}$ (cf. ci-après) [35] ¹³².

5.8.2 Définition de Tf

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{Tf} & TG \\ v=(g, v_g) & \mapsto & u=(Tf)(v) \triangleq (f(g), (T_g f)(v_g)) = (k, u_k) \end{array} .$$

5.8.3 Définition de TL_h

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TL_h} & TG \\ v=(g, v_g) & \mapsto & b=(TL_h)(v) \triangleq (L_h(g), (T_g L_h)(v_g)) = (h \cdot g, b_{h \cdot g}) \end{array} .$$

5.8.4 Définition de TR_h

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TR_h} & TG \\ v=(g, v_g) & \mapsto & a=(TR_h)(v) \triangleq (R_h(g), (T_g R_h)(v_g)) = (g \cdot h, a_{g \cdot h}) \end{array} .$$

5.8.5 Définition de TI_h

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TI_h} & TG \\ v=(g, v_g) & \mapsto & (TI_h)(v) \triangleq (I_h(g), (T_g I_h)(v_g)) \end{array} \text{ avec :}$$

$$I_h(g) = h \cdot g \cdot h^{-1} \text{ et}$$

$$(T_g I_h)(v_g) = ((T_{h \cdot g} R_{h^{-1}}) \circ (T_g L_h))(v_g) = ((T_{g \cdot h^{-1}} L_h) \circ (T_g R_{h^{-1}}))(v_g).$$

5.8.6 Définition de Tm

$$\begin{array}{ccc} TG \times TG & \xrightarrow{Tm} & TG \\ (v, w) = ((g, v_g), (h, w_h)) & \mapsto & (Tm)((v, w)) \triangleq (m(g, h), (T_{(g, h)} m)(v_g, w_h)) = (g \cdot h, (T_h L_g)(w_h) + (T_g R_h)(v_g)) \end{array} .$$

131. p. 123

132. p. 7

5.8.7 Définition de Ti

$$TG \xrightarrow{Ti} TG \\ v \mapsto (Ti)(v) \triangleq (i(g), (T_g i)(v_g)) = (g^{-1}, -(T_e R_{g^{-1}})(\zeta)) = (g^{-1}, -(T_e L_{g^{-1}})(\alpha)).$$

5.9 Les champs de vecteurs X sur G

Ce sont les applications suivantes ; supposées différentielles :

$$G \xrightarrow{X} TG \\ g \mapsto X(g) = (g, X_g) \text{ avec } X_g \in T_g(G).$$

Alors $X \in \mathcal{X}(G)$, ensemble des champs de vecteurs sur G . On a vu que $\mathcal{X}(G)$ est une algèbre et que dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$ c'est une algèbre de Lie.

5.9.1 Images des champs de vecteurs par la translation à gauche L_h

Image réciproque $L_h^* Y$ de Y par L_h

On a vu que L_h^* est l'image réciproque du difféomorphisme L_h .

Soit Y un champ de vecteurs sur G ($Y \in \mathcal{X}(G)$) on lui associe le champ de vecteurs $X = L_h^* Y$ sur G ($X \in \mathcal{X}(G)$) tel que :

$$X = L_h^* Y \triangleq (TL_h^{-1}) \circ Y \circ L_h = (TL_h)^{-1} \circ Y \circ L_h. \text{ Alors :}$$

$$(TL_h) \circ X = Y \circ L_h \text{ et } X = L_h^* Y \text{ et } Y \text{ sont en } L_h \text{ relation.}$$

Image directe $L_{h*} X$ de X par L_h

On a vu que L_{h*} est l'image directe du difféomorphisme L_h .

Soit X un champ de vecteurs sur G ($X \in \mathcal{X}(G)$) on lui associe le champ de vecteurs $Y = L_{h*} X$ sur G ($Y \in \mathcal{X}(G)$) tel que :

$$Y = L_{h*} X \triangleq (TL_h) \circ X \circ L_h^{-1}. \text{ Alors :}$$

$$Y \circ L_h = (TL_h) \circ X \text{ et } X \text{ et } Y = L_{h*} X \text{ sont en } L_h \text{ relation.}$$

Relations entre les images réciproque et directe du difféomorphisme L_h

$$(L_{h^{-1}})^* = (L_h^{-1})^* = L_{h*} \text{ et } (L_{h^{-1}})_* = (L_h^{-1})_* = L_h^*.$$

5.9.2 Images des champs de vecteurs par la translation à droite R_h

Image réciproque $R_h^* Y$ de Y par R_h

On a vu que R_h^* est l'image réciproque du difféomorphisme R_h .

Soit Y un champ de vecteurs sur G ($Y \in \mathcal{X}(G)$) on lui associe le champ de vecteurs $X = R_h^* Y$ sur G ($X \in \mathcal{X}(G)$) tel que :

$$X = R_h^* Y \triangleq (TR_h^{-1}) \circ Y \circ R_h = (TR_h)^{-1} \circ Y \circ R_h. \text{ Alors :}$$

$$TR_h \circ X = Y \circ R_h \text{ et } X = R_h^* Y \text{ et } Y \text{ sont en } R_h \text{ relation.}$$

Image directe $R_{h*} X$ de X par R_h

On a vu que R_{h*} est l'image directe du difféomorphisme R_h .

Soit X un champ de vecteurs sur G ($X \in \mathcal{X}(G)$) on lui associe le champ de vecteurs $Y = R_{h*} X$ sur G ($Y \in \mathcal{X}(G)$) tel que :

$$Y = R_{h*} X \triangleq (TR_h) \circ X \circ R_h^{-1}. \text{ Alors :}$$

$$Y \circ R_h = (TR_h) \circ X \text{ et } X \text{ et } Y = R_{h*} X \text{ sont en } R_h \text{ relation.}$$

Relations entre les images réciproque et directe du difféomorphisme R_h

$$(R_{h^{-1}})^* = (R_h^{-1})^* = R_{h*} \text{ et } (R_{h^{-1}})_* = (R_h^{-1})_* = R_h^*.$$

5.9.3 Les champs de vecteurs invariants à gauche

Les champs de vecteurs X^L invariants à gauche sont tels que $L_h^* X^L = X^L$ [49]¹³³ et/ou $L_{h*} X^L = X^L$; $\forall h \in G$ [1]¹³⁴ et [51]¹³⁵. Alors $X^L \in \mathcal{X}_L(G)$, ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche. $\mathcal{X}_L(G)$ est une sous algèbre de $\mathcal{X}(G)$.

Alors $TL_h \circ X^L = X^L \circ L_h$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_h} & G \\ \begin{array}{c} g \\ X^L \downarrow \\ TG \\ X^L(g) \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \\ TL_h \circ X^L \\ \searrow \\ \xrightarrow{TL_h} \\ X^L \circ L_h \end{array} & \begin{array}{c} h \cdot g \\ \downarrow X^L \\ TG \\ (TL_h)(X^L(g)) = X^L(h \cdot g) \end{array} \end{array}$$

On a donc $(TL_h)(X^L(g)) = X^L(h \cdot g) \in TG$ ou $(T_g L_h)(X_g^L) = X_{h \cdot g}^L \in T_{h \cdot g} G$; $\forall h \in G$; $\forall g \in G$; ssi $X^L \in \mathcal{X}_L(G)$.

Courbe intégrale du champ de vecteurs X^L invariant à gauche

La courbe intégrale du champ de vecteurs X^L invariant à gauche ($X^L \in \mathcal{X}_L(G)$), avec la condition initiale g à $t = 0$, est la courbe différentielle $\theta^L(g)$:

133. p. 269

134. p. 254

135. p. 410

$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta^L(g)} G$, telle que :

$$\frac{d}{dt} \theta_t^L(g) = X_{\theta_t^L(g)}^L = (T_g \theta_t^L)(X_g^L) \in T_{\theta_t^L(g)} G \text{ et } \theta_0^L(g) = g; \forall g \in G. \text{ Donc :}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_t^L(g) = X_{\theta_0^L(g)}^L = X_g^L \in T_g G; \forall g \in G.$$

Flot du champ de vecteurs X^L invariant à gauche

C'est la collection $\{\theta_t^L\}$ des difféomorphismes :

$$G \xrightarrow{\theta_t^L} G$$

Étant donné que le champ de vecteurs X^L est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété :

$$\theta_{t+s}^L = \theta_t^L \circ \theta_s^L = \theta_{s+t}^L = \theta_s^L \circ \theta_t^L; \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Donc $\theta_0^L = \text{id}$ et $\theta_t^{L^{-1}} = \theta_{-t}^L$. Mais G étant un groupe on a $\theta_t^L = R_{\theta_t^L(e)}$.

Démonstration

Posons $g \triangleq \theta_t^L(e)$ et $c \triangleq L_h \circ \theta_t^L(e)$.

Soit $c(t) = L_h(\theta_t^L(e)) = h \cdot g = R_g(h) = R_{\theta_t^L(e)}(h)$.

Par la règle de dérivation composée on a :

$$\frac{d}{dt} c(t) = (T_{\theta_t^L(e)} L_h) \left(\frac{d}{dt} \theta_t^L(e) \right) = (T_{\theta_t^L(e)} L_h)(X_{\theta_t^L(e)}^L) = (T_g L_h)(X_g^L) = X_{h \cdot g}^L,$$

car $X^L \in \mathcal{X}_L(G)$. Et par conséquent :

$\frac{d}{dt} c(t) = X_{c(t)}^L$ et c est une courbe intégrale du champ de vecteur X^L avec la condition initiale $c(0) = L_h(\theta_0^L(e)) = L_h(e) = h$ de même que $\theta^L(h)$. D'après le théorème d'unicité des solutions aux équations différentielles ayant les mêmes conditions initiales on a $c = \theta^L(h)$; soit :

$$c(t) = R_{\theta_t^L(e)}(h) = \theta_t^L(h); \forall h \in G \text{ soit } R_{\theta_t^L(e)} = \theta_t^L \text{ QED.}$$

Si $h \in G$ et $X^L, X'^L \in \mathcal{X}_L(G)$ alors :

$$L_{h*}[X^L, X'^L] = [L_{h*}X^L, L_{h*}X'^L] = [X^L, X'^L] \text{ et } [X^L, X'^L] \in \mathcal{X}_L(G)$$

[1]¹³⁶ et [51]¹³⁷. Ainsi $\mathcal{X}_L(G)$ est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{X}(G)$.

Remarque : on a également $L_h^*[X^L, X'^L] = [L_h^*X^L, L_h^*X'^L] = [X^L, X'^L]$ [49]¹³⁸ et [56]¹³⁹.

136. p. 254

137. p. 410

138. p. 269

139. p. 52

Champ de vecteurs invariant à gauche associé à un élément de l'algèbre de Lie [49]¹⁴⁰

Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{g}$ soit le champ de vecteurs X_σ^L (car on va voir que $X_\sigma^L \in \mathcal{X}_L(G)$), associé à σ , tel que :

$X_\sigma^L(h) = (h, X_{\sigma h}^L)$, avec $X_{\sigma h}^L \triangleq (T_e L_h)(\sigma)$ et, en particulier, $X_{\sigma e}^L = \sigma$;
 $\forall \sigma \in \mathfrak{g}$.

Alors $X_{\sigma h \cdot g}^L = (T_e L_{h \cdot g})(\sigma) = (T_g L_h)((T_e L_g)(\sigma)) = (T_g L_h)(X_{\sigma g}^L)$;
donc $X_\sigma^L \in \mathcal{X}_L(G)$.

Les applications linéaires

$\mathcal{X}_L(G) \xrightarrow{X_\sigma^L} \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{X}_L(G)$ sont inverses l'une de l'autre et ainsi

$\mathcal{X}_L(G)$ et \mathfrak{g} sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels .

Courbe intégrale du champ de vecteurs X_σ^L

La courbe intégrale du champ de vecteurs X_σ^L , avec la condition initiale g à $t = 0$, est la courbe différentielle $\theta_\sigma^L(g)$:

$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta_\sigma^L(g)} G$, telle que :

$\frac{d}{dt} \theta_{\sigma t}^L(g) = X_{\sigma \theta_{\sigma t}^L(g)}^L = (T_g \theta_{\sigma t}^L)(X_\sigma^L) = (T_g \theta_{\sigma t}^L)((T_e L_g)(\sigma)) \in T_{\theta_{\sigma t}^L(g)} G$ et
 $\theta_{\sigma 0}^L(g) = g$; $\forall g \in G$. Donc :

$\frac{d}{dt} |_{t=0} \theta_{\sigma t}^L(g) = X_{\sigma \theta_{\sigma 0}^L(g)}^L = X_{\sigma g}^L = (T_e L_g)(\sigma) \in T_g G$; $\forall g \in G$.

Flot du champ de vecteurs X_σ^L

C'est la collection $\{\theta_{\sigma t}^L\}$ des difféomorphismes :

$G \xrightarrow{\theta_{\sigma t}^L} G$.
 $g \mapsto \theta_{\sigma t}^L(g)$

Étant donné que le champ de vecteurs X_σ^L est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété :

$\theta_{\sigma t+s}^L = \theta_{\sigma t}^L \circ \theta_{\sigma s}^L = \theta_{\sigma s+t}^L = \theta_{\sigma s}^L \circ \theta_{\sigma t}^L$; $\forall t, s \in \mathbb{R}$.
Donc $\theta_{\sigma 0}^L = \text{id}$ et $(\theta_{\sigma t}^L)^{-1} = \theta_{\sigma -t}^L$.

Et G étant un groupe on a vu également que $\theta_{\sigma t}^L = R_{\theta_{\sigma t}^L(e)}$. Par conséquent :

$\frac{d}{dt} R_{\theta_{\sigma t}^L(e)}(g) = (T_g R_{\theta_{\sigma t}^L(e)})(X_\sigma^L) = (T_g R_{\theta_{\sigma t}^L(e)})((T_e L_g)(\sigma))$. Donc :

140. pp. 269-270

$\frac{d}{dt}|_{t=0} R_{\theta_{\sigma t}^L}(g) = X_{\sigma g}^L = (T_e L_g)(\sigma)$. Et en particulier si $g = e$:

$\frac{d}{dt} \theta_{\sigma t}^L(e) = (T_e R_{\theta_{\sigma t}^L(e)})(\sigma)$. Donc :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \theta_{\sigma t}^L(e) = \sigma$:

Premier crochet de Lie $[\cdot, \cdot]^L$ sur \mathfrak{g}

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{g}$ alors $[\sigma, \sigma']^L \triangleq [X_{\sigma}^L, X_{\sigma'}^L]_e \in \mathfrak{g}$; avec $X_{\sigma}^L, X_{\sigma'}^L \in \mathcal{X}_L(G)$. Grâce à ce crochet \mathfrak{g} devient une algèbre de Lie.

Par construction on a $[X_{\sigma}^L, X_{\sigma'}^L] = X_{[\sigma, \sigma']^L}^L \in \mathcal{X}_L(G)$.

5.9.4 Les champs de vecteurs invariants à droite

Les champs de vecteurs X^R invariants à droite sont tels que $R_h^* X^R = X^R$ [49]¹⁴¹ et/ou $R_{h*} X^R = X^R$; $\forall h \in G$ [1]¹⁴² et [51]¹⁴³. Alors $X^R \in \mathcal{X}_R(G)$, ensemble des champs de vecteurs invariants à droite. $\mathcal{X}_R(G)$ est une sous algèbre de $\mathcal{X}(G)$.

Alors $TR_h \circ X^R = X^R \circ R_h$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{R_h} & G \\
 \begin{array}{c} g \\ X^R \downarrow \\ TG \\ X^R(g) \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \\ TR_h \circ X^R \\ \searrow \\ TG \\ X^R(g) \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \\ X^R \circ R_h \\ \searrow \\ TG \\ (TR_h)(X^R(g)) = X^R(g \cdot h) \end{array}
 \end{array}$$

On a donc $(TR_h)(X^R(g)) = X^R(g \cdot h) \in TG$ ou $(T_g R_h)(X_g^R) = X_{g \cdot h}^R \in T_{g \cdot h} G$; $\forall h \in G$; $\forall g \in G$; ssi $X^R \in \mathcal{X}_R(G)$.

Courbe intégrale du champ de vecteurs X^R invariant à droite

La courbe intégrale du champ de vecteurs X^R invariant à droite ($X^R \in \mathcal{X}_R(G)$), avec la condition initiale g à $t = 0$, est la courbe différentielle $\theta_t^R(g)$:

$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta_t^R(g)} G$, telle que :

$\frac{d}{dt} \theta_t^R(g) = X_{\theta_t^R(g)}^R = (T_g \theta_t^R)(X_g^R) \in T_{\theta_t^R(g)} G$ et $\theta_0^R(g) = g$; $\forall g \in G$. Donc :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \theta_t^R(g) = X_{\theta_0^R(g)}^R = X_g^R \in T_g G$; $\forall g \in G$.

141. p. 269

142. p. 254

143. p. 410

Flot du champ de vecteurs X^R invariant à droite

C'est la collection $\{\theta_t^R\}$ des difféomorphismes :

$$G \xrightarrow{\theta_t^R} G .$$

$$g \mapsto \theta_t^R(g)$$

Étant donné que le champ de vecteurs X^R est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété :

$$\theta_{t+s}^R = \theta_t^R \circ \theta_s^R = \theta_{s+t}^R = \theta_s^R \circ \theta_t^R ; \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Donc $\theta_0^R = \text{id}$ et $\theta_t^{R-1} = \theta_{-t}^R$.

Mais G étant un groupe on a $\theta_t^R = L_{\theta_t^R(e)}$.

Démonstration

Posons $g \triangleq \theta_t^R(e)$ et $c \triangleq R_h \circ \theta_t^R(e)$.

Soit $c(t) = R_h(\theta_t^R(e)) = g \cdot h = L_g(h) = L_{\theta_t^R(e)}(h)$.

Par la règle de dérivation composée on a :

$$\frac{d}{dt} c(t) = (T_{\theta_t^R(e)} R_h) \left(\frac{d}{dt} \theta_t^R(e) \right) = (T_{\theta_t^R(e)} R_h)(X_{\theta_t^R(e)}) = (T_g R_h)(X_g^R) = X_{g \cdot h}^R,$$

car $X^R \in \mathcal{X}_R(G)$. Et par conséquent :

$\frac{d}{dt} c(t) = X_{c(t)}^R$ et c est une courbe intégrale du champ de vecteur X^R avec la condition initiale $c(0) = R_h(\theta_0^R(e)) = R_h(e) = h$ de même que $\theta_t^R(h)$. D'après le théorème d'unicité des solutions aux équations différentielles ayant les mêmes conditions initiales on a $c = \theta_t^R(h)$; soit :

$$c(t) = L_{\theta_t^R(e)}(h) = \theta_t^R(h) ; \forall h \in G \text{ soit } L_{\theta_t^R(e)} = \theta_t^R \text{ QED.}$$

Si $h \in G$ et $X^R, X'^R \in \mathcal{X}_R(G)$ alors :

$$R_{h*}[X^R, X'^R] = [R_{h*}X^R, R_{h*}X'^R] = [X^R, X'^R] \text{ et } [X^R, X'^R] \in \mathcal{X}_R(G)$$

[1]¹⁴⁴ et [51]¹⁴⁵. Ainsi $\mathcal{X}_R(G)$ est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{X}(G)$.

Remarque : on a également $R_h^*[X^R, X'^R] = [R_h^*X^R, R_h^*X'^R] = [X^R, X'^R]$ [49]¹⁴⁶ et [56]¹⁴⁷.

144. p. 254

145. p. 410

146. p. 269

147. p. 52

Champ de vecteurs invariant à droite associé à un élément de l'algèbre de Lie [49]¹⁴⁸

Pour chaque $\sigma \in \mathfrak{g}$ soit le champ de vecteurs X_σ^R (car on va voir que $X_\sigma^R \in \mathcal{X}_R(G)$), associé à σ , tel que :

$X_\sigma^R(h) = (h, X_{\sigma h}^R)$, avec $X_{\sigma h}^R \triangleq (T_e R_h)(\sigma)$ et, en particulier, $X_{\sigma e}^R = \sigma$;
 $\forall \sigma \in \mathfrak{g}$.

Alors $X_{\sigma g \cdot h}^R = (T_e R_{g \cdot h})(\sigma) = (T_g R_h)((T_e R_g)(\sigma)) = (T_g R_h)(X_{\sigma g}^R)$;
donc $X_\sigma^R \in \mathcal{X}_R(G)$.

Les applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_R(G) & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ X_\sigma^R & \longmapsto & X_{\sigma e}^R = \sigma \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{X}_L(G) \\ \sigma & \longmapsto & X_\sigma^R \end{array}$$

sont inverses l'une de l'autre et ainsi $\mathcal{X}_R(G)$ et \mathfrak{g} sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels .

Courbe intégrale du champ de vecteurs X_σ^R

La courbe intégrale du champ de vecteurs X_σ^R , avec la condition initiale g à $t = 0$, est la courbe différentielle $\theta_\sigma^R(g)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta_\sigma^R(g)} & G \\ t & \longmapsto & \theta_{\sigma t}^R(g) \end{array}, \text{ telle que :}$$

$\frac{d}{dt} \theta_{\sigma t}^R(g) = X_{\sigma \theta_{\sigma t}^R(g)}^R = (T_g \theta_{\sigma t}^R)(X_{\sigma g}^R) = (T_g \theta_{\sigma t}^R)((T_e R_g)(\sigma)) \in T_{\theta_{\sigma t}^R(g)} G$ et
 $\theta_{\sigma 0}^R(g) = g$; $\forall g \in G$. Donc :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{\sigma t}^R(g) = X_{\sigma \theta_{\sigma 0}^R(g)}^R = X_{\sigma g}^R = (T_e R_g)(\sigma) \in T_g G ; \forall g \in G.$$

Flot du champ de vecteurs X_σ^R

C'est la collection $\{\theta_{\sigma t}^R\}$ des difféomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\theta_{\sigma t}^R} & G \\ g & \longmapsto & \theta_{\sigma t}^R(g) \end{array}.$$

Étant donné que le champ de vecteurs X_σ^R est une application différentielle les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires garantissent que le flot possède la propriété :

$$\theta_{\sigma t+s}^R = \theta_{\sigma t}^R \circ \theta_{\sigma s}^R = \theta_{\sigma s+t}^R = \theta_{\sigma s}^R \circ \theta_{\sigma t}^R ; \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Donc $\theta_{\sigma 0}^R = \text{id}$ et $(\theta_{\sigma t}^R)^{-1} = \theta_{\sigma -t}^R$.

Et G étant un groupe on a vu également que $\theta_{\sigma t}^R = L_{\theta_{\sigma t}^R(e)}$. Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} L_{\theta_{\sigma t}^R(e)}(g) = (T_g L_{\theta_{\sigma t}^R(e)})(X_{\sigma g}^R) = (T_g L_{\theta_{\sigma t}^R(e)})((T_e R_g)(\sigma)). \text{ Donc :}$$

148. pp. 269-270

$\frac{d}{dt}|_{t=0} L_{\theta_{\sigma_t}^R}(g) = X_{\sigma g}^R = (T_e R_g)(\sigma)$. Et en particulier si $g = e$:

$\frac{d}{dt} \theta_{\sigma_t}^R(e) = (T_e L_{\theta_{\sigma_t}^R}(e))(\sigma)$. Donc :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \theta_{\sigma_t}^R(e) = \sigma$:

Second crochet de Lie $[\cdot, \cdot]^R$ sur \mathfrak{g}

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{g}$ alors $[\sigma, \sigma']^R \triangleq [X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R]_e \in \mathfrak{g}$; avec $X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R \in \mathcal{X}_R(G)$. Grâce à ce crochet \mathfrak{g} devient une algèbre de Lie.

Par construction on a $[X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R] = X_{[\sigma, \sigma']^R}^R \in \mathcal{X}_R(G)$.

5.9.5 Lien entre les champs de vecteurs X_{σ}^L et X_{σ}^R

Soit $i_* X_{\sigma}^L$ l'image directe de X_{σ}^L par i . On a $i_* X_{\sigma}^L \triangleq (Ti) \circ X_{\sigma}^L \circ i^{-1}$. Alors $X_{\sigma}^R = -i_* X_{\sigma}^L$ [49]¹⁴⁹.

Démonstration

$$\begin{aligned} (i_* X_{\sigma}^L)_h &= (T_{h^{-1}i})(X_{\sigma h^{-1}}^L) = -(T_e R_h)((T_{h^{-1}L_h})(X_{\sigma h^{-1}}^L)) \\ &= -(T_e R_h)(X_{\sigma e}^L) = -(T_e R_h)(\sigma) = -X_{\sigma h}^R; \forall h \in G \text{ QED.} \end{aligned}$$

On a $[\sigma, \sigma']^R = -[\sigma, \sigma']^L$ [49]¹⁵⁰.

Démonstration

$$\begin{aligned} X_{[\sigma, \sigma']^L}^R &= -i_* X_{[\sigma, \sigma']^L}^L = -i_* [X_{\sigma}^L, X_{\sigma'}^L] = -[i_* X_{\sigma}^L, i_* X_{\sigma'}^L] \\ &= -[-X_{\sigma}^R, -X_{\sigma'}^R] = -[X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R]. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$[\sigma, \sigma']^R \triangleq [X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R]_e = -(X_{[\sigma, \sigma']^L}^R)_e = -[\sigma, \sigma']^L \text{ QED.}$$

5.9.6 Crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ utilisé sur \mathfrak{g}

On va utiliser le crochet de Lie : $[\cdot, \cdot] \triangleq [\cdot, \cdot]^L \triangleq -[\cdot, \cdot]^R$.

Donc $[\sigma, \sigma'] \triangleq [X_{\sigma}^L, X_{\sigma'}^L]_e \triangleq -[X_{\sigma}^R, X_{\sigma'}^R]_e$.

L'espace vectoriel \mathfrak{g} étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}) = n$ on a :

$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$. Les coefficients c_{ij}^k sont les coefficients de structure de la base e_1, \dots, e_n [49]¹⁵¹.

149. p. 270 éq. (9.1.1)

150. p. 271

151. p. 10 éq. (1.3.2) où les auteurs parlent de constantes de structure et p. 361 éq. (10.7.6)

5.10 Application exponentielle

On pourra consulter [1]¹⁵², [49]¹⁵³ et [51]¹⁵⁴.

On pose $\exp(t\sigma) \triangleq \theta_{\sigma t}^L(e)$.

Alors $\exp((t+s)\sigma) = \exp(t\sigma) \cdot \exp(s\sigma)$
 $= \exp(s\sigma) \cdot \exp(t\sigma) = \exp((s+t)\sigma); \forall t, s \in \mathbb{R}$.

L'application exponentielle est :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} G \quad \sigma \mapsto \exp(\sigma) \triangleq \theta_{\sigma 1}^L(e) \quad \text{On a :}$$

$$[\sigma, \sigma'] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}(\sigma') \quad [1]^{155} \text{ et } [49]^{156}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} [\sigma, \sigma'] &= [\sigma, \sigma']^L = [X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L]_e = (\mathcal{L}_{X_\sigma}^L X_{\sigma'})_e \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\theta_{\sigma t}^L(e)} \theta_{\sigma t}^{L-1})(X_{\sigma' \theta_{\sigma t}^L(e)}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\exp(t\sigma)} R_{\exp(-t\sigma)})(X_{\sigma' \exp(t\sigma)}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\exp(t\sigma)} R_{\exp(-t\sigma)})((T_e L_{\exp(t\sigma)})(\sigma')) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((T_{\exp(t\sigma)} R_{\exp(-t\sigma)})((T_e L_{\exp(t\sigma)})(\sigma')) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T_{\exp(t\sigma)} R_{\exp(-t\sigma)}) \circ ((T_e L_{\exp(t\sigma)})(\sigma')) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}(\sigma') \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

Remarques :

- on a vu que $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta_{\sigma t}^L(e) = (T_e R_{\theta_{\sigma t}^L(e)})(\sigma)$; soit $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\sigma) = (T_e R_{\exp(t\sigma)})(\sigma)$.

Donc :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\sigma) = \sigma.$$

- Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta_{\sigma \cdot}^L(e)} G \xrightarrow{L_h} G$
 $t \mapsto \theta_{\sigma t}^L(e) = \exp(t\sigma) \mapsto L_h(\exp(t\sigma))$.

Par la règle de la dérivation composée on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_h(\exp(t\sigma)) &= (T_{\exp(t\sigma)} L_h)\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\sigma)\right). \text{ Donc :} \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_h(\exp(t\sigma)) &= (T_e L_h)\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\sigma)\right) = (T_e L_h)(\sigma) = X_{\sigma h}^L. \end{aligned}$$

- Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta_{\sigma \cdot}^L(e)} G \xrightarrow{R_h} G$
 $t \mapsto \theta_{\sigma t}^L(e) = \exp(t\sigma) \mapsto R_h(\exp(t\sigma))$.

152. pp. 256-258

153. pp. 273-275 et p. 278

154. pp. 412-414 § 2.3

155. pp. 267-268 § 4.1.25 Exemple (b)

156. p. 276

Par la règle de la dérivation composée on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_h(\exp(t\sigma)) &= (T_{\exp(t\sigma)} R_h) \left(\frac{d}{dt} \exp(t\sigma) \right). \text{ Donc :} \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_h(\exp(t\sigma)) &= (T_e R_h) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\sigma) \right) = (T_e R_h)(\sigma) = X_{\sigma h}^R. \end{aligned}$$

5.11 Endomorphisme du groupe de Lie G

On pourra consulter [49]¹⁵⁷

Considérons une application différentielle f de G dans $G : G \xrightarrow{f} G$,
 $g \mapsto k=f(g)$,
telle que $f(h \cdot g) = f(h) \cdot f(g); \forall g, h \in G$. Alors on dit que f est un endomorphisme du groupe de Lie G .

Alors l'application tangente $T_e f$, au point e à l'application différentielle f est un endomorphisme de l'algèbre de lie \mathfrak{g} i.e. tel que :

$$(T_e f)[\sigma, \sigma'] = [(T_e f)(\sigma), (T_e f)(\sigma')]; \forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{g}.$$

De plus $f \circ \exp = \exp \circ (T_e f)$ i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_e f} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & f \circ \exp \searrow \swarrow \exp \circ T_e f & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Démonstration

$$\text{On a } G \xrightarrow{L_h} G \xrightarrow{f} G \text{ et } G \xrightarrow{f} G \xrightarrow{L_{f(h)}} G.$$

$$g \mapsto h \cdot g \mapsto f(h \cdot g) \quad g \mapsto f(g) \mapsto f(h) \cdot f(g)$$

Comme $f(h \cdot g) = f(h) \cdot f(g); \forall g, h \in G$ on a :

$$f \circ L_h = L_{f(h)} \circ f; \forall h \in G \text{ et on a } f(e) = e.$$

$$\text{Donc on a, avec } g = e : T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{T_e L_h} T_g G \xrightarrow{T_h f} T_{f(h)} G \text{ et :}$$

$$\sigma \mapsto (T_e L_h)(\sigma) \mapsto (T_h f)((T_e L_h)(\sigma))$$

$$T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{T_e f} T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{T_e L_{f(h)}} T_{f(h)} G.$$

$$\sigma \mapsto (T_e f)(\sigma) \mapsto (T_e L_{f(h)})((T_e f)(\sigma))$$

Donc $(T_h f) \circ (T_e L_h) = (T_e L_{f(h)}) \circ (T_e f); \forall h \in G$ soit :

$$(T_h f)((T_e L_h)(\sigma)) = (T_e L_{f(h)})((T_e f)(\sigma)); \forall \sigma \in \mathfrak{g}; \text{ ce qui s'écrit :}$$

$$(T_h f)(X_{\sigma h}^L) = X_{(T_e f)(\sigma) f(h)}^L.$$

157. pp. 276-277 homomorphismes de groupes Proposition 9.1.6 et Corollaire 9.1.8

Ceci signifie que les champs de vecteurs invariants à gauche X_σ^L et $X_{(T_e f)(\sigma)}^L$ sont en f -relation :

$X_\sigma^L = f^* X_{(T_e f)(\sigma)}^L$ ou $(Tf) \circ X_\sigma^L = X_{(T_e f)(\sigma)}^L \circ f$; $\forall \sigma \in \mathfrak{g}$. En effet cette relation implique :

$$((Tf) \circ X_\sigma^L)(h) = (X_{(T_e f)(\sigma)}^L \circ f)(h); \forall h \in G; \text{ soit :}$$

$$(T_h f)(X_{\sigma h}^L) = X_{(T_e f)(\sigma)f(h)}^L; \text{ ce qui est bien le cas.}$$

Mais alors les champs de vecteurs invariants à gauche $[X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L]$ et $[X_{(T_e f)(\sigma)}, X_{(T_e f)(\sigma')}]$ sont également en f -relation [2]¹⁵⁸; soit :

$$(Tf) \circ [X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L] = [X_{(T_e f)(\sigma)}, X_{(T_e f)(\sigma')}] \circ f.$$

Et, en particulier :

$$((Tf) \circ [X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L])(e) = ([X_{(T_e f)(\sigma)}, X_{(T_e f)(\sigma')}] \circ f)(e) \text{ ou}$$

$$(Tf)([X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L](e)) = [X_{(T_e f)(\sigma)}, X_{(T_e f)(\sigma')}] (f(e)), \text{ ce qui s'écrit :}$$

$$(T_e f)([X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L]_e) = [X_{(T_e f)(\sigma)}, X_{(T_e f)(\sigma')}]_{f(e)} \text{ et finalement :}$$

$$(T_e f)[\sigma, \sigma'] = [(T_e f)(\sigma), (T_e f)(\sigma')]; \forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{g} \text{ QED.}$$

Soient :

- $\mathfrak{a} \triangleq f \circ \exp(\cdot\sigma)$. On a, d'après la règle de dérivation composée :

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{a}(t) = (T_{\exp(t\sigma)} f) \left(\frac{d}{dt} \exp(t\sigma) \right) \text{ et, en particulier :}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathfrak{a}(t) = (T_e f) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\sigma) \right), \text{ soit } \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathfrak{a}(t) = (T_e f)(\sigma).$$

- $\mathfrak{b} \triangleq \exp(\cdot) \circ (T_e f)(\sigma)$. On a, d'après la règle de dérivation composée :

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{b}(t) = (T_{(T_e f)(\sigma)t} \exp) \left((T_e f)(\sigma)t \right) \left(\frac{d}{dt} (T_e f)(\sigma)t \right) \text{ et, en particulier :}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathfrak{b}(t) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_e f)(\sigma)t \right) = (T_e f)(\sigma).$$

- On a donc $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathfrak{a}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathfrak{b}(t)$ et comme \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont des sous-groupes à un paramètre on a $\mathfrak{a}(t) = \mathfrak{b}(t)$ i.e. :

$$f(\exp(t\sigma)) = \exp((T_e f)(\sigma)t) \text{ et, en particulier pour } t = 1 :$$

$$f(\exp(\sigma)) = \exp((T_e f)(\sigma)); \forall \sigma \in \mathfrak{g} \text{ ou :}$$

$$f \circ \exp = \exp \circ (T_e f) \text{ QED.}$$

158. pp. 265-297 section 4.2

Corollaire

Si $f = I_h$ on a $T_e I_h = \text{Ad}_h$ et :

$$\text{Ad}_h([\mu, \mu']) = [\text{Ad}_h(\mu), \text{Ad}_h(\mu')] = [\nu, \nu']; \forall \mu, \mu' \in \mathfrak{g}.$$

Donc en fait $\text{Ad}_h \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ où $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ est le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Et :

$$I_h(\exp(\mu)) = \exp((T_e I_h)(\mu)); \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ soit :}$$

$$h \cdot \exp(\mu) \cdot h^{-1} = \exp(\text{Ad}_h(\mu)) = \exp(\nu) \text{ [49] }^{159}.$$

5.11.1 La représentation adjointe Ad

C'est $G \xrightarrow[\text{Ad}_g]{\text{Ad}} \text{Aut}(\mathfrak{g})$ [4]¹⁶⁰, [39]¹⁶¹, [49]¹⁶², [51]¹⁶³ et [52]¹⁶⁴.

5.11.2 L'application ad_σ

On pose $\text{ad}_\sigma \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}$; alors :

$$[\sigma, \sigma'] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}(\sigma') = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)} \right)(\sigma') = \text{ad}_\sigma(\sigma'). \text{ Et :}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}_\sigma} & \mathfrak{g} \\ \sigma' & \mapsto & [\sigma, \sigma'] = \text{ad}_\sigma(\sigma') \end{array} . \text{ On a :}$$

• à gauche :

$$\diamond [\mu, \mu'] = \text{ad}_\mu(\mu')$$

$$\diamond \delta \triangleq \text{ad}_\zeta(\theta) \triangleq [\zeta, \theta] = -[\theta, \zeta] = -\text{ad}_\theta(\zeta),$$

$$\diamond \chi \triangleq \text{ad}_\xi(\zeta) \triangleq [\xi, \zeta] = -[\zeta, \xi] = -\text{ad}_\zeta(\xi),$$

• à droite :

$$\diamond [\nu, \nu'] = \text{ad}_\nu(\nu')$$

$$\diamond \varepsilon \triangleq \text{ad}_\alpha(\beta) \triangleq [\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] = -\text{ad}_\beta(\alpha),$$

$$\diamond \kappa \triangleq \text{ad}_\eta(\alpha) \triangleq [\eta, \alpha] = -[\alpha, \eta] = -\text{ad}_\alpha(\eta).$$

159. p. 277 Corollaire 9.1.8

160. pp. 319-321 Appendix 2 Partie A "The adjoint and co-adjoint representations"

161. pp. 19-30 II.1 Notions mathématiques : groupes de Lie, algèbres de Lie, application au groupe des déplacements de \mathbb{R}^3

162. p. 275 p. 311 qui parle de représentation adjointe de G sur \mathfrak{g}

163. pp. 415-416

164. pp. 139-182 Chapitre III Groupes de Lie

On a alors :

• $\text{Ad}_g(\delta) = \text{Ad}_g[\zeta, \theta] = [\text{Ad}_g(\zeta), \text{Ad}_g(\theta)] = [\alpha, \beta] = \text{ad}_\alpha(\beta) = \varepsilon$. Soit :

$\text{Ad}_g(\text{ad}_\zeta(\theta)) = \text{ad}_\alpha(\text{Ad}_g(\theta))$ et donc :

$\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\zeta = \text{ad}_\alpha \circ \text{Ad}_g$ [39]¹⁶⁵.

• et plus particulièrement :

$\text{Ad}_g(\chi) = \text{Ad}_g[\xi, \zeta] = [\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\zeta)] = [\eta, \alpha] = \text{ad}_\eta(\alpha) = \kappa$. Soit :

$\text{Ad}_g(\text{ad}_\xi(\zeta)) = \text{ad}_\eta(\text{Ad}_g(\zeta))$ et donc :

$\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\xi = \text{ad}_\eta \circ \text{Ad}_g$.

Inversement on a :

• $\delta = \text{Ad}_g^{-1}(\varepsilon) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\varepsilon)$ et donc :

$\text{ad}_\zeta \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\alpha$,

• et plus particulièrement $\chi = \text{Ad}_g^{-1}(\kappa) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\kappa)$ et donc :

$\text{ad}_\xi \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\eta$.

L'espace vectoriel \mathfrak{g} étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}) = n$ soit $[[\text{ad}_\sigma]]$ la matrice carrée, d'ordre n (donc de dimension $n \times n$) qui représente ad_σ dans la base e_1, \dots, e_n . Alors on a l'égalité matricielle :

$$[[\sigma, \sigma']] = [[\text{ad}_\sigma]] [[\sigma']].$$

Soit $[[\text{ad}_\sigma]]_{ij}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $[[\text{ad}_\sigma]]$. Alors on a $[\sigma, \sigma']_i = \sum_{j=1}^n [[\text{ad}_\sigma]]_{ij} \sigma'_j$. Mais $[\sigma, \sigma'] = [\sum_{k=1}^n \sigma_k e_k, \sum_{j=1}^n \sigma'_j e_j] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_k \sigma'_j [e_k, e_j] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_k \sigma'_j c_{kj}^i e_i$. Donc :

$$[\sigma, \sigma']_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj}^i \sigma_k \sigma'_j \text{ et } [[\text{ad}_\sigma]]_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{kj}^i \sigma_k = - \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \sigma_k.$$

165. p. 23

5.12 Les applications l , l^{-1} , r et r^{-1}

On pourra consulter [1]¹⁶⁶.

Le fibré TG est trivial grâce à deux isomorphismes $TG \cong G \times \mathfrak{g}$ et alors $TG/G \cong \mathfrak{g}$.

◇ Premier isomorphisme grâce aux applications l et l^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{l} & G \times \mathfrak{g} \\ v=(g, v_g) \mapsto & & l(v)=(g, \zeta)=(g, (T_g L_{g^{-1}})(v_g)) \end{array} . \text{ Alors :}$$

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{l^{-1}} & TG \\ (g, \zeta) \mapsto & & l^{-1}(g, \zeta)=v=(g, v_g)=(g, (T_e L_g)(\zeta)) \end{array}$$

◇ Second isomorphisme grâce aux applications r et r^{-1} :

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{r} & G \times \mathfrak{g} \\ v=(g, v_g) \mapsto & & r(v)=(g, \alpha)=(g, (T_g R_{g^{-1}})(v_g)) \end{array} . \text{ Alors :}$$

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{r^{-1}} & TG \\ (g, \alpha) \mapsto & & r^{-1}(g, \alpha)=v=(g, v_g)=(g, (T_e R_g)(\alpha)) \end{array}$$

On a $(r \circ l^{-1})(g, \zeta) = (g, \text{Ad}_g(\zeta)) = (g, \alpha) \in G \times \mathfrak{g}$ [1]¹⁶⁷.

$(l \circ T L_g \circ l^{-1})(h, \zeta) = (g \cdot h, \zeta)$ [1]¹⁶⁸.

$(r \circ T L_g \circ r^{-1})(h, \zeta) = (g \cdot h, \text{Ad}_g(\zeta)) = (g \cdot h, \alpha)$ [1]¹⁶⁹.

$$\text{Soient } \begin{array}{ccc} T_g G & \xrightarrow{\bar{l}=T_g L_{g^{-1}}} & \mathfrak{g} \\ v_g \mapsto & & \zeta=\bar{l}(v_g)=(T_g L_{g^{-1}})(v_g) \end{array} \text{ et } \begin{array}{ccc} T_g G & \xrightarrow{\bar{r}=T_g R_{g^{-1}}} & \mathfrak{g} \\ v_g \mapsto & & \alpha=\bar{r}(v_g)=(T_g R_{g^{-1}})(v_g) \end{array} .$$

166. pp. 312-313 où l est noté λ et r est noté ρ

167. p. 312

168. p. 313

169. p. 313

6 Les espaces cotangents au groupe de Lie G et en particulier le dual \mathfrak{g}^* et les applications cotangentes (ou duales ou transposées), en un point

Soit $T_g^*G = L(T_gG; \mathbb{R})$ l'ensemble des *formes* linéaires de l'espace vectoriel T_gG dans \mathbb{R} . Il s'agit de l'espace vectoriel dual algébrique de l'espace vectoriel T_gG . T_g^*G est appelé espace cotangent, en g à G . Et soit $T_e^*G \triangleq \mathfrak{g}^*$ l'espace cotangent, en e à G . Il s'agit du dual de l'espace vectoriel $T_eG \triangleq \mathfrak{g}$. T_g^*G n'a pas de bonnes propriétés alors que \mathfrak{g}^* en a.

Soient $v_g^* \in T_g^*G$, $w_h^* \in T_h^*G$, $u_k^* \in T_k^*G$, $a_{g,h}^* \in T_{g,h}^*G$ et $b_{h,g}^* \in T_{h,g}^*G$.

Dans \mathfrak{g}^* on va considérer les éléments suivants :

- σ^* , σ'^* (génériques et indépendants),
- pour une conception à gauche : μ^* , μ'^* (génériques et indépendants) et ζ^* , θ^* , δ^* , ξ^* , χ^* (particuliers) et
- pour une conception à droite : ν^* , ν'^* (génériques et indépendants) et α^* , β^* , ε^* , η^* , κ^* (particuliers).

On a alors les produits scalaires :

$$\text{Sur } T_gG : T_g^*G \times T_gG \xrightarrow[\substack{\langle \cdot, \cdot \rangle^g \\ (v_g^*, v_g)}]{\substack{\mathbb{R} \\ \langle v_g^*, v_g \rangle_g \triangleq v_g^*(v_g)}} (v_g^* \text{ et } v_g \text{ sont indépendants})$$

et on étend à tout couple d'éléments respectivement de T_g^*G et de T_gG .

$$\text{Sur } \mathfrak{g} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \xrightarrow[\substack{\langle \cdot, \cdot \rangle \\ (\sigma^*, \sigma)}]{\substack{\mathbb{R} \\ \langle \sigma^*, \sigma \rangle \triangleq \sigma^*(\sigma)}} (\sigma^* \text{ et } \sigma \text{ sont indépendants})$$

et on étend à tout couple d'éléments respectivement de \mathfrak{g}^* et de \mathfrak{g} .

L'espace vectoriel \mathfrak{g} étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}) = n$, l'espace vectoriel dual \mathfrak{g}^* est de même dimension : $\dim(\mathfrak{g}^*) = n$ et on va y utiliser la base duale e_1^*, \dots, e_n^* telle que : $\langle e_i^*, e_j \rangle \triangleq e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) et on va représenter chacun de ses éléments par la matrice colonne¹⁷⁰ (donc de dimension $n \times 1$), notée également $\llbracket \cdot \rrbracket$, de ses composantes dans cette base. Ainsi si $\sigma^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i^* e_i^*$ on a $\llbracket \sigma^* \rrbracket \triangleq (\sigma_1^* \dots \sigma_n^*)^T$ et de même pour les autres éléments de \mathfrak{g}^* .

170. on aurait pu choisir une matrice ligne

6.1 Application cotangente, en un point

On a vu que l'application tangente de f , au point g de G est :

$$T_g G \xrightarrow[v_g \mapsto u_k=(T_g f)(v_g)]{T_g f} T_k G .$$

Alors l'application cotangente de f , au point k de G est l'application *linéaire* :

$$T_k^* G \xrightarrow[u_k^* \mapsto v_g^*=(T_g^* f)(u_k^*)]{T_g^* f} T_g^* G \quad ; \quad T_g^* f \in L(T_k^* G ; T_g^* G), \text{ telle que :}$$

$$\begin{aligned} \langle v_g^*, v_g \rangle_g &= \langle u_k^*, u_k \rangle_k \text{ i.e.} \\ ((T_g^* f)(u_k^*))(v_g) &= u_k^*((T_g f)(v_g)) ; \forall v_g \in T_g G ; \forall u_k^* \in T_k^* G. \end{aligned}$$

6.2 Les applications cotangentes, en un point, aux translations à gauche

En mécanique ces applications sont utiles pour les efforts.

$$\text{Étant donné que } T_g G \xrightarrow[v_g \mapsto b_{h.g}=(T_g L_h)(v_g)]{T_g L_h} T_{h.g} G \text{ on a } T_{h.g}^* G \xrightarrow[b_{h.g}^* \mapsto v_g^*=(T_g^* L_h)(b_{h.g}^*)]{T_g^* L_h} T_g^* G ,$$

avec $\langle v_g^*, v_g \rangle_g = \langle b_{h.g}^*, b_{h.g} \rangle_{h.g} \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{aligned} ((T_g^* L_h)(b_{h.g}^*))(v_g) &= b_{h.g}^*((T_g L_h)(v_g)) \in \mathbb{R} \text{ ou :} \\ (T_g^* L_h)(b_{h.g}^*) &= b_{h.g}^* \circ (T_g L_h) \in T_g^* G. \end{aligned}$$

Et, en particulier, si $g = e : (T_e^* L_h)(w_h^*) = w_h^* \circ (T_e L_h) \in T_e^* G = \mathfrak{g}^*$.

$$\text{Étant donné que } T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow[\zeta \mapsto v_g=(T_e L_g)(\zeta)]{T_e L_g} T_g G \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} T_g^* G \xrightarrow[v_g^* \mapsto \zeta^*=(T_e^* L_g)(v_g^*)]{T_e^* L_g} T_e^* G &= \mathfrak{g}^*, \text{ avec } \langle \zeta^*, \zeta \rangle = \langle v_g^*, v_g \rangle_g \in \mathbb{R}, \text{ soit :} \\ ((T_e^* L_g)(v_g^*))(v_g) &= v_g^*((T_e L_g)(\zeta)) \in \mathbb{R} \text{ ou } (T_e^* L_g)(v_g^*) = v_g^* \circ (T_e L_g) \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

$$\text{Étant donné que } T_g G \xrightarrow[v_g \mapsto \zeta=(T_g L_{g^{-1}})(v_g)]{T_g L_{g^{-1}}} T_e G = \mathfrak{g} \text{ on a } T_e^* G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\zeta^* \mapsto v_g^*=(T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*)]{T_g^* L_{g^{-1}}} T_g^* G ,$$

avec $\langle v_g^*, v_g \rangle_g = \langle \zeta^*, \zeta \rangle \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{aligned} ((T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*))(v_g) &= \zeta^*((T_g L_{g^{-1}})(v_g)) \in \mathbb{R} \text{ ou :} \\ (T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*) &= \zeta^* \circ (T_g L_{g^{-1}}) \in T_g^* G. \end{aligned}$$

On a vu que : $T_g G \xrightarrow{T_g L_{h_1}} T_{h_1.g} G \xrightarrow{T_{h_1.g} L_{h_2}} T_{h_2.h_1.g} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g L_{h_2.h_1}} T_{h_2.h_1.g} G$ et par conséquent :

$T_{h_2 \cdot h_1 \cdot g}^* G \xrightarrow{T_{h_1 \cdot g}^* L_{h_2}} T_{h_1 \cdot g}^* G \xrightarrow{T_g^* L_{h_1}} T_g^* G$ est identique à $T_{h_2 \cdot h_1 \cdot g}^* G \xrightarrow{T_g^* L_{h_2 \cdot h_1}} T_g^* G$
et par conséquent :

$$T_g^* L_{h_2 \cdot h_1} = (T_g^* L_{h_1}) \circ (T_{h_1 \cdot g}^* L_{h_2}).$$

* En particulier si $h_1 = h$ et $h_2 = h^{-1}$:

$$\text{id} = T_g^* L_e = (T_g^* L_h) \circ (T_{h \cdot g}^* L_{h^{-1}}).$$

◇ Et si de plus $g = e$:

$$\text{id} = (T_e^* L_h) \circ (T_h^* L_{h^{-1}}). \text{ Donc } (T_h^* L_{h^{-1}})^{-1} = T_e^* L_h.$$

Si v^* représente un effort sur un corps alors $\zeta^* \triangleq (T_e^* L_g)(v_g^*)$ est la composante lagrangienne de cet effort ou effort dans le corps ou effort à gauche.

6.3 Les applications cotangentes, en un point, aux translations à droite

En mécanique ces applications sont utiles pour les efforts.

$$\acute{\text{E}}tant donn e que $T_g G \xrightarrow[v_g]{T_g R_h} T_{g \cdot h} G$ on a $T_{g \cdot h}^* G \xrightarrow[a_{g \cdot h}^*]{T_g^* R_h} T_g^* G$,$$

avec $\langle v_g^*, v_g \rangle_g = \langle a_{g \cdot h}^*, a_{g \cdot h} \rangle_{g \cdot h} \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{aligned} ((T_g^* R_h)(a_{g \cdot h}^*))(v_g) &= a_{g \cdot h}^* ((T_g R_h)(v_g)) \in \mathbb{R} \text{ ou :} \\ (T_g^* R_h)(a_{g \cdot h}^*) &= a_{g \cdot h}^* \circ (T_g R_h) \in T_g^* G. \end{aligned}$$

Et, en particulier, si $g = e$: $(T_e^* R_h)(w_h^*) = w_h^* \circ (T_e R_h) \in T_e^* G = \mathfrak{g}^*$.

$$\acute{\text{E}}tant donn e que $T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow[\alpha]{T_e R_g} T_g G$ on a :$$

$$\begin{aligned} T_g^* G \xrightarrow[v_g^*]{T_e^* R_g} T_e^* G &= \mathfrak{g}^*, \text{ avec } \langle \alpha^*, \alpha \rangle = \langle v_g^*, v_g \rangle_g \in \mathbb{R}, \text{ soit :} \\ ((T_e^* R_g)(v_g^*))(\alpha) &= v_g^* ((T_e R_g)(\alpha)) \in \mathbb{R} \text{ ou } (T_e^* R_g)(v_g^*) = v_g^* \circ (T_e R_g) \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

$$\acute{\text{E}}tant donn e que $T_g G \xrightarrow[v_g]{T_g R_{g^{-1}}} T_e G = \mathfrak{g}$ on a $T_e^* G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\alpha^*]{T_g^* R_{g^{-1}}} T_g^* G$,$$

avec $\langle v_g^*, v_g \rangle_g = \langle \alpha^*, \alpha \rangle \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{aligned} ((T_g^* R_{g^{-1}})(\alpha^*))(v_g) &= \alpha^* ((T_g R_{g^{-1}})(v_g)) \in \mathbb{R} \text{ ou :} \\ (T_g^* R_{g^{-1}})(\alpha^*) &= \alpha^* \circ (T_g R_{g^{-1}}) \in T_g^* G. \end{aligned}$$

On a vu que : $T_g G \xrightarrow{T_g R_{h_1}} T_{h_1 \cdot h} G \xrightarrow{T_{g \cdot h_1} R_{h_2}} T_{g \cdot h_1 \cdot h_2} G$ est identique à $T_g G \xrightarrow{T_g L_{h_1 \cdot h_2}} T_{g \cdot h_1 \cdot h_2} G$ et par conséquent :

$T_{g \cdot h_1 \cdot h_2}^* G \xrightarrow{T_{g \cdot h_1}^* R_{h_2}} T_{g \cdot h_1}^* G \xrightarrow{T_g^* R_{h_1}} T_g^* G$ est identique à $T_{g \cdot h_1 \cdot h_2}^* G \xrightarrow{T_g^* R_{h_1 \cdot h_2}} T_g^* G$
et par conséquent :

$$T_{g \cdot h_1 \cdot h_2}^* R_{h_1 \cdot h_2} = (T_{g \cdot h_1}^* R_{h_1}) \circ (T_{g \cdot h_1}^* R_{h_2}).$$

* En particulier si $h_1 = h$ et $h_2 = h^{-1}$:

$$\text{id} = T_g^* R_e = (T_g^* R_h) \circ (T_{g \cdot h}^* R_{h^{-1}}).$$

◇ Et si de plus $g = e$:

$$\text{id} = (T_e^* R_h) \circ (T_h^* R_{h^{-1}}). \text{ Donc } (T_h^* R_{h^{-1}})^{-1} = T_e^* R_h.$$

Si v_g^* représente un effort sur un corps alors $\alpha^* \triangleq (T_e^* R_g)(v_g^*)$ est la composante eulerienne de cet effort ou effort dans l'espace ou effort à droite.

6.4 Les applications cotangentes, en un point, aux compositions de translations à gauche et à droite

On a vu que $T_k(L_h \circ R_g) = (T_{h \cdot k} R_g) \circ (T_k L_h) = T_k(R_g \circ L_h)$; donc :

$$T_k^*(L_h \circ R_g) = (T_k^* L_h) \circ (T_{h \cdot k}^* R_g) = T_k^*(R_g \circ L_h).$$

* Notons, en faisant $k = e$, $g = h \cdot g$ et $h = h^{-1}$, que :

$$T_e^*(L_{h^{-1}} \circ R_{h \cdot g}) = (T_e^* L_{h^{-1}}) \circ (T_{h^{-1}}^* R_{h \cdot g}) = T_e^*(R_{h \cdot g} \circ L_{h^{-1}}).$$

* Et, en faisant $k = e$, $g = h^{-1}$ et $h = g \cdot h$, que :

$$T_e^*(L_{g \cdot h} \circ R_{h^{-1}}) = (T_e^* L_{g \cdot h}) \circ (T_{g \cdot h}^* R_{h^{-1}}) = T_e^*(R_{h^{-1}} \circ L_{g \cdot h}).$$

Et aussi que : $T_k(R_g \circ L_h) = (T_{k \cdot g} L_h) \circ (T_k R_g) = T_k(L_h \circ R_g)$; donc :

$$T_k^*(R_g \circ L_h) = (T_k^* R_g) \circ (T_{k \cdot g}^* L_h) = T_k^*(L_h \circ R_g).$$

* Notons, en faisant $k = e$, $g = h \cdot g$ et $h = h^{-1}$, que :

$$T_e^*(R_{h \cdot g} \circ L_{h^{-1}}) = (T_e^* R_{h \cdot g}) \circ (T_{h \cdot g}^* L_{h^{-1}}) = T_e^*(L_{h^{-1}} \circ R_{h \cdot g}).$$

* Et, en faisant $k = e$, $g = h^{-1}$ et $h = g \cdot h$, que :

$$T_e^*(R_{h^{-1}} \circ L_{g \cdot h}) = (T_e^* R_{h^{-1}}) \circ (T_{h^{-1}}^* L_{g \cdot h}) = T_e^*(L_{g \cdot h} \circ R_{h^{-1}}).$$

6.5 Les applications cotangentes, en un point, aux automorphismes intérieurs

On pourra consulter [1]¹⁷¹, [4]¹⁷² et [49]¹⁷³.

6.5.1 Les opérateurs Ad_h^*

Étant donné que $\mathfrak{g} \xrightarrow[\mu \mapsto \nu \triangleq \text{Ad}_h(\mu)]{\text{Ad}_h} \mathfrak{g}$ on a $\mathfrak{g}^* \xrightarrow[\mu^* \triangleq \text{Ad}_h^*(\nu^*)]{\text{Ad}_h^*} \mathfrak{g}^*$.

Et comme $\text{Ad}_h = (T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h) = (T_{h^{-1}} L_h) \circ (T_e R_{h^{-1}})$ on a :

$$\text{Ad}_h^* = (T_e^* L_h) \circ (T_h^* R_{h^{-1}}) = (T_e^* R_{h^{-1}}) \circ (T_{h^{-1}}^* L_h).$$

Étant donné que $\text{Ad}_{h_1} \circ \text{Ad}_{h_2} = \text{Ad}_{h_1 \cdot h_2}$ on a $\text{Ad}_{h_2}^* \circ \text{Ad}_{h_1}^* = \text{Ad}_{h_1 \cdot h_2}^*$.

On a vu que, en particulier :

$$\bullet T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow[\zeta \mapsto \alpha = \text{Ad}_g(\zeta)]{\text{Ad}_g} T_e G = \mathfrak{g} \text{ par conséquent :}$$

$$T_e^* G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\alpha^* \mapsto \zeta^* = \text{Ad}_g^*(\alpha^*)]{\text{Ad}_g^*} T_e^* G = \mathfrak{g}^*, \text{ avec :}$$

$\langle \zeta^*, \zeta \rangle = \langle \alpha^*, \alpha \rangle \in \mathbb{R}$, soit $(\text{Ad}_g^*(\alpha^*))(\zeta) = \alpha^*(\text{Ad}_g(\zeta)) \in \mathbb{R}$, ou :

$$\zeta^* = \text{Ad}_g^*(\alpha^*) = \alpha^* \circ \text{Ad}_g \in \mathfrak{g}^*.$$

$$\bullet T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow[\theta \mapsto \beta = \text{Ad}_g(\theta)]{\text{Ad}_g} T_e G = \mathfrak{g} \text{ par conséquent :}$$

$$T_e^* G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\beta^* \mapsto \theta^* = \text{Ad}_g^*(\beta^*)]{\text{Ad}_g^*} T_e^* G = \mathfrak{g}^*, \text{ avec :}$$

$\langle \theta^*, \theta \rangle = \langle \beta^*, \beta \rangle \in \mathbb{R}$, soit $(\text{Ad}_g^*(\beta^*))(\theta) = \beta^*(\text{Ad}_g(\theta)) \in \mathbb{R}$, ou :

$$\theta^* = \text{Ad}_g^*(\beta^*) = \beta^* \circ \text{Ad}_g \in \mathfrak{g}^*.$$

Appliquons ce qui précède avec $g = \exp(t\zeta)$, dérivons par rapport à t et considérons cette dérivée pour $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}^*(\alpha^*) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha^* \circ \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}), \text{ soit :}$$

$$\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}^* \right)(\alpha^*) = \alpha^* \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}, \text{ et donc :}$$

171. p. 268

172. pp. 319-320 mais qui définit l'opérateur co-adjoint par Ad_h^* et non $\text{Ad}_{h^{-1}}^*$

173. p. 311 et p. 445

$(\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}^*)(\alpha^*) = \alpha^* \circ \text{ad}_\zeta$. De même :

$(\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\theta)}^*)(\beta^*) = \beta^* \circ \text{ad}_\theta$.

L'espace vectoriel \mathfrak{g}^* étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}^*) = n$ soit $[[\text{Ad}_h^*]]$ la matrice carrée, d'ordre n (donc de dimension $n \times n$) qui représente Ad_h^* dans la base e_1^*, \dots, e_n^* . Alors :

$[[\text{Ad}_h^*]] = [[\text{Ad}_h]]^T$ et on a les égalités matricielles :

$[[\mu^*]] = [[\text{Ad}_h]]^T [[\nu^*]]$ et $[[\mu'^*]] = [[\text{Ad}_h]]^T [[\nu'^*]]$ et, en particulier :

$[[\zeta^*]] = [[\text{Ad}_g]]^T [[\alpha^*]]$ et $[[\theta^*]] = [[\text{Ad}_g]]^T [[\beta^*]]$.

Soit $[[\text{Ad}_h^*]]_{ij}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $[[\text{Ad}_h^*]]$. Alors on a $\nu_i^* = \sum_{j=1}^n [[\text{Ad}_h^*]]_{ij} \mu_j^*$, avec $[[\text{Ad}_h^*]]_{ij} = [[\text{Ad}_h]]_{ji}$ et, en particulier :

$\zeta_i^* = \sum_{j=1}^n [[\text{Ad}_g^*]]_{ij} \alpha_j^*$, avec $[[\text{Ad}_g^*]]_{ij} = [[\text{Ad}_g]]_{ji}$.

6.5.2 Les opérateurs $\text{Ad}_{h^{-1}}^*$

Étant donné que $\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Ad}_{h^{-1}}} \mathfrak{g}$ on a $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{Ad}_{h^{-1}}^*} \mathfrak{g}^*$.
 $\nu \mapsto \mu \triangleq \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu)$ $\mu^* \mapsto \nu^* \triangleq \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu^*)$

On a, d'après ce qui précède :

$$\text{Ad}_{h^{-1}}^* = (T_e^* L_{h^{-1}}) \circ (T_{h^{-1}}^* R_h) = (T_e^* R_h) \circ (T_h^* L_{h^{-1}}).$$

Remarque : on écrit $\text{Ad}_{h^{-1}}^*$ car $(\text{Ad}_{h^{-1}})^* = (\text{Ad}_h^*)^{-1}$.

$$\text{Et } \text{Ad}_{h_2^{-1}}^* \circ \text{Ad}_{h_1^{-1}}^* = \text{Ad}_{h_1^{-1} \cdot h_2^{-1}}^* = \text{Ad}_{(h_2 \cdot h_1)^{-1}}^*.$$

On a vu que, en particulier :

$$\bullet T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}} = T_e I_{g^{-1}}} T_e G = \mathfrak{g} \text{ par conséquent :}$$

$$\alpha \mapsto \zeta = \text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha)$$

$$T_e^* G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}}^* = T_e^* I_{g^{-1}}} T_e^* G = \mathfrak{g}^* \text{ , avec :}$$

$$\zeta^* \mapsto \alpha^* = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*)$$

$\langle \alpha^*, \alpha \rangle = \langle \zeta^*, \zeta \rangle \in \mathbb{R}$, soit $(\text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*))(\alpha) = \zeta^*(\text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha)) \in \mathbb{R}$, ou :

$$\alpha^* = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*) = \zeta^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}} \in \mathfrak{g}^*.$$

$$\bullet T_e G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}} = T_e I_{g^{-1}}} T_e G = \mathfrak{g} \text{ par conséquent :}$$

$$\beta \mapsto \theta = \text{Ad}_{g^{-1}}(\beta)$$

$$T_e^*G = \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\theta^*]{\text{Ad}_{g^{-1}}^* = T_e^* I_{g^{-1}}} T_e^*G = \mathfrak{g}^*, \text{ avec :}$$

$\langle \beta^*, \beta \rangle = \langle \theta^*, \theta \rangle \in \mathbb{R}$, soit $(\text{Ad}_{g^{-1}}^*(\theta^*))(\beta) = \theta^*(\text{Ad}_{g^{-1}}(\beta)) \in \mathbb{R}$, ou :

$$\beta^* = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\theta^*) = \theta^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}} \in \mathfrak{g}^*.$$

Appliquons ce qui précède avec $g^{-1} = \exp^{-1}(t\zeta) = \exp(-t\zeta)$, dérivons par rapport à t et considérons cette dérivée pour $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\zeta)}^*(\zeta^*) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\zeta^* \circ \text{Ad}_{\exp(-t\zeta)}), \text{ soit :}$$

$$\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\zeta)}^* \right)(\zeta^*) = \zeta^* \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\zeta)}, \text{ et donc :}$$

$$\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\zeta)}^* \right)(\zeta^*) = \zeta^* \circ \text{ad}_{-\zeta}. \text{ De même :}$$

$$\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\theta)}^* \right)(\theta^*) = \theta^* \circ \text{ad}_{-\theta}.$$

L'espace vectoriel \mathfrak{g}^* étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}^*) = n$ soit $[\text{Ad}_{h^{-1}}^*]$ la matrice carrée, d'ordre n (donc de dimension $n \times n$) qui représente $\text{Ad}_{h^{-1}}^*$ dans la base e_1^*, \dots, e_n^* . Alors $[\text{Ad}_{h^{-1}}^*] = [\text{Ad}_{h^{-1}}]^T = [\text{Ad}_h]^{-T}$ et on a les égalités matricielles :

$$[\nu^*] = [\text{Ad}_{h^{-1}}]^T [\mu^*] \text{ et } [\nu'^*] = [\text{Ad}_{h^{-1}}]^T [\mu'^*] \text{ et, en particulier :}$$

$$[\alpha^*] = [\text{Ad}_{g^{-1}}]^T [\zeta^*] \text{ et } [\beta^*] = [\text{Ad}_{g^{-1}}]^T [\theta^*].$$

Soit $[\text{Ad}_{h^{-1}}^*]_{ij}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $[\text{Ad}_{g^{-1}}^*]$. Alors on a $\nu_i^* = \sum_{j=1}^n [\text{Ad}_{h^{-1}}^*]_{ij} \mu_j^*$, avec $[\text{Ad}_{g^{-1}}^*]_{ij} = [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{ji}$ et , en particulier :

$$\alpha_i^* = \sum_{j=1}^n [\text{Ad}_{g^{-1}}^*]_{ij} \zeta_j^*, \text{ avec } [\text{Ad}_{g^{-1}}^*]_{ij} = [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{ji}$$

6.6 L'application cotangente ad_σ^* à l'application ad_σ

Étant donné que $\text{ad}_\sigma \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}$ on a $\text{ad}_\sigma^* \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}^*$.

Étant donné que, en particulier $\mathfrak{g} \xrightarrow[\theta]{\text{ad}_\zeta} \mathfrak{g}$ on a :

$$\mathfrak{g}^* \xrightarrow[\delta^*]{\text{ad}_\zeta^*} \mathfrak{g}^*, \text{ avec :}$$

$\langle \theta^*, \theta \rangle = \langle \delta^*, \delta \rangle \in \mathbb{R}$, soit $(\text{ad}_\zeta^*(\delta^*))(\theta) = \delta^*(\text{ad}_\zeta(\theta)) \in \mathbb{R}$, ou :

$$\text{ad}_\zeta^*(\delta^*) = \delta^* \circ \text{ad}_\zeta \in \mathfrak{g}^*. \text{ Soit :}$$

$$\text{ad}_\zeta^*(\delta^*) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}^* \right)(\delta^*) \text{ et finalement : } \text{ad}_\zeta^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\zeta)}^*.$$

Étant donné que :

$\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\zeta = \text{ad}_\alpha \circ \text{Ad}_g$ et , en particulier : $\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\xi = \text{ad}_\eta \circ \text{Ad}_g$, on a :
 $\text{ad}_\zeta^* \circ \text{Ad}_g^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{ad}_\alpha^*$ et , en particulier : $\text{ad}_\xi^* \circ \text{Ad}_g^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{ad}_\eta^*$.

Étant donné que :

$\text{ad}_\zeta \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\alpha$ et , en particulier : $\text{ad}_\xi \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\eta$,
on a :

$\text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \text{ad}_\zeta^* = \text{ad}_\alpha^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}}^*$ et , en particulier : $\text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \text{ad}_\xi^* = \text{ad}_\eta^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}}^*$.

L'espace vectoriel \mathfrak{g}^* étant de dimension finie : $\dim(\mathfrak{g}^*) = n$ soit $[[\text{ad}_\sigma^*]]$ la matrice carrée, d'ordre n (donc de dimension $n \times n$) qui représente ad_σ^* dans la base e_1^*, \dots, e_n^* . Alors $[[\text{ad}_\sigma^*]] = [[\text{ad}_\sigma]]^T$.

De même on a $[[\text{ad}_\zeta^*]] = [[\text{ad}_\zeta]]^T$ et $[[\text{ad}_\alpha^*]] = [[\text{ad}_\alpha]]^T$ et on a les égalités matricielles : $[[\theta^*]] = [[\text{ad}_\zeta]]^T [[\delta^*]]$ et $[[\beta^*]] = [[\text{ad}_\alpha]]^T [[\varepsilon^*]]$.

Soient $[[\text{ad}_\zeta^*]]_{ij}$ et $[[\text{ad}_\alpha^*]]_{ij}$ les éléments situés sur la ligne i et la colonne j des matrices $[[\text{ad}_\zeta^*]]$ et $[[\text{ad}_\alpha^*]]$.

Alors on a $\theta_i^* = \sum_{j=1}^n [[\text{ad}_\zeta^*]]_{ij} \delta_j^*$ et $\beta_i^* = \sum_{j=1}^n [[\text{ad}_\alpha^*]]_{ij} \varepsilon_j^*$, avec :
 $[[\text{ad}_\zeta^*]]_{ij} = [[\text{ad}_\zeta]]_{ji} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^j \zeta_k = - \sum_{k=1}^n c_{ik}^j \zeta_k$ et :
 $[[\text{ad}_\alpha^*]]_{ij} = [[\text{ad}_\alpha]]_{ji} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^j \alpha_k = - \sum_{k=1}^n c_{ik}^j \alpha_k$.

6.7 Le dual \mathfrak{g}^* est une variété de Poisson

Le dual \mathfrak{g}^* est une variété de Poisson en dotant $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ – l'ensemble des applications numériques différentielles sur \mathfrak{g}^* – d'un crochet de Poisson $\{, \}$ quelconque et on verra que c'est possible en exhibant deux crochets de Poisson particuliers $\{, \}_-$ (et alors on notera \mathfrak{g}_-^* ce dual) et $\{, \}_+$ (et alors on notera \mathfrak{g}_+^* ce dual) appelés crochets de Lie-Poisson.

On note par des lettres classiques F, G, H les éléments de $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$.

De la même manière que pour les champs de vecteurs hamiltoniens sur le fibré cotangent T^*M si $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ il existe un unique champ de vecteurs X_H sur \mathfrak{g}^* ($X_H \in \mathcal{X}(\mathfrak{g}^*)$ – ensemble des champs de vecteurs sur \mathfrak{g}^* –) tel que :

$$X_H[F] \triangleq \{F, H\}; \forall F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*).$$

X_H est appelé champ de vecteurs hamiltonien de H sur \mathfrak{g}^* et son flot $\{\varphi_t\}$ est appelé flot hamiltonien.

Soit $\mathcal{H}(\mathfrak{g}^*) \triangleq \{X_H \in \mathcal{X}(\mathfrak{g}^*) \mid H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)\}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens sur \mathfrak{g}^* . En effet c'est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{X}(\mathfrak{g}^*)$ et l'application $X. : \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{X.} \mathcal{H}(\mathfrak{g}^*)$ est un antihomomorphisme, i.e. :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*) & \xrightarrow{X.} & \mathcal{H}(\mathfrak{g}^*) \\ H & \mapsto & X_H \end{array}$$

$$[X_H, X_G] = -X_{\{H, G\}} \in \mathcal{H}(\mathfrak{g}^*).$$

La démonstration est la même que celle donnée précédemment pour les champs hamiltoniens sur les fibrés cotangents.

Soit $\sigma_0^* \in \mathfrak{g}^*$ quelconque. On a sur \mathfrak{g}^* les mêmes relations que l'on avait sur T^*M en remplaçant les lettres grasses par des lettres classiques et v_0^* par σ_0^* ; à savoir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F \circ \varphi_t(\sigma_0^*))(t) &= \frac{d}{dt} F(\varphi_t(\sigma_0^*)) = \frac{d}{dt}(F \circ \varphi_t)(\sigma_0^*) = (\{F, H\} \circ \varphi_t)(\sigma_0^*) \\ &= \{F, H\}(\varphi_t(\sigma_0^*)) = \{F \circ \varphi_t, H\}(\sigma_0^*) = \{F \circ \varphi_t, H \circ \varphi_t\}(\sigma_0^*) \in \mathbb{R}, \text{ car :} \end{aligned}$$

$$H \circ \varphi_t = H; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Et, en particulier, $\{F, H\} \circ \varphi_t = \{F \circ \varphi_t, H \circ \varphi_t\} \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$; soit :

$\varphi_t^* \{F, H\} = \{\varphi_t^* F, \varphi_t^* H\} \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. Mais on a généralisé ce résultat en remplaçant H par $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ quelconque :

$$\varphi_t^* \{F, G\} = \{\varphi_t^* F, \varphi_t^* G\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*).$$

Équations du mouvement sous forme d'un crochet de Poisson

Soit $\sigma^*(t) = \varphi_t(\sigma_0^*)$ et posons $\bar{F} \triangleq F \circ \varphi_t(\sigma_0^*)$. Alors on a, en particulier :

$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = \{F, H\}(\sigma^*(t)) \in \mathbb{R}$. Ce sont les équations du mouvement sous la forme d'un crochet de Poisson.

6.7.1 Les applications numériques différentielles sur le dual \mathfrak{g}^* et leurs dérivées fonctionnelles

On pourra consulter [13]¹⁷⁴ et [49]¹⁷⁵.

Soit $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. La dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}$ de F en $\sigma^* \in \mathfrak{g}^*$ est l'unique élément de l'algèbre \mathfrak{g} ($\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g}$), défini par :

$$\langle \delta \sigma^*, \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(\sigma^* + \varepsilon \delta \sigma^*) - F(\sigma^*)] \in \mathbb{R}; \forall \delta \sigma^* \in \mathfrak{g}^*.$$

Cependant étant donné que :

174. p. 7 Col. 2

175. p. 11 éq. (1.3.5)

$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi \cdot (\sigma_0^*)} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ et que $\bar{F} = F \circ \varphi \cdot (\sigma_0^*)$ on a, d'après la règle

de dérivation composée :

$$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = (T_{\sigma^*(t)} F) \left(\frac{d}{dt} \varphi_t(\sigma_0^*) \right) = (T_{\sigma^*(t)} F) \left(\frac{d}{dt} \sigma^*(t) \right).$$

Comme $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ car \mathfrak{g} est de dimension finie on peut dire que $T_{\sigma^*(t)} F = \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g}$ et comme \mathfrak{g}^* est un espace vectoriel on peut dire que $\frac{d}{dt} \varphi_t(\sigma_0^*) = \frac{d\sigma^*}{dt} \in \mathfrak{g}^*$. Dans ces conditions :

$$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \sigma^*(t), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right\rangle [49]^{176}.$$

Les espaces vectoriels \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* étant de dimensions finies : $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*) = n$ on a :

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i^* e_i^* \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^*} e_i \in \mathfrak{g} [49]^{177}.$$

$$\text{Alors } [\sigma^*] \triangleq (\sigma_1^* \dots \sigma_n^*)^T, \text{ et } \left[\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right] \triangleq \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1^*} \dots \frac{\partial F}{\partial \sigma_n^*} \right)^T.$$

6.7.2 Crochets de Lie-Poisson sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$

On pourra consulter [49]¹⁷⁸.

En fait on va définir deux variétés de Poisson; la première \mathfrak{g}_-^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_-$ est liée à une conception lagrangienne et aux translations à gauche sur le groupe de Lie G alors que la seconde \mathfrak{g}_+^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_+$ est liée à une conception eulérienne et aux translations à droite sur le groupe de Lie G . On va remplacer σ^* dans \mathfrak{g}^* par ν^* dans \mathfrak{g}_-^* et par μ^* dans \mathfrak{g}_+^* .

Si $F, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ alors ces deux crochets de Lie-Poisson $\{, \}_\mp$ sont tels que :

$$\{F, H\}_\mp(\sigma^*) \triangleq \mp \left\langle \sigma^*, \left[\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right] \right\rangle \in \mathbb{R}; \forall \sigma^* \in \mathfrak{g}^* [49]^{179}.$$

On a $\{F, H\}_\mp(\sigma^*) = \pm \left\langle \sigma^*, \left[\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right] \right\rangle = \pm \left\langle \sigma^*, \text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}} \left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right) \right\rangle = \pm \left\langle \text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}^*(\sigma^*), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right\rangle [49]^{180}$. En fait :

$$\{F^-, H^-\}_-(\nu^*) = \left\langle \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \nu^*}}^*(\nu^*), \frac{\delta F^-}{\delta \nu^*} \right\rangle; \nu^* \in \mathfrak{g}_-^*, F^-, H^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*) \text{ et :}$$

176. p. 361 éq. (10.7.2)

177. p. 11

178. p. 5 (dans un cas particulier), pp. 11-16 pp. 327-329 et p. 417-423 Chapitre 13 § 13.1, 13.2 et 13.3

179. p. 11 éq. (1.3.6), p. 328 éq. (10.1.1) et p. 418 éq; (13.1.1)

180. p. 361 éq. (10.7.3)

$$\{F^+, H^+\}_+(\mu^*) = - \langle \text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \mu^*}}^*(\mu^*), \frac{\delta F^+}{\delta \mu^*} \rangle; \mu^* \in \mathfrak{g}_+^*, F^+, H^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*).$$

Ces deux crochets de Lie-Poisson sont effectivement des crochets de Poisson

Démonstration

On doit avoir :

- * $\{F, H\}_\mp$ bilinéaire en F et H ,
- * $\{F, H\}_\mp = -\{H, F\}_\mp$ antisymétrie,
- * $\{\{F, H\}_\mp, G\}_\mp + \{\{G, F\}_\mp, H\}_\mp + \{\{H, G\}_\mp, F\}_\mp = 0$ identité de Jacobi,
- * $\{F H, G\}_\mp = F \{H, G\}_\mp + H \{F, G\}_\mp$ identité de Liebniz.

Les deux premières propriétés sont évidentes à vérifier d'après celles du crochet de Lie. L'identité de Liebniz dépend de celle du crochet de Lie et de la règle de Liebniz :

$$\frac{\delta(FH)}{\delta \sigma^*} = F(\sigma^*) \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} + H(\sigma^*) \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g} \text{ [49] }^{181}.$$

Cette règle à un sens car $F(\sigma^*), H(\sigma^*) \in \mathbb{R}$, $\frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g}$, $\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} étant un espace vectoriel on a $F(\sigma^*) \frac{\delta H}{\delta \sigma^*}, H(\sigma^*) \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \in \mathfrak{g}$ et donc les deux membres qui apparaissent dans cette règle sont bien dans \mathfrak{g} .

Démonstration de l'identité de Liebniz

$$\begin{aligned} \{F H, G\}_\mp(\sigma^*) &\triangleq \mp \langle \sigma^*, [\frac{\delta(FH)}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta G}{\delta \sigma^*}] \rangle \\ &= \mp \langle \sigma^*, [F(\sigma^*) \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} + H(\sigma^*) \frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta G}{\delta \sigma^*}] \rangle \\ &= \mp F(\sigma^*) \langle \sigma^*, [\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta G}{\delta \sigma^*}] \rangle + \mp H(\sigma^*) \langle \sigma^*, [\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta G}{\delta \sigma^*}] \rangle \\ &= F(\sigma^*) \{H, G\}_\mp(\sigma^*) + H(\sigma^*) \{F, G\}_\mp(\sigma^*) \in \mathbb{R}; \forall \sigma^* \in \mathfrak{g}^* \text{ et par conséquent :} \end{aligned}$$

$$\{F H, G\}_\mp = F \{H, G\}_\mp + H \{F, G\}_\mp \text{ QED.}$$

L'identité de Jacobi est plus difficile à vérifier dans le cas général. Elle dépend de celle du crochet de Lie et du calcul de $\frac{\delta\{F, H\}_\mp}{\delta \sigma^*}$. Ce calcul est indiqué par [49]¹⁸² mais les termes employés sont malheureusement mal définis. Les espaces vectoriels \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* étant de dimensions finies :

$\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*) = n$ on a :

$\{F, H\}_\mp(\sigma^*) = \pm [\sigma^*]^T [\text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*})] = \pm [\sigma^*]^T [[\text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}] [\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}]]$, avec, d'après ce qui précède :

$$[[\text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}]_{ij}] = \sum_{k=1}^n c_{kj}^i \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} = - \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*}. \text{ Soit :}$$

181. p. 328

182. p. 329 éq. (10.1.2)

$$\{F, H\}_{\mp}(\sigma^*) = \mp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \sigma_i^* \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} \quad [49]^{183}.$$

Dans ce cas on a [49]¹⁸⁴ :

$$\mp \left[\left[\frac{\delta\{F, H\}_{\mp}}{\delta \sigma^*} \right] \right] = \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right) \right] - \left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta G}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] + \left[\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] \right]$$

Démonstration de cette formule matricielle

On a $\left[\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right]_l = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^l \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*}$ et soient

$$\left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^{*2}} \right] \right]_{lj} \triangleq \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_j^*} \quad \text{et} \quad \left[\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^{*2}} \right] \right]_{lk} \triangleq \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_k^*}.$$

Étant donné que $\{F, H\}_{\mp}(\sigma^*) = \mp \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \sigma_i^* \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*}$ on a :

$$\begin{aligned} \mp \frac{\partial \{F, H\}_{\mp}}{\partial \sigma_l^*} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \left[\delta_{il} \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} + \sigma_i^* \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_k^*} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_j^*} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{kj}^i \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*} \right) \sigma_i^* \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial \sigma_l^* \partial \sigma_k^*} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{jk}^i \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^*} \right) \sigma_i^*; \text{ soit :} \end{aligned}$$

$$\mp \left(\left[\left[\frac{\delta\{F, H\}_{\mp}}{\delta \sigma^*} \right] \right] \right)_l = \left(\left[\left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right) \right] \right)_l - \left(\left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta G}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] \right] \right)_l + \left(\left[\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] \right] \right)_l$$

et finalement :

$$\mp \left[\left[\frac{\delta\{F, H\}_{\mp}}{\delta \sigma^*} \right] \right] = \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right) \right] - \left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta G}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] + \left[\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] \right]$$

QED.

Démonstration de l'identité de Jacobi dans ce cas particulier

Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

Exemple

Si $n = 2$, avec : $F(\sigma^*) \triangleq \frac{1}{2} a \sigma_1^{*2} + b \sigma_1^* \sigma_2^* + \frac{1}{2} c \sigma_2^{*2} + d \sigma_1^* + e \sigma_2^* + f$ et :
 $H(\sigma^*) \triangleq \frac{1}{2} a' \sigma_1^{*2} + b' \sigma_1^* \sigma_2^* + \frac{1}{2} c' \sigma_2^{*2} + d' \sigma_1^* + e' \sigma_2^* + f'$ on trouve :

$$\mp \left[\left[\frac{\delta\{F, H\}_{\mp}}{\delta \sigma^*} \right] \right] = \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}, \frac{\delta H}{\delta \sigma^*} \right) \right] - \left[\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] + \left[\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^{*2}} \right] \left[\text{ad}_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}} \right]^T \left[\sigma^* \right] \right]$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} A &= 2c_{12}^1 (ab' - ba') \sigma_1^{*2} + [c_{12}^1 (ac' - ca')] \\ &+ 2c_{12}^2 (ab' - ba') \sigma_1^* \sigma_2^* + c_{12}^2 (ac' - ca') \sigma_2^{*2} + c_{12}^1 (ae' - ea' + db' - bd') \sigma_1^* \\ &+ c_{12}^2 (ae' - ea' + db' - bd') \sigma_2^* \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= c_{12}^1 (ac' - ca') \sigma_1^{*2} + [c_{12}^2 (ac' - ca')] \\ &+ 2c_{12}^1 (bc' - cb') \sigma_1^* \sigma_2^* + 2c_{12}^2 (bc' - cb') \sigma_2^{*2} + c_{12}^1 (be' - eb' + dc' - cd') \sigma_1^* \\ &+ c_{12}^2 (be' - eb' + dc' - cd') \sigma_2^*. \end{aligned}$$

183. p. 362 éq. (10.7.7) où les sommes sont omises

184. p. 329 éq. (10.1.2)

6.7.3 Équations de Lie-Poisson

Soit $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, X_H le champ de vecteurs hamiltonien de H et $\{\varphi_t\}$ le flot de X_H . Soit $\sigma^*(t) = \varphi_t(\sigma_0^*)$.

Soit $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\bar{F} = F \circ \varphi_t(\sigma_0^*)$. On a :

$$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = \{F, H\}_{\mp}(\sigma^*(t)) = \pm \langle \text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}^*(\sigma^*(t)), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \rangle, \text{ mais également :}$$

$$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = \langle \frac{d}{dt} \sigma^*(t), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \rangle. \text{ Par conséquent :}$$

$\frac{d}{dt} \sigma^*(t) = \pm \text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}^*(\sigma^*(t))$, avec $\sigma^*(t) = \varphi_t(\sigma_0^*)$ [49]¹⁸⁵. Il s'agit des équations de Lie-Poisson. Pour être plus explicite :

• si on utilise le crochet de Lie-Poisson $\{, \}_-$ et avec $H^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*)$ on a :

$$\frac{d}{dt} \nu^*(t) = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \nu^*}}^*(\nu^*(t)), \text{ avec } \nu^*(t) = \varphi_t(\nu_0^*) \text{ [49]}^{186}.$$

• si on utilise le crochet de Lie-Poisson $\{, \}_+$ et avec $H^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$ on a :

$$\frac{d}{dt} \mu^*(t) = -\text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \mu^*}}^*(\mu^*(t)), \text{ avec } \mu^*(t) = \varphi_t(\mu_0^*) \text{ [49]}^{187}.$$

Dans le cas particulier où les espaces vectoriels \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* sont de dimensions finies : $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*) = n$ on a :

$$\left[\frac{d}{dt} \sigma^*(t) \right] = \pm \left[\text{ad}_{\frac{\delta H}{\delta \sigma^*}}^* \right] \left[\sigma^*(t) \right]; \text{ soit :}$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i^*(t) = \pm \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (c_{ki}^j \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*}) \sigma_j^*(t) = \pm \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (c_{ik}^j \frac{\partial H}{\partial \sigma_k^*}) \sigma_j^*(t) \text{ [49]}^{188}.$$

6.8 Le fibré cotangent T^*G

On pourra consulter [49]¹⁸⁹.

6.8.1 Définition

$T^*G \triangleq \bigcup_{g \in G} T_g^*G$, où \bigcup est une union disjointe.

T_g^*G est appelée fibre au dessus de g .

Soit τ_G^* la projection canonique (souvent appelée pied) de T^*G sur G . Si $v^* \in T^*G$ alors $v^* = (g, v_g^*)$, avec $g \triangleq \tau_G^*(v^*)$ et $v_g^* \in T_g^*G$.

185. p. 12 éq. (1.3.11) et p. 360 éq. (10.7.1)

186. p. 424 éq. et p. 427 éq. (13.4.20)

187. p. 427 éq. (13.4.23)

188. p. 12 en remplaçant c par d et en corrigeant l'erreur de signe et p. 362 éq. (10.7.9) où les sommes sont omises et en corrigeant l'erreur de signe

189. pp. 165-180

On peut trivialisier T^*G car $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ (cf. ci-après) [35]¹⁹⁰.

On a vu que T^*G est une variété de Poisson et alors $T^*G/G \cong \mathfrak{g}^*$ [49]¹⁹¹.

6.8.2 Définition de T^*L_h

Étant donné que $TG \xrightarrow{TL_h} TG$, $v=(g, v_g) \mapsto b=(TL_h)(v) \triangleq (L_h(g), (T_g L_h)(v_g)) = (h \cdot g, b_{h \cdot g})$, on a :

$$T^*G \xrightarrow{T^*L_h} T^*G$$

$$b^*=(h \cdot g, b_{h \cdot g}^*) \mapsto v^*=(T^*L_h)(b^*) \triangleq (L_{h^{-1}}(h \cdot g), (T_g^* L_h)(b_{h \cdot g}^*)) = (g, v_g^*)$$

Donc, avec $v^* = (g, v_g^*)$:

$$(T^*L_h)(v^*) = (L_{h^{-1}}(g), T_{h^{-1} \cdot g}^* L_h(v_g^*)) = (h^{-1} \cdot g, T_{h^{-1} \cdot g}^* L_h(v_g^*)).$$

6.8.3 Définition de T^*R_h

Étant donné que $TG \xrightarrow{TR_h} TG$, $v=(g, v_g) \mapsto a=(TR_h)(v) \triangleq (R_h(g), (T_g R_h)(v_g)) = (g \cdot h, a_{g \cdot h})$, on a :

$$T^*G \xrightarrow{T^*R_h} T^*G$$

$$a^*=(g \cdot h, a_{g \cdot h}^*) \mapsto v^*=(T^*R_h)(a^*) \triangleq (R_{h^{-1}}(g \cdot h), (T_g^* R_h)(a_{g \cdot h}^*)) = (g, v_g^*)$$

Donc, avec $v^* = (g, v_g^*)$:

$$(T^*R_h)(v^*) = (R_{h^{-1}}(g), T_{g \cdot h^{-1}}^* R_h(v_g^*)) = (g \cdot h^{-1}, T_{g \cdot h^{-1}}^* R_h(v_g^*)).$$

6.9 Les applications λ , λ^{-1} , ρ et ρ^{-1}

On pourra consulter [1]¹⁹² et [35]¹⁹³.

Le fibré T^*G est trivial grâce à deux isomorphismes $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ et alors $T^*G/G \cong \mathfrak{g}^*$.

◇ Premier isomorphisme grâce aux applications λ et λ^{-1} :

$$T^*G \xrightarrow{\lambda} G \times \mathfrak{g}^* \quad [1]^{194}. \text{ Alors :}$$

$$v^*=(g, v_g^*) \mapsto \lambda(v^*)=(g, \zeta^*)=(g, (T_g^* L_g)(v_g^*))$$

$$G \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\lambda^{-1}} T^*G \quad [1]^{195}.$$

$$(g, \zeta^*) \mapsto \lambda^{-1}(g, \zeta^*)=v^*=(g, v_g^*)=(g, (T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*))$$

190. p. 7

191. p. 421

192. pp. 313-314 où λ est noté $\bar{\lambda}$ et ρ est noté $\bar{\rho}$

193. p. 8 où λ est noté (id, λ) et ρ est noté (id, ρ)

194. p. 314

195. p. 314

◇ Second isomorphisme grâce aux applications ρ et ρ^{-1} :

$$T^*G \xrightarrow{\rho} G \times \mathfrak{g}^* \quad [1]^{196}. \text{ Alors :}$$

$$v^*=(g, v_g^*) \mapsto \rho(v^*)=(g, \alpha^*)=(g, (T_e^*R_g)(v_g^*))$$

$$G \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\rho^{-1}} T^*G \quad [1]^{197}.$$

$$(g, \alpha^*) \mapsto \rho^{-1}(g, \alpha^*)=v^*=(g, v_g^*)=(g, (T_g^*R_{g^{-1}})(\alpha^*))$$

On a $(\rho \circ \lambda^{-1})(g, \zeta^*) = (g, \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*)) = (g, \alpha^*) \in G \times \mathfrak{g}^*$ [1]¹⁹⁸ et [49]¹⁹⁹.

$$(\lambda \circ T^*L_g \circ \lambda^{-1})(h, \zeta^*) = (g^{-1} \cdot h, \zeta^*) \quad [1]^{200}.$$

$$(\rho \circ T^*L_g \circ \rho^{-1})(h, \alpha^*) = (g^{-1} \cdot h, \text{Ad}_g^*(\alpha^*)) = (g^{-1} \cdot h, \zeta^*) \quad [1]^{201}.$$

$$\text{Soient } T_g^*G \xrightarrow{\bar{\lambda} \triangleq T_e^*L_g} \mathfrak{g}^* \quad \text{et } T_g^*G \xrightarrow{\bar{\rho} \triangleq T_e^*R_g} \mathfrak{g}^*.$$

$$v_g^* \mapsto \zeta^*=\bar{\lambda}(v_g^*)=(T_e^*L_g)(v_g^*) \quad v_g^* \mapsto \alpha^*=\bar{\rho}(v_g^*)=(T_e^*R_g)(v_g^*)$$

Remarque : on verra que :

$$T^*G \xrightarrow{\mathbf{J}_R} \mathfrak{g}^* \quad [49]^{202} \text{ et :}$$

$$v^*=(g, v_g^*) \mapsto \zeta^*=\mathbf{J}_R(v^*)=(T_e^*L_g)(v_g^*)=\bar{\lambda}(v_g^*)$$

$$T^*G \xrightarrow{\mathbf{J}_L} \mathfrak{g}^* .$$

$$v^*=(g, v_g^*) \mapsto \alpha^*=\mathbf{J}_L(v^*)=(T_e^*R_g)(v_g^*)=\bar{\rho}(v_g^*)$$

6.10 Dérivation des courbes

On pourra consulter [49]²⁰³.

Soient $\xi(t) \triangleq (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t))$ et $\eta(t) \triangleq (T_{g(t)}R_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t))$.

Alors $\eta(t) = \text{Ad}_{g(t)}(\xi(t))$. Dans ces conditions $g(t) = g(t_0) \cdot \exp((t-t_0)\xi(t_0))$.

Alors $g^{-1}(t_0) \cdot g(t) = \exp((t-t_0)\xi(t_0))$ et comme $\text{ad}_\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}$ on a $\text{ad}_{\xi(t_0)} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \text{Ad}_{\exp((t-t_0)\xi(t_0))} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}$.

6.10.1 À gauche

Soient alors les deux courbes différentielles *indépendantes* :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} G \quad \text{et } \mathbb{R} \xrightarrow{\zeta} \mathfrak{g} .$$

$$t \mapsto g(t) \triangleq g(t_0) \cdot \exp((t-t_0)\xi) \quad t \mapsto \zeta(t)$$

196. p. 314

197. p. 314

198. p. 314

199. p. 424 éq. (13.4.5)

200. p. 314

201. p. 314

202. p. 421 et p. 425 éq. (13.4.8)

203. pp. 318-319

Étant donné que $\alpha(t) \triangleq \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t))$ on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \alpha(t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g(t_0) \cdot g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}(\zeta(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g(t_0)}(\text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}(\zeta(t))) = \text{Ad}_{g(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}(\zeta(t))\right). \end{aligned}$$

Mais, par dérivation composée :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}(\zeta(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t)}\right)(\zeta(t_0)) + \text{Ad}_{g^{-1}(t_0) \cdot g(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \zeta(t)\right) \\ &= \text{ad}_{\xi(t_0)}(\zeta(t_0)) + \text{Ad}_e \frac{d\zeta}{dt}(t_0) = \text{ad}_{\xi(t_0)}(\zeta(t_0)) + \frac{d\zeta}{dt}(t_0). \text{ Par conséquent :} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \alpha(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t_0)}(\text{ad}_{\xi(t_0)}(\zeta(t_0)) + \frac{d\zeta}{dt}(t_0));$$

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$. Soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}(\text{ad}_{\xi(t)}(\zeta(t)) + \frac{d}{dt} \zeta(t)) \\ &= \text{Ad}_{g(t)}([\xi(t), \zeta(t)] + \frac{d}{dt} \zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}\left(\frac{d}{dt} \zeta(t)\right) + [\eta(t), \alpha(t)] \text{ (I) [1]}^{204} \text{ et [49]}^{205}. \end{aligned}$$

De même on démontre :

$$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(\zeta^*(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(-\text{ad}_{\xi(t)}^*(\zeta^*(t)) + \frac{d}{dt} \zeta^*(t)) \text{ (II) [1]}^{206} \text{ et [49]}^{207}.$$

6.10.2 À droite

Soient alors les deux courbes différentielles *indépendantes* :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} G \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g}.$$

$$t \mapsto g(t) \triangleq g(t_0) \cdot \exp((t-t_0)\xi) \quad t \mapsto \alpha(t)$$

Étant donné que $\zeta(t) \triangleq \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t))$ on démontre de même :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-\text{ad}_{\eta(t)}(\alpha(t)) + \frac{d}{dt} \alpha(t)) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-[\eta(t), \alpha(t)] + \frac{d}{dt} \alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}\left(\frac{d}{dt} \alpha(t)\right) - [\xi(t), \zeta(t)] \text{ (III) [49]}^{208}. \end{aligned}$$

Remarque : en fait (III) se démontre en appliquant à gauche $\text{Ad}_{g^{-1}(t)}$ à (I).

$$\text{Et } \frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}^*(\alpha^*(t)) = \text{Ad}_{g(t)}^*(\text{ad}_{\eta(t)}^*(\alpha^*(t)) + \frac{d}{dt} \alpha^*(t)) \text{ (IV) [49]}^{209}.$$

Remarque : en fait (IV) se démontre en appliquant à gauche, $\text{Ad}_{g(t)}^*$ à (II).

204. pp. 312-313

205. p. 318 éq. (9.3.4)

206. p. 314

207. p. 318 éq. (9.3.5)

208. p. 319 éq. (9.3.6)

209. p. 319 éq. (9.3.7)

7 Application différentielle J de T^*M dans \mathfrak{g}^* et application moment

Soit $T^*M \xrightarrow[v^*]{J} \mathfrak{g}^*$ une application différentielle de T^*M dans \mathfrak{g}^* .
 $\sigma^* = J(v^*)$

Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une application entre deux variétés de Poisson.

7.1 Application C de \mathfrak{g} dans $\mathcal{X}(M)$

Considérons l'application C :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\sigma \mapsto \sigma_M \triangleq C(\sigma)]{C} \mathcal{X}(M), \text{ avec } \sigma_M(x) = (x, \sigma_{Mx}) \in TM.$$

De même soit $\sigma'_M \triangleq C(\sigma')$, avec $\sigma'_M(x) = (x, \sigma'_{Mx}) \in TM$.

Et soit $\{\theta_t\}$ le flot du champ de vecteurs σ_M sur M .

On dira que cette application est un antihomomorphisme d'algèbres de Lie ssi :

$$C([\sigma, \sigma']) = -[C(\sigma), C(\sigma')] \text{ soit } [\sigma, \sigma']_M = -[\sigma_M, \sigma'_M].$$

Soit $\mathcal{P}(\sigma_M)$ la fonction moment de σ_M ($\mathcal{P}(\sigma_M) \in \mathcal{F}(T^*M)$); on a (rappel) :

$$\mathcal{P}(\sigma_M)(v^*) \triangleq \langle v^*, \sigma_{Mx} \rangle_x, \text{ avec } x = \tau_M^*(v^*).$$

D'après le lemme du commutateur des moments on a (rappel) :

$$\{\mathcal{P}(\sigma_M), \mathcal{P}(\sigma'_M)\} = -\mathcal{P}([\sigma_M, \sigma'_M]).$$

7.2 Application D de \mathfrak{g} dans $\mathcal{X}(T^*M)$

Considérons l'application D :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\sigma \mapsto \sigma_{T^*M} \triangleq D(\sigma)]{D} \mathcal{X}(T^*M), \text{ avec } \sigma_{T^*M}(v^*) = (v^*, \sigma_{T^*M}v^*) \in T(T^*M)$$

De même soit $\sigma'_{T^*M} \triangleq D(\sigma')$, avec $\sigma'_{T^*M}(v^*) = (v^*, \sigma'_{T^*M}v^*) \in T(T^*M)$.

Et soit $\{\theta_t\}$ le flot du champ de vecteurs σ_{T^*M} sur T^*M .

On dira que cette application est un antihomomorphisme d'algèbres de Lie ssi :

$$D([\sigma, \sigma']) = -[D(\sigma), D(\sigma')] \text{ soit } [\sigma, \sigma']_{T^*M} = -[\sigma_{T^*M}, \sigma'_{T^*M}].$$

7.3 Application moment \mathbf{J}

Supposons qu'il existe une application linéaire :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\sigma \mapsto]{J} \mathcal{F}(T^*M) \text{ telle que :}$$

$$\sigma_{T^*M} = X_{J_\sigma}; \forall \sigma \in \mathfrak{g} \text{ [5]}^{210} \text{ et [49]}^{211}.$$

Cela veut dire que σ_{T^*M} est un champ de vecteurs hamiltonien : $\sigma_{T^*M} \in \mathcal{H}(T^*M)$ et alors D applique \mathfrak{g} dans $\mathcal{H}(T^*M)$. De plus comme $\mathcal{H}(T^*M) \subset \mathcal{P}(T^*M)$ il s'en suit que σ_{T^*M} est un automorphisme de Poisson infinitésimal; soit :

$$\sigma_{T^*M}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\sigma_{T^*M}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \sigma_{T^*M}[\mathbf{G}]\}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Alors l'application différentielle \mathbf{J} :

$$T^*M \xrightarrow[v^* \mapsto]{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \text{ telle que :}$$

$\langle \sigma^*, \sigma \rangle = \langle \mathbf{J}(v^*), \sigma \rangle \triangleq \pm J_\sigma(v^*) \in \mathbb{R}; \forall \sigma \in \mathfrak{g}$ et $\forall v^* \in T^*M$ est appelée *application moment* (nous préciserons de quoi par la suite). [4]²¹² [49]²¹³.

Alors $\langle (T_{v^*}\mathbf{J})(v_{v^*}), \sigma \rangle = \pm (T_{v^*}J_\sigma)(v_{v^*}); \forall \sigma \in \mathfrak{g}$ et $\forall v_{v^*} \in T_{v^*}(T^*M)$ [49]²¹⁴.

Démonstration

$T^*M \xrightarrow[v^* \mapsto]{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\sigma^* = \mathbf{J}(v^*) \mapsto]{\langle \cdot, \sigma \rangle} \mathbb{R}$ est identique à $T^*M \xrightarrow[v^* \mapsto]{\pm J_\sigma} \mathbb{R}$
 et $\langle \cdot, \sigma \rangle$ est linéaire. Dans ces conditions :

$$T_{v^*}(T^*M) \xrightarrow[v_{v^*} \mapsto]{T_{v^*}\mathbf{J}} T_{\sigma^*}\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^* \xrightarrow[\pm(T_{v^*}\mathbf{J})(v_{v^*}), \sigma \mapsto]{T_{\sigma^*}\langle \cdot, \sigma \rangle = \langle \cdot, \sigma \rangle} T_{\langle \sigma^*, \sigma \rangle} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

est identique à $T_{v^*}(T^*M) \xrightarrow[v_{v^*} \mapsto]{T_{v^*}(\pm J_\sigma) = \pm T_{v^*}J_\sigma} T_{\pm J_\sigma(v^*)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\langle (T_{v^*}\mathbf{J})(v_{v^*}), \sigma \rangle = \pm (T_{v^*}J_\sigma)(v_{v^*}); \forall \sigma \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v_{v^*} \in T_{v^*}(T^*M) \text{ QED.}$$

Notons en particulier, pour la suite, que :

210. p. 46

211. p. 367 éqs (11.1.11) et (11.2.1)

212. pp.371-374 Appendix 3 : "Dynamical systems with symmetries" et, en particulier, partie A : "Poisson action of the groups". L'application moment est notée P et agit sur une variété symplectique. On peut se demander si l'action n'est pas à droite

213. p. 367 éq. (11.2.2)

214. p. 378 éq. (11.5.3)

$\langle (T_{v^*}\mathbf{J})(X_{\mathbf{H}v^*}), \sigma \rangle = \pm (T_{v^*}J_\sigma)(X_{\mathbf{H}v^*})$ car $X_{\mathbf{H}v^*} \in T_{v^*}(T^*M)$
et si $\sigma = \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} : \langle (T_{v^*}\mathbf{J})(X_{\mathbf{H}v^*}), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \rangle = \pm (T_{v^*}J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}})(X_{\mathbf{H}v^*})$.

7.3.1 Théorème hamiltonien collectif

On pourra consulter [49]²¹⁵

Soient $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, $\mathbf{F} \triangleq F \circ \mathbf{J} \in \mathcal{F}(T^*M)$ (fonction appelée collective) et $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ alors :

$$X_{\mathbf{F}} = X_{F \circ \mathbf{J}} = \pm X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}}} = \pm \left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right)_{T^*M} \in \mathcal{X}(T^*M).$$

Démonstration

$$(X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}])(v^*) = (T_{v^*}\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}v^*}); \text{ soit } (X_{\mathbf{F}}[\mathbf{H}])(v^*) = -(T_{v^*}\mathbf{F})(X_{\mathbf{H}v^*}).$$

Mais $\mathbf{F}(v^*) = F(\mathbf{J}(v^*)) = F(\sigma^*)$ et par la règle de composition :
 $T_{v^*}\mathbf{F} = (T_{\sigma^*}F) \circ (T_{v^*}\mathbf{J})$ et alors :

$$(X_{\mathbf{F}}[\mathbf{H}])(v^*) = -(T_{\sigma^*}F)((T_{v^*}\mathbf{J})(X_{\mathbf{H}v^*})).$$

Étant donné que $T_{\sigma^*}F = \frac{\delta F}{\delta \sigma^*}$ on a :

$$(X_{\mathbf{F}}[\mathbf{H}])(v^*) = - \langle (T_{v^*}\mathbf{J})(X_{\mathbf{H}v^*}), \frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \rangle. \text{ Soit, d'après ce qui précède :}$$

$$(X_{\mathbf{F}}[\mathbf{H}])(v^*) = \mp (T_{v^*}J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}})(X_{\mathbf{H}v^*}) = \mp (X_{\mathbf{H}}[J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}}])(v^*) = \pm X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}}}[\mathbf{H}](v^*);$$

$\forall v^* \in T^*M$. Par conséquent :

$$(X_{\mathbf{F}}[\mathbf{H}]) = \pm X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}}}[\mathbf{H}]; \forall \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M) \text{ et finalement :}$$

$$X_{\mathbf{F}} = X_{F \circ \mathbf{J}} = \pm X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \sigma^*}}} = \pm \left(\frac{\delta F}{\delta \sigma^*} \right)_{T^*M} \in \mathcal{X}(T^*M) \text{ QED.}$$

Application moment \mathbf{J} infinitésimalement équivariante

L'application moment \mathbf{J} est dite infinitésimalement équivariante ssi :

$$\{J_\sigma, J_{\sigma'}\} = J_{[\sigma, \sigma']} \in \mathcal{F}(T^*M); \forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{g} \text{ [49]}^{216}.$$

L'application moment \mathbf{J} est infinitésimalement équivariante ssi :

$$(T_{v^*}\mathbf{J})(\sigma'_{T^*Mv^*}) = -\text{ad}^*_{\sigma'}(\mathbf{J}(v^*)); \forall \sigma' \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ [49]}^{217}.$$

215. p. 404 Théorème 12.4.2

216. p. 378 éq. (11.5.2) et p. 403

217. p. 379 éq. (11.5.6)

Démonstration

• $\{J_\sigma, J_{\sigma'}\}(v^*) = (X_{J_{\sigma'}}[J_\sigma])(v^*) = (T_{v^*}J_\sigma)(X_{J_{\sigma'}v^*})$
 $= \pm \langle T_{v^*}\mathbf{J}(X_{J_{\sigma'}v^*}), \sigma \rangle$, d'après ce qui précède. Par conséquent :

$$\{J_\sigma, J_{\sigma'}\}(v^*) = \pm \langle T_{v^*}\mathbf{J}(\sigma'_{T^*Mv^*}), \sigma \rangle [49]^{218}.$$

• $J_{[\sigma, \sigma']}(v^*) = \pm \langle \mathbf{J}(v^*), [\sigma, \sigma'] \rangle = \mp \langle \mathbf{J}(v^*), \text{ad}_{\sigma'}(\sigma) \rangle$
 $= \mp \langle \text{ad}_{\sigma'}^*(\mathbf{J}(v^*)), \sigma \rangle [49]^{219}.$

• Par conséquent $\{J_\sigma, J_{\sigma'}\} = J_{[\sigma, \sigma']}$ ssi :

$$(T_{v^*}\mathbf{J})(\sigma'_{T^*Mv^*}) = -\text{ad}_{\sigma'}^*(\mathbf{J}(v^*)); \forall \sigma' \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ QED.}$$

Application moment \mathbf{J} de Poisson

Rappel : l'application moment \mathbf{J} est dite de Poisson par rapport à certains crochets de Poisson $\{, \}$ sur T^*M et $\{, \}$ sur \mathfrak{g}^* ssi :

$$\mathbf{J}^* \{F, G\} = \{\mathbf{J}^* F, \mathbf{J}^* G\} \text{ ou } \{F, G\} \circ \mathbf{J} = \{F \circ \mathbf{J}, G \circ \mathbf{J}\}; \forall F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*).$$

Ssi l'application \mathbf{J} est de Poisson soit $\mathbf{H} \triangleq H \circ \mathbf{J} \in \mathcal{F}(T^*M)$ avec $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$; alors si $\{\varphi_t\}$ est le flot de X_H – avec $X_H[G] \triangleq \{G, H\}$; $\forall G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ – et $\{\varphi_t\}$ le flot de $X_{\mathbf{H}}$ – avec $X_{\mathbf{H}}[\mathbf{G}] \triangleq \{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}$; $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$ – on aura [49]²²⁰ :

$$\mathbf{J} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \mathbf{J} \text{ et } T\mathbf{J} \circ X_{\mathbf{H}} = X_H \circ \mathbf{J}.$$

Démonstration

Remarquons tout d'abord que la première relation à démontrer à une signification car :

$$T^*M \xrightarrow{\varphi_t} T^*M \xrightarrow{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \text{ est identique à } T^*M \xrightarrow{\mathbf{J} \circ \varphi_t} \mathfrak{g}^* \\ v^* \mapsto v'^* = \varphi_t(v^*) \mapsto \mathbf{J}(v'^*) = \mathbf{J}(\varphi_t(v^*)) \quad v^* \mapsto (\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)$$

et :

$$T^*M \xrightarrow{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\varphi_t} \mathfrak{g}^* \text{ est identique à } T^*M \xrightarrow{\varphi_t \circ \mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \\ v^* \mapsto \sigma^* = \mathbf{J}(v^*) \mapsto \varphi_t(\sigma^*) = \varphi_t(\mathbf{J}(v^*)) \quad v^* \mapsto (\varphi_t \circ \mathbf{J})(v^*)$$

On a :

$$T^*M \xrightarrow{\varphi_t} T^*M \xrightarrow{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{G} \mathbb{R} \text{ . Donc :} \\ v^* \mapsto \varphi_t(v^*) \mapsto (\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*) \mapsto G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = (G \circ \mathbf{J})(\varphi_t(v^*))$$

$$\frac{d}{dt} G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = \frac{d}{dt} (G \circ \mathbf{J})(\varphi_t(v^*)) = \frac{d}{dt} \mathbf{G}(\varphi_t(v^*)).$$

218. p. 378 éq. (11.5.4)

219. p. 379 éq. (11.5.5)

220. pp. 339-340 Proposition 10.3.2

Or on a vu que $\frac{d}{dt} \mathbf{G}(\varphi_t(v^*)) = (\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\} \circ \varphi_t)(v^*) = \{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}(\varphi_t(v^*)) = \{G \circ \mathbf{J}, H \circ \mathbf{J}\}(\varphi_t(v^*))$.

Comme l'application différentielle \mathbf{J} est de Poisson on a :

$$\frac{d}{dt} G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = (\{G, H\} \circ \mathbf{J})(\varphi_t(v^*)) = \{G, H\}((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)).$$

Comme $X_H[G] \triangleq \{G, H\}$ on a :

$$\frac{d}{dt} G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = X_H[G]((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = (T_{(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)} G)(X_{H(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)}).$$

$$\text{Soit } \mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{J} \circ \varphi_t(v^*)} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{G} \mathbb{R} \\ (\mathbf{J} \circ \varphi_t(v^*)) \xrightarrow{t} G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)$$

D'après la règle de dérivation composée on a :

$$\frac{d}{dt} G((\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)) = (T_{(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)} G)\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)\right).$$

Et, par conséquent $\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*) = X_{H(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)}$.

Ceci signifie que $(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*)$ est la courbe intégrale de X_H dans \mathfrak{g}^* avec la condition initiale $(\mathbf{J} \circ \varphi_0)(v^*) = \mathbf{J}(v^*)$ à $t = 0$.

Comme $\{\varphi_t\}$ est le flot de X_H on a :

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(\sigma^*) = X_{H\varphi_t(\sigma^*)}. \text{ Par conséquent, avec } \sigma^* = \mathbf{J}(v^*) :$$

$$\frac{d}{dt} ((\varphi_t \circ \mathbf{J})(v^*)) = X_{H(\varphi_t \circ \mathbf{J})(v^*)}.$$

Ceci signifie que $(\varphi_t \circ \mathbf{J})(v^*)$ est la courbe intégrale de X_H dans \mathfrak{g}^* avec la condition initiale $(\varphi_0 \circ \mathbf{J})(v^*) = \mathbf{J}(v^*)$ à $t = 0$.

D'après le théorème d'unicité des solutions aux équations différentielles ayant les mêmes conditions initiales on a :

$$(\mathbf{J} \circ \varphi_t)(v^*) = (\varphi_t \circ \mathbf{J})(v^*); \forall v^* \in T^*M \text{ et, par conséquent :}$$

$$\mathbf{J} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \mathbf{J} \text{ QED.}$$

La dérivation de cette relation par rapport au temps donne :

$$T\mathbf{J} \circ X_H = X_H \circ \mathbf{J} \text{ QED.}$$

Applications moments et crochets de Lie-Poisson

On pourra consulter [49]²²¹.

On a $\sigma_{T^*M}[\mathbf{F}] = X_{J_\sigma}[\mathbf{F}] = \{\mathbf{F}, X_{J_\sigma}\} = \{\mathbf{F}, \sigma_{T^*M}\}; \forall \mathbf{F} \in \mathcal{F}(T^*M)$ [49]²²².

221. pp. 368-369

222. p. 368 éq. (11.2.3)

L'équation $\langle \mathbf{J}(v^*), \sigma \rangle = \pm J_\sigma(v^*) \in \mathbb{R}$ définit un isomorphisme entre l'espace des applications différentiables \mathbf{J} de T^*M à \mathfrak{g} et l'espace des applications linéaires J de \mathfrak{g} à $\mathcal{F}(T^*M)$. On peut penser à la collection des fonctions $\pm J_\sigma$ lorsque que σ varie dans \mathfrak{g} comme étant les composantes de \mathbf{J} .

Ainsi donner une application moment \mathbf{J} est équivalent à spécifier une application $\mathfrak{g} \xrightarrow{J} \mathcal{F}(T^*M)$ rendant le diagramme suivant commutatif [49]²²³ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(T^*M) & \xrightarrow{X_\cdot} & \mathcal{X}(T^*M) \\ J_\sigma & \mapsto & X_{J_\sigma} = D(\sigma) = \sigma_{T^*M} \\ & J \swarrow \searrow & D \\ & \mathfrak{g} & \\ & \sigma & \end{array}$$

i.e. $D = X \circ J$, car $D(\sigma) = X.(J_\sigma) = X_{J_\sigma} = \sigma_{T^*M}$.

$\mathcal{F}(T^*M) \xrightarrow{X_\cdot} \mathcal{H}(T^*M)$ est un antihomomorphisme d'algèbres de Lie.

Si $D : \mathfrak{g} \xrightarrow{D} \mathcal{H}(T^*M)$ est également un antihomomorphisme d'algèbres de Lie on aura :

$X_{J_{[\sigma, \sigma']}} = [\sigma, \sigma']_{T^*M} = -[\sigma_{T^*M}, \sigma'_{T^*M}] = -[X_{J_\sigma}, X_{J_{\sigma'}}] = X_{\{J_\sigma, J_{\sigma'}\}}$; $\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{g}$ [49]²²⁴. Soit :

$X_{J_{[\sigma, \sigma']}} = X_{\{J_\sigma, J_{\sigma'}\}}$; $\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{g}$ [49]²²⁵. Cela ne signifie pas que $J_{[\sigma, \sigma']}$ et $\{J_\sigma, J_{\sigma'}\}$ seront égaux.

7.4 Applications moment \mathbf{J}^+ et \mathbf{J}^-

En fait on va distinguer :

• $\mathfrak{g} \xrightarrow{J^+} \mathcal{F}(T^*M)$ telle que $\mu_{T^*M} = X_{J_\mu^+}$; $\forall \mu \in \mathfrak{g}$

et l'application moment $T^*M \xrightarrow{\mathbf{J}^+} \mathfrak{g}^*$ telle que :

$\langle \mu^*, \mu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \triangleq J_\mu^+(v^*)$. Et :

223. p. 368

224. p. 368 éq. (11.2.6)

225. p. 369 éq. (11.2.7)

$$\bullet \mathfrak{g} \xrightarrow[\nu \mapsto J_\nu^-]{J^-} \mathcal{F}(T^*M) \text{ telle que } \nu_{T^*M} = X_{J_\nu^-};$$

et l'application moment $T^*M \xrightarrow[v^* \mapsto \nu^* = \mathbf{J}^-(v^*)]{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}^*$ telle que :

$$\langle \nu^*, \nu \rangle = \langle \mathbf{J}^-(v^*), \nu \rangle \triangleq -J_\nu^-(v^*).$$

7.4.1 Application moment \mathbf{J}^+

Si l'application moment \mathbf{J}^+ est infinitésimalement équivariante alors elle est une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_+$ sur \mathfrak{g}_+^* .

On pourra consulter [49]²²⁶

Démonstration

L'application moment \mathbf{J}^+ est infinitésimalement équivariante ssi $\{J_\mu^+, J_{\mu'}^+\} = J_{[\mu, \mu']}^+$ ou $(T_{v^*}\mathbf{J}^+)(\mu'_{T^*M v^*}) = -\text{ad}_{\mu'}^*(\mathbf{J}^+(v^*)); \forall \mu' \in \mathfrak{g}$ et $\forall v^* \in T^*M$ (cf. ce qui précède).

Soient $F, G, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$.

$\mathbf{J}^{+*} \{F, G\}_+ \triangleq \{F, G\}_+ \circ \mathbf{J}^+$. Donc :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}^{+*} \{F, G\}_+)(v^*) = \{F, G\}_+(\mathbf{J}^+(v^*)) \triangleq \langle \mathbf{J}^+(v^*), [\frac{\delta F}{\delta \mu^*}, \frac{\delta G}{\delta \mu^*}] \rangle \\ & = J_{[\frac{\delta F}{\delta \mu^*}, \frac{\delta G}{\delta \mu^*}]}^+(v^*). \text{ Soit, d'après l'équivariance infinitésimale :} \\ & (\mathbf{J}^{+*} \{F, G\}_+)(v^*) = \{J_{\frac{\delta F}{\delta \mu^*}}^+, J_{\frac{\delta G}{\delta \mu^*}}^+\}(v^*) = (X_{J_{\frac{\delta G}{\delta \mu^*}}^+} [J_{\frac{\delta F}{\delta \mu^*}}^+])(v^*) \\ & = (X_{G \circ \mathbf{J}^+} [J_{\frac{\delta F}{\delta \mu^*}}^+])(v^*) = -(X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \mu^*}}^+} [G \circ \mathbf{J}^+])(v^*) = -(X_{F \circ \mathbf{J}^+} [G \circ \mathbf{J}^+])(v^*) \\ & = -\{G \circ \mathbf{J}^+, F \circ \mathbf{J}^+\}(v^*) = \{F \circ \mathbf{J}^+, G \circ \mathbf{J}^+\}(v^*); \forall v^* \in T^*M. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$\mathbf{J}^{+*} \{F, G\}_+ = \{F \circ \mathbf{J}^+, G \circ \mathbf{J}^+\} \triangleq \{\mathbf{J}^{+*} F, \mathbf{J}^{+*} G\}$; ce qui est la définition du fait que \mathbf{J}^+ est de Poisson (cf. ce qui précède) QED.

Et si l'application moment \mathbf{J}^+ est de Poisson on a vu que, avec $\mathbf{H} \triangleq H \circ \mathbf{J}^+$, $\{\varphi_t\}$ le flot de X_H et $\{\varphi_t\}$ le flot de $X_{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{J}^+ \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \mathbf{J}^+ \text{ et } T\mathbf{J}^+ \circ X_{\mathbf{H}} = X_H \circ \mathbf{J}^+.$$

226. pp. 403-411 § 12.4

7.4.2 Application moment \mathbf{J}^-

Si l'application moment \mathbf{J}^- est infinitésimalement équivariante alors elle est une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_-$ sur \mathfrak{g}^* .

Démonstration

L'application moment \mathbf{J}^- est infinitésimalement équivariante ssi $\{J_\nu^-, J_{\nu'}^-\} = J_{[\nu, \nu']}^-$ ou $(T_{v'^*}\mathbf{J}^-)(\nu_{T^*M v'^*}) = -\text{ad}_\nu^*(\mathbf{J}^-(v'^*)); \forall \nu \in \mathfrak{g}$ et $\forall v'^* \in T^*M$ (cf. ce qui précède).

Soient $F, G, H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$.

$\mathbf{J}^{-*} \{F, G\}_- \triangleq \{F, G\}_- \circ \mathbf{J}^-$. Donc :

$(\mathbf{J}^{-*} \{F, G\}_-)(v^*) = \{F, G\}_-(\mathbf{J}^-(v^*)) \triangleq - \langle \mathbf{J}^-(v^*), [\frac{\delta F}{\delta \nu^*}, \frac{\delta G}{\delta \nu^*}] \rangle = J_{[\frac{\delta F}{\delta \nu^*}, \frac{\delta G}{\delta \nu^*}]}^-(v^*)$. Soit, d'après l'équivariance infinitésimale :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^{-*} \{F, G\}_-)(v^*) &= \{J_{\frac{\delta F}{\delta \nu^*}}^-, J_{\frac{\delta G}{\delta \nu^*}}^-\}(v^*) = (X_{J_{\frac{\delta G}{\delta \nu^*}}^-} [J_{\frac{\delta F}{\delta \nu^*}}^-])(v^*) \\ &= -(X_{G \circ \mathbf{J}^-} [J_{\frac{\delta F}{\delta \nu^*}}^-])(v^*) = (X_{J_{\frac{\delta F}{\delta \nu^*}}^-} [G \circ \mathbf{J}^-])(v^*) = -(X_{F \circ \mathbf{J}^-} [G \circ \mathbf{J}^-])(v^*) \\ &= -\{G \circ \mathbf{J}^-, F \circ \mathbf{J}^-\}(v^*) = \{F \circ \mathbf{J}^-, G \circ \mathbf{J}^-\}(v^*); \forall v^* \in T^*M. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$\mathbf{J}^{-*} \{F, G\}_- = \{F \circ \mathbf{J}^-, G \circ \mathbf{J}^-\} \triangleq \{\mathbf{J}^{-*} F, \mathbf{J}^{-*} G\}$; ce qui est la définition du fait que \mathbf{J}^- est de Poisson (cf. ce qui précède) QED.

Et si l'application moment \mathbf{J}^- est de Poisson on a vu que, avec $\mathbf{H} \triangleq H \circ \mathbf{J}^-$, $\{\varphi_t\}$ le flot de X_H et $\{\varphi_t\}$ le flot de $X_{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{J}^- \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \mathbf{J}^- \text{ et } T\mathbf{J}^- \circ X_{\mathbf{H}} = X_H \circ \mathbf{J}^-.$$

8 Actions du groupe de Lie G sur la variété différentielle M

8.1 Action à gauche Φ du groupe de Lie G sur la variété différentielle M

On pourra consulter [1]²²⁷, [10]²²⁸, [49]²²⁹ et [51]²³⁰.

C'est l'application différentielle :

$$G \times M \xrightarrow{\Phi} M \quad \text{telle que :}$$

$$(h, x) \mapsto x' \triangleq \Phi(h, x)$$

$$(i) \Phi(e, x) = x; \forall x \in M$$

$$(ii) \Phi(h, \Phi(h', x)) = \Phi(h \cdot h', x); \forall h, h' \in G; \forall x \in M \text{ [1]}^{231} \text{ et [51]}^{232}.$$

Alors $\forall h \in G$ soit :

$$M \xrightarrow{\Phi_h} M \quad \text{Alors :}$$

$$x \mapsto \Phi_h(x) \triangleq x'$$

$$(i) \Rightarrow \Phi_e = id_M$$

$$(ii) \Rightarrow \Phi_{h \cdot h'} = \Phi_h \circ \Phi_{h'}. \text{ Et donc :}$$

$$\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}; \Phi_h \text{ est un difféomorphisme.}$$

$$\text{Orb}_x \triangleq \{\Phi_h(x) | h \in G\} \text{ est l'orbite de } x \text{ [51]}^{233}.$$

Soit $\text{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M (c'est un groupe de transformations de M), alors :

$$G \xrightarrow{\Phi_h} \text{Diff}(M) \text{ est un homomorphisme [1]}^{234}.$$

$$h \mapsto \Phi_h$$

Si $\mu \in \mathfrak{g}$ soit :

$$\mathbb{R} \times M \xrightarrow{\Phi^\mu} M, \text{ car en effet } \exp(t\mu) \in G.$$

$$(t, x) \mapsto \Phi^\mu(t, x) \triangleq \Phi_{\exp(t\mu)}(x)$$

Alors Φ^μ est une action à gauche de \mathbb{R} sur M .

227. pp. 261-271 § 4.1.15 à 4.1.28

228. pp. 89-95 Chapitre III § 7

229. p. 173 § 6.4 et pp. 309-326 § 9.3

230. pp. 415-416 § 2.5

231. p. 261 Définition 4.1.15

232. p. 415 § 2.5

233. p. 415

234. p. 261

Considérons le champ de vecteurs $\mu_M = C(\mu)$ sur M ($\mu_M \in \mathcal{X}(M)$) tel que :

$$\mu_{Mx} \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi^\mu(t, x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(x) \in T_x M.$$

Ce champ de vecteurs μ_M est appelé générateur infinitésimal de l'action Φ , correspondant à μ [49]²³⁵.

Son flot est donc $\{\theta_t\} = \{\Phi_{\exp(t\mu)}\}$ [1]²³⁶ et [5]²³⁷.

Soit $\mathcal{P}(\mu_M) \in \mathcal{F}(T^*M)$ la fonction moment du champ de vecteurs $\mu_M \in \mathcal{X}(M)$:

$$\mathcal{X}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{F}(T^*M) \text{ telle que :}$$

$$\mu_M \longmapsto \mathcal{P}(\mu_M)$$

$$T^*M \xrightarrow{\mathcal{P}(\mu_M)} \mathbb{R}$$

$$v^* \longmapsto \mathcal{P}(\mu_M)(v^*) \triangleq \langle v_x^*, \mu_{Mx} \rangle_x \text{ (avec } x = \tau_M^*(v^*) \text{)}.$$

Remarque : la notation μ_M , utilisée par [1] et [49], n'est pas suffisante. Nous allons préciser, dans les exemples qui suivent, à quelle action Φ elle correspond.

Nous donnons trois exemples ci-après d'actions à gauche, avec des numéros impairs.

8.1.1 Exemple 1

On pourra consulter [1]²³⁸

Avec $M = G$ et $\Phi = L$ i.e. $\Phi_h = L_h$. L est bien une action à gauche car $L_e = \text{id}_G$ et $L_{h \cdot h'} = L_h \circ L_{h'}$.

$x \in M$ se note $g \in G$. Donc $v^* = (x, v_x^*)$ se note $v^* = (g, v_g^*)$ et μ se note α .

$$G \times G \xrightarrow{L} G \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{L_h} G$$

$$(h, g) \longmapsto h \cdot g \triangleq L(h, g) \quad g \longmapsto L_h(g) \triangleq h \cdot g$$

Alors si $\alpha \in \mathfrak{g}$ soit :

$$\mathbb{R} \times G \xrightarrow{L^\alpha} G$$

$$(t, g) \longmapsto L^\alpha(t, g) = L_{\exp(t\alpha)}(g) = (\exp(t\alpha)) \cdot g = R_g(\exp(t\alpha)).$$

235. 313

236. p. 267

237. p. 41

238. p. 267 § 4.1.25 Exemple (a)

Soit α_G le générateur infinitésimal de l'action L , correspondant à α .

On a :

$$G \xrightarrow[\mapsto]{\alpha_G \text{ (pour l'action } L)} TG$$

$$g \xrightarrow{\mapsto} \alpha_G(g)=(g, \alpha_{Gg})$$

$$\text{Avec } \alpha_{Gg} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp(t\alpha)}(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\exp(t\alpha)) = (T_e R_g)(\alpha) \in T_g G.$$

On constate donc que $\alpha_{Gg} = X_{\alpha g}^R$ soit $\alpha_G = X_\alpha^R \in \mathcal{X}_R(G)$.

Soit $\mathcal{P}(X_\alpha^R)$ ($\mathcal{P}(X_\alpha^R) \in \mathcal{F}(T^*G)$) la fonction moment du champ de vecteurs $X_\alpha^R \in \mathcal{X}(G)$. On a :

$$\mathcal{P}(X_\alpha^R)(v^*) = \langle v_g^*, X_{\alpha g}^R \rangle_g = \langle v_g^*, (T_e R_g)(\alpha) \rangle_g$$

$$= \langle (T_e^* R_g)(v_g^*), \mu \rangle \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*) \text{)}.$$

8.1.2 Exemple 3

On pourra consulter [1]²³⁹, [49]²⁴⁰ et [51]²⁴¹.

Avec $M = \mathfrak{g}$ et $\Phi = \text{Ad}$. i.e. $\Phi_h = \text{Ad}_h$. Ad . est bien une action à gauche car $\text{Ad}_e = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ et $\text{Ad}_{h \cdot h'} = \text{Ad}_h \circ \text{Ad}_{h'}$.

$x \in M$ se note $\mu' \in \mathfrak{g}$.

$$G \times \mathfrak{g} \xrightarrow[\mapsto]{\text{Ad.}} \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} \xrightarrow[\mapsto]{\text{Ad}_h} \mathfrak{g} \quad . \text{ Alors :}$$

$$(h, \mu') \mapsto \nu' \triangleq \text{Ad.}(h, \mu') \quad \mu' \mapsto \text{Ad}_h(\mu') \triangleq \nu'$$

$$\mathbb{R} \times \mathfrak{g} \xrightarrow[\mapsto]{\text{Ad}^\mu} \mathfrak{g} \quad .$$

$$(t, \mu') \mapsto \text{Ad}^\mu(t, \mu') = \text{Ad}_{\exp(t\mu)}(\mu')$$

Soit $\mu_{\mathfrak{g}}$ le générateur infinitésimal de l'action Ad ., correspondant à μ .

On a :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow[\mapsto]{\mu_{\mathfrak{g}} \text{ (pour l'action } \text{Ad.})} T\mathfrak{g}$$

$$\mu' \mapsto \mu_{\mathfrak{g}}(\mu') = (\mu', \mu_{\mathfrak{g}\mu'})$$

$$\text{Avec } \mu_{\mathfrak{g}\mu'} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\mu)}(\mu') = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\mu)} \right)(\mu') = \text{ad}_\mu(\mu')$$

$$= [\mu, \mu'].$$

239. pp. 267-268 Exemple b

240. p. 314 Exemple (a)

241. Exemple A.18

8.1.3 Exemple 5

On pourra consulter [1]²⁴² et [51]²⁴³.

Avec $M = \mathfrak{g}^*$ et $\Phi = \text{Ad}_{-1}^*$ i.e. $\Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^*$. Ad_{-1}^* est bien une action à gauche car $\text{Ad}_{e^{-1}}^* = \text{id}_{\mathfrak{g}^*}$ et $\text{Ad}_{(h \cdot h')^{-1}}^* = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \text{Ad}_{h'^{-1}}^*$.

$x \in M$ se note $\mu'^* \in \mathfrak{g}^*$.

$$G \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{Ad}_{-1}^*} \mathfrak{g}^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{Ad}_{h^{-1}}^*} \mathfrak{g}^* . \text{ Alors :}$$

$$(h, \mu'^*) \mapsto \nu'^* \triangleq \text{Ad}_{-1}^*(h, \mu'^*) \quad \mu'^* \mapsto \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu'^*) \triangleq \nu'^*$$

$$\mathbb{R} \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{Ad}_{-1}^{\mu}} \mathfrak{g}^* .$$

$$(t, \mu'^*) \mapsto \text{Ad}_{-1}^{*\mu}(t, \mu'^*) = \text{Ad}_{\exp(-t\mu)}^*(\mu'^*)$$

Soit $\mu_{\mathfrak{g}^*}$ le générateur infinitésimal de l'action Ad_{-1}^* , correspondant à μ .
On a :

$$\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\mu_{\mathfrak{g}^*} \text{ (pour l'action } \text{Ad}_{-1}^*)} T\mathfrak{g}^* .$$

$$\mu'^* \mapsto \mu_{\mathfrak{g}^*}(\mu'^*) = (\mu'^*, \mu_{\mathfrak{g}^*}\mu'^*)$$

Avec $\mu_{\mathfrak{g}^*}\mu'^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\mu)}^*(\mu'^*) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\mu)}^* \right)(\mu'^*) = \text{ad}_{-\mu}^*(\mu'^*) = -\text{ad}_{\mu}^*(\mu'^*)$ (car ad^* est linéaire).

8.1.4 Propriétés

Si Φ est une action à gauche du groupe de Lie G sur la variété différentielle M soit $\Phi_{h^{-1}}^* \mu_M$ le champ de vecteurs, sur M , image réciproque du champ de vecteurs μ_M , sur M , par le difféomorphisme $\Phi_{h^{-1}}$. Alors :

(i) $\nu_M \triangleq (\text{Ad}_h(\mu))_M = \Phi_{h^{-1}}^* \mu_M \in \mathcal{X}(M)$; $\forall h \in G$; $\forall \mu \in \mathfrak{g}$ [1]²⁴⁴ et [49]²⁴⁵

(ii) $[\mu_M, \mu'_M] = -[\mu, \mu']_M \in \mathcal{X}(M)$; $\forall \mu, \mu' \in \mathfrak{g}$ [1]²⁴⁶ et [49]²⁴⁷.

$[\mu_M, \mu'_M]$ est le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(M)$ et $[\mu, \mu']$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g}

242. p. 268 Exemple d

243. Exemple A.19

244. p. 269 Proposition 4.1.28

245. p. 317 Lemme 9.3.7

246. p. 269 Proposition 4.1.28

247. p. 317

Démonstration de la propriété (i) [1]²⁴⁸ et [49]²⁴⁹.

• Soit $\nu \triangleq \text{Ad}_h(\mu)$ et $\nu_M \in \mathcal{X}(M)$. On a :

$$\nu_M(x') = (x', \nu_{Mx'}) \text{ avec } \nu_{Mx'} \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\nu)}(x') \in T_{x'}M.$$

Mais $\exp(\nu) = \exp(\text{Ad}_h(\mu)) = h \cdot (\exp(\mu)) \cdot h^{-1}$ [1]²⁵⁰ et Ad_h est linéaire ;
par conséquent : $t\nu = t \text{Ad}_h(\mu) = \text{Ad}_h(t\mu)$ et
 $\exp(t\nu) = \exp(\text{Ad}_h(t\mu)) = h \cdot (\exp(t\mu)) \cdot h^{-1}$.

Φ étant une action à gauche :

$$\begin{aligned} \Phi_{\exp(t\nu)} &= \Phi_{h \cdot (\exp(t\mu)) \cdot h^{-1}} = \Phi_h \circ \Phi_{\exp(t\mu)} \circ \Phi_{h^{-1}} \text{ et} \\ \Phi_{\exp(t\nu)}(x') &= \Phi_h(\Phi_{\exp(t\mu)}(\Phi_{h^{-1}}(x'))) = \Phi_h(\Phi_{\exp(t\mu)}(x)). \end{aligned}$$

On en déduit, d'après la règle de la dérivation composée que :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\nu)}(x') = (T_{\Phi_{\exp(t\mu)}(x)}\Phi_h) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(x) \right) \text{ et, en particulier :}$$

$$\nu_{Mx'} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\nu)}(x') = (T_x\Phi_h) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(x) \right) = (T_x\Phi_h)(\mu_{Mx})$$

• Soit $\Phi_{h^{-1}}^*\mu_M$ le champ de vecteurs, sur M , image réciproque du champ de vecteurs μ_M , sur M , par le difféomorphisme $\Phi_{h^{-1}}$. On a :

$$\Phi_{h^{-1}}^*\mu_M \triangleq T\Phi_{h^{-1}}^{-1} \circ \mu_M \circ \Phi_{h^{-1}} = T\Phi_h \circ \mu_M \circ \Phi_{h^{-1}} ; \text{ soit :}$$

$$(\Phi_{h^{-1}}^*\mu_M)_{x'} = (T_{\Phi_{h^{-1}}(x')} \Phi_h)(\mu_{M\Phi_{h^{-1}}(x')}) = (T_x\Phi_h)(\mu_{Mx})$$

• Donc $\nu_{Mx'} = (\Phi_{h^{-1}}^*\mu_M)_{x'} ; \forall x' \in M$ et $\nu_M = \Phi_{h^{-1}}^*\mu_M$ ou :

$$\nu_M = (\text{Ad}_h(\mu))_M = \Phi_{h^{-1}}^*\mu_M ; \forall h \in G ; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ QED.}$$

Et donc $\mu_M = (\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu))_M = \Phi_h^*\nu_M ; \forall h \in G ; \forall \nu \in \mathfrak{g}$.

Démonstration de la propriété (ii) [1]²⁵¹.

Soit $h \triangleq \exp(t\mu')$, dans la propriété (i), on a :

$$(\text{Ad}_{\exp(t\mu')}(\mu))_M = \Phi_{\exp(-t\mu')}^*\mu_M \text{ et, par conséquent :}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(t\mu')}(\mu))_M = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(-t\mu')}^*\mu_M$$

Dans cette expression le terme de gauche s'écrit, grâce à l'exemple 3 :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(t\mu')}(\mu))_M = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\mu')}(\mu) \right)_M = [\mu', \mu]_M = -[\mu, \mu']_M.$$

248. p. 269 Proposition 4.1.28

249. p. 317 Lemme 9.3.7

250. p. 257 Corollaire 4.1.8

251. p. 269 Proposition 4.1.28

et le terme de droite :

$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp(-t\mu')}^* \mu_M = \mathcal{L}_{-\mu'_M} \mu_M = [-\mu'_M, \mu_M] = [\mu_M, \mu_M]$, étant donné que $\{\Phi_{\exp(-t\mu')}\}$ est le flot de $-\mu'_M$

Donc $[\mu_M, \mu'_M] = -[\mu, \mu']_M ; \forall \mu, \mu' \in \mathfrak{g}$ QED.

Ceci signifie que C est un antihomomorphisme d'algèbres de Lie.

8.1.5 Équivariance

Si Φ est une action à gauche du groupe de Lie G sur la variété différentielle M et Φ' une action à gauche du groupe de Lie G sur la variété différentielle N l'application différentielle f de M sur N est équivariante, par rapport à ces actions, ssi le diagramme suivant est commutatif ; $\forall h \in G$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Phi_h \downarrow & & \downarrow \Phi'_h \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

i. e. ssi $f \circ \Phi_h = \Phi'_h \circ f ; \forall h \in G$ [1]²⁵² et [49]²⁵³.

Alors si c'est le cas le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mu_M \downarrow & & \downarrow \mu_N \\ TM & \xrightarrow{Tf} & TN \end{array}$$

i.e. $Tf \circ \mu_M = \mu_N \circ f$ [1]²⁵⁴.

8.2 Action à droite Ψ du groupe de Lie G sur la variété différentielle M

On pourra consulter [49]²⁵⁵

C'est l'application différentielle :

252. p. 269

253. p. 316 Définition 9.3.5

254. p. 270 Proposition 4.1.28

255. p. 173

$M \times G \xrightarrow{\Psi} M$ telle que :
 $(x', h) \mapsto x \triangleq \Psi(x', h)$

- (i) $\Psi(x', e) = x' ; \forall x' \in M$
(ii) $\Psi(\Psi(x', h), h') = \Psi(x', h \cdot h') ; \forall h, h' \in G ; \forall x' \in M$ [1]²⁵⁶.

Alors $\forall h \in G$ soit :

$M \xrightarrow{\Psi_h} M$. Alors :
 $x' \mapsto \Psi_h(x') \triangleq x$

- (i) $\Rightarrow \Psi_e = id_M$
(ii) $\Rightarrow \Psi_{h \cdot h'} = \Psi_{h'} \circ \Psi_h$. Et donc :

$\Psi_h^{-1} = \Psi_{h^{-1}} ; \Psi_h$ est un difféomorphisme [49]²⁵⁷.

$\text{Orb}_{x'} \triangleq \{\Psi_h(x') | h \in G\}$ est l'orbite de x' .

$G \longrightarrow \text{Diff}(M)$ est un homomorphisme.
 $h \mapsto \Psi_h$

Si $\nu \in \mathfrak{g}$ soit :

$M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi^\nu} M$, car en effet $\exp(-t\nu) \in G$.
 $(x', t) \mapsto \Psi^\nu(x', t) \triangleq \Psi_{\exp(-t\nu)}(x')$

Alors Ψ^ν est une action à droite de \mathbb{R} sur M .

Considérons le champ de vecteurs $\nu_M = C(\nu)$ sur M ($\nu_M \in \mathcal{X}(M)$) tel que :

$$\nu_{Mx'} \triangleq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi^\nu(x', t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(x') \in T_{x'} M.$$

Ce champ de vecteurs ν_M est appelé générateur infinitésimal de l'action Ψ , correspondant à ν .

Son flot est donc $\{\theta_t\} = \{\Psi_{\exp(-t\nu)}\}$.

Soit $\mathcal{P}(\nu_M) \in \mathcal{F}(T^*M)$ est la fonction moment du champ de vecteurs $\nu_M \in \mathcal{X}(M)$:

$\mathcal{X}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{F}(T^*M)$ telle que :
 $\nu_M \mapsto \mathcal{P}(\nu_M)$

$$T^*M \xrightarrow{\mathcal{P}(\nu_M)} \mathbb{R} \\ v'^* \mapsto \mathcal{P}(\nu_M)(v'^*) \triangleq \langle v'^*, \nu_{Mx'} \rangle_{x'} \quad (\text{avec } x' = \tau_M^*(v'^*))$$

Remarque : si Ψ est une action à droite alors $\Phi = \Psi^{-1}$ est une action à gauche.

256. p. 261 note en bas de page, mais qui utilise Φ et non Ψ

257. p. 173 § 6.4

Nous donnons trois exemples ci-après d'actions à droite, avec des numéros pairs.

8.2.1 Exemple 2

On pourra consulter [1] ²⁵⁸

Avec $M = G$ et $\Psi = R$ i.e. $\Psi_h = R_h$. R est bien une action à droite car $R_e = \text{id}_G$ et $R_{h \cdot h'} = R_{h'} \circ R_h$.

$x' \in M$ se note $g \in G$. Donc $v'^* = (x', v'_{x'})$ se note $v^* = (g, v_g^*)$ et ν se note ζ .

$$G \times G \xrightarrow{R} G \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{R_h} G \\ (g, h) \mapsto g \cdot h \triangleq R(g, h) \quad g \mapsto R_h(g) \triangleq g \cdot h$$

Alors si $\zeta \in \mathfrak{g}$ soit :

$$G \times \mathbb{R} \xrightarrow{R^\zeta} G \\ (g, t) \mapsto R^\zeta(g, t) = R_{\exp(-t\zeta)}(g) = g \cdot (\exp(-t\zeta)) = L_g(\exp(-t\zeta))$$

Soit ζ_G le générateur infinitésimal de l'action R , correspondant à ζ .

On a :

$$G \xrightarrow{\zeta_G \text{ (pour l'action } R)} TG \\ g \mapsto \zeta_G(g) = (g, \zeta_{Gg})$$

Avec $\zeta_{Gg} = \frac{d}{dt}|_{t=0} R_{\exp(-t\zeta)}(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} L_g(\exp(-t\zeta)) = (T_e L_g)(-\zeta) = -(T_e L_g)(\zeta) \in T_g G$ (car $T_e L_g$ est linéaire).

On constate donc que $\zeta_{Gg} = -X_{\zeta}^L$ soit $\zeta_G = -X_{\zeta}^L \in \mathcal{X}_L(G)$.

Soit $\mathcal{P}(-X_{\zeta}^L)$ ($\mathcal{P}(-X_{\zeta}^L) \in \mathcal{F}(T^*G)$) la fonction moment du champ de vecteurs $-X_{\zeta}^L \in \mathcal{X}(G)$. On a :

$$\mathcal{P}(-X_{\zeta}^L)(v^*) = \langle v_g^*, -X_{\zeta}^L \rangle_g = -\langle v_g^*, (T_e L_g)(\zeta) \rangle_g \\ = -\langle (T_e^* L_g)(v_g^*), \zeta \rangle \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*) \text{)}.$$

8.2.2 Exemple 4

Avec $M = \mathfrak{g}$ et $\Psi = \text{Ad}_{-1}$ i.e. $\Psi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}$. Ad est bien une action à droite car $\text{Ad}_{e^{-1}} = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ et $\text{Ad}_{(h \cdot h')^{-1}} = \text{Ad}_{h'^{-1}} \circ \text{Ad}_{h^{-1}}$.

$x' \in M$ se note $\nu' \in \mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{g} \times G \xrightarrow{\text{Ad}_{-1}} \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Ad}_{h^{-1}}} \mathfrak{g} \\ (\nu', h) \mapsto \mu' \triangleq \text{Ad}_{-1}(\nu', h) \quad \nu' \mapsto \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu') \triangleq \mu'$$

258. p. 267 § 4.1.25 Exemple (a)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{Ad}_{-1}^\nu} & \mathfrak{g} \\ (\nu', t) & \mapsto & \text{Ad}_{-1}^{\nu'}(\nu', t) = \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}(\nu') \end{array} .$$

Soit $\nu_{\mathfrak{g}}$ le générateur infinitésimal de l'action Ad_{-1} , correspondant à ν .
On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{g}} \text{ (pour l'action } \text{Ad}_{-1})} & T\mathfrak{g} \\ \nu' & \mapsto & \nu_{\mathfrak{g}}(\nu') = (\nu', \nu_{\mathfrak{g}\nu'}) \end{array} .$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \nu_{\mathfrak{g}\nu'} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}(\nu') = \left. \left(\frac{d}{dt} \right) \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}(\nu') = \text{ad}_{-\nu}(\nu') \\ &= [-\nu, \nu'] = -[\nu, \nu'] . \end{aligned}$$

8.2.3 Exemple 6

Avec $M = \mathfrak{g}^*$ et $\Psi = \text{Ad}^*$ i.e. $\Psi_h = \text{Ad}_h^*$. Ad^* est bien une action à droite car $\text{Ad}_e^* = \text{id}_{\mathfrak{g}^*}$ et $\text{Ad}_{h'h'}^* = \text{Ad}_{h'}^* \circ \text{Ad}_h^*$.

$x' \in M$ se note $\nu'^* \in \mathfrak{g}^*$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* \times G & \xrightarrow{\text{Ad}^*} & \mathfrak{g}^* \\ (\nu'^*, h) & \mapsto & \mu'^* \triangleq \text{Ad}_h^*(\nu'^*, h) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_h^*} & \mathfrak{g}^* \\ \nu'^* & \mapsto & \text{Ad}_h^*(\nu'^*) \triangleq \mu'^* \end{array} . \text{ Alors :}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{Ad}^{\nu}} & \mathfrak{g}^* \\ (\nu'^*, t) & \mapsto & \text{Ad}^{\nu'}(\nu'^*, t) = \text{Ad}_{\exp(t\nu)}^*(\nu'^*) \end{array} .$$

Soit $\nu_{\mathfrak{g}^*}$ le générateur infinitésimal de l'action Ad^* , correspondant à ν .
On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{g}^*} \text{ (pour l'action } \text{Ad}^*)} & T\mathfrak{g}^* \\ \nu'^* & \mapsto & \nu_{\mathfrak{g}^*}(\nu'^*) = (\nu'^*, \nu_{\mathfrak{g}^*\nu'^*}) \end{array} .$$

$$\text{Avec } \nu_{\mathfrak{g}^*\nu'^*} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\nu)}^*(\nu'^*) = \left. \left(\frac{d}{dt} \right) \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\nu)}^*(\nu'^*) = \text{ad}_{\nu}^*(\nu'^*) .$$

8.2.4 Propriétés

Si Ψ est une action à droite du groupe de Lie G sur la variété différentielle M soit $\Psi_{h^{-1}}^* \nu_M$ le champ de vecteurs, sur M , image réciproque du champ de vecteurs ν_M , sur M , par le difféomorphisme $\Psi_{h^{-1}}$. Alors :

$$(i) \mu_M \triangleq (\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu))_M = \Psi_{h^{-1}}^* \nu_M \in \mathcal{X}(M); \forall h^{-1} \in G; \forall \nu \in \mathfrak{g} .$$

$$(ii) [\nu_M, \nu'_M] = -[\nu, \nu']_M \in \mathcal{X}(M); \forall \nu, \nu' \in \mathfrak{g} .$$

$[\nu_M, \nu'_M]$ est le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(M)$ et $[\nu, \nu']$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g}

Démonstration de la propriété (i)

• Soit $\mu \triangleq \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu)$ et $\mu_M \in \mathcal{X}(M)$. On a :

$$\mu_M(x) = (x, \mu_{Mx}) \text{ avec } \mu_{Mx} \triangleq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\mu)}(x) \in T_{x'}M.$$

Mais $\exp(\mu) = \exp(\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu)) = h^{-1} \cdot (\exp(\nu)) \cdot h$ [1]²⁵⁹ et $\text{Ad}_{h^{-1}}$ est linéaire ; par conséquent : $-t\mu = -t\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu) = \text{Ad}_{h^{-1}}(-t\nu)$ et $\exp(-t\mu) = \exp(\text{Ad}_{h^{-1}}(-t\nu)) = h^{-1} \cdot (\exp(-t\nu)) \cdot h$.

Ψ étant une action à droite :

$$\begin{aligned} \Psi_{\exp(-t\mu)} &= \Psi_{h^{-1} \cdot (\exp(-t\nu)) \cdot h} = \Psi_h \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} \circ \Phi_{h^{-1}} \text{ et} \\ \Psi_{\exp(-t\mu)}(x) &= \Psi_h(\Psi_{\exp(-t\nu)}(\Psi_{h^{-1}}(x))) = \Psi_h(\Psi_{\exp(-t\nu)}(x')). \end{aligned}$$

On en déduit, d'après la règle de la dérivation composée que :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\mu)}(x) = (T_{\Psi_{\exp(-t\nu)}(x')} \Psi_h) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(x') \right) \text{ et, en particulier :}$$

$$\mu_{Mx} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\mu)}(x) = (T_{x'} \Psi_h) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(x') \right) = (T_{x'} \Psi_h)(\nu_{Mx'}).$$

• Soit $\Psi_{h^{-1}}^* \nu_M$ le champ de vecteurs, sur M , image réciproque du champ de vecteurs ν_M , sur M , par le difféomorphisme $\Psi_{h^{-1}}$. On a :

$$\Psi_{h^{-1}}^* \nu_M \triangleq T\Psi_{h^{-1}}^{-1} \circ \nu_M \circ \Psi_{h^{-1}} = T\Psi_h \circ \nu_M \circ \Psi_{h^{-1}} ; \text{ soit :}$$

$$(\Psi_{h^{-1}}^* \nu_M)_x = (T_{\Psi_{h^{-1}}(x)} \Psi_h)(\nu_{M\Psi_{h^{-1}}(x)}) = (T_{x'} \Psi_h)(\nu_{Mx'})$$

• Donc $\mu_{Mx} = (\Psi_{h^{-1}}^* \nu_M)_x$; $\forall x \in M$ et $\mu_M = \Psi_{h^{-1}}^* \nu_M$ ou :

$$(\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu))_M = \Psi_{h^{-1}}^* \nu_M ; \forall h \in G ; \forall \nu \in \mathfrak{g} \text{ QED.}$$

Démonstration de la propriété (ii) [1]²⁶⁰.

Soit $h \triangleq \exp(t\nu')$, dans la propriété (i), on a :

$$(\text{Ad}_{\exp(t\nu')}(\nu))_M = \Psi_{\exp(t\nu')}^* \nu_M \text{ et, par conséquent :}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(t\nu')}(\nu))_M = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(t\nu')}^* \nu_M$$

Dans cette expression le terme de gauche s'écrit, grâce à l'exemple 4 :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp(t\nu')}(\nu))_M = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\nu')}(\nu) \right)_M = [\nu', \nu]_M = -[\nu, \nu']_M.$$

et le terme de droite :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(t\nu')}^* \nu_M = \mathcal{L}_{-\nu'_M} \nu_M = [-\nu'_M, \nu_M] = [\nu_M, \nu'_M], \text{ étant donné que } \{\Psi_{\exp(t\nu')}\} \text{ est le flot de } -\nu'_M. \text{ Donc } [\nu_M, \nu'_M] = -[\nu, \nu']_M ; \forall \nu, \nu' \in \mathfrak{g} \text{ QED.}$$

Ceci signifie que C est un antihomomorphisme d'algèbres de Lie.

259. p. 257 Corollaire 4.1.8

260. p. 269 Proposition 4.1.28

8.2.5 Équivariance

Si Ψ est une action à droite du groupe de Lie G sur la variété différentielle M et Ψ' une action à droite du groupe de Lie G sur la variété différentielle N l'application différentielle f de M sur N est équivariante, par rapport à ces actions, ssi le diagramme suivant est commutatif ; $\forall h \in G$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Psi_h \downarrow & & \downarrow \Psi'_h \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

i. e. ssi $f \circ \Psi_h = \Psi'_h \circ f$; $\forall h \in G$.

Alors si c'est le cas le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \nu_M \downarrow & & \downarrow \nu_N \\ TM & \xrightarrow{Tf} & TN \end{array}$$

i.e. $Tf \circ \mu_M = \mu_N \circ f$.

8.3 Application moment d'une action à gauche Φ du groupe de Lie G sur le fibré cotangent T^*M

On pourra consulter [1]²⁶¹, [5]²⁶² et [49]²⁶³.

Soit Φ une action à gauche du groupe de Lie G sur sur le fibré cotangent T^*M :

$$G \times T^*M \xrightarrow{\Phi} T^*M \quad \text{et} \quad T^*M \xrightarrow{\Phi_h} T^*M \\ (h, v^*) \mapsto v'^* = \Phi(h, v^*) \quad v^* \mapsto \Phi_h(v^*) \triangleq v'^*$$

On a donc $\Phi_e = \text{id}_{T^*M}$ et $\Phi_{h \cdot h'} = \Phi_h \circ \Phi_{h'}$.

Si $\mu \in \mathfrak{g}$ soit :

$$\mathbb{R} \times T^*M \xrightarrow{\Phi^\mu} T^*M \\ (t, v^*) \mapsto \Phi^\mu(t, v^*) \triangleq \Phi_{\exp(t\mu)}(v^*), \quad \text{car en effet } \exp(t\mu) \in G.$$

Alors Φ^μ est une action à gauche de \mathbb{R} sur T^*M .

261. pp. 276-294 § 4.2 mais il y a beaucoup plus de matériel

262. pp. 46-50 Chapitre 4

263. pp. 365-382 Chapitre 11

Soit μ_{T^*M} le générateur infinitésimal de cette action Φ , correspondant à μ ($\mu_{T^*M} \in \mathcal{X}(T^*M)$). On a vu que :

- $\mu_{T^*M} v^* \triangleq \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi^\mu(t, v^*) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(v^*) \in T_{v^*}(T^*M)$ [49]²⁶⁴.
- Le flot de μ_{T^*M} est $\{\theta_t\} = \{\Phi_{\exp(t\mu)}\}$ [49]²⁶⁵.
- $\nu_{T^*M} = (\text{Ad}_h(\mu))_{T^*M} = \Phi_{h^{-1}}^* \mu_{T^*M}$ [49]²⁶⁶.
- $[\mu_{T^*M}, \mu'_{T^*M}] = -[\mu, \mu']_{T^*M}$ [49]²⁶⁷.

On dit que cette action est de Poisson (ou canonique) ssi l'application Φ_h l'est $\forall h \in G$; i.e. comme nous l'avons vu :

$\Phi_h^* \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} = \{\Phi_h^* \mathbf{F}, \Phi_h^* \mathbf{G}\}$ ou $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Phi_h = \{\mathbf{F} \circ \Phi_h, \mathbf{G} \circ \Phi_h\}$; $\forall h \in G$ et $\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$ [49]²⁶⁸.

Si l'action à gauche Φ est de Poisson son générateur infinitésimal μ_{T^*M} est un automorphisme de Poisson infinitésimal : $\mu_{T^*M} \in \mathcal{P}(T^*M)$ i.e. :

$\mu_{T^*M}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mu_{T^*M}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mu_{T^*M}[\mathbf{G}]\}$; $\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$ [49]²⁶⁹.

Démonstration

Préliminaire

Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\Phi^\mu(\cdot, v^*)} T^*M \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}$
 $t \mapsto \Phi^\mu(t, v^*) = \Phi_{\exp(t\mu)}(v^*) \mapsto \mathbf{F}(\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*))$.

D'après la règle de dérivation composée on a :

$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*)) = (T_{\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*)} \mathbf{F})(\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(t\mu)}(v^*))$ et, en particulier :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathbf{F}(\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*)) = (T_{\Phi_e(v^*)} \mathbf{F})(\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(v^*)) = (T_{v^*} \mathbf{F})(\mu_{T^*M} v^*)$.

Mais $(\mu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*) = (T_{v^*} \mathbf{F})(\mu_{T^*M} v^*)$ et donc :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathbf{F}(\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*)) = (\mu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*)$; soit :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} (\mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)})(v^*) = (\mu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*)$, ce que l'on peut écrire :

$(\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)})(v^*) = (\mu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*)$; $\forall v^* \in T^*M$. Et, par conséquent :

$\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \mu_{T^*M}[\mathbf{F}] \in \mathcal{F}(T^*M)$.

264. p. 366 éq. (11.1.2)

265. p. 366 éq. (11.1.3)

266. p. 366 éq. (11.1.4)

267. p. 366 éq. (11.1.5)

268. p. 365 éq. (11.1.1)

269. p. 366 éq. (11.1.8)

Suite de la démonstration

L'action Φ étant supposée de Poisson posons $h = \exp(t\mu)$; alors :

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \{\mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}\}.$$

Différentions cette relation par rapport à t ; il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \frac{d}{dt} \{\mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}\} \\ = & \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} \right\} + \left\{ \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \frac{d}{dt} \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} \right\}, \text{ soit en} \\ & \text{particulier en } t = 0 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} \right\} \\ + & \left\{ \mathbf{F} \circ \Phi_{\exp(t\mu)}, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{G} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} \right\}, \text{ ce qui s'écrit d'après le préliminaire :} \end{aligned}$$

$$\mu_{T^*M}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mu_{T^*M}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mu_{T^*M}[\mathbf{G}]\}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$$

QED.

Remarque : dans le cas particulier où $\mu_{T^*M} = X_{\mathbf{H}}$, avec $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$, on remarque plus simplement qu'il est un automorphisme de Poisson infinitésimal car la relation précédente n'est autre que l'identité de Jacobi.

Application moment de l'action Φ

L'application moment de l'action Φ est par définition l'application moment \mathbf{J}^+ définie précédemment pour laquelle μ_{T^*M} est le générateur infinitésimal de cette action.

Conservation des applications moment : version hamiltonienne du théorème de Noether

On pourra consulter [49]²⁷⁰

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ est Φ – invariant i.e. si $\mathbf{H} \circ \Phi_h = \mathbf{H}$; $\forall h \in G$ alors \mathbf{J}^+ est une constante du mouvement pour \mathbf{H} i.e. $\mathbf{J}^+ \circ \varphi_t = \mathbf{J}^+$ où $\{\varphi_t\}$ est le flot de $X_{\mathbf{H}}$.

Démonstration

On a vu, dans le préliminaire précédent, que :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{H} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \mu_{T^*M}[\mathbf{H}] \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Si $\mathbf{H} \circ \Phi_h = \mathbf{H}$; $\forall h \in G$ on a $\mathbf{H} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = \mathbf{H}$; $\forall t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H} \circ \Phi_{\exp(t\mu)} = 0; \forall t \in \mathbb{R} \text{ et donc } \mu_{T^*M}[\mathbf{H}] = 0 \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Comme $\mu_{T^*M} = X_{J_\mu^+}$ on a $X_{J_\mu^+}[\mathbf{H}] = \{J_\mu^+, \mathbf{H}\} = 0$. Ceci implique que

270. pp. 372-378 § 11.4

pour chaque élément $\mu \in \mathfrak{g}$ la quantité J_μ^+ est constante le long de flot de $X_{\mathbf{H}}$. Cela signifie que la valeur de l'application moment dans \mathfrak{g}^* est conservée et donc que $\mathbf{J}^+ \circ \varphi_t = \mathbf{J}^+$ où $\{\varphi_t\}$ est le flot de $X_{\mathbf{H}}$ QED.

Équivariance

L'application moment \mathbf{J}^+ est dite équivariante pour [15]²⁷¹ et [49]²⁷² ou Ad^* – équivariante pour [1]²⁷³ et [5]²⁷⁴ ssi :

$$\mathbf{J}^+ \circ \Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^+; \forall h \in G,$$

i.e. si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\mathbf{J}^+} & \mathfrak{g}^* \\ v^* = (x, v_x^*) & & \mu^* = \mathbf{J}^+(v^*) \\ \Phi_h \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{h^{-1}}^* \\ T^*M & \xrightarrow{\mathbf{J}^+} & \mathfrak{g}^* \\ v'^* = (x', v_{x'}^*) & & \mu'^* = \mathbf{J}^+(v'^*) = \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu^*) \end{array}$$

Remarque :

si $\Phi = \text{Ad}_{\cdot}^*$ est l'action à gauche de G sur \mathfrak{g}^* de l'exemple 5 ; donc si $\Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^*$ il revient au même de dire que l'application différentielle \mathbf{J}^+ est équivariante par rapport aux actions Φ et Ad_{\cdot}^* (cf. ce qui précède).

L'application moment \mathbf{J}^+ est équivariante ssi :

$$J_{\text{Ad}_h(\mu)}^+(\Phi_h(v^*)) = J_\mu^+(v^*); \forall h \in G; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ [49]}^{275}.$$

Démonstration :

Ssi $\mathbf{J}^+ \circ \Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^+; \forall h \in G$ alors $\text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^+ \circ \Phi_h = \mathbf{J}^+; \forall h \in G$ et on peut écrire :

$$\langle (\text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^+ \circ \Phi_h)(v^*), \mu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M. \text{ Soit :}$$

$$\langle \text{Ad}_h^*(\mathbf{J}^+(\Phi_h(v^*))), \mu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ et donc :}$$

$$\langle \mathbf{J}^+(\Phi_h(v^*)), \text{Ad}_h(\mu) \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ et finalement :}$$

271. p. 111 éq. (6.47)

272. p. 379 Figure 11.5.1

273. p. 279 Définition 4.2.6

274. p. 48 Définition 4.7

275. p. 379 éq. (11.5.8)

$$J_{\text{Ad}_h(\mu)}^+(\Phi_h(v^*)) = J_\mu^+(v^*); \forall h \in G; \forall \mu \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v^* \in T^*M \text{ QED.}$$

L'équivariance implique l'équivariance infinitésimale.

Démonstration :

L'application moment \mathbf{J}^+ étant équivariante on a, avec $h = \exp(t\mu')$:

$\mathbf{J}^+(\Phi_{\exp(t\mu')}(v^*)) = \text{Ad}_{\exp(-t\mu')}^*(\mathbf{J}^+(v^*)); \forall v^* \in T^*M$, soit, en différentiant par rapport à t :

$\frac{d}{dt} \mathbf{J}^+(\Phi_{\exp(t\mu')}(v^*)) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\mu')}^*(\mathbf{J}^+(v^*))$. On en déduit, d'après la règle de la dérivation composée et avec $\mu^* \triangleq \mathbf{J}^+(v^*)$ que :

$(T_{\Phi_{\exp(t\mu')}(v^*)} \mathbf{J}^+)(\frac{d}{dt} \Phi_{\exp(t\mu')}(v^*)) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\mu')}^*(\mu^*)$ et, en particulier, en faisant $t = 0$:

$$(T_{v^*} \mathbf{J}^+)(\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu')}(v^*)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\mu')}^*(\mu^*). \text{ Soit :}$$

$$(T_{v^*} \mathbf{J}^+)(\mu'_{T^*M v^*}) = -\text{ad}_{\mu'}^*(\mathbf{J}^+(v^*)).$$

On a vu que cette dernière condition était équivalente à l'équivariance infinitésimale de \mathbf{J}^+ :

$$\{J_\mu^+, J_{\mu'}^+\} = J_{[\mu, \mu']}^+ \text{ QED.}$$

Une application moment \mathbf{J}^+ équivariante est une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_+$ sur \mathfrak{g}_+^* .

On pourra consulter [15]²⁷⁶ et [49]²⁷⁷.

Démonstration

Une application moment \mathbf{J}^+ équivariante est une application moment infinitésimalement équivariante et nous avons qu'elle est alors une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_+$ sur \mathfrak{g}_+^* QED.

276. p. 112 § 6.4.2

277. pp. 403-404 Théorème 12.4.1

8.4 Application moment d'une action à droite Ψ du groupe de Lie G sur le fibré cotangent T^*M

Soit Ψ une action à droite du groupe de Lie G sur le fibré cotangent T^*M :

$$T^*M \times G \xrightarrow{\Psi} T^*M \quad \text{et} \quad T^*M \xrightarrow{\Psi_h} T^*M .$$

$$\begin{array}{ccc} (v'^*, h) & \mapsto & v^* = \Psi(v'^*, h) \\ v'^* & \mapsto & \Psi_h(v'^*) \triangleq v^* \end{array}$$

On a donc $\Psi_e = \text{id}_{T^*M}$ et $\Psi_{h \cdot h'} = \Psi_{h'} \circ \Psi_h$.

Si $\nu \in \mathfrak{g}$ soit : $T^*M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi^\nu} T^*M$, car en effet $\exp(-t\nu) \in G$.

$$\begin{array}{ccc} (v'^*, t) & \mapsto & \Psi^\nu(v'^*, t) \triangleq \Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*) \end{array}$$

Alors Ψ^ν est une action à droite de \mathbb{R} sur T^*M .

Soit ν_{T^*M} le générateur infinitésimal de cette action Ψ , correspondant à ν ($\nu_{T^*M} \in \mathcal{X}(T^*M)$). On a vu que :

- $\nu_{T^*M} v'^* \triangleq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi^\nu(v'^*, t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*) \in T_{v'^*}(T^*M)$.
- Le flot de ν_{T^*M} est $\{\theta_t\} = \{\Psi_{\exp(-t\nu)}\}$.
- $\mu_{T^*M} = (\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu))_{T^*M} = \Psi_{h^{-1}}^* \nu_{T^*M}$.
- $[\nu_{T^*M}, \nu'_{T^*M}] = -[\nu, \nu']_{T^*M}$.

On dit que cette action est de Poisson (ou canonique) ssi l'application Ψ_h l'est $\forall h \in G$; i.e. comme nous l'avons vu :

$\Psi_h^* \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} = \{\Psi_h^* \mathbf{F}, \Psi_h^* \mathbf{G}\}$ ou $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Psi_h = \{\mathbf{F} \circ \Psi_h, \mathbf{G} \circ \Psi_h\}$; $\forall h \in G$ et $\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$.

Si l'action à gauche Ψ est de Poisson son générateur infinitésimal ν_{T^*M} est un automorphisme de Poisson infinitésimal : $\nu_{T^*M} \in \mathcal{P}(T^*M)$ i.e. :

$$\nu_{T^*M}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\nu_{T^*M}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \nu_{T^*M}[\mathbf{G}]\}; \quad \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M)$$

[49]²⁷⁸.

Démonstration

Préliminaire

$$\text{Soit } \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi^\nu(\cdot, v^*)} T^*M \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & \Psi^\nu(t, v^*) = \Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*) \\ & & \mapsto & \mathbf{F}(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)) \end{array}$$

D'après la règle de dérivation composée on a :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)) = (T_{\Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)} \mathbf{F}) \left(\frac{d}{dt} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*) \right) \text{ et, en particulier :}$$

278. p. 366 éq. (11.1.8)

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{F}(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)) = (T_{\Psi_e(v^*)}\mathbf{F})\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)\right) = (T_{v^*}\mathbf{F})(\nu_{T^*M}v^*).$$

Mais $(\nu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*) = (T_{v^*}\mathbf{F})(\nu_{T^*M}v^*)$ et donc :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{F}(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v^*)) = (\nu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*); \text{ soit :}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)})(v^*) = (\nu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*), \text{ ce que l'on peut \u00e9crire :}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}\right)(v^*) = (\nu_{T^*M}[\mathbf{F}])(v^*); \forall v^* \in T^*M. \text{ Et, par cons\u00e9quent :}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \nu_{T^*M}[\mathbf{F}] \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Suite de la d\u00e9monstration

L'action Ψ \u00e9tant suppos\u00e9e de Poisson posons $h = \exp(-t\nu)$; alors :

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \{\mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}\}.$$

Diff\u00e9rentions cette relation par rapport \u00e0 t ; il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \frac{d}{dt} \{\mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}\} \\ & = \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} \right\} + \left\{ \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \frac{d}{dt} \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} \right\}, \text{ soit en} \\ & \text{particulier en } t = 0 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} \right\} \\ & + \left\{ \mathbf{F} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)}, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{G} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} \right\}, \text{ ce qui s'écrit d'apr\u00e8s le pr\u00e9liminaire :} \end{aligned}$$

$$\nu_{T^*M}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\nu_{T^*M}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \nu_{T^*M}[\mathbf{G}]\}; \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{F}(T^*M) \text{ QED.}$$

Remarque : dans le cas particulier o\u00f9 $\nu_{T^*M} = X_{\mathbf{H}}$, avec $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$, on remarque plus simplement qu'il est un automorphisme de Poisson infinit\u00e9simal car la relation pr\u00e9c\u00e9dente n'est autre que l'identit\u00e9 de Jacobi.

Application moment de l'action Ψ

L'application moment de l'action Ψ est par d\u00e9finition l'application moment \mathbf{J}^- d\u00e9finie pr\u00e9c\u00e9demment pour laquelle ν_{T^*M} est le g\u00e9n\u00e9rateur infinit\u00e9simal de cette action.

Conservation des applications moment : version hamiltonienne du th\u00e9or\u00e8me de Noether

Si $\mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)$ est Ψ -invariant i.e. si $\mathbf{H} \circ \Psi_h = \mathbf{H}; \forall h \in G$ alors \mathbf{J}^- est une constante du mouvement pour \mathbf{H} i.e. $\mathbf{J}^- \circ \varphi_t = \mathbf{J}^-$ o\u00f9 $\{\varphi_t\}$ est le flot de $X_{\mathbf{H}}$.

D\u00e9monstration

On a vu, dans le pr\u00e9liminaire pr\u00e9c\u00e9dent, que :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{H} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \nu_{T^*M}[\mathbf{H}] \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Si $\mathbf{H} \circ \Psi_h = \mathbf{H}$; $\forall h \in G$ on a $\mathbf{H} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = \mathbf{H}$; $\forall t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H} \circ \Psi_{\exp(-t\nu)} = 0; \forall t \in \mathbb{R} \text{ et donc } \nu_{T^*M}[\mathbf{H}] = 0 \in \mathcal{F}(T^*M).$$

Comme $\nu_{T^*M} = X_{J_\nu^-}$ on a $X_{J_\nu^-}[\mathbf{H}] = \{J_\nu^-, \mathbf{H}\} = 0$. Ceci implique que pour chaque élément $\nu \in \mathfrak{g}$ la quantité J_ν^- est constante le long de flot de $X_{\mathbf{H}}$. Cela signifie que la valeur de l'application moment dans \mathfrak{g}^* est conservée et donc que $\mathbf{J}^- \circ \varphi_t = \mathbf{J}^-$ où $\{\varphi_t\}$ est le flot de $X_{\mathbf{H}}$ QED.

Équivariance

L'application moment \mathbf{J}^- est dite équivariante pour [15]²⁷⁹ et [49]²⁸⁰ ou Ad^* -équivariante pour [1]²⁸¹ et [5]²⁸² ssi :

$$\mathbf{J}^- \circ \Psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^-; \forall h \in G,$$

i.e. si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\mathbf{J}^-} & \mathfrak{g}^* \\ v'^* = (x', v'_{x'}) & & \nu'^* = \mathbf{J}^-(v'^*) \\ \Psi_h \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_h^* \\ T^*M & \xrightarrow{\mathbf{J}^-} & \mathfrak{g}^* \\ v^* = (x, v_x) & & \nu^* = \mathbf{J}^-(v^*) = \text{Ad}_h^*(\nu'^*) \end{array}$$

Remarque :

si $\Psi = \text{Ad}^*$ est l'action à droite de G sur \mathfrak{g}^* de l'exemple 6; donc si $\Psi_h = \text{Ad}_h^*$ il revient au même de dire que l'application différentielle \mathbf{J}^- est équivariante par rapport aux actions Ψ et Ad^* (cf. ce qui précède).

L'application moment \mathbf{J}^- est équivariante ssi :

$$J_{\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu')}^-(\Psi_h(v'^*)) = J_{\nu'}^-(v'^*); \forall h \in G; \forall \nu' \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v'^* \in T^*M.$$

Démonstration :

Ssi $\mathbf{J}^- \circ \Psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^-$; $\forall h \in G$ alors $\text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^- \circ \Psi_h = \mathbf{J}^-$; $\forall h \in G$ et on peut écrire :

$$\langle (\text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^- \circ \Psi_h)(v'^*), \nu' \rangle = \langle \mathbf{J}^-(v'^*), \nu' \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \nu' \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v'^* \in T^*M. \text{ Soit :}$$

279. p. 111 éq. (6.47)

280. p. 379 Figure 11.5.1

281. p. 279 Définition 4.2.6

282. p. 48 Définition 4.7

$\langle \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mathbf{J}^-(\Psi_h(v'^*))), \nu' \rangle = \langle \mathbf{J}^-(v'^*), \nu' \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \nu' \in \mathfrak{g}$ et $\forall v'^* \in T^*M$ et donc :

$\langle \mathbf{J}^-(\Psi_h(v'^*)), \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu') \rangle = \langle \mathbf{J}^-(v'^*), \nu' \rangle \in \mathbb{R}; \forall h \in G; \forall \nu' \in \mathfrak{g}$ et $\forall v'^* \in T^*M$ et finalement, les deux signes $-$ disparaissant :

$$J_{\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu')}^-(\Psi_h(v'^*)) = J_{\nu'}^-(v'^*); \forall h \in G; \forall \nu' \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall v'^* \in T^*M \text{ QED.}$$

L'équivariance implique l'équivariance infinitésimale.

Démonstration :

L'application moment \mathbf{J}^- étant équivariante on a, avec $h = \exp(-t\nu)$:

$\mathbf{J}^-(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*)) = \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}^*(\mathbf{J}^-(v'^*)); \forall v'^* \in T^*M$, soit, en différentiant par rapport à t :

$\frac{d}{dt} \mathbf{J}^-(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*)) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}^*(\mathbf{J}^-(v'^*))$. On en déduit, d'après la règle de la dérivation composée et avec $\nu'^* \triangleq \mathbf{J}^-(v'^*)$ que :

$(T_{(\Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*))} \mathbf{J}^-)(\frac{d}{dt} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*)) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}^*(\nu'^*)$ et, en particulier, en faisant $t = 0$:

$$(T_{v'^*} \mathbf{J}^-)(\frac{d}{dt}|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-t\nu)}^*(\nu'^*). \text{ Soit :}$$

$$(T_{v'^*} \mathbf{J}^-)(\nu_{T^*M v'^*}) = -\text{ad}_{\nu'}^*(\mathbf{J}^-(v'^*)).$$

On a vu que cette dernière condition était équivalente à l'équivariance infinitésimale de \mathbf{J}^- :

$$\{J_{\nu}^-, J_{\nu'}^-\} = J_{[\nu, \nu']}^- \text{ QED.}$$

Une application moment \mathbf{J}^- équivariante est une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_-$ sur \mathfrak{g}^* .

Démonstration

Une application moment \mathbf{J}^- équivariante est une application moment infinitésimalement équivariante et nous avons qu'elle est alors une application de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_-$ sur \mathfrak{g}^* QED.

8.5 Relèvement tangent d'une action

On pourra consulter [5]²⁸³, [47]²⁸⁴ et [51]²⁸⁵.

Il s'agit du passage d'une action (à gauche ou à droite) du groupe G sur la variété M à une action (à gauche ou à droite) du groupe G sur le fibré tangent TM .

Si Φ est une action à gauche : $G \times M \xrightarrow{\Phi} M$ avec $M \xrightarrow{\Phi_h} M$ alors le relèvement tangent à gauche Φ^T de cette action à gauche [5]²⁸⁶ et [47]²⁸⁷ est :

$G \times TM \xrightarrow{\Phi^T} TM$ avec $TM \xrightarrow{\Phi_h^T} TM$ telle que :

$\Phi_h^T \triangleq T\Phi_h$, où $T\Phi_h$ est le relèvement tangent de Φ_h .

Si Ψ est une action à droite : $M \times G \xrightarrow{\Psi} M$ avec $M \xrightarrow{\Psi_h} M$ alors le relèvement tangent à droite Ψ^T de cette action à droite est :

$TM \times G \xrightarrow{\Psi^T} TM$ avec $TM \xrightarrow{\Psi_h^T} TM$ telle que :

$\Psi_h^T \triangleq T\Psi_h$, où $T\Psi_h$ est le relèvement tangent de Ψ_h .

8.5.1 Récapitulation

$\Phi_h^T = T\Phi_h$ et $\Psi_h^T = T\Psi_h$, ce qui est bien cohérent si l'on fait, par exemple, $\Psi = \Phi^{-1}$ ou $\Psi^{-1} = \Phi$.

Nous n'utiliserons pas cette notion de relèvement tangent par la suite.

8.6 Relèvement cotangent d'une action

On pourra consulter [1]²⁸⁸, [5], [47]²⁸⁹ et [49]²⁹⁰.

Il s'agit du passage d'une action à gauche Φ ou à droite Ψ du groupe G sur la variété M à une action à gauche Φ ou à droite Ψ du groupe G sur le fibré cotangent T^*M .

283. p. 37 Définition 3.34

284. p. 13 éq. (2.4)

285. p. 416 § 2.5 Exemple A.20

286. p. 37 Définition 3.34

287. p. 13 éq. (2.4)

288. p. 283

289. p. 13 éq. (2.5)

290. pp. 173-174 § 6.4

8.6.1 Relèvement cotangent à gauche $\Phi \triangleq \Phi^{T^*}$ de l'action à gauche Φ de G sur M

On pourra consulter [1]²⁹¹, [5]²⁹² et [47]²⁹³.

Étant donné que Φ_h est un difféomorphisme de M on a $\Phi_h^{-1} = \Phi_{h^{-1}}$:

$$M \xrightarrow{\Phi_{h^{-1}}} M \quad \text{et donc :}$$

$$x' \mapsto x = \Phi_{h^{-1}}(x')$$

$$T_x^* M \xrightarrow{T_x^* \Phi_{h^{-1}}} T_{x'}^* M \quad \text{et, plus généralement :}$$

$$v_x^* \mapsto v_{x'}^* = (T_{\Phi_h(x)}^* \Phi_{h^{-1}})(v_x^*)$$

$$T_x^* M \xrightarrow{T_x^* \Phi_{h^{-1}}} T_x^* M$$

$$v^* = (x, v_x^*) \mapsto v'^* = (T^* \Phi_{h^{-1}})(v^*) = (\Phi_h(x), (T_{\Phi_h(x)}^* \Phi_{h^{-1}})(v_x^*)) = (x', v_{x'}^*)$$

Soit alors $\Phi_h^{T^*} \triangleq T^* \Phi_{h^{-1}}$, où $T^* \Phi_{h^{-1}}$ est le relèvement cotangent de $\Phi_{h^{-1}}$ [1]²⁹⁴, [5]²⁹⁵ et [47]²⁹⁶ et soit :

$$G \times T^* M \xrightarrow{\Phi \triangleq \Phi^{T^*}} T^* M \quad \text{avec :}$$

$$(h, v^*) \mapsto \Phi(h, v^*) \triangleq \Phi^{T^*}(h, v^*) \triangleq \Phi_h^{T^*}(v^*) \triangleq T^* \Phi_{h^{-1}}(v^*)$$

$$T^* M \xrightarrow{\Phi_h \triangleq \Phi_h^{T^*}} T^* M$$

$$v^* \mapsto \Phi_h(v^*) = \Phi(h, v^*)$$

$\Phi \triangleq \Phi^{T^*}$ est appelé relèvement cotangent à gauche de l'action à gauche Φ de G sur M . C'est bien une action à gauche de G sur $T^* M$ car :

$$\Phi_{h \cdot h'} = \Phi_{h \cdot h'}^{T^*} = \Phi_h^{T^*} \circ \Phi_{h'}^{T^*} = \Phi_h \circ \Phi_{h'}.$$

Remarque : nous avons utilisé la notation Φ^{T^*} pour cette action de même que [1]²⁹⁷ et [5]²⁹⁸ et non celle utilisé par [49]²⁹⁹ (à savoir Φ_*) qui prête à confusion avec celle d'image directe.

$\mu_M \in \mathcal{X}(M)$ est le générateur infinitésimal de l'action Φ , correspondant à $\mu \in \mathfrak{g}$, dont le flot est $\{\Phi_{\exp(t\mu)}\}$. On a :

$$\mu_{Mx} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\mu)}(x).$$

291. p. 283

292. p. 37 Définition 3.34

293. p. 13 éq. (2.5)

294. p. 283

295. p. 37 Définition 3.34

296. p. 13 éq. (2.5)

297. p. 283

298. p. 37

299. p. 173 éq. (6.4.3)

Soit $X_{\mathcal{P}(\mu_M)}$ le relèvement cotangent sur T^*M du champ de vecteurs μ_M sur M ; il s'agit du champ de vecteurs hamiltonien de $\mathcal{P}(\mu_M)$ sur T^*M ($X_{\mathcal{P}(\mu_M)} \in \mathcal{H}(T^*M)$), dont on a vu que le flot est $\{T^*\Phi_{\exp(-t\mu)}\}$. On a :

$$X_{\mathcal{P}(\mu_M)v^*} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T^*\Phi_{\exp(-t\mu)})(v^*).$$

On a vu que $\Phi_h = \Phi_h^{T^*} = T^*\Phi_{h^{-1}}$ et en particulier $\Phi_{\exp(t\mu)} = \Phi_{\exp(t\mu)}^{T^*} = T^*\Phi_{\exp(-t\mu)}$, donc si μ_{T^*M} est le générateur infinitésimal de l'action Φ , correspondant à $\mu \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\mu_{T^*Mv^*} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi_{\exp(t\mu)}(v^*) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T^*\Phi_{\exp(-t\mu)})(v^*).$$

Et, par conséquent :

$$\mu_{T^*Mv^*} = X_{\mathcal{P}(\mu_M)v^*}; \forall v^* \in T^*M, \text{ soit :}$$

$$\mu_{T^*M} = X_{\mathcal{P}(\mu_M)}.$$

μ_{T^*M} est donc un champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M ($T^*M \in \mathcal{H}(T^*M)$) et on constate que $\mathcal{P}(\mu_M) = J_\mu^+$.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\mathbf{J}^+} & \mathfrak{g}^* \\ v^* & \longmapsto & \mu^* \triangleq \mathbf{J}^+(v^*) \end{array} \text{ telle que :}$$

$\langle \mu^*, \mu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \triangleq J_\mu^+(v^*) = \mathcal{P}(\mu_M)(v^*) = \langle v_x^*, \mu_{Mx} \rangle_x \in \mathbb{R}$ (avec $x = \tau_M^*(v^*)$) est l'application moment de l'action Φ [49]³⁰⁰.

Elle est équivariante i. e. $\mathbf{J}^+ \circ \Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^+$.

Démonstration [49]³⁰¹

Soit $v^* = (x, v_x^*)$ et $v'^* = (x', v_{x'}^*) = \Phi_h(v^*) = (T^*\Phi_{h^{-1}})(v^*)$. Donc $x' = \Phi_h(x)$ et $v_{x'}^* = (T_{\Phi_h(x)}^*\Phi_{h^{-1}})(v_x^*)$. Posons $\mu^* = \mathbf{J}^+(v^*)$ et $\mu'^* = \mathbf{J}^+(v'^*)$. Alors :

$$\begin{aligned} & \langle \mu'^*, \nu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v'^*), \nu \rangle = \langle v_{x'}^*, \nu_{Mx'} \rangle_{x'} \\ & = \langle (T_{\Phi_h(x)}^*\Phi_{h^{-1}})(v_x^*), \nu_{M\Phi_h(x)} \rangle_{\Phi_h(x)} \\ & = \langle v_x^*, (T_{\Phi_h(x)}\Phi_{h^{-1}})(\nu_{M\Phi_h(x)}) \rangle_x = \langle v_x^*, (\Phi_h^*\nu_M)_x \rangle_x \\ & = \langle v_x^*, (\text{Ad}_{h^{-1}}(\nu))_{Mx} \rangle_x = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu) \rangle \\ & = \langle \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mathbf{J}^+(v^*)), \nu \rangle; \forall \nu \in \mathfrak{g}. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}^+(\Phi_h(v^*)) = \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mathbf{J}^+(v^*)); \forall v^* \in T^*M. \text{ Soit :}$$

$$\mathbf{J}^+ \circ \Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}^+ \text{ i.e. } \mathbf{J}^+ \text{ est équivariante. QED.}$$

300. p. 367 éq. (11.2.2)

301. pp. 386-387 Théorème 12.1.4

Remarque : dans cette démonstration le vecteur v^* est donné a priori et le vecteur $v'^* = \Phi_h(v^*)$ s'en déduit. Il ne s'agit donc pas du vecteur v'^* donné a priori dans la démonstration équivalente qui suit pour l'action à droite Ψ .

8.6.2 Relèvement cotangent à droite $\Psi \triangleq \Psi^{T^*}$ de l'action à droite Ψ de G sur M

Étant donné que Ψ_h est un difféomorphisme de M on a $\Psi_h^{-1} = \Psi_{h^{-1}}$:

$$M \xrightarrow{\Psi_{h^{-1}}} M \quad \text{et donc :} \\ x \mapsto x' = \Psi_{h^{-1}}(x)$$

$$T_{x'}^* M \xrightarrow{T_x^* \Psi_{h^{-1}}} T_x^* M \quad \text{et, plus généralement :} \\ v'_{x'} \mapsto v_x^* = (T_{\Psi_h(x')}^* \Psi_{h^{-1}})(v'_{x'})$$

$$T_{v'^*}^* M \xrightarrow{T^* \Psi_{h^{-1}}} T^* M \\ v'^* = (x', v'_{x'}) \mapsto v^* = (T^* \Psi_{h^{-1}})(v'^*) = (\Psi_h(x'), (T_{\Psi_h(x')}^* \Psi_{h^{-1}})(v'_{x'})) = (x, v_x^*)$$

Soit alors $\Psi_h^{T^*} \triangleq T^* \Psi_{h^{-1}}$, où $T^* \Psi_{h^{-1}}$ est le relèvement cotangent de $\Psi_{h^{-1}}$ et soit :

$$T^* M \times G \xrightarrow{\Psi \triangleq \Psi^{T^*}} T^* M \\ (v'^*, h) \mapsto \Psi(v'^*, h) \triangleq \Psi^{T^*}(v'^*, g) \triangleq \Psi_g^{T^*}(v'^*) \triangleq T^* \Psi_{g^{-1}}(v'^*) \quad \text{avec :}$$

$$T_{v'^*}^* M \xrightarrow{\Psi_h \triangleq \Psi_h^{T^*}} T^* M \\ v'^* \mapsto \Psi_h(v'^*) = \Psi(v'^*, h)$$

$\Psi \triangleq \Psi^{T^*}$ est appelé relèvement cotangent à droite de l'action à droite Ψ de G sur M . C'est bien une action à droite de G sur $T^* M$ car :

$$\Psi_{h \cdot h'} = \Psi_{h \cdot h'}^{T^*} = \Psi_{h'}^{T^*} \circ \Psi_h^{T^*} = \Psi_{h'} \circ \Psi_h.$$

$\nu_M \in \mathcal{X}(M)$ est le générateur infinitésimal de l'action Ψ , correspondant à $\nu \in \mathfrak{g}$, dont le flot est $\{\Psi_{\exp(-t\nu)}\}$. On a :

$$\nu_{Mx'} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(x').$$

Soit $X_{\mathcal{P}(\nu_M)}$ le relèvement cotangent sur $T^* M$ du champ de vecteurs ν_M sur M ; il s'agit du champ de vecteurs hamiltonien de $\mathcal{P}(\nu_M)$ sur $T^* M$ ($X_{\mathcal{P}(\nu_M)} \in \mathcal{H}(T^* M)$), dont on a vu que le flot est $\{T^* \Psi_{\exp(t\nu)}\}$. On a :

$$X_{\mathcal{P}(\nu_M)v'^*} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T^* \Psi_{\exp(t\nu)})(v'^*).$$

On a vu que $\Psi_h = \Psi_h^{T^*} = T^* \Psi_{h^{-1}}$ et en particulier $\Psi_{\exp(-t\nu)} = \Psi_{\exp(-t\nu)}^{T^*} = T^* \Psi_{\exp(t\nu)}$, donc si $\nu_{T^* M}$ est le générateur infinitésimal de l'action Ψ , correspondant à $\nu \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\nu_{T^*M v'^*} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi_{\exp(-t\nu)}(v'^*) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T^* \Psi_{\exp(t\nu)})(v'^*).$$

Et, par conséquent :

$$\nu_{T^*M v'^*} = X_{\mathcal{P}(\nu_M)v'^*}; \forall v'^* \in T^*M, \text{ soit :}$$

$$\nu_{T^*M} = X_{\mathcal{P}(\nu_M)}.$$

ν_{T^*M} est donc un champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M ($T^*M \in \mathcal{H}(T^*M)$) et on constate que $\mathcal{P}(\nu_M) = J_\nu^-$.

L'application :

$$T^*M \xrightarrow{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}^* \quad \text{telle que :}$$

$$v'^* \mapsto \nu'^* \triangleq \mathbf{J}^-(v'^*)$$

$$\begin{aligned} \langle \nu'^*, \nu' \rangle &= \langle \mathbf{J}^-(v'^*), \nu' \rangle \triangleq -J_{\nu'}^-(v'^*) = -\mathcal{P}(\nu'_M)(v'^*) \\ &= -\langle \nu'_{x'}, \nu'_{Mx'} \rangle_{x'} \in \mathbb{R} \text{ (avec } x' = \tau_M^*(v'^*)) \text{ est l'application moment de} \\ &\text{l'action } \Psi. \end{aligned}$$

Elle est équivariante i.e. $\mathbf{J}^- \circ \Psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^-$.

Démonstration

Soit $v'^* = (x', v'_{x'})$ et $v^* = (x, v_x^*) = \Psi_h(v'^*) = (T^*\Psi_{h^{-1}})(v'^*)$.
Donc $x = \Psi_h(x')$ et $v_x^* = (T_{\Psi_h(x')}^* \Psi_{h^{-1}})(v'_{x'})$. Posons $\nu'^* = \mathbf{J}^-(v'^*)$ et $\nu^* = \mathbf{J}^-(v^*)$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \nu^*, \mu \rangle &= \langle \mathbf{J}^-(v^*), \mu' \rangle = -\langle v_x^*, \mu'_{Mx} \rangle_x \\ &= -\langle (T_{\Psi_h(x')}^* \Psi_{h^{-1}})(v'_{x'}), \mu'_{M\Psi_h(x')} \rangle_{\Psi_h(x')} \\ &= -\langle v'_{x'}, (T_{\Psi_h(x')} \Psi_{h^{-1}})(\mu'_{M\Psi_h(x')}) \rangle_{x'} = -\langle v'_{x'}, (\Psi_h^* \mu'_M)_{x'} \rangle_{x'} \\ &= -\langle v'_{x'}, (\text{Ad}_h(\mu'))_{Mx'} \rangle_{x'} = \langle \mathbf{J}^-(v'^*), \text{Ad}_h(\mu') \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_h^*(\mathbf{J}^-(v'^*)), \mu' \rangle; \forall \mu' \in \mathfrak{g}. \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}^-(\Psi_h(v'^*)) = \text{Ad}_h^*(\mathbf{J}^-(v'^*)); \forall v'^* \in T^*M. \text{ Soit :}$$

$$\mathbf{J}^- \circ \Psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}^- \text{ i.e. } \mathbf{J}^+ \text{ est équivariante. QED.}$$

Remarque : dans cette démonstration le vecteur v'^* est donné a priori et le vecteur $v^* = \Psi_h(v'^*)$ s'en déduit. Il ne s'agit donc pas du vecteur v^* donné a priori dans la démonstration équivalente qui précède pour l'action à gauche Φ .

8.6.3 Récapitulation

$\Phi_h = \Phi_h^{T^*} = T^*\Phi_{h^{-1}}$ et $\Psi_h = \Psi_h^{T^*} = T^*\Psi_{h^{-1}}$, ce qui est bien cohérent si l'on fait, par exemple, $\Psi = \Phi^{-1}$ ou $\Psi^{-1} = \Phi$.

9 Cas particulier où $M = G$

Alors $x \in M$ se note $g \in G$.

9.1 Résumé des considérations précédentes et applications moments \mathbf{J}_L et \mathbf{J}_R

9.1.1 Pour une action à gauche Φ de G sur G

◇ Pour $\mu \in \mathfrak{g}$ soit μ_G le champ de vecteurs sur G qui est le générateur infinitésimal de l'action Φ , correspondant à μ et soit $\mathcal{P}(\mu_G)$ la fonction moment de ce champ de vecteurs μ_G . On a :

$$\mathcal{P}(\mu_G)(v^*) = \langle v_g^*, \mu_{Gg} \rangle_g \in \mathbb{R} \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*) \text{)}.$$

◇ Soit $\Phi = \Phi^{T^*}$ le relèvement cotangent à gauche de cette action à gauche Φ ; il s'agit d'une action à gauche de G sur T^*G et soit μ_{T^*G} le générateur infinitésimal de cette action Φ , correspondant à μ ; on a :

$$\mu_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(\mu_G)} \text{ champ de vecteur hamiltonien sur } T^*G.$$

$$\diamond \text{ Pour } \mu \in \mathfrak{g} \text{ soit } J_\mu^+ = \mathcal{P}(\mu_G) \text{ alors on a } X_{J_\mu^+} = X_{\mathcal{P}(\mu_G)} = \mu_{T^*G}.$$

◇ Soit l'application moment \mathbf{J}^+ de l'action Φ , correspondant à μ :

$$T^*G \xrightarrow[\nu^* \mapsto \mu^* = \mathbf{J}^+(\nu^*)]{\mathbf{J}^+} \mathfrak{g}^* \text{ qui est telle que :}$$

$$\langle \mu^*, \mu \rangle = \langle \mathbf{J}^+(v^*), \mu \rangle \triangleq J_\mu^+(v^*) = \mathcal{P}(\mu_G)(v^*) = \langle v_g^*, \mu_{Gg} \rangle_g \in \mathbb{R} \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*) \text{)}.$$

Cas particulier de l'exemple 1

Pour l'exemple 1 on a $\Phi = L$, μ se note α et on a vu que $\alpha_G = X_\alpha^R$, soit $\alpha_{Gg} = X_{\alpha g}^R = (T_e R_g)(\alpha)$ et on a :

$$\mathcal{P}(X_\alpha^R)(v^*) = \langle v_g^*, X_{\alpha g}^R \rangle_g = \langle v_g^*, (T_e R_g)(\alpha) \rangle_g = \langle (T_e^* R_g)(v_g^*), \alpha \rangle.$$

$$\Phi = \mathbf{L} = L^{T^*}; \text{ soit } \Phi_h = \mathbf{L}_h = L_h^{T^*} = T^* L_{h^{-1}}, \text{ et on a } \alpha_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(X_\alpha^R)}.$$

\mathbf{J}^+ , qui se note \mathbf{J}_L , est l'application moment de l'action \mathbf{L} , correspondant à α , et on a :

$$T^*G \xrightarrow[\nu^* \mapsto \alpha^* = \mathbf{J}_L(\nu^*)]{\mathbf{J}_L} \mathfrak{g}^* .$$

Alors $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = \langle \mathbf{J}_L(v^*), \alpha \rangle = \mathcal{P}(X_\alpha^R)(v^*) = \langle (T_e^* R_g)(v_g^*), \alpha \rangle$;
 $\forall \alpha \in \mathfrak{g}$.

Et par conséquent :

$$\mathbf{J}_L(v^*) = (T_e^* R_g)(v_g^*) = \alpha^* \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*)\text{)}.$$

\mathbf{J}_L est qualifiée de translation à droite vers e . [49]³⁰².

Rappel : $\alpha^* = \bar{\rho}(v_g^*)$.

9.1.2 Pour une action à droite Ψ de G sur G

◇ Pour $\nu \in \mathfrak{g}$ soit ν_G le champ de vecteurs sur G qui est le générateur infinitésimal de l'action Ψ , correspondant à ν et soit $\mathcal{P}(\nu_G)$ la fonction moment de ce champ de vecteurs ν_G . On a :

$$\mathcal{P}(\nu_G)(v^*) = \langle v_g^*, \nu_{Gg} \rangle_g \in \mathbb{R} \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*)\text{)}.$$

◇ Soit $\Psi = \Psi^{T^*}$ le relèvement cotangent à droite de cette action à droite Ψ ; il s'agit d'une action à droite de G sur T^*G et soit ν_{T^*G} le générateur infinitésimal de cette action Ψ , correspondant à ν ; on a :

$\nu_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(\nu_G)}$ champ de vecteur hamiltonien sur T^*G .

◇ Pour $\nu \in \mathfrak{g}$ soit $J_\nu^- = \mathcal{P}(\nu_G)$ alors on a $X_{J_\nu^-} = X_{\mathcal{P}(\nu_G)} = \nu_{T^*G}$.

◇ Soit l'application moment \mathbf{J}^- de l'action Ψ , correspondant à ν :

$$T^*G \xrightarrow[\nu^* \mapsto \nu^* = \mathbf{J}^-(v^*)]{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}^* \text{ qui est telle que :}$$

$$\langle \nu^*, \nu \rangle = \langle \mathbf{J}^-(v^*), \nu \rangle \triangleq -J_\nu^-(v^*) = -\mathcal{P}(\nu_G)(v^*) = -\langle v_g^*, \nu_{Gg} \rangle_g \in \mathbb{R} \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*)\text{)}.$$

Cas particulier de l'exemple 2

Pour l'exemple 2 on a $\Psi = R$, ν se note ζ et on a vu que $\zeta_G = -X_\zeta^L$, soit $\zeta_{Gg} = -X_{\zeta g}^L = -(T_e L_g)(\zeta)$ et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-X_\zeta^L)(v^*) &= \langle v_g^*, -X_{\zeta g}^L \rangle_g = -\langle v_g^*, (T_e L_g)(\zeta) \rangle_g \\ &= -\langle (T_e^* L_g)(v_g^*), \zeta \rangle. \end{aligned}$$

$\Psi = \mathbf{R} = R^{T^*}$; soit : $\Psi_h = \mathbf{R}_h = R_h^{T^*} = T^* R_{h^{-1}}$, et on a $\zeta_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(-X_\zeta^L)}$.

\mathbf{J}^- , qui se note \mathbf{J}_R , est l'application moment de l'action \mathbf{R} , correspondant à ζ , et on a :

302. p. 391 éq. (12.2.6) et p. 392 Figure 12.2.1 où l'espace d'arrivée est \mathfrak{g}_+^*

$$T^*G \xrightarrow[\mathfrak{g}^*]{\mathbf{J}_R} \mathfrak{g}^* .$$

Alors $\langle \zeta^*, \zeta \rangle = \langle \mathbf{J}_R(v^*), \zeta \rangle = -\mathcal{P}(-X_\zeta^L)(v^*) = \langle (T_e^*L_g)(v_g^*), \zeta \rangle ;$
 $\forall \zeta \in \mathfrak{g}$. Et par conséquent :

$$\mathbf{J}_R(v^*) = (T_e^*L_g)(v_g^*) = \zeta^* \text{ (avec } g = \tau_G^*(v^*) \text{)}.$$

\mathbf{J}_R est qualifiée de translation à gauche vers e . [49]³⁰³.

Rappel : $\zeta^* = \bar{\lambda}(v_g^*)$.

9.2 Les applications \mathbf{J}

Les applications \mathbf{J} candidates à être des applications moments sont telles que :

$$T^*G \xrightarrow[\mathbf{J}(v^*)]{\mathbf{J}} \mathfrak{g}^* .$$

9.2.1 Les applications \mathbf{J} invariantes à gauche ou à droite

Les applications \mathbf{J} invariantes à gauche

On dit que \mathbf{J} est invariante à gauche ssi $\mathbf{J} \circ T^*L_h = \mathbf{J} ; \forall h \in G$. Ce qui signifie que $\mathbf{J}(T^*L_h(b^*)) = \mathbf{J}(b^*) ; \forall h \in G, \forall b^* \in T^*G$.

Les applications \mathbf{J} invariantes à droite

On dit que \mathbf{J} est invariante à droite ssi $\mathbf{J} \circ T^*R_h = \mathbf{J} ; \forall h \in G$. Ce qui signifie que $\mathbf{J}(T^*R_h(a^*)) = \mathbf{J}(a^*) ; \forall h \in G, \forall a^* \in T^*G$.

9.3 Étude des applications moments \mathbf{J}_L et \mathbf{J}_R

9.3.1 Étude de l'application moment \mathbf{J}_L

- L'application moment \mathbf{J}_L est invariante à droite.

Démonstration

$(\mathbf{J}_L \circ T^*R_h)(a^*) = \mathbf{J}_L(g, (T_g^*R_h)(a_{g,h}^*)) = [(T_e^*R_g) \circ (T_g^*R_h)](a_{g,h}^*)$
 $= (T_e^*R_{g,h})(a_{g,h}^*) = \mathbf{J}_L(a^*) ; \forall a^* \in T^*G$. Donc $\mathbf{J}_L \circ T^*R_h = \mathbf{J}_L ; \forall h \in G$ et \mathbf{J}_L est invariante à droite QED.

303. p. 391 et p. 392 Figure 12.2.1 où l'espace d'arrivée est \mathfrak{g}_-^*

• L'application moment \mathbf{J}_L est équivariante [49]³⁰⁴ ou Ad^* -équivariante [1]³⁰⁵ et [5]³⁰⁶ :

$$\mathbf{J}_L \circ \mathbf{L}_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}_L; \forall h \in G \ (\mathbf{L}_h = L_h^{T^*} = T^*L_{h^{-1}}) \ [49]^{307},$$

i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\mathbf{J}_L} & \mathfrak{g}^* \\ v^* = (g, v_g^*) & & \alpha^* = \mathbf{J}_L(v^*) \\ \mathbf{L}_h \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{h^{-1}}^* \\ T^*G & \xrightarrow{\mathbf{J}_L} & \mathfrak{g}^* \\ b_{h.g}^* = (h \cdot g, (T_{h.g}^*L_{h^{-1}})(v_g^*)) & & \mathbf{J}_L(b_{h.g}^*) = \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\alpha^*) \end{array} ,$$

Première démonstration générale

Il ne s'agit que d'un cas particulier, de la relation générale déjà démontrée, $\mathbf{J} \circ \Phi_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J} : \forall h \in G$, car Φ est un relèvement cotangent à gauche.

Seconde démonstration particulière

Soit $v^* = (g, v_g^*)$.

- On a $\mathbf{J}_L(b_{h.g}^*) = (T_e^*R_{h.g})((T_{h.g}^*L_{h^{-1}})(v_g^*)) = (T_e^*(L_{h^{-1}} \circ R_{h.g}))(v_g^*)$.
- $\text{Ad}_{h^{-1}}^*(\alpha^*) = (T_e^*L_{h^{-1}})((T_{h^{-1}}^*R_h)((T_e^*R_g)(v_g^*)))$
 $= (T_e^*L_{h^{-1}})((T_{h^{-1}}^*R_{h.g})(v_g^*)) = (T_e^*(L_{h^{-1}} \circ R_{h.g}))(v_g^*)$.
- Donc $\mathbf{J}_L(\mathbf{L}_h(v^*)) = \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mathbf{J}_L(v^*)); \forall v^* \in T^*G$ et :

$$\mathbf{J}_L \circ \mathbf{L}_h = \text{Ad}_{h^{-1}}^* \circ \mathbf{J}_L; \forall h \in \mathfrak{g} \ \text{QED.}$$

L'application \mathbf{J}_L est donc de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_+$ sur \mathfrak{g}_+^* :

$\mathbf{J}_L^* \{F^+, G^+\}_+ = \{\mathbf{J}_L^* F^+, \mathbf{J}_L^* G^+\} \ [49]^{308}$ i.e.
 $\{F^+, G^+\}_+ \circ \mathbf{J}_L = \{F^+ \circ \mathbf{J}_L, G^+ \circ \mathbf{J}_L\} = \{\mathbf{F}_R, \mathbf{G}_R\}; \forall F^+, G^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$ et
avec $\mathbf{F}_R \triangleq F^+ \circ \mathbf{J}_L$ et $\mathbf{G}_R \triangleq G^+ \circ \mathbf{J}_L$, notées ainsi car on va voir qu'elles sont invariantes à droite [49]³⁰⁹.

304. p. 391

305. p. 279 Définition 4.2.6

306. p. 48 Définition 4.7

307. p. 379 éq. (11.5.7)

308. p. 403 éq. (12.4.1)

309. p. 419 éq. (13.1.7)

9.3.2 Étude de l'application moment \mathbf{J}_R

- L'application moment \mathbf{J}_R est invariante à gauche.

Démonstration

$(\mathbf{J}_R \circ T^*L_h)(b^*) = \mathbf{J}_R(g, (T_g^*L_h)(b_{h,g}^*)) = [(T_e^*L_g) \circ (T_g^*L_h)](b_{h,g}^*)$
 $= (T_e^*L_{h,g})(b_{h,g}^*) = \mathbf{J}_R(b^*); \forall b^* \in T^*G$. Donc $\mathbf{J}_R \circ T^*L_h = \mathbf{J}_R; \forall h \in G$ et \mathbf{J}_R est invariante à gauche QED.

- L'application moment \mathbf{J}_R est équivariante [49]³¹⁰ :

$$\mathbf{J}_R \circ \mathbf{R}_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}_R; \forall h \in G \quad (\mathbf{R}_h = R_h^{T^*} = T^*R_{h^{-1}})$$

i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\mathbf{J}_R} & \mathfrak{g}^* \\ v^* = (g, v_g^*) & & \zeta^* = \mathbf{J}_R(v^*) \\ \mathbf{R}_h \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_h^* \\ T^*G & \xrightarrow{\mathbf{J}_R} & \mathfrak{g}^* \\ a_{g,h}^* = (g \cdot h, (T_{g \cdot h}^*R_{h^{-1}})(v_g^*)) & & \mathbf{J}_R(a_{g,h}^*) = \text{Ad}_h^*(\zeta^*) \end{array}$$

Première démonstration générale

Il ne s'agit que d'un cas particulier, de la relation générale, déjà démontrée : $\mathbf{J} \circ \Psi_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}; \forall h \in G$, car Ψ est un relèvement cotangent à droite.

Seconde démonstration particulière

Soit $v^* = (g, v_g^*)$.

- On a $\mathbf{J}_R(a_{g,h}^*) = (T_e^*L_{g \cdot h})((T_{g \cdot h}^*R_{h^{-1}})(v_g^*)) = (T_e^*(L_{g \cdot h} \circ R_{h^{-1}}))(v_g^*)$.
- $\text{Ad}_h^*(\zeta^*) = (T_e^*R_{h^{-1}})((T_{h^{-1}}^*L_h)((T_e^*L_g)(v_g^*)))$
 $= (T_e^*R_{g^{-1}})((T_{h^{-1}}^*L_{g \cdot h})(v_g^*)) = (T_e^*(L_{g \cdot h} \circ R_{h^{-1}}))(v_g^*)$.
- Donc $\mathbf{J}_R(\mathbf{R}_h(v^*)) = \text{Ad}_h^*(\mathbf{J}_R(v^*)); \forall v^* \in T^*G$ et :

$$\mathbf{J}_R \circ \mathbf{R}_h = \text{Ad}_h^* \circ \mathbf{J}_R; \forall h \in \mathfrak{g} \text{ QED.}$$

L'application \mathbf{J}_R est donc de Poisson par rapport aux crochets de Poisson $\{ , \}$ sur T^*M et $\{ , \}_-$ sur \mathfrak{g}^* : $\mathbf{J}_R^* \{F^-, G^-\}_- = \{\mathbf{J}_R^* F^-, \mathbf{J}_R^* G^-\}$ i.e. $\{F^-, G^-\}_- \circ \mathbf{J}_R = \{F^- \circ \mathbf{J}_R, G^- \circ \mathbf{J}_R\} = \{\mathbf{F}_L, \mathbf{G}_L\}; \forall F^-, G^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ [49]³¹¹ et avec $\mathbf{F}_L \triangleq F^- \circ \mathbf{J}_R$ et $\mathbf{G}_L \triangleq G^- \circ \mathbf{J}_R$, notées ainsi car on va voir qu'elles sont invariantes à gauche [49]³¹².

310. p. 391 dit pas très clairement mais il est précisé que Ad_g^* est une action à droite

311. p. 419

312. p. 418 éq. (13.1.6) et p. 423

9.4 Applications numériques sur T^*G invariantes à gauche ou à droite et extensions

On pourra consulter [1]³¹³ et [49]³¹⁴.

Soient $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*G)$:

$$T^*G \xrightarrow{\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}} \mathbb{R},$$

En fait on ne va considérer que les applications numériques sur T^*G qui sont soit invariantes à gauche, soit invariantes à droite et dont la définition est donnée ci-après.

9.4.1 Applications numériques sur T^*G invariantes à gauche et extensions

Une application numérique \mathbf{H} sur T^*G est invariante à gauche ssi

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*L_h; \forall h \in G \text{ [15]}^{315} \text{ et [49]}^{316}.$$

Remarque : dire que \mathbf{H} est invariante à gauche est équivalent à dire qu'elle est \mathbf{L} -invariante i.e. telle que $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*L_{h^{-1}}; \forall h \in G$ car alors $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*L_h; \forall h \in G$.

Alors $\mathbf{H} \in \mathcal{F}_L(T^*G)$ l'ensemble de ces applications.

Soit $H^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*)$ alors on constate que $\mathbf{H}_L \triangleq H^- \circ \mathbf{J}_R \in \mathcal{F}_L(T^*G)$ [49]³¹⁷.

Démonstration :

$$\mathbf{H}_L \circ T^*L_h = (H^- \circ \mathbf{J}_R) \circ T^*L_h = H^- \circ (\mathbf{J}_R \circ T^*L_h) = H^- \circ \mathbf{J}_R = \mathbf{H}_L$$

QED.

$\mathbf{H}_L = H^- \circ \mathbf{J}_R$ est l'extension invariante à gauche de H^- de \mathfrak{g}_-^* à T^*G [15]³¹⁸ et [49]³¹⁹.

9.4.2 Applications numériques sur T^*G invariantes à droite et extensions

Une application numérique \mathbf{H} sur T^*G est invariante à droite ssi

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*R_h; \forall h \in G \text{ [15]}^{320}.$$

313. p. 317

314. p. 418

315. p. 121 éq. (7.12)

316. p. 418 éq. (13.1.5)

317. p. 418 éq. (13.1.6)

318. p. 122 éq. (7.14)

319. p. 418 éq. (13.1.6)

320. p. 121 éq. (7.13)

Remarque : dire que \mathbf{H} est invariante à droite est équivalent à dire qu'elle est \mathbf{R} -invariante i.e. telle que $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*R_{h^{-1}}$; $\forall h \in G$ car alors $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*R_h$; $\forall h \in G$.

Alors $\mathbf{H} \in \mathcal{F}_R(T^*G)$ l'ensemble de ces applications.

Soit $H^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$ alors on constate que $\mathbf{H}_R \triangleq H^+ \circ \mathbf{J}_L \in \mathcal{F}_R(T^*G)$ [49]³²¹.

Démonstration :

$\mathbf{H}_R \circ T^*R_h = (H^+ \circ \mathbf{J}_L) \circ T^*R_h = H^+ \circ (\mathbf{J}_L \circ T^*R_h) = H^+ \circ \mathbf{J}_L = \mathbf{H}_R$
QED.

$\mathbf{H}_R = H^+ \circ \mathbf{J}_L$ est l'extension invariante à droite de H^+ de \mathfrak{g}_+^* à T^*G [15]³²² et [49]³²³.

9.4.3 Calcul de \mathbf{H}_L

$\mathbf{H}_L = H^- \circ \mathbf{J}_R \in \mathcal{F}_L(T^*G)$. Alors : $\mathbf{H}_L(v^*) = H^-(\mathbf{J}_R(v^*)) = H^-(\zeta^*)$.

Il est suffisant de considérer que H^- est remplacé par sa linéarisation en un point particulier [49]³²⁴. Donc supposons que $H^- \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_-^*)$ (i.e. H^- est linéaire). Alors :

$H^-(\zeta^*) = \langle \zeta^*, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \rangle$ où $\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}$ est une constante de \mathfrak{g} . Alors :

$\mathbf{H}_L(v^*) = \langle (T_e^*L_g)(v_g^*), \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \rangle = \langle v_g^*, (T_eL_g)(\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}) \rangle_g = \langle v_g^*, X_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^L \rangle_g$
 $= \langle v_g^*, -(\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_{Gg} \rangle_g = -\mathcal{P}((\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G)(v^*) \in \mathbb{R}$ [49]³²⁵. Soit :

$\mathbf{H}_L = -\mathcal{P}((\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G)$.

9.4.4 Calcul du crochet de Poisson $\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}$ sur $\mathcal{F}(T^*G)$

$\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\} = \{-\mathcal{P}((\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*})_G), -\mathcal{P}((\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G)\} = \{\mathcal{P}((\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*})_G), \mathcal{P}((\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G)\}$
 $= -\mathcal{P}([\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}]_G, [\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]_G)$, d'après le lemme du commutateur des moments et où $[[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}]_G, [\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]_G]$ est le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(G)$.

321. p. 419 éq. (13.1.7)

322. p. 122 éq. (7.15)

323. p. 419 éq. (13.1.7)

324. p. 422

325. p. 422 éq. (13.3.4) avec un signe opposé car les auteurs définissent le champ de vecteurs $(\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G$ avec un signe opposé au notre

Mais $[(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*})_G, (\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*})_G] = [-X_{\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}}^L, -X_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^L] = [X_{\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}}^L, X_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^L] = X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]^L}^L$
 $= X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]}^L$ où $[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g} .

Donc $\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\} = -\mathcal{P}(X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]}^L)$.

9.4.5 Calcul $\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(v^*)$ dans \mathbb{R}

Soit $v^* = (g, v_g^*) \in T^*G$; alors :

$$\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(v^*) = -\mathcal{P}(X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]}^L)(v^*) = -\langle v_g^*, X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]}^L|_g \rangle.$$

9.4.6 Calcul $\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(e, \zeta^*)$ dans \mathbb{R}

Dans le cas particulier où $v^* = (e, v_e^*) = (e, \zeta^*)$ (avec $\zeta^* \in \mathfrak{g}_-$) on a :

$$\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(e, \zeta^*) = -\langle \zeta^*, X_{[\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}]}^L|_e \rangle = -\langle \zeta^*, [\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}] \rangle$$

[49]³²⁶; alors que $\{F^-, H^-\}_-(\zeta^*) = -\langle \zeta^*, [\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}] \rangle$ [49]³²⁷ et donc :

$$\{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(e, \zeta^*) = \{F^-, H^-\}_-(\zeta^*) \text{ ou } \{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}|_{\mathfrak{g}_-} = \{F^-, H^-\}_- [15]³²⁸$$

et [49]³²⁹

Autre démonstration de ce résultat

On a $\{F^-, H^-\}_- \circ \mathbf{J}_R = \{F^- \circ \mathbf{J}_R, H^- \circ \mathbf{J}_R\} = \{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}$ [15]³³⁰ et [49]³³¹.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \{\mathbf{F}_L, \mathbf{H}_L\}(e, \zeta^*) &= \{F^-, H^-\}_-(\mathbf{J}_R(e, \zeta^*)) = \{F^-, H^-\}_-(T_e^*L_e(\zeta^*)) \\ &= \{F^-, H^-\}_-(\zeta^*) = \langle \zeta^*, [\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}, \frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}] \rangle = \langle \zeta^*, \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*}) \rangle \\ &= \langle \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*), \frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*} \rangle [49]³³². \end{aligned}$$

9.4.7 Calcul de \mathbf{H}_R

$\mathbf{H}_R = H^+ \circ \mathbf{J}_L \in \mathcal{F}_R(T^*G)$. Alors : $\mathbf{H}_R(v^*) = H^+(\mathbf{J}_L(v^*)) = H^+(\alpha^*)$.

326. p. 422 éq. (13.3.5)

327. p. 418 éq. (13.1.1) avec le signe -, p. 423 et p. 462 éq. (14.4.3)

328. p. 123 éq. (7.17) seconde

329. p. 419 éq. (13.1.8)

330. p. 123 éqs. (7.19) et (7.20)

331. p. 419 ou p. 422 éq. (13.3.2) pour la première égalité

332. p. 361 éq. (10.7.3)

Il est suffisant de considérer que H^+ est remplacé par sa linéarisation en un point particulier [49]³³³. Donc supposons que $H^+ \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_+^*)$ (i.e. H^+ est linéaire). Alors :

$$\begin{aligned} H^+(\alpha^*) &= \langle \alpha^*, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*} \rangle \text{ où } \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*} \text{ est une constante de } \mathfrak{g}. \text{ Alors :} \\ \mathbf{H}_R(v^*) &= \langle (T_e^* R_g)(v_g^*), \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*} \rangle = \langle v_g^*, (T_e R_g)(\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}) \rangle_g = \langle v_g^*, X_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*} g}^R \rangle_g \\ &= \langle v_g^*, (\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_{Gg} \rangle_g = \mathcal{P}((\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G)(v^*) \in \mathbb{R}. \text{ Soit :} \\ \mathbf{H}_R &= \mathcal{P}((\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G). \end{aligned}$$

9.4.8 Calcul du crochet de Poisson $\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}$ sur $\mathcal{F}(T^*G)$

$\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\} = \{\mathcal{P}((\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*})_G), \mathcal{P}((\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G)\}$
 $= -\mathcal{P}([(\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*})_G, (\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G])$, d'après le lemme du commutateur des moments et où $[(\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*})_G, (\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G]$ est le crochet de Jacobi-Lie sur $\mathcal{X}(G)$.

Mais $[(\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*})_G, (\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*})_G] = [X_{\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}}^R, X_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^R] = X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]^R}^R$
 $= X_{-[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]}^R = -X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]}^R$ où $[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g} .

$$\text{Donc } \{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\} = -\mathcal{P}(-X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]}^R) = \mathcal{P}(X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]}^R).$$

9.4.9 Calcul $\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(v^*)$ dans \mathbb{R}

Soit $v^* = (g, v_g^*) \in T^*G$; alors :

$$\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(v^*) = \mathcal{P}(X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]}^R)(v^*) = \langle v_g^*, X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]g}^R \rangle_g.$$

9.4.10 Calcul $\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(e, \alpha^*)$ dans \mathbb{R}

Dans le cas particulier où $v^* = (e, v_e^*) = (e, \alpha^*)$ (avec $\alpha^* \in \mathfrak{g}_+^*$) on a :

$$\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(e, \alpha^*) = \langle \alpha^*, X_{[\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}]e}^R \rangle = \langle \alpha^*, [\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}] \rangle; \text{ alors que :}$$

$$\{F^+, H^+\}_+(\alpha^*) = \langle \alpha^*, [\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}] \rangle \text{ [49]³³⁴ et par conséquent :}$$

$$\{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(e, \alpha^*) = \{F^+, H^+\}_+(\alpha^*) \text{ ou } \{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}|_{\mathfrak{g}_+^*} = \{F^+, H^+\}_+$$

Autre démonstration de ce résultat

$$\text{On a } \{F^+, H^+\}_+ \circ \mathbf{J}_L = \{F^+ \circ \mathbf{J}_L, H^+ \circ \mathbf{J}_L\} = \{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}.$$

333. p. 422

334. p. 418 éq. (13.1.1) avec le signe +

$$\begin{aligned}
& \text{Donc } \{\mathbf{F}_R, \mathbf{H}_R\}(e, \alpha^*) = \{F^+, H^+\}_+(J_L(e, \alpha^*)) = \{F^+, H^+\}_+(T_e^* R_e(\alpha^*)) \\
& = \{F^+, H^+\}_+(\alpha^*) = - \langle \alpha^*, [\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}, \frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}] \rangle = - \langle \alpha^*, \text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}(\frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*}) \rangle \\
& = - \langle \text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^*(\alpha^*), \frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*} \rangle [49]^{335}.
\end{aligned}$$

9.5 Métrique riemannienne sur \mathfrak{g}

On commence par définir une structure euclidienne sur \mathfrak{g} i.e. on définit un opérateur A symétrique et défini positif :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{A} \mathfrak{g}^* \text{ , avec :} \\
\sigma & \mapsto \sigma^* = A(\sigma) \\
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\sigma^* = A(\sigma)} \mathbb{R} \\
\sigma' & \mapsto \sigma^*(\sigma') = (A(\sigma))(\sigma')
\end{aligned}$$

On a $(A(\sigma))(\sigma') = (A(\sigma'))(\sigma)$; $\forall \sigma, \forall \sigma' \in \mathfrak{g}$; c'est la définition de la symétrie et :

$(A(\sigma))(\sigma) > 0$; $\forall \sigma \neq 0$; c'est la définition de la définie positivité.

Considérons l'application bilinéaire symétrique :

$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{R}$. Elle définit une métrique riemannienne sur \mathfrak{g} .
 $(\sigma, \sigma') \mapsto \langle \sigma, \sigma' \rangle = (A(\sigma))(\sigma') = (A(\sigma'))(\sigma)$

Et l'application quadratique :

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{R} \\
\sigma \mapsto \langle \sigma, \sigma \rangle = (A(\sigma))(\sigma)$$

9.5.1 Métrique invariante à gauche

On va définir une structure euclidienne sur l'espace vectoriel $T_g G$ à l'aide des translations à gauche. Il faut pour cela définir un opérateur symétrique et défini positif :

$$T_g G \xrightarrow{A_g} T_g^* G \\
v_g \mapsto v_g^* = A_g(v_g)$$

On procède de telle manière que le diagramme suivant soit commutatif :

335. p. 361 éq. (10.7.3)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g} & T_g L_{g^{-1}} = (T_e L_g)^{-1} & T_g G & T_g R_{g^{-1}} = (T_e R_g)^{-1} & \mathfrak{g} \\
\zeta = (T_g L_{g^{-1}})(v_g) & \longleftarrow & v_g & \longrightarrow & \alpha = (T_g R_{g^{-1}})(v_g) \\
A \downarrow & \longleftarrow & A_g \downarrow A_g & \longrightarrow & \downarrow B \\
\mathfrak{g}^* & T_e^* L_g = (T_g^* L_{g^{-1}})^{-1} & T_g^* G & T_e^* R_g = (T_g^* R_{g^{-1}})^{-1} & \mathfrak{g}^* \\
\zeta^* = A(\zeta) = (T_e^* L_g)(v_g^*) & \longleftarrow & v_g^* = A_g(v_g) & \longrightarrow & \alpha^* = B(\alpha) = (T_e^* R_g)(v_g^*)
\end{array}$$

Alors $A_g = T_g^* L_{g^{-1}} \circ A \circ T_g L_{g^{-1}} = T_g^* R_{g^{-1}} \circ B \circ T_g R_{g^{-1}}$ et :

$$\begin{aligned}
A &= T_e^* L_g \circ A_g \circ T_e L_g = \text{Ad}_g^* \circ B \circ \text{Ad}_g, \\
B &= T_e^* R_g \circ A_g \circ T_e R_g = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ A \circ \text{Ad}_{g^{-1}}.
\end{aligned}$$

On vérifie que l'opérateur A_g est symétrique et défini positif.

Considérons l' application bilinéaire symétrique :

$$T_g G \times T_g G \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_g} \mathbb{R}. \text{ Elle définit une métrique riemannienne sur } T_g G.$$

$\langle v_g, v'_g \rangle_g = (A_g(v_g))(v'_g) = (A_g(v'_g))(v_g)$

Et l'application quadratique :

$$T_g G \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_g} \mathbb{R}.$$

$\langle v_g, v_g \rangle_g = (A_g(v_g))(v_g)$

Étant donné que $v_g^* = A_g(v_g)$ on constate que $\langle v_g, v'_g \rangle_g = \langle v_g^*, v'_g \rangle_g$.

Alors si ζ' est la composante lagrangienne de v'_g et α' la composante eulérienne on a :

$$\langle v_g, v'_g \rangle_g = \langle v_g^*, v'_g \rangle_g = \langle \zeta^*, \zeta' \rangle = \langle \alpha^*, \alpha' \rangle \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

On a vu que si $\zeta^* \in \mathfrak{g}^*$ alors $(T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*) = \zeta^* \circ (T_g L_{g^{-1}}) \in T_g^* G$.

Soit $v'_g \in T_g G$ et $\zeta' = (T_g L_{g^{-1}})(v'_g)$ la composante lagrangienne de v'_g de la même manière que $\zeta = (T_g L_{g^{-1}})(v_g)$ l'est de v_g .

$$\begin{aligned}
\langle \zeta^*, \zeta' \rangle &= \zeta^*(\zeta') = \zeta^*((T_g L_{g^{-1}})(v'_g)) = ((T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*)) (v'_g) \\
&= ((T_g^* L_{g^{-1}})(A(\zeta)))(v'_g) = ((T_g^* L_{g^{-1}})(A((T_g L_{g^{-1}})(v_g))))(v'_g) = (A_g(v_g))(v'_g) \\
&= \langle v_g, v'_g \rangle_g = \langle v_g^*, v'_g \rangle_g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{De plus } \langle v_g^*, v'_g \rangle_g = \langle (T_g^* R_{g^{-1}})(\alpha^*), v'_g \rangle_g = \langle \alpha^*, (T_g R_{g^{-1}})(v'_g) \rangle \\
&= \langle \alpha^*, \alpha' \rangle \text{ QED.}
\end{aligned}$$

Le diagramme précédent, commutatif est équivalent au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_g} & \mathfrak{g} \\
\zeta = \text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha) & \mapsto & \alpha = \text{Ad}_g(\zeta) \\
A \downarrow & & \downarrow B \\
\mathfrak{g}^* & \xleftarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \\
\zeta^* = A(\zeta) = \text{Ad}_g^*(\alpha^*) & \leftarrow & \alpha^* = B(\alpha) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*)
\end{array}$$

De même soit $\xi = (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$ et $\eta = (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$ et $\xi^* = A(\xi)$, $\dot{g}^* = A_g(\dot{g})$ et $\eta^* = B(\eta)$.

Calcul matriciel

Nous nous sommes placés dans le cas où ordre $G = n$ car $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}^*) = n$.

$$\text{Soient } v_g, v'_g \in T_g G \text{ et } \llbracket v_g \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} v_{g1} \\ \vdots \\ v_{gn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \llbracket v'_g \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} v'_{g1} \\ \vdots \\ v'_{gn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Soit } v_g^* \in T_g^* G \text{ et } \llbracket v_g^* \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} v_{g1}^* \\ \vdots \\ v_{gn}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Soient } \zeta^*, \alpha^* \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \llbracket \zeta^* \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \vdots \\ \zeta_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \llbracket \alpha^* \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Soient } \zeta'^*, \alpha'^* \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \llbracket \zeta'^* \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \zeta'^*_1 \\ \vdots \\ \zeta'^*_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \llbracket \alpha'^* \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \alpha'^*_1 \\ \vdots \\ \alpha'^*_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $I = \llbracket A \rrbracket$, $I_g = \llbracket A_g \rrbracket$ et $J = \llbracket B \rrbracket$; $I^T = I$, $I_g^T = I_g$ et $J^T = J$.

Alors le diagramme suivant, commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & \xleftarrow{M} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{N} & \mathbb{R}^n \\
\llbracket \zeta \rrbracket = M \llbracket v_g \rrbracket & \leftarrow & \llbracket v_g \rrbracket & \mapsto & \llbracket \alpha \rrbracket = N \llbracket v_g \rrbracket \\
I \downarrow & & I_g \downarrow I_g & & \downarrow J \\
\mathbb{R}^n & \xleftarrow{M^{-T}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{N^{-T}} & \mathbb{R}^n \\
\llbracket \zeta^* \rrbracket = I \llbracket \zeta \rrbracket = M^{-T} \llbracket v_g^* \rrbracket & \leftarrow & \llbracket v_g^* \rrbracket = I_g \llbracket v_g \rrbracket & \mapsto & \llbracket \alpha^* \rrbracket = J \llbracket \alpha \rrbracket = N^{-T} \llbracket v_g^* \rrbracket
\end{array}$$

est équivalent au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{NM^{-1}} & \mathbb{R}^n \\
\llbracket \zeta \rrbracket = MN^{-1} \llbracket \alpha \rrbracket & \mapsto & \llbracket \alpha \rrbracket = NM^{-1} \llbracket \zeta \rrbracket \\
I \downarrow & & \downarrow J \\
\mathbb{R}^n & \xleftarrow{M^{-T}N^T} & \mathbb{R}^n \\
\llbracket \zeta^* \rrbracket = I \llbracket \zeta \rrbracket = M^{-T} N^T \llbracket \alpha^* \rrbracket & \leftrightarrow & \llbracket \alpha^* \rrbracket = J \llbracket \alpha \rrbracket = N^{-T} M^T \llbracket \zeta^* \rrbracket
\end{array}$$

On a :

$$I_g = M^T I M = N^T J N \text{ et :}$$

$$I = M^{-T} I_g M^{-1} = M^{-T} N^T J N M^{-1},$$

$$J = N^{-T} I_g N^{-1} = N^{-T} M^T I M N^{-1}. \text{ On a donc :}$$

$$\begin{aligned}
\prec v_g, v'_g \succ_g &= \langle v_g^*, v'_g \rangle_g = \langle \zeta^*, \zeta' \rangle = \langle \alpha^*, \alpha' \rangle = \llbracket \zeta \rrbracket^T I \llbracket \zeta' \rrbracket \\
&= \llbracket \zeta^* \rrbracket^T I^{-1} \llbracket \zeta'^* \rrbracket = \llbracket \alpha^* \rrbracket^T J^{-1} \llbracket \alpha'^* \rrbracket.
\end{aligned}$$

Récapitulatif

Éléments	Matrices $n \times 1$	Éléments	Matrices $n \times 1$
σ	$\llbracket \sigma \rrbracket$	σ'	$\llbracket \sigma' \rrbracket$
ζ	$\llbracket \zeta \rrbracket$	ζ'	$\llbracket \zeta' \rrbracket$
α	$\llbracket \alpha \rrbracket$	α'	$\llbracket \alpha' \rrbracket$
ξ	$\llbracket \xi \rrbracket$	η	$\llbracket \eta \rrbracket$
v_g	$\llbracket v_g \rrbracket$	v'_g	$\llbracket v'_g \rrbracket$
\dot{g}	\dot{q}		
σ^*	$\llbracket \sigma^* \rrbracket$		
ζ^*	$\llbracket \zeta^* \rrbracket$	ζ'^*	$\llbracket \zeta'^* \rrbracket$
α^*	$\llbracket \alpha^* \rrbracket$	α'^*	$\llbracket \alpha'^* \rrbracket$
ξ^*	$\llbracket \xi^* \rrbracket$	η^*	$\llbracket \eta^* \rrbracket$
v_g^*	$\llbracket v_g^* \rrbracket$		
\dot{g}^*	\dot{q}^*		

Opérateurs	Matrices $n \times n$
$T_g L_{g^{-1}}$	$M = \llbracket T_g L_{g^{-1}} \rrbracket$
$T_e L_g$	$M^{-1} = \llbracket T_e L_g \rrbracket$
$T_g R_{g^{-1}}$	$N = \llbracket T_g R_{g^{-1}} \rrbracket$
$T_e R_g$	$N^{-1} = \llbracket T_e R_g \rrbracket$
A	$I = \llbracket A \rrbracket = M^{-T} I_g M^{-1} = M^{-T} N^T J N M^{-1}$
A_g	$I_g = \llbracket A_g \rrbracket = M^T I M = N^T J N$
B	$J = \llbracket B \rrbracket = N^{-T} I_g N^{-1} = N^{-T} M^T I M N^{-1}$
$T_g^* L_{g^{-1}}$	$M^T = \llbracket T_g^* L_{g^{-1}} \rrbracket$
$T_e^* L_g$	$M^{-T} = \llbracket T_e^* L_g \rrbracket$
$T_g^* R_{g^{-1}}$	$N^T = \llbracket T_g^* R_{g^{-1}} \rrbracket$
$T_e^* R_g$	$N^{-T} = \llbracket T_e^* R_g \rrbracket$
Ad_g	$N M^{-1} = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket$
$\text{Ad}_{g^{-1}}$	$M N^{-1} = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^{-1}$
Ad_g^*	$M^{-T} N^T = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^T$
$\text{Ad}_{g^{-1}}^*$	$N^{-T} M^T = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^{-T}$

Relations	Relations matricielles
$\xi = (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$	$[[\xi]] = M \dot{g}$
$\eta = (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$	$[[\eta]] = N \dot{g}$
$\dot{g} = (T_e L_g)(\xi)$	$\dot{g} = M^{-1} [[\xi]]$
$\dot{g} = (T_e R_g)(\eta)$	$\dot{g} = N^{-1} [[\eta]]$
$\zeta = (T_g L_{g^{-1}})(v_g)$	$[[\zeta]] = M [[v_g]]$
$\zeta' = (T_g L_{g^{-1}})(v'_g)$	$[[\zeta']] = M [[v'_g]]$
$v_g = (T_e L_g)(\zeta)$	$[[v_g]] = M^{-1} [[\zeta]]$
$v'_g = (T_e L_g)(\zeta')$	$[[v'_g]] = M^{-1} [[\zeta']]$
$\alpha = (T_g R_{g^{-1}})(v_g)$	$[[\alpha]] = N [[v_g]]$
$\alpha = \text{Ad}_g(\zeta)$	$[[\alpha]] = [[\text{Ad}_g]] [[\zeta]] = N M^{-1} [[\zeta]]$
$\alpha' = (T_g R_{g^{-1}})(v'_g)$	$[[\alpha']] = N [[v'_g]]$
$\alpha' = \text{Ad}_g(\zeta')$	$[[\alpha']] = [[\text{Ad}_g]] [[\zeta']] = N M^{-1} [[\zeta']]$
$v_g = (T_e R_g)(\alpha)$	$[[v_g]] = N^{-1} [[\alpha]]$
$v'_g = (T_e R_g)(\alpha')$	$[[v'_g]] = N^{-1} [[\alpha']]$
$\zeta^* = A(\zeta)$	$[[\zeta^*]] = I [[\zeta]]$
$\zeta = A^{-1}(\zeta^*)$	$[[\zeta]] = I^{-1} [[\zeta^*]]$
$\zeta^* = (T_e^* L_g)(v_g^*)$	$[[\zeta^*]] = M^{-T} [[v_g^*]]$
$\alpha^* = B(\alpha)$	$[[\alpha^*]] = J [[\alpha]]$
$\alpha = B^{-1}(\alpha^*)$	$[[\alpha]] = J^{-1} [[\alpha^*]]$
$\alpha^* = (T_e^* R_g)(v_g^*)$	$[[\alpha^*]] = N^{-T} [[v_g^*]]$
$v_g^* = A_g(v_g)$	$[[v_g^*]] = I_g [[v_g]]$
$v_g = A_g^{-1}(v_g^*)$	$[[v_g]] = I_g^{-1} [[v_g^*]]$
$v_g^* = (T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*)$	$[[v_g^*]] = M^T [[\zeta^*]]$
$v_g^* = (T_g^* R_{g^{-1}})(v_s^*)$	$[[v_g^*]] = N^T [[\alpha^*]]$

10 Théorème de réduction/reconstruction de Lie-Poisson

On pourra consulter [5]³³⁶ et [49]³³⁷

10.1 Version à gauche

Soit $T^*G \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbb{R}$ un hamiltonien invariant à gauche, i.e. tel que $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*L_g; \forall g \in G$. Soit $\{\varphi_t\}$ le flot du champ de vecteurs hamiltonien de $X_{\mathbf{H}}$ et $v^*(\cdot) \triangleq \varphi_t(v_0^*)$ la courbe intégrale de $X_{\mathbf{H}}$ avec la condition initiale $v_0^* \triangleq v^*(0)$ à $t = 0$.

On a $v^*(t) = \varphi_t(v_0^*) = (g(t), v_{g(t)}^*) \in G \times T_{g(t)}^*G$ et $v_0^* = (g_0, v_{g_0}^*)$ avec $g_0 = g(0)$ et $v_{g_0}^* = v_{g(0)}^*$.

Soient $\zeta^*(t) = \mathbf{J}_R(v^*(t)) = (T_e^*L_{g(t)})(v_{g(t)}^*)$ et $\alpha^*(t) = \mathbf{J}_L(v^*(t)) = (T_e^*R_{g(t)})(v_{g(t)}^*)$. On a :

$$\alpha^*(t) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(\zeta^*(t)).$$

Étant donné que \mathbf{J}_L est conservé on a :

$$\alpha^*(t) = \alpha^*(0) = \mathbf{J}_L(v^*(0)) = (T_e^*R_{g_0})(v_{g_0}^*).$$

L'équation différentielle (II) conduit alors à :

$$\frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \text{ad}_{\xi(t)}^*(\zeta^*(t)), \text{ avec } \xi(t) \triangleq (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)).$$

Cependant $\zeta^*(t)$ vérifie l'équation de réduction de Lie-Poisson :

$$\frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*(t)).$$

On en conclut que :

$$(T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) = \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}; \text{ soit } \dot{g}(t) = (T_eL_{g(t)})(\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}).$$

Théorème de réduction/reconstruction de Lie-Poisson [49]³³⁸

Soit G un groupe de Lie et supposons que $T^*G \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbb{R}$ est un hamiltonien invariant à gauche (i.e. $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*L_g; \forall g \in G$). Soit $H^- = \mathbf{H}|_{\mathfrak{g}^*}$ et soit $\zeta^*(t)$ la solution de l'équation de réduction de Lie-Poisson :

$$\frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*(t)),$$

336. pp. 64-68 Chapitre 6

337. pp. 417-432 Chapitre 13 § 13.1, 13.2, 13.3 et 13.4

338. p. 427 Théorème 13.4.4

avec la condition initiale $\zeta^*(0) = (T_e^* L_{g_0})(v_{g_0}^*)$ à $t = 0$.

Alors la courbe intégrale $v^* \in T^*G$ du champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathbf{H}}$, avec la condition initiale $v_0^* = (g_0, v_{g_0}^*)$ à $t = 0$ est telle que :

$$v^*(t) = (g(t), v_{g(t)}^*) \text{ où}$$

$g(t)$ est la solution de **la première équation de reconstruction de lie-Poisson** :

$$\dot{g}(t) = (T_e L_{g(t)})\left(\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}\right), \text{ avec la condition initiale } g_0 \text{ à } t = 0 \text{ et où}$$

$v_{g(t)}^* = (T_{g(t)}^* L_{g^{-1}(t)})(\zeta^*(t))$ est **la seconde équation de reconstruction de Lie-Poisson**.

10.2 Version à droite

Soit $T^*G \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbb{R}$ un hamiltonien invariant à droite, i.e. tel que $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*R_g$; $\forall g \in G$. Soit $\{\varphi_t\}$ le flot du champ de vecteurs hamiltonien de $X_{\mathbf{H}}$ et $v^*(\cdot) \triangleq \varphi(\cdot, v_0^*)$ la courbe intégrale de $X_{\mathbf{H}}$ avec la condition initiale $v_0^* \triangleq v^*(0)$ à $t = 0$.

On a $v^*(t) = \varphi_t(v_0^*) = (g(t), v_{g(t)}^*) \in G \times T_{g(t)}^*G$ et $v_0^* = (g_0, v_{g_0}^*)$ avec $g_0 = g(0)$ et $v_{g_0}^* = v_{g(0)}^*$.

Soient $\zeta^*(t) = \mathbf{J}_R(v^*(t)) = (T_e^* L_{g(t)})(v_{g(t)}^*)$ et $\alpha^*(t) = \mathbf{J}_L(v^*(t)) = (T_e^* R_{g(t)})(v_{g(t)}^*)$. On a :

$$\zeta^*(t) = \text{Ad}_{g(t)}^*(\alpha^*(t)).$$

Étant donné que \mathbf{J}_R est conservé on a :

$$\zeta^*(t) = \zeta^*(0) = \mathbf{J}_R(v^*(0)) = (T_e^* L_{g_0})(v_{g_0}^*).$$

L'équation différentielle (IV) conduit alors à :

$$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = -\text{ad}_{\eta(t)}^*(\alpha^*(t)), \text{ avec } \eta(t) \triangleq (T_{g(t)} R_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)).$$

Cependant $\alpha^*(t)$ vérifie **l'équation de réduction de Lie-Poisson** :

$$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = -\text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^*(\alpha^*(t)).$$

On en conclut que :

$$(T_{g(t)} R_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) = \frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}; \text{ soit } \dot{g}(t) = (T_e R_{g(t)})\left(\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}\right).$$

Théorème de réduction/reconstruction de Lie-Poisson [49] ³³⁹

Soit G un groupe de Lie et supposons que $T^*G \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbb{R}$ est un hamiltonien invariant à droite (i.e. $\mathbf{H} = \mathbf{H} \circ T^*R_g; \forall g \in G$). Soit $H^+ = \mathbf{H}|_{\mathfrak{g}_+^*}$ et soit $\alpha^*(t)$ la solution de l'équation de réduction de Lie-Poisson :

$$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = \text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^* (\alpha^*(t)),$$

avec la condition initiale $\alpha^*(0) = (T_e^* R_{g_0})(v_{g_0}^*)$ à $t = 0$.

Alors la courbe intégrale $v^* \in T^*G$ du champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathbf{H}}$, avec la condition initiale $v_0^* = (g_0, v_{g_0}^*)$ à $t = 0$ est telle que :

$$v^*(t) = (g(t), v_{g(t)}^*) \text{ où}$$

$g(t)$ est la solution de la première équation de reconstruction de Lie-Poisson :

$$\dot{g}(t) = (T_e R_{g(t)}) \left(\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*} \right), \text{ avec la condition initiale } g_0 \text{ à } t = 0 \text{ et où}$$

$v_{g(t)}^* = T_{g(t)}^* R_{g^{-1}(t)}(\alpha^*(t))$ est la seconde équation de reconstruction de Lie-Poisson.

339. p. 427 Théorème 13.4.4

11 Le groupe de Lie spécial orthogonal $SO(3)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et son dual $\mathfrak{so}(3)^*$

On pourra consulter [33]³⁴⁰, [49]³⁴¹, [51]³⁴².

Préliminaire : propriétés de certaines matrices colonnes et carrées

Si $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on pose $\widehat{\omega} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice anti-symétrique, d'ordre 3.

Remarque : $\det(\widehat{\omega}) = 0$.

Donc $\widehat{\omega}^T = -\widehat{\omega} = \widehat{-\omega}$ (l'indice supérieur T signifie transposition).

Si $\omega' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a, avec \times (produit vectoriel) :

$$\omega \times \omega' = \widehat{\omega} \omega' = -\widehat{\omega'} \omega = -\omega' \times \omega = \begin{pmatrix} -\omega_3 \omega'_2 + \omega_2 \omega'_3 \\ \omega_3 \omega'_1 - \omega_1 \omega'_3 \\ -\omega_2 \omega'_1 + \omega_1 \omega'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ [51]}^{343}.$$

$\widehat{\omega \times \omega'} = \widehat{\omega} \widehat{\omega'} - \widehat{\omega'} \widehat{\omega}$, matrice antisymétrique, d'ordre 3.

Soit R une matrice orthogonale d'ordre 3 i. e. telle que $R^{-1} = R^T$. Alors la matrice R est régulière et $\det(R) = 1$. On a :

$\widehat{R\omega} = R \widehat{\omega} R^T$, matrice antisymétrique, d'ordre 3 [51]³⁴⁴ et :

$R \widehat{\omega} \omega' = R(\omega \times \omega') = (R\omega) \times (R\omega') = \widehat{R\omega} R\omega' \in \mathbb{R}^3$ [51]³⁴⁵.

Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

340. p. 12 § A. "The Euclidian case". Pour l'auteur, et avec ses notations, $SE_3 := E^3 \times SO_3$ (p. 12).

341. pp. 474-481 § 14.7. Pour les auteurs, et avec leurs notations, $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \subset SL(4; \mathbb{R})$.

342. pp. 34-72 §§ 3-4-5-6-7. p. 409 Exemple A.4. p. 411 Exemple A.8. pp. 416-433 § 3 "The Geometry of the Euclidian Group". Pour les auteurs, et avec leurs notations, $SE(3) := \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ (p. 35).

343. p. 26 éq. (2.5)

344. p. 26 éq. (2.7)

345. p. 26 éq. (2.6)

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matrices antisymétriques. Et, de plus :

$$\begin{aligned} \widehat{X}X &= 0, \widehat{Y}X = -Z, \widehat{Z}X = Y, \\ \widehat{X}Y &= Z, \widehat{Y}Y = 0, \widehat{Z}Y = -X, \\ \widehat{X}Z &= -Y, \widehat{Y}Z = X, \widehat{Z}Z = 0. \end{aligned}$$

$$\widehat{X}\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \widehat{Y}\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Z}\widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{X}\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Y}\widehat{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \widehat{Z}\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{X}\widehat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Y}\widehat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{Z}\widehat{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.1 Le groupe de Lie spécial orthogonal $SO(3)$

Le groupe spécial orthogonal $SO(3)$ est le groupe des matrices réelles R orthogonales d'ordre 3 : $R \in SO(3)$. Ces matrices sont telles que :

$$R^{-1} = R^T. \text{ Alors la matrice } R \text{ est régulière et } \det(R) = 1.$$

$SO(3) \not\cong \mathbb{R}^3$. $SO(3)$ est un groupe de Lie.

11.1.1 Représentation des éléments de $SO(3)$

On peut écrire $g = R$ et $h = S$ pour les éléments g et h de $SO(3)$, avec $R \in SO(3)$ et $S \in SO(3)$.

Mais on va représenter également les éléments de $SO(3)$, au moins *localement*, par une matrice colonne de dimension 3 :

On pose $\llbracket g \rrbracket = q = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T \in \mathbb{R}^3$ où q_1, q_2, q_3 sont des paramètres d'orientation *indépendants*.

Étant donné que $\dot{g} \in T_g SO(3)$ on pose $\llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

11.1.2 Définition de l'opération \cdot du groupe de Lie $SO(3)$

$$g \cdot h = RS.$$

On constate que $SO(3)$ est bien un groupe multiplicatif d'élément neutre $e = I_3$ (I_3 matrice unité d'ordre 3) et que $g^{-1} = R^T$ (rappel : $R^T = R^{-1}$).

11.1.3 Les automorphismes intérieurs I_h du groupe de Lie $SO(3)$

Soit $SO(3) \xrightarrow[g]{I_h} SO(3)$. Alors $I_h(g) = S R S^T$.
 $\xrightarrow{g} I_h(g) \triangleq h \cdot g \cdot h^{-1}$

11.2 L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ du groupe de Lie $SO(3)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ du groupe de Lie $SO(3)$ est l'ensemble des matrices carrées antisymétriques, d'ordre 3 : $\widehat{\omega} \in \mathfrak{so}(3)$.

$$\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3.$$

11.2.1 Représentation des éléments de $\mathfrak{so}(3)$

Éléments génériques

On peut donc écrire pour les éléments de $\mathfrak{se}(3)$: $\zeta = \widehat{\omega}$ et $\zeta' = \widehat{\omega}'$ pour les éléments génériques et : $\alpha = \widehat{\varpi}$ et $\alpha' = \widehat{\varpi}'$ pour les éléments $\alpha = \text{Ad}_g(\zeta)$ et $\alpha' = \text{Ad}_g(\zeta')$ qui s'en déduisent (cf. ci-après), avec $\widehat{\omega}, \widehat{\omega}', \widehat{\varpi}, \widehat{\varpi}' \in \mathfrak{so}(3)$.
 Donc :

$$\zeta = \widehat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta' = \widehat{\omega}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\alpha = \widehat{\varpi} = \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha' = \widehat{\varpi}' = \begin{pmatrix} 0 & -\varpi'_3 & \varpi'_2 \\ \varpi'_3 & 0 & -\varpi'_1 \\ -\varpi'_2 & \varpi'_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais on va représenter également les éléments de $\mathfrak{so}(3)$ d'une autre manière, étant donné que $\mathfrak{se}(3) \cong \mathbb{R}^3$.

On va représenter ζ, ζ' et α, α' par les matrices colonnes $[[\zeta]], [[\zeta']]$ et $[[\alpha]], [[\alpha']]$, de dimension 3, telles que :

$$[[\zeta]] \triangleq \omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T, [[\zeta']] \triangleq \omega' = (\omega'_1 \ \omega'_2 \ \omega'_3)^T \in \mathbb{R}^3 \text{ et}$$

$$[[\alpha]] \triangleq \varpi = (\varpi_1 \ \varpi_2 \ \varpi_3)^T, [[\alpha']] \triangleq \varpi' = (\varpi'_1 \ \varpi'_2 \ \varpi'_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Éléments particuliers

- Soit $\xi \triangleq (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$. On a $\xi \triangleq R^T \dot{R} = \widehat{\omega}_b \in \mathfrak{so}(3)$.

En effet $R^T R = I_3$ et donc par dérivation $\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0$, soit $(R^T \dot{R})^T + R^T \dot{R} = 0$ et, par conséquent :

$$\xi \triangleq R^T \dot{R} = \widehat{\omega}_b \in \mathfrak{so}(3) \text{ et } \llbracket \xi \rrbracket = \omega_b \in \mathbb{R}^3.$$

Il existe une matrice carrée M , d'ordre 3, telle que $\llbracket \xi \rrbracket = \omega_b = M \dot{q}$.

• Soit $\eta \triangleq (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$. On a $\eta \triangleq \dot{R} R^T = \widehat{\omega}_s \in \mathfrak{so}(3)$.

En effet $R R^T = I_3$ et donc par dérivation $\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$, soit $\dot{R} R^T + (\dot{R} R^T)^T = 0$ et, par conséquent :

$$\eta \triangleq \dot{R} R^T = \widehat{\omega}_s \in \mathfrak{so}(3) \text{ et } \llbracket \eta \rrbracket = \omega_s \in \mathbb{R}^3.$$

Il existe une matrice carrée N , d'ordre 3, telle que $\llbracket \eta \rrbracket = \omega_s = N \dot{q}$.

Comme $\widehat{R \omega_b} = R \widehat{\omega}_b R^T = R R^T \dot{R} R^T = \dot{R} R^T = \eta = \widehat{\omega}_s$ on a $R \omega_b = \omega_s$, soit $R M \dot{q} = N \dot{q}$; $\forall \dot{q} \in \mathbb{R}^3$ et finalement :

$$N M^{-1} = R.$$

11.2.2 Base de $\mathfrak{so}(3)$

Une base de $\mathfrak{so}(3)$ est constituée de :

$$\begin{aligned} e_1 &\triangleq \widehat{X}; \text{ soit } \llbracket e_1 \rrbracket = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ e_2 &\triangleq \widehat{Y}; \text{ soit } \llbracket e_2 \rrbracket = Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ e_3 &\triangleq \widehat{Z}; \text{ soit } \llbracket e_3 \rrbracket = Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

11.2.3 Crochet de Lie sur $\mathfrak{so}(3)$

Si $\zeta = \widehat{\omega} \in \mathfrak{so}(3)$ et $\zeta' = \widehat{\omega}' \in \mathfrak{so}(3)$ on définit le crochet de Lie $[\zeta, \zeta'] \in \mathfrak{so}(3)$ de la manière suivante :

$$[\zeta, \zeta'] \triangleq \widehat{\omega \times \omega'} = \widehat{\omega} \widehat{\omega}' - \widehat{\omega}' \widehat{\omega} = \zeta \zeta' - \zeta' \zeta.$$

On constate que $\llbracket [\zeta, \zeta'] \rrbracket = \zeta \llbracket \zeta' \rrbracket - \llbracket \zeta \rrbracket \zeta' = \widehat{\omega} \llbracket \widehat{\omega}' \rrbracket$.

On a $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$.

Donc les coefficients de structure de cette base de $\mathfrak{so}(3)$ sont :

$$c_{12}^3 = -c_{21}^3 = 1, c_{13}^2 = -c_{31}^2 = -1, c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1.$$

11.2.4 L'opération ad_ζ de $\mathfrak{so}(3)$, avec $\zeta \in \mathfrak{so}(3)$

$$\mathfrak{so}(3) \xrightarrow{\text{ad}_\zeta} \mathfrak{so}(3) \quad . \text{ Alors :}$$

$$\zeta \longmapsto \text{ad}_\zeta(\zeta') \triangleq [\zeta, \zeta']$$

$$[[\text{ad}_\zeta(\zeta')]] = \zeta [[\zeta']] \text{ et } [[\text{ad}_\zeta(\zeta')]] = [[\text{ad}_\zeta]] [[\zeta']]. \text{ Par conséquent :}$$

$$[[\text{ad}_\zeta]] = \zeta$$

Remarque : on constate que $[[\text{ad}_\zeta]]^T = \zeta^T = -\zeta$.

En particulier $[[\text{ad}_\xi]] = \xi = R^T \dot{R} = \widehat{\omega}_b$ et $[[\text{ad}_\eta]] = \eta = \dot{R} R^T = \widehat{\omega}_s$.

11.2.5 L'opération Ad_g de $\mathfrak{so}(3)$, avec $g \in SO(3)$

$$\mathfrak{so}(3) \xrightarrow{\text{Ad}_g} \mathfrak{so}(3) \quad .$$

$$\zeta \longmapsto \alpha = \text{Ad}_g(\zeta)$$

$$[[\alpha]] = [[\text{Ad}_g(\zeta)]] = [[\text{Ad}_g]] [[\zeta]].$$

De même $[[\eta]] = [[\text{Ad}_g(\xi)]] = [[\text{Ad}_g]] [[\xi]]$ et comme $[[\eta]] = R [[\xi]]$ on a :

$$[[\text{Ad}_g]] = R = N M^{-1}.$$

Remarque : on constate que $[[\text{Ad}_g]]^T = R^T$.

Par conséquent $[[\alpha]] = R [[\zeta]]$ soit $\varpi = R \omega$.

On en déduit (cf. vérification de l'équation (I) ci-après) :

$$[[\frac{d\alpha}{dt}]] = \dot{R} \omega + R \dot{\omega}.$$

11.2.6 L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}$ de $\mathfrak{so}(3)$, avec $g \in SO(3)$

$$\mathfrak{so}(3) \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}}} \mathfrak{so}(3) \quad .$$

$$\alpha \longmapsto \zeta = \text{Ad}_g(\alpha)$$

$$[[\zeta]] = [[\text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha)]] = [[\text{Ad}_{g^{-1}}]] [[\alpha]] \in \mathbb{R}^3 \text{ avec :}$$

$$[[\text{Ad}_{g^{-1}}]] \triangleq R^T \in SO(3)$$

Remarque : on constate que $[[\text{Ad}_{g^{-1}}]]^T = R$.

Par conséquent $\omega = R^T \varpi$.

On en déduit (cf. vérification de l'équation (III) ci-après) :

$$[[\frac{d\zeta}{dt}]] = -R^T \dot{R} R^T \varpi + R^T \dot{\varpi}.$$

11.2.7 Comparaison entre les opérations Ad_g et $\text{Ad}_{g^{-1}}$

On constate que :

$$\cdot \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^{-1} = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}} \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^T = R^T.$$

$$\cdot \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}} \rrbracket^{-1} = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}} \rrbracket^T = R.$$

11.3 L'application exponentielle du groupe de Lie $SO(3)$

$$\text{On a : } \exp : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow SO(3). \\ \hat{\omega} \longmapsto \exp(\hat{\omega})$$

Calcul de $\exp(\hat{\omega})$

$$\exp(\hat{\omega}) \triangleq I_3 + \frac{\hat{\omega}}{1!} + \frac{\hat{\omega}^2}{2!} + \frac{\hat{\omega}^3}{3!} + \frac{\hat{\omega}^4}{4!} + \frac{\hat{\omega}^5}{5!} + \frac{\hat{\omega}^6}{6!} + \frac{\hat{\omega}^7}{7!} + \dots$$

Posons $k \triangleq \|\omega\| \triangleq (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^{\frac{1}{2}}$. On trouve :

$$\hat{\omega}^2 = \begin{pmatrix} -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & -(\omega_3^2 + \omega_1^2) & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\omega}^{2T} = \hat{\omega}^2 ;$$

$$\hat{\omega}^3 = -k^2 \hat{\omega} \text{ et } \hat{\omega}^{3T} = -\hat{\omega}^3 ;$$

$$\hat{\omega}^4 = -k^2 \hat{\omega}^2 \text{ et } \hat{\omega}^{4T} = \hat{\omega}^4 ;$$

$$\hat{\omega}^5 = k^4 \hat{\omega} \text{ et } \hat{\omega}^{5T} = -\hat{\omega}^5 ;$$

$$\hat{\omega}^6 = k^4 \hat{\omega}^2 \text{ et } \hat{\omega}^{6T} = \hat{\omega}^6 ;$$

$$\hat{\omega}^7 = -k^6 \hat{\omega} \text{ et } \hat{\omega}^{7T} = -\hat{\omega}^7 ;$$

...

Par conséquent :

$$\exp(\hat{\omega}) = I_3 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{k^2}{3!} + \frac{k^4}{5!} - \frac{k^6}{7!} + \dots\right) \hat{\omega} + \left(\frac{1}{2!} - \frac{k^2}{4!} + \frac{k^4}{6!} - \dots\right) \hat{\omega}^2, \text{ soit :}$$

· Si $\omega \neq 0$ (i.e. si $k \neq 0$) :

$$\exp(\hat{\omega}) = I_3 + \frac{\sin k}{k} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos k}{k^2} \hat{\omega}^2, \text{ ou plus explicitement :}$$

$$\exp \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1 - \cos k}{k^2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) & -\frac{\sin k}{k} \omega_3 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_1 \omega_2 & \frac{\sin k}{k} \omega_2 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_1 \omega_3 \\ \frac{\sin k}{k} \omega_3 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_1 \omega_2 & 1 - \frac{1 - \cos k}{k^2} (\omega_3^2 + \omega_1^2) & -\frac{\sin k}{k} \omega_1 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_2 \omega_3 \\ -\frac{\sin k}{k} \omega_2 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_1 \omega_3 & \frac{\sin k}{k} \omega_1 + \frac{1 - \cos k}{k^2} \omega_2 \omega_3 & 1 - \frac{1 - \cos k}{k^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{pmatrix}$$

· Si $\omega = 0$ (i.e. si $k = 0$) :

$$\exp(0) = I_3.$$

Alors $\exp(\hat{\omega}) \in SO(3)$. En effet si $\omega = 0$ c'est évident et si $\omega \neq 0$:

$$(\exp(\hat{\omega}))^T = I_3 - \frac{\sin k}{k} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos k}{k^2} \hat{\omega}^2 = \exp(-\hat{\omega}). \text{ Et :}$$

$$\begin{aligned}
& (\exp(\widehat{\omega})) (\exp(\widehat{\omega}))^T = (I_3 + \frac{\sin k}{k} \widehat{\omega} + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2) (I_3 - \frac{\sin k}{k} \widehat{\omega} + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2) \\
& = (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2)^2 - (\frac{\sin k}{k} \widehat{\omega})^2 = I_3 + 2 \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2 + \frac{(1-\cos k)^2}{k^4} \widehat{\omega}^4 - (\frac{\sin k}{k} \widehat{\omega})^2 \\
& = I_3 + 2 \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2 - \frac{(1-\cos k)^2}{k^2} \widehat{\omega}^2 - (\frac{\sin k}{k} \widehat{\omega})^2 = I_3 : \forall \widehat{\omega}. \text{ Et :}
\end{aligned}$$

$$(\exp(\widehat{\omega}))^T (\exp(\widehat{\omega})) = (\exp(-\widehat{\omega})) (\exp(-\widehat{\omega}))^T = I_3, \text{ d'après ce qui précède.}$$

Par conséquent $(\exp(\widehat{\omega}))^{-1} = (\exp(\widehat{\omega}))^T$, d'où la conclusion.

11.4 Le dual $\mathfrak{so}(3)^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$

Le dual $\mathfrak{so}(3)^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est tel que $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$.

11.4.1 Base de $\mathfrak{se}(3)^*$

Étant donné que $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ et que $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ on va choisir la même base dans $\mathfrak{so}(3)^*$ que dans $\mathfrak{so}(3)$:

$$\begin{aligned}
e_1^* &= e_1 \text{ et } \llbracket e_1^* \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket, \\
e_2^* &= e_2 \text{ et } \llbracket e_2^* \rrbracket = \llbracket e_2 \rrbracket, \\
e_3^* &= e_3 \text{ et } \llbracket e_3^* \rrbracket = \llbracket e_3 \rrbracket.
\end{aligned}$$

11.4.2 Représentation des éléments de $\mathfrak{se}(3)^*$

On peut donc écrire $\zeta^* = \widehat{\omega}^*$ et $\zeta'^* = \widehat{\omega}'^*$ pour les éléments ζ^* et ζ'^* de $\mathfrak{so}(3)^*$.

$$\zeta^* = \widehat{\omega}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^* & \omega_2^* \\ \omega_3^* & 0 & -\omega_1^* \\ -\omega_2^* & \omega_1^* & 0 \end{pmatrix}, \zeta'^* = \widehat{\omega}'^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3'^* & \omega_2'^* \\ \omega_3'^* & 0 & -\omega_1'^* \\ -\omega_2'^* & \omega_1'^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais on va représenter également les éléments de $\mathfrak{so}(3)^*$ d'une autre manière, étant donné que $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$:

On va représenter ζ^* et ζ'^* par les matrices colonnes $\llbracket \zeta^* \rrbracket$ et $\llbracket \zeta'^* \rrbracket$, de dimension 3, telles que :

$$\llbracket \zeta^* \rrbracket \triangleq \omega^* = (\omega_1^* \ \omega_2^* \ \omega_3^*)^T, \llbracket \zeta'^* \rrbracket \triangleq \omega'^* = (\omega_1'^* \ \omega_2'^* \ \omega_3'^*)^T \in \mathbb{R}^3.$$

11.5 Produit scalaire

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(\zeta^*, \zeta) & \longmapsto & \langle \zeta^*, \zeta \rangle \triangleq \llbracket \zeta^* \rrbracket^T \llbracket \zeta \rrbracket = \omega^*{}^T \omega = \omega_1^* \omega_1 + \omega_2^* \omega_2 + \omega_3^* \omega_3
\end{array}$$

On constate que $\langle \zeta^*, \zeta \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\widehat{\omega^*} \widehat{\omega})$ (Tr désigne la trace d'une matrice carrée i.e. la somme des éléments de la diagonale principale) [49]³⁴⁶.

11.6 L'opération ad_ζ^* de $\mathfrak{so}(3)^*$, avec $\zeta \in \mathfrak{so}(3)$

L'opération ad_ζ^* de $\mathfrak{so}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération ad_ζ de $\mathfrak{so}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{ad}_\zeta^*(\zeta^*), \zeta' \rangle = \langle \zeta^*, \text{ad}_\zeta(\zeta') \rangle; \forall \zeta' \in \mathfrak{so}(3) \text{ et } \forall \zeta^* \in \mathfrak{so}(3)^*$$

$$\text{Alors } \llbracket \text{ad}_\zeta^* \rrbracket = \llbracket \text{ad}_\zeta \rrbracket^T = \zeta^T = -\zeta.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{ad}_\zeta^*(\zeta^*), \zeta' \rangle = \omega^{*T} \widehat{\omega} \omega' = \langle \zeta^*, \text{ad}_\zeta(\zeta') \rangle.$$

En particulier :

$$\llbracket \text{ad}_\xi^* \rrbracket = \llbracket \text{ad}_\xi \rrbracket^T = -R^T \dot{R} \text{ et } \llbracket \text{ad}_\eta^* \rrbracket = \llbracket \text{ad}_\eta \rrbracket^T = -\dot{R} R^T.$$

11.7 L'opération Ad_g^* de $\mathfrak{so}(3)^*$, avec $g \in SO(3)$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}(3)^* & \xrightarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{so}(3)^* \\ \alpha^* & \longmapsto & \zeta^* = \text{Ad}_g^*(\alpha^*) \end{array}.$$

L'opération Ad_g^* de $\mathfrak{so}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération Ad_g de $\mathfrak{so}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{Ad}_g^*(\alpha^*), \zeta \rangle = \langle \alpha^*, \text{Ad}_g(\zeta) \rangle; \forall \zeta \in \mathfrak{so}(3) \text{ et } \forall \alpha^* \in \mathfrak{so}(3)^*$$

$$\text{Alors } \llbracket \text{Ad}_g^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^T = R^T.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{Ad}_g^*(\alpha^*), \zeta \rangle = \varpi^{*T} R \omega = \langle \alpha^*, \text{Ad}_g(\zeta) \rangle.$$

$$\text{On a } \llbracket \zeta^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_g^* \rrbracket \llbracket \alpha^* \rrbracket \text{ soit } \omega^* = R^T \varpi^*.$$

Par conséquent on en déduit (cf. vérification de l'équation (IV) ci-après) :

$$\llbracket \frac{d\zeta^*}{dt} \rrbracket = -R^T \dot{R} R^T \varpi^* + R^T \dot{\varpi}^*.$$

346. p. 290

11.8 L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ de $\mathfrak{so}(3)^*$, avec $g \in SO(3)$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}(3)^* & \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{so}(3)^* \\ \zeta^* & \longmapsto & \alpha^* = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*) \end{array} .$$

L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ de $\mathfrak{so}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}$ de $\mathfrak{so}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*), \zeta \rangle = \langle \zeta^*, \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta) \rangle ; \forall \zeta \in \mathfrak{so}(3) \text{ et } \forall \zeta^* \in \mathfrak{so}(3)^*$$

$$\text{Alors } \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}}^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}} \rrbracket^T = R.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*), \zeta \rangle = \omega^{*T} R^T \omega = \langle \zeta^*, \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta) \rangle .$$

$$\text{On a } \llbracket \alpha^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}}^* \rrbracket \llbracket \zeta^* \rrbracket \text{ soit } \varpi^* = R \omega^* .$$

Par conséquent on en déduit (cf. vérification de l'équation (II) ci-après) :

$$\llbracket \frac{d\alpha^*}{dt} \rrbracket = \dot{R} \omega^* + R \dot{\omega}^* .$$

11.9 Vérification des formules (I), (II), (III) et (IV)

Étant donné que $\llbracket [\xi, \zeta] \rrbracket = R^T \dot{R} \omega$, $\llbracket [\eta, \alpha] \rrbracket = \dot{R} R^T \varpi$, $\llbracket \text{ad}_{\xi}^*(\zeta^*) \rrbracket = -R^T \dot{R} \omega^*$ et $\llbracket \text{ad}_{\eta}^*(\alpha^*) \rrbracket = -\dot{R} R^T \varpi^*$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \alpha(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}([\xi(t), \zeta(t)] + \frac{d}{dt} \zeta(t)) \\ &= \text{Ad}_{g(t)}(\text{ad}_{\xi(t)}(\zeta(t)) + \frac{d}{dt} \zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}(\frac{d}{dt} \zeta(t)) + [\eta(t), \alpha(t)] \text{ (I)} \end{aligned}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^3 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) $\dot{R} \omega + R \dot{\omega}$.

$$\bullet \frac{d}{dt} \alpha^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(\zeta^*(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(-\text{ad}_{\xi(t)}^*(\zeta^*(t)) + \frac{d}{dt} \zeta^*(t)) \text{ (II)}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^3 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) $\dot{R} \omega^* + R \dot{\omega}^*$.

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-[\eta(t), \alpha(t)] + \frac{d}{dt} \alpha(t)) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-\text{ad}_{\eta(t)}(\alpha(t)) + \frac{d}{dt} \alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\frac{d}{dt} \alpha(t)) - [\xi(t), \zeta(t)] \text{ (III)} \end{aligned}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^3 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) $-R^T \dot{R} R^T \varpi + R^T \dot{\varpi}$.

$$\bullet \frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}^*(\alpha^*(t)) = \text{Ad}_{g(t)}^*(\text{ad}_{\eta(t)}^*(\alpha^*(t)) + \frac{d}{dt} \alpha^*(t)) \text{ (IV)}$$

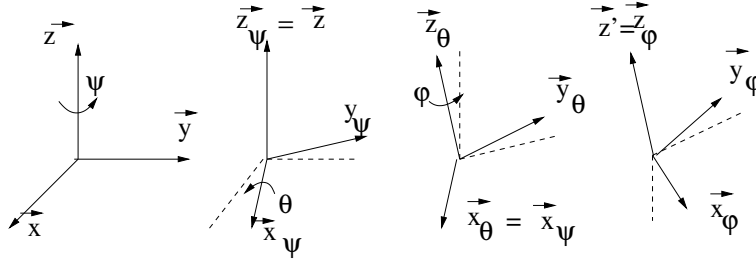
En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^3 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) $-R^T \dot{R} R^T \varpi^* + R^T \dot{\varpi}^*$.

11.10 Cas d'utilisation des angles d'Euler classiques

ψ, θ, φ

On pourra consulter [59]³⁴⁷.

On définit l'orientation de par les angles d'Euler classiques : ψ (précession) ; θ (nutation) et φ (rotation propre)³⁴⁸ :



Alors $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{x}_\psi + \dot{\varphi} \vec{z}_\theta$ est le vecteur rotation [59]³⁴⁹.

$$\text{On a } \llbracket g \rrbracket = q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $\llbracket \xi \rrbracket = M \dot{q}$ donne [49]³⁵⁰, [59]³⁵¹ et [60]³⁵² :

$$M = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det(M) = -\sin(\theta); \text{ soit :}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} & 0 \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\cos(\theta) \sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & -\frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\sin(\theta)} & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$M^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & \cos(\varphi) & -\frac{\cos(\theta) \sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \\ \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} & -\sin(\varphi) & -\frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

347. pp. 35-37 § 5.2

348. attention [5] et [49] utilisent φ pour la précession et ψ pour la rotation propre

349. p. 36

350. p. 498 éq. (15.7.1)

351. p. 37

352. p. 4.12 et p. 4.19

Le calcul de $[\eta] = N \dot{q}$ donne [49]³⁵³ et [60]³⁵⁴ :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\psi) & -\cos(\psi) \sin(\theta) \\ 1 & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \det(N) = -\sin(\theta); \text{ soit :}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)} & -\frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)} & 0 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) \sin(\theta) & -\cos(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$N^{-T} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & \cos(\psi) & \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)} \\ \frac{\cos(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & \sin(\psi) & -\frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On en déduit :}$$

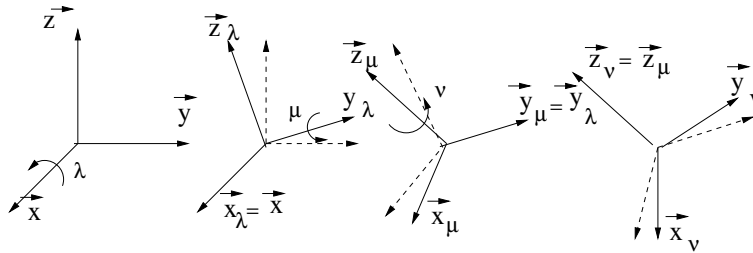
$$R = N M^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\cos(\psi) \sin(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \cos(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\sin(\psi) \sin(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

[59]³⁵⁵ et [60]³⁵⁶.

11.11 Cas d'utilisation des angles de Bryant λ, μ, ν

On pourra consulter [59]³⁵⁷.

On définit l'orientation par les angles de Bryant :
 λ, μ et ν [59] :



353. p. 498 éq. (15.7.1)

354. p. 4.12 et p. 4.19

355. p. 36

356. p. 0.4

357. pp. 33-35 § 5.1

Alors $\vec{\omega} = \dot{\lambda} \vec{x} + \dot{\mu} \vec{y}_\lambda + \dot{\nu} \vec{z}_\mu$ est le vecteur rotation [59]³⁵⁸.

$$\text{On a } \llbracket g \rrbracket = q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $\llbracket \xi \rrbracket = M \dot{q}$ [49]³⁵⁹ et [59]³⁶⁰ donne :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\mu) \cos(\nu) & \sin(\nu) & 0 \\ -\cos(\mu) \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ \sin(\mu) & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det(M) = \cos(\mu); \text{ soit :}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\nu)}{\cos(\mu)} & -\frac{\sin(\nu)}{\cos(\mu)} & 0 \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ -\frac{\sin(\mu) \cos(\nu)}{\cos(\mu)} & \frac{\sin(\mu) \sin(\nu)}{\cos(\mu)} & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \cos(\mu) \cos(\nu) & -\cos(\mu) \sin(\nu) & \sin(\mu) \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$M^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\nu)}{\cos(\mu)} & \sin(\nu) & -\frac{\sin(\mu) \cos(\nu)}{\cos(\mu)} \\ -\frac{\sin(\nu)}{\cos(\mu)} & \cos(\nu) & \frac{\sin(\mu) \sin(\nu)}{\cos(\mu)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $\llbracket \eta \rrbracket = N \dot{q}$ donne :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\mu) \\ 0 & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \cos(\mu) \\ 0 & \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \cos(\mu) \end{pmatrix}; \det(N) = \cos(\mu); \text{ soit :}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} & -\frac{\cos(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} \\ 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & -\frac{\sin(\lambda)}{\cos(\mu)} & \frac{\cos(\lambda)}{\cos(\mu)} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ \sin(\mu) & -\sin(\lambda) \cos(\mu) & \cos(\lambda) \cos(\mu) \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$N^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sin(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} & \cos(\lambda) & -\frac{\sin(\lambda)}{\cos(\mu)} \\ -\frac{\cos(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} & \sin(\lambda) & \frac{\cos(\lambda)}{\cos(\mu)} \end{pmatrix}$$

358. p. 34

359. p. 498 éq. (15.7.1)

360. p. 35

On en déduit :

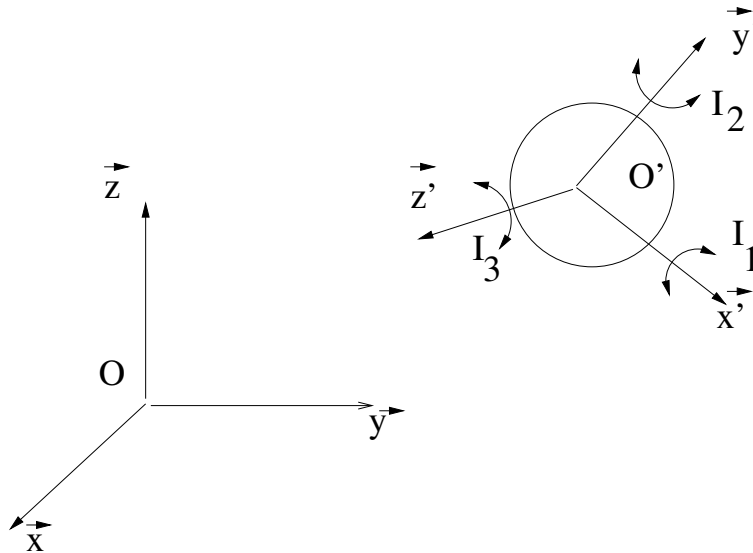
$$R = N M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) \cos(\nu) & -\cos(\mu) \sin(\nu) & \sin(\mu) \\ \cos(\lambda) \sin(\nu) + \sin(\lambda) \sin(\mu) \cos(\nu) & \cos(\lambda) \cos(\nu) - \sin(\lambda) \sin(\mu) \sin(\nu) & -\sin(\lambda) \cos(\mu) \\ \sin(\lambda) \sin(\nu) - \cos(\lambda) \sin(\mu) \cos(\nu) & \sin(\lambda) \cos(\nu) + \cos(\lambda) \sin(\mu) \sin(\nu) & \cos(\lambda) \cos(\mu) \end{pmatrix}$$

[59]³⁶¹.

11.12 Exemple : mouvement libre d'un solide ayant un point fixe

On pourra consulter [5]³⁶², [49]³⁶³ et [60].

Soit S un solide. $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à l'espace et $\mathcal{R}' = (O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ un repère orthonormé direct lié à S . On suppose que $O' = O$; ainsi S se meut autour du point fixe O .



Sur cette figure les points O et O' ont été séparés pour la clarté mais sont en fait confondus.

Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$, qui exprime en colonnes les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ dans la base \mathcal{B} .

361. p. 34

362. pp. 10-15 Chapitre 1 § 1.2

363. pp. 489-519 Chapitre 15

$\xi \triangleq (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$ et $\eta \triangleq (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$ représentent respectivement la vitesse angulaire de S dans le corps et dans l'espace. Et c'est le calcul de ces vitesses en fonction des dérivées des paramètres d'orientation qui conduit au calcul explicite des matrices M et N . Ci-après ce calcul est présenté pour deux choix de paramètres d'orientation : les angles d'Euler classiques et les angles de Bryant.

Soit ξ^* le moment cinétique de S au point $O' = O$. On a $\xi^* = A(\xi)$ où A est l'opérateur d'inertie symétrique et défini positif.

Le diagramme suivant, commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g} & \xleftarrow{T_g L_{g^{-1}} = (T_e L_g)^{-1}} & T_g G & \xrightarrow{T_g R_{g^{-1}} = (T_e R_g)^{-1}} & \mathfrak{g} \\
\xi & \longleftarrow & \dot{g} & \mapsto & \eta \\
A \downarrow & & A_g \downarrow A_g & & \downarrow B \\
\mathfrak{g}^* & \xleftarrow{T_e^* L_g = (T_g^* L_{g^{-1}})^{-1}} & T_g^* G & \xrightarrow{T_e^* R_g = (T_g^* R_{g^{-1}})^{-1}} & \mathfrak{g}^* \\
\xi^* & \longleftarrow & \dot{g}^* & \mapsto & \eta^*
\end{array}$$

qui conduit au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_g} & \mathfrak{g} \\
\xi = \text{Ad}_{g^{-1}}(\eta) & \mapsto & \eta = \text{Ad}_g(\xi) \\
A \downarrow & & \downarrow B \\
\mathfrak{g}^* & \xleftarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \\
\xi^* = A(\xi) = \text{Ad}_g^*(\eta^*) & \longleftarrow & \eta^* = B(\eta) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\xi^*)
\end{array}$$

permet de valculer les opérateurs A_g et B :

$$A_g = T_g^* L_{g^{-1}} \circ A \circ T_g L_{g^{-1}} \text{ et } B = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ A \circ \text{Ad}_g.$$

$$\text{Posons } M \triangleq \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \text{ et } M^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} m_{11}^{-1} & m_{12}^{-1} & m_{13}^{-1} \\ m_{21}^{-1} & m_{22}^{-1} & m_{23}^{-1} \\ m_{31}^{-1} & m_{32}^{-1} & m_{33}^{-1} \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : m_{ij}^{-1} est donc un élément de la matrice M^{-1} et bien entendu $m_{ij}^{-1} \neq \frac{1}{m_{ij}}$.

Remarque 2 : la matrice M vérifie les propriétés :

$$\begin{aligned}
m_{11} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) &= -\det(M) \\
m_{11} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) &= 0 \\
m_{11} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) &= 0 \\
m_{21} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) &= -\det(M) \\
m_{21} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) &= 0, \\
m_{31} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) &= 0 \\
m_{31} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) &= 0 \\
m_{31} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) &= -\det(M).
\end{aligned}$$

Posons $I = \llbracket A \rrbracket$, $I_g = \llbracket A_g \rrbracket$ et $J = \llbracket B \rrbracket$.

Alors $I_g(q) = M^T I M$ et $J = N^{-T} M^T I M N^{-1}$ et $I^T = I$, $I_g^T = I_g$ et $J^T = J$. De plus supposons, pour simplifier les calculs, que :

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

L'énergie cinétique de S s'écrit :

$$\mathbf{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \prec \dot{q}, \dot{q} \succ_g = \frac{1}{2} \dot{q}^T I_g \dot{q}, \text{ soit :}$$

$$\mathbf{T}(q, \dot{q}) = T(\xi), \text{ avec } T(\xi) = \frac{1}{2} \llbracket \xi \rrbracket^T I \llbracket \xi \rrbracket = \frac{1}{2} (I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2).$$

Pour un mouvement libre de S (donc sans aucun effort extérieur) le lagrangien est égal à l'énergie cinétique :

$$\mathbf{L}(q, \dot{q}) = \mathbf{T}(q, \dot{q}), \text{ soit } L(\xi) = T(\xi) = \frac{1}{2} (I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2).$$

$$\text{On a } \xi^* = A(\xi) \text{ soit } \llbracket \xi^* \rrbracket = \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \xi_3^* \end{pmatrix} = I \llbracket \xi \rrbracket = \begin{pmatrix} I_1 \xi_1 \\ I_2 \xi_2 \\ I_3 \xi_3 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\llbracket \xi \rrbracket = I^{-1} \llbracket \xi^* \rrbracket.$$

$$\text{Alors } \dot{q} = M^{-1} \llbracket \xi \rrbracket = M^{-1} I^{-1} \llbracket \xi^* \rrbracket.$$

$$\text{Soit } p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \text{ où les } p_i \triangleq \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}; i = 1, 2, 3 \text{ sont les moments conjugués.}$$

$$\text{On a : } p_i = I_1 \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_i} + I_2 \xi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_i} + I_3 \xi_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{q}_i}; i = 1, 2, 3.$$

$$\text{Mais comme } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \text{ on a :}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \xi_1 m_{11} + I_2 \xi_2 m_{21} + I_3 \xi_3 m_{31} \\ I_1 \xi_1 m_{12} + I_2 \xi_2 m_{22} + I_3 \xi_3 m_{32} \\ I_1 \xi_1 m_{13} + I_2 \xi_2 m_{23} + I_3 \xi_3 m_{33} \end{pmatrix}, \text{ soit :}$$

$$p = M^T I [\xi] = M^T [\xi^*] \text{ et } [\xi^*] = M^{-T} p.$$

Soit $\mathbf{H}(q, p) \triangleq p^T \dot{q} - \mathbf{L}(q, \dot{q})$ l'hamiltonien. On a :

$$\mathbf{H}(q, p) = [\xi^*]^T M M^{-1} I^{-1} [\xi^*] - \frac{1}{2} [\xi^*]^T I^{-1} I I^{-1} [\xi^*] \\ = \frac{1}{2} [\xi^*]^T I^{-1} [\xi^*], \text{ soit :}$$

$$\mathbf{H}(q, p) = H(\xi^*), \text{ avec } H(\xi^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1^{*2}}{I_1} + \frac{\xi_2^{*2}}{I_2} + \frac{\xi_3^{*2}}{I_3} \right).$$

Généralisation : on a vu que :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & & T_g L_{g^{-1}} = (T_e L_g)^{-1} & & T_g G & & T_g R_{g^{-1}} = (T_e R_g)^{-1} & & \mathfrak{g} \\ \zeta = (T_g L_{g^{-1}})(v_g) & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & v_g & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \alpha = (T_g R_{g^{-1}})(v_g) \\ A \downarrow & & & & A_g \downarrow A_g & & & & \downarrow B \\ \mathfrak{g}^* & & T_e^* L_g = (T_g^* L_{g^{-1}})^{-1} & & T_g^* G & & T_e^* R_g = (T_g^* R_{g^{-1}})^{-1} & & \mathfrak{g}^* \\ \zeta^* = A(\zeta) = (T_e^* L_g)(v_g^*) & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & v_g^* = A_g(v_g) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \alpha^* = B(\alpha) = (T_e^* R_g)(v_g^*) \end{array}$$

est équivalent au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_g} & \mathfrak{g} \\ \zeta = \text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha) & \mapsto & \alpha = \text{Ad}_g(\zeta) \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ \mathfrak{g}^* & \xleftarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \\ \zeta^* = A(\zeta) = \text{Ad}_g^*(\alpha^*) & \mapsto & \alpha^* = B(\alpha) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*) \end{array}$$

Et donc $\mathbf{H}(q, p) = H^-(\zeta^*)$, avec $H^-(\zeta^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_1^{*2}}{I_1} + \frac{\zeta_2^{*2}}{I_2} + \frac{\zeta_3^{*2}}{I_3} \right)$.

Considérons l'application moment : $T^*G \xrightarrow{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}_-^*$; soit :
 $(q, p) \mapsto \zeta^* = \mathbf{J}^-(q, p) = M^{-T} p$

$$[\zeta^*] = \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \\ \zeta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3 \\ m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3 \\ m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{11}^{-1}}{\partial q_i} p_1 + \frac{\partial m_{21}^{-1}}{\partial q_i} p_2 + \frac{\partial m_{31}^{-1}}{\partial q_i} p_3 ; i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{12}^{-1}}{\partial q_i} p_1 + \frac{\partial m_{22}^{-1}}{\partial q_i} p_2 + \frac{\partial m_{32}^{-1}}{\partial q_i} p_3 ; i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{13}^{-1}}{\partial q_i} p_1 + \frac{\partial m_{23}^{-1}}{\partial q_i} p_2 + \frac{\partial m_{33}^{-1}}{\partial q_i} p_3 ; i = 1, 2, 3. \text{ Soit :}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{11}^{-1}}{\partial q_i} (m_{11} \zeta_1^* + m_{21} \zeta_2^* + m_{31} \zeta_3^*) + \frac{\partial m_{21}^{-1}}{\partial q_i} (m_{12} \zeta_1^* + m_{22} \zeta_2^* + m_{32} \zeta_3^*) \\
& + \frac{\partial m_{31}^{-1}}{\partial q_i} (m_{13} \zeta_1^* + m_{23} \zeta_2^* + m_{33} \zeta_3^*) \\
& = (m_{11} \frac{\partial m_{11}^{-1}}{\partial q_i} + m_{12} \frac{\partial m_{21}^{-1}}{\partial q_i} + m_{13} \frac{\partial m_{31}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
& + (m_{21} \frac{\partial m_{11}^{-1}}{\partial q_i} + m_{22} \frac{\partial m_{21}^{-1}}{\partial q_i} + m_{23} \frac{\partial m_{31}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
& + (m_{31} \frac{\partial m_{11}^{-1}}{\partial q_i} + m_{32} \frac{\partial m_{21}^{-1}}{\partial q_i} + m_{33} \frac{\partial m_{31}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_3^* \\
& = -(m_{11}^{-1} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_i} + m_{21}^{-1} \frac{\partial m_{12}}{\partial q_i} + m_{31}^{-1} \frac{\partial m_{13}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
& - (m_{11}^{-1} \frac{\partial m_{21}}{\partial q_i} + m_{21}^{-1} \frac{\partial m_{22}}{\partial q_i} + m_{31}^{-1} \frac{\partial m_{23}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
& - (m_{11}^{-1} \frac{\partial m_{31}}{\partial q_i} + m_{21}^{-1} \frac{\partial m_{32}}{\partial q_i} + m_{31}^{-1} \frac{\partial m_{33}}{\partial q_i}) \zeta_3^*; i = 1, 2, 3, \text{ car :} \\
& m_{11} m_{11}^{-1} + m_{12} m_{21}^{-1} + m_{13} m_{31}^{-1} = 1, \\
& m_{21} m_{11}^{-1} + m_{22} m_{21}^{-1} + m_{23} m_{31}^{-1} = 0, \\
& m_{31} m_{11}^{-1} + m_{32} m_{21}^{-1} + m_{33} m_{31}^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{12}^{-1}}{\partial q_i} (m_{11} \zeta_1^* + m_{21} \zeta_2^* + m_{31} \zeta_3^*) \\
& + \frac{\partial m_{22}^{-1}}{\partial q_i} (m_{12} \zeta_1^* + m_{22} \zeta_2^* + m_{32} \zeta_3^*) \\
& + \frac{\partial m_{32}^{-1}}{\partial q_i} (m_{13} \zeta_1^* + m_{23} \zeta_2^* + m_{33} \zeta_3^*) \\
& = (m_{11} \frac{\partial m_{12}^{-1}}{\partial q_i} + m_{12} \frac{\partial m_{22}^{-1}}{\partial q_i} + m_{13} \frac{\partial m_{32}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
& + (m_{21} \frac{\partial m_{12}^{-1}}{\partial q_i} + m_{22} \frac{\partial m_{22}^{-1}}{\partial q_i} + m_{23} \frac{\partial m_{32}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
& + (m_{31} \frac{\partial m_{12}^{-1}}{\partial q_i} + m_{32} \frac{\partial m_{22}^{-1}}{\partial q_i} + m_{33} \frac{\partial m_{32}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_3^* \\
& = -(m_{12}^{-1} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_i} + m_{22}^{-1} \frac{\partial m_{12}}{\partial q_i} + m_{32}^{-1} \frac{\partial m_{13}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
& - (m_{12}^{-1} \frac{\partial m_{21}}{\partial q_i} + m_{22}^{-1} \frac{\partial m_{22}}{\partial q_i} + m_{32}^{-1} \frac{\partial m_{23}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
& - (m_{12}^{-1} \frac{\partial m_{31}}{\partial q_i} + m_{22}^{-1} \frac{\partial m_{32}}{\partial q_i} + m_{32}^{-1} \frac{\partial m_{33}}{\partial q_i}) \zeta_3^*; i = 1, 2, 3, \text{ car :} \\
& m_{11} m_{12}^{-1} + m_{12} m_{22}^{-1} + m_{13} m_{32}^{-1} = 0, \\
& m_{21} m_{12}^{-1} + m_{22} m_{22}^{-1} + m_{23} m_{32}^{-1} = 1, \\
& m_{31} m_{12}^{-1} + m_{32} m_{22}^{-1} + m_{33} m_{32}^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_i} = \frac{\partial m_{13}^{-1}}{\partial q_i} (m_{11} \zeta_1^* + m_{21} \zeta_2^* + m_{31} \zeta_3^*) \\
& + \frac{\partial m_{23}^{-1}}{\partial q_i} (m_{12} \zeta_1^* + m_{22} \zeta_2^* + m_{32} \zeta_3^*) \\
& + \frac{\partial m_{33}^{-1}}{\partial q_i} (m_{13} \zeta_1^* + m_{23} \zeta_2^* + m_{33} \zeta_3^*) \\
& = (m_{11} \frac{\partial m_{13}^{-1}}{\partial q_i} + m_{12} \frac{\partial m_{23}^{-1}}{\partial q_i} + m_{13} \frac{\partial m_{33}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
& + (m_{21} \frac{\partial m_{13}^{-1}}{\partial q_i} + m_{22} \frac{\partial m_{23}^{-1}}{\partial q_i} + m_{23} \frac{\partial m_{33}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
& + (m_{31} \frac{\partial m_{13}^{-1}}{\partial q_i} + m_{32} \frac{\partial m_{23}^{-1}}{\partial q_i} + m_{33} \frac{\partial m_{33}^{-1}}{\partial q_i}) \zeta_3^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(m_{13}^{-1} \frac{\partial m_{11}}{\partial q_i} + m_{23}^{-1} \frac{\partial m_{12}}{\partial q_i} + m_{33}^{-1} \frac{\partial m_{13}}{\partial q_i}) \zeta_1^* \\
&- (m_{13}^{-1} \frac{\partial m_{21}}{\partial q_i} + m_{23}^{-1} \frac{\partial m_{22}}{\partial q_i} + m_{33}^{-1} \frac{\partial m_{23}}{\partial q_i}) \zeta_2^* \\
&- (m_{13}^{-1} \frac{\partial m_{31}}{\partial q_i} + m_{23}^{-1} \frac{\partial m_{32}}{\partial q_i} + m_{33}^{-1} \frac{\partial m_{33}}{\partial q_i}) \zeta_3^*; i = 1, 2, 3, \text{ car :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{11} m_{13}^{-1} + m_{12} m_{23}^{-1} + m_{13} m_{33}^{-1} &= 0, \\
m_{21} m_{13}^{-1} + m_{22} m_{23}^{-1} + m_{23} m_{33}^{-1} &= 0, \\
m_{31} m_{13}^{-1} + m_{32} m_{23}^{-1} + m_{33} m_{33}^{-1} &= 1.
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1^*}{\partial p_1} &= m_{11}^{-1}, \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial p_2} = m_{21}^{-1}, \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial p_3} = m_{31}^{-1}, \\
\frac{\partial \zeta_2^*}{\partial p_1} &= m_{12}^{-1}, \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial p_2} = m_{22}^{-1}, \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial p_3} = m_{32}^{-1}, \\
\frac{\partial \zeta_3^*}{\partial p_1} &= m_{13}^{-1}, \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial p_2} = m_{23}^{-1}, \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial p_3} = m_{33}^{-1}.
\end{aligned}$$

Soient F^- , G^- des applications quelconques et :

$$\begin{aligned}
T^*G &\xrightarrow{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}_-^* \xrightarrow{F^-} \mathbb{R} \text{ et :} \\
(q, p) &\mapsto \zeta^* = \mathbf{J}^-(q, p) = M^{-T} p \mapsto F^-(\zeta^*) \\
T^*G &\xrightarrow{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}_-^* \xrightarrow{G^-} \mathbb{R} \\
(q, p) &\mapsto \zeta^* = \mathbf{J}^-(q, p) = M^{-T} p \mapsto G^-(\zeta^*)
\end{aligned}$$

Et soit $\mathbf{F} \triangleq F^- \circ \mathbf{J}^-$ et $\mathbf{G} \triangleq G^- \circ \mathbf{J}^-$; on a :

$\mathbf{F}(q, p) = F^-(M^{-T} p)$ et $\mathbf{G}(q, p) = G^-(M^{-T} p)$. Et alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_i} &= \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_i} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_i} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_i}; i = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_j} &= \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_j} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_j} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_j}; j = 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} &= \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial p_i} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial p_i} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial p_i} = \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} m_{i1}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} m_{i2}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} m_{i3}^{-1}; \\
i &= 1, 2, 3, \\
\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_j} &= \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial p_j} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial p_j} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial p_j} = \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} m_{j1}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} m_{j2}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} m_{j3}^{-1}; \\
j &= 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_2} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_3} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_3} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_3} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_3} \right) \\
&= \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} m_{11}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} m_{12}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} m_{13}^{-1} \right) \\
&- \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} m_{11}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} m_{12}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} m_{13}^{-1} \right) \\
&+ \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} m_{21}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} m_{22}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} m_{23}^{-1} \right) \\
&- \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} m_{21}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} m_{22}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} m_{23}^{-1} \right) \\
&+ \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} \right) \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} m_{31}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} m_{32}^{-1} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} m_{33}^{-1} \right) \\
&- \left(\frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} + \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} \right) \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} m_{31}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} m_{32}^{-1} + \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} m_{33}^{-1} \right), \text{ soit :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} \\
&= \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \right) \left(m_{13}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} + m_{23}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} + m_{33}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} - m_{12}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} - m_{22}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} - m_{32}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} \right) \\
&+ \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \right) \left(m_{11}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} + m_{21}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} + m_{31}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} - m_{13}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} - m_{23}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} - m_{33}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} \right) \\
&+ \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \right) \left(m_{12}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} + m_{22}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} + m_{32}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} - m_{11}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} - m_{21}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} - m_{31}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} \right).
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& \bullet \left(m_{13}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} + m_{23}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} + m_{33}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} - m_{12}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} - m_{22}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} - m_{32}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} \right) \\
&= \frac{1}{\det(M)} \left\{ \left[m_{11} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_1^* \right. \\
&+ \left[m_{11} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_2^* \\
&+ \left. \left[m_{11} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{12} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{13} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_3^* \right\} = -\zeta_1^* \\
& \bullet \left(m_{11}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_1} + m_{21}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_2} + m_{31}^{-1} \frac{\partial \zeta_3^*}{\partial q_3} - m_{13}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} - m_{23}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} - m_{33}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} \right) \\
&= \frac{1}{\det(M)} \left\{ \left[m_{21} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_1^* \right. \\
&+ \left[m_{21} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_2^* \\
&+ \left. \left[m_{21} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{22} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{23} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_3^* \right\} = -\zeta_2^* \\
& \bullet \left(m_{12}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_1} + m_{22}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_2} + m_{32}^{-1} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial q_3} - m_{11}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_1} - m_{21}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_2} - m_{31}^{-1} \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial q_3} \right) \\
&= \frac{1}{\det(M)} \left\{ \left[m_{31} \left(\frac{\partial m_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_1^* \right. \\
&+ \left[m_{31} \left(\frac{\partial m_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_2^* \\
&+ \left. \left[m_{31} \left(\frac{\partial m_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial q_3} \right) + m_{32} \left(\frac{\partial m_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial q_1} \right) + m_{33} \left(\frac{\partial m_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial q_2} \right) \right] \zeta_3^* \right\} = -\zeta_3^*
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
& \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} \\
&= -\zeta_1^* \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \right) - \zeta_2^* \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \right) - \zeta_3^* \left(\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} - \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \right).
\end{aligned}$$

Soit :

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} = - \begin{pmatrix} \zeta_1^* & \zeta_2^* & \zeta_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} & \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \\ \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} & 0 & -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \\ -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} & \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \\ \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \\ \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \end{pmatrix}$$

et donc $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}} = \{F^-, G^-\}_-$.

$$\text{Soient [5] et [49] } \mathfrak{g}^* \begin{matrix} F^-, G^-, H^- \\ (\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) \end{matrix} \xrightarrow{\quad} F^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*), G^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*), H^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*), \mathbb{R}$$

avec :

$F^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*)$ et $G^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*)$ quelconques mais :

$$H^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_1^{*2}}{I_1} + \frac{\zeta_2^{*2}}{I_2} + \frac{\zeta_3^{*2}}{I_3} \right). \text{ Alors :}$$

$$\frac{\delta H^-}{\delta \zeta_1^*} = \frac{\zeta_1^*}{I_1}, \quad \frac{\delta H^-}{\delta \zeta_2^*} = \frac{\zeta_2^*}{I_2}, \quad \frac{\delta H^-}{\delta \zeta_3^*} = \frac{\zeta_3^*}{I_3}.$$

Crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}_-^* : \{F^-, G^-\}_- \in \mathfrak{g}_-^*$ avec :

$$\{F^-, G^-\}_-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = - \begin{pmatrix} \zeta_1^* & \zeta_2^* & \zeta_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} & \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} \\ \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_3^*} & 0 & -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} \\ -\frac{\delta F^-}{\delta \zeta_2^*} & \frac{\delta F^-}{\delta \zeta_1^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_1^*} \\ \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_2^*} \\ \frac{\delta G^-}{\delta \zeta_3^*} \end{pmatrix}.$$

Cas particulier 1

$$\text{Si } F^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \zeta_1^* \text{ on a } \{F^-, H^-\}_-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \zeta_2^* \zeta_3^*.$$

Cas particulier 2

$$\text{Si } F^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \zeta_2^* \text{ on a } \{F^-, H^-\}_-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \zeta_3^* \zeta_1^*.$$

Cas particulier 3

$$\text{Si } F^-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \zeta_3^* \text{ on a } \{F^-, H^-\}_-(\zeta_1^*, \zeta_2^*, \zeta_3^*) = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \zeta_1^* \zeta_2^*.$$

Équation de réduction de Lie-Poisson

$$\text{On a } \llbracket \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_1^*} & \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_2^*} & \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_3^*} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} \zeta_1^* & \frac{1}{I_2} \zeta_2^* & \frac{1}{I_3} \zeta_3^* \end{pmatrix}^T.$$

L'équation de réduction de Lie-Poisson $\frac{d\zeta^*}{dt} = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*)$ s'écrit

$\llbracket \frac{d\zeta^*}{dt} \rrbracket = \llbracket \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^* \rrbracket \llbracket \zeta^* \rrbracket$, soit explicitement :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\zeta_1^*}{dt} \\ \frac{d\zeta_2^*}{dt} \\ \frac{d\zeta_3^*}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{I_3} \zeta_3^* & -\frac{1}{I_2} \zeta_2^* \\ -\frac{1}{I_3} \zeta_3^* & 0 & \frac{1}{I_1} \zeta_1^* \\ \frac{1}{I_2} \zeta_2^* & -\frac{1}{I_1} \zeta_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \\ \zeta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \zeta_2^* \zeta_3^* \\ \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \zeta_3^* \zeta_1^* \\ \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \zeta_1^* \zeta_2^* \end{pmatrix}.$$

Il s'agit tout simplement des équations d'Euler du mouvement d'un solide ayant un point fixe [5]³⁶⁴ et [49]³⁶⁵.

Première équation de reconstruction de Lie-Poisson

$\dot{q} = M^{-1} \llbracket \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \rrbracket$ soit, plus explicitement :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{I_1} m_{11}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{12}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{13}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{I_1} m_{21}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{22}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{23}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{I_1} m_{31}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{32}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{33}^{-1} \zeta_3^*. \end{aligned}$$

Il s'agit tout simplement de la moitié des équations de Hamilton³⁶⁶ :

364. p. 12 éq. (1.19)

365. p. 490 éq. (15.3.10), p. 500 éq. (15.8.1)

366. l'autre moitié étant $\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial q_1}$, $\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial q_2}$ et $\dot{p}_3 = -\frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial q_3}$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_2} \quad \text{et} \quad \dot{q}_3 = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_3}.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } \mathbf{H}(q, p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{I_1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3)^2 + \frac{1}{I_2} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{I_3} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3)^2 \right] \end{aligned}$$

et par conséquent on a bien :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{I_1} m_{11}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_2} m_{12}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_3} m_{13}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{I_1} m_{11}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{12}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{13}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{I_1} m_{21}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_2} m_{22}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_3} m_{23}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{I_1} m_{21}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{22}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{23}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{I_1} m_{31}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_2} m_{32}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{I_3} m_{33}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{I_1} m_{31}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} m_{32}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} m_{33}^{-1} \zeta_3^*. \end{aligned}$$

11.12.1 Cas d'utilisation des angles d'Euler classiques

$$\text{On a } \llbracket \zeta^* \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin(\theta)} \{ [p_\psi - p_\varphi \cos(\theta)] \sin(\varphi) + p_\theta \sin(\theta) \cos(\varphi) \} \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \{ [p_\psi - p_\varphi \cos(\theta)] \cos(\varphi) - p_\theta \sin(\theta) \sin(\varphi) \} \\ p_\varphi \end{pmatrix} \quad [49]^{367}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(q, p) &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{I_1 \sin^2(\theta)} \{ [p_\psi - p_\varphi \cos(\theta)] \sin(\varphi) + p_\theta \sin(\theta) \cos(\varphi) \}^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{I_2 \sin^2(\theta)} \{ [p_\psi - p_\varphi \cos(\theta)] \cos(\varphi) - p_\theta \sin(\theta) \sin(\varphi) \}^2 + \frac{1}{I_3} p_\varphi^2 \right\rangle \quad [49]^{368}. \end{aligned}$$

Équation de réduction de Lie-Poisson

Il s'agit de celle du cas général.

Première équation de reconstruction de Lie-Poisson

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{I_1} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_2^*, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{I_1} \cos(\varphi) \zeta_1^* - \frac{1}{I_2} \sin(\varphi) \zeta_2^*, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{I_1} \frac{\cos(\theta) \sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_1^* - \frac{1}{I_2} \frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} \zeta_3^*, \end{aligned}$$

367. p. 498 éq. (15.7.4)

368. p. 498 éq. (15.7.5)

Il s'agit tout simplement de la moitié des équations de Hamilton :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\psi}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\theta}, \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\varphi}.$$

11.12.2 Cas d'utilisation des angles de Bryant

$$\text{On a } \llbracket \zeta^* \rrbracket = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(\mu)} \{ [p_\lambda - p_\nu \sin(\mu)] \cos(\nu) + p_\mu \cos(\mu) \sin(\nu) \} \\ \frac{1}{\cos(\mu)} \{ -[p_\lambda - p_\nu \sin(\mu)] \sin(\nu) + p_\mu \cos(\mu) \cos(\nu) \} \\ p_\nu \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(q, p) &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{I_1 \cos^2(\mu)} \{ [p_\lambda - p_\nu \sin(\mu)] \cos(\nu) + p_\mu \cos(\mu) \sin(\nu) \}^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{I_2 \cos^2(\mu)} \{ -[p_\lambda - p_\nu \sin(\mu)] \sin(\nu) + p_\mu \cos(\mu) \cos(\nu) \}^2 + \frac{1}{I_3} p_\nu^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Équation de réduction de Lie-Poisson

Il s'agit de celle du cas général.

Première équation de reconstruction de Lie-Poisson

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{I_1} \frac{\cos(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_1^* - \frac{1}{I_2} \frac{\sin(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_2^*, \\ \dot{\mu} &= \frac{1}{I_1} \sin(\nu) \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} \cos(\nu) \zeta_2^*, \\ \dot{\nu} &= -\frac{1}{I_1} \frac{\sin(\mu) \cos(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_1^* + \frac{1}{I_2} \frac{\sin(\mu) \sin(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_2^* + \frac{1}{I_3} \zeta_3^*, \end{aligned}$$

Il s'agit tout simplement de la moitié des équations de Hamilton :

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\lambda}, \quad \dot{\mu} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\mu}, \quad \text{et} \quad \dot{\nu} = \frac{\partial \mathbf{H}(q, p)}{\partial p_\nu}.$$

12 Le groupe de Lie spécial euclidien $SE(3)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ et son dual $\mathfrak{se}(3)^*$

12.1 Le groupe de Lie spécial euclidien $SE(3)$

On pourra consulter [20], [49]³⁶⁹ et [51]³⁷⁰.

Le groupe spécial euclidien $SE(3)$ est par définition³⁷¹ :

$$SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3.$$

Étant donné que $SO(3) \not\cong \mathbb{R}^3$ on en conclut que $SE(3) \not\cong \mathbb{R}^6$.

$SE(3)$ est un groupe de Lie.

12.1.1 Représentation des éléments de $SE(3)$

On peut écrire $g = (R, P)$ et $h = (S, Q)$ pour les éléments g et h de $SE(3)$, avec $R \in SO(3)$, $P \in \mathbb{R}^3$ et $S \in SO(3)$, $Q \in \mathbb{R}^3$.

Mais on va représenter également les éléments de $SE(3)$ d'une autre manière, étant donné que $SE(3) \subset SL(4)$ [$SL(4)$ groupe spécial linéaire des matrices régulières, d'ordre 4, ayant un déterminant égal à 1].

On va donc représenter g et h respectivement par les matrices :

$$\tilde{g} \triangleq \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4) \text{ et } \tilde{h} \triangleq \begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4).$$

Mais on va représenter également les éléments de $SE(3)$, au moins *localement*, par une matrice colonne de dimension 6 :

On pose $\llbracket g \rrbracket = q = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6)^T \in \mathbb{R}^6$ où q_1, q_2, q_3 sont des paramètres d'orientation *indépendants* et où $(q_4 \ q_5 \ q_6)^T = P$.

Étant donné que $\dot{g} \in T_g SE(3)$ on pose :

$$\llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6)^T \in \mathbb{R}^6 \text{ où } (\dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6)^T = \dot{P}.$$

12.1.2 Définition de l'opération \cdot du groupe $SE(3)$

$$g \cdot h = (R, P) \cdot (S, Q) \triangleq (RS, RQ + P).$$

369. pp. 474-481 § 14-7 The Euclidean Group of the Three-Space

370. p. 409 Exemple A.4, p. 413 Exemple A.12 et pp. 416-433 § 3 The Geometry of the Euclidean Group

371. on aurait, bien sur, pu choisir $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

On constate que $SE(3)$ est bien un groupe multiplicatif d'élément neutre $e = (I_3, 0)$ (I_3 matrice unité d'ordre 3) et que $g^{-1} = (R^T, -R^T P)$ (rappel : $R^T = R^{-1}$).

Alors on constate que :

* $\tilde{e} = I_4$ (I_4 matrice unité d'ordre 4).

$$* \widetilde{g \cdot h} = \tilde{g} \tilde{h} \text{ car } \begin{pmatrix} RS & RQ + P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$* \widetilde{g^{-1}} = \tilde{g}^{-1} \text{ car } \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

12.1.3 Les automorphismes intérieurs I_h du groupe $SE(3)$

Soit $SE(3) \xrightarrow{I_h} SE(3)$. Alors :

$$g \xrightarrow{I_h} I_h(g) \triangleq h \cdot g \cdot h^{-1}$$

$$I_h(g) = (S R S^T, -S R S^T Q + S P + Q).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \widetilde{I_h(g)} &= \tilde{h} \tilde{g} \tilde{h}^{-1} = \begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^T & -S^T Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S R S^T & -S R S^T Q + S P + Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ QED.} \end{aligned}$$

12.2 L'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ du groupe de Lie $SE(3)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ du groupe de Lie $SE(3)$ est par définition :

$$\mathfrak{se}(3) = \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$$

Étant donné que $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ on en conclut que $\mathfrak{se}(3) \cong \mathbb{R}^6$.

12.2.1 Représentation des éléments de $\mathfrak{se}(3)$

Éléments génériques

On peut donc écrire pour les éléments de $\mathfrak{se}(3)$:

$\zeta = (\widehat{\omega}, v)$ et $\zeta' = (\widehat{\omega}', v')$ pour les éléments génériques et :

$\alpha = (\widehat{\omega}, w)$ et $\alpha' = (\widehat{\omega}', w')$ pour les éléments $\alpha = \text{Ad}_g(\zeta)$ et $\alpha' = \text{Ad}_g(\zeta')$

qui s'en déduisent (cf. ci-après), avec $\widehat{\omega}, \widehat{\omega}', \widehat{\omega}, \widehat{\omega}' \in \mathfrak{so}(3)$ et $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3$.

Mais on va représenter également les éléments de $\mathfrak{se}(3)$ de deux autres manières, étant donné que $\mathfrak{se}(3) \subset M(4)$ ($M(4)$ groupe des matrices d'ordre 4) et que $\mathfrak{se}(3) \cong \mathbb{R}^6$.

On va donc représenter ζ, ζ' et α, α' respectivement par les matrices carrées $\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}'$ et $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$, d'ordre 4, telles que :

$$\tilde{\zeta} \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\zeta}' \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\omega}' & \mathbf{v}' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\alpha} \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\varpi} & \mathbf{w} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\alpha}' \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\varpi}' & \mathbf{w}' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in M(4)$

et par les matrices colonnes $[[\zeta]], [[\zeta']]$ et $[[\alpha]], [[\alpha']]$, de dimension 6, telles que :

$$[[\zeta]] \triangleq \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3)^T,$$

$$[[\zeta']] \triangleq \begin{pmatrix} \omega' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = (\omega'_1 \ \omega'_2 \ \omega'_3 \ v'_1 \ v'_2 \ v'_3)^T \in \mathbb{R}^6 \text{ et}$$

$$[[\alpha]] \triangleq \begin{pmatrix} \varpi \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = (\varpi_1 \ \varpi_2 \ \varpi_3 \ w_1 \ w_2 \ w_3)^T,$$

$$[[\alpha']] \triangleq \begin{pmatrix} \varpi' \\ \mathbf{w}' \end{pmatrix} = (\varpi'_1 \ \varpi'_2 \ \varpi'_3 \ w'_1 \ w'_2 \ w'_3)^T \in \mathbb{R}^6.$$

Éléments particuliers

- Soit $\xi \triangleq (\widehat{\omega}_b, \mathbf{v}_b) \triangleq (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g})$. On a :

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_b & \mathbf{v}_b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{g^{-1}} \tilde{\dot{g}} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{P} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ soit :}$$

$\widehat{\omega}_b = R^T \dot{R}$ et $\mathbf{v}_b = R^T \dot{P}$. Il existe une matrice carrée \bar{M} , d'ordre 3, telle que :

$$\omega_b = \bar{M} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{pmatrix}^T \text{ et on a } \mathbf{v}_b = R^T \begin{pmatrix} \dot{q}_4 & \dot{q}_5 & \dot{q}_6 \end{pmatrix}^T. \text{ Donc :}$$

$$[[\xi]] \triangleq \begin{pmatrix} \omega_b \\ \mathbf{v}_b \end{pmatrix} = (\omega_{b1} \ \omega_{b2} \ \omega_{b3} \ v_{b1} \ v_{b2} \ v_{b3})^T = M \dot{q} \text{ et}$$

$\dot{q} = M^{-1} [[\xi]]$, avec :

$$M = \begin{pmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \text{ et } M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \bar{M}^T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \text{ et } M^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-T} & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix}.$$

- Soit $\eta \triangleq (\widehat{\omega}_s, \mathbf{v}_s) \triangleq (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g})$. On a :

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_s & \mathbf{v}_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\dot{g}g^{-1}} = \begin{pmatrix} \dot{R} & \dot{P} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ soit :}$$

$\widehat{\omega}_s = \dot{R}R^T$ et $\mathbf{v}_s = -\dot{R}R^T P + \dot{P}$. Il existe une matrice carrée \bar{N} , d'ordre 3, telle que :

$$\omega_s = \bar{N} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{pmatrix}^T \text{ et on a } \mathbf{v}_s = -\widehat{\omega}_s P + \dot{P} = \widehat{P} \omega_s + \dot{P} = \widehat{P} \bar{N} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \dot{q}_4 & \dot{q}_5 & \dot{q}_6 \end{pmatrix}^T. \text{ Donc :}$$

$$\llbracket \eta \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \omega_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{s1} & \omega_{s2} & \omega_{s3} & \mathbf{v}_{s1} & \mathbf{v}_{s2} & \mathbf{v}_{s3} \end{pmatrix}^T = N \dot{q} \text{ et } \dot{q} = N^{-1} \llbracket \eta \rrbracket, \text{ avec :}$$

$$N = \begin{pmatrix} \bar{N} & 0 \\ \widehat{P} \bar{N} & I_3 \end{pmatrix} \text{ et } N^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{N}^{-1} & 0 \\ -\widehat{P} & I_3 \end{pmatrix}.$$

$$N^T = \begin{pmatrix} \bar{N}^T & -\bar{N}^T \widehat{P} \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \text{ et } N^{-T} = \begin{pmatrix} \bar{N}^{-T} & \widehat{P} \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Et on a $\bar{N} \bar{M}^{-1} = R$.

12.2.2 Base de $\mathfrak{se}(3)$

Une base de $\mathfrak{se}(3)$ est constituée de :

$$\begin{aligned} e_1 &\triangleq (\widehat{X}, 0); \text{ soit } \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_1 \rrbracket = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ e_2 &\triangleq (\widehat{Y}, 0); \text{ soit } \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{Y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_2 \rrbracket = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ e_3 &\triangleq (\widehat{Z}, 0); \text{ soit } \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} \widehat{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_3 \rrbracket = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ e_4 &\triangleq (0, X); \text{ soit } \tilde{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_4 \rrbracket = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T, \\ e_5 &\triangleq (0, Y); \text{ soit } \tilde{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_5 \rrbracket = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T, \\ e_6 &\triangleq (0, Z); \text{ soit } \tilde{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \llbracket e_6 \rrbracket = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T. \end{aligned}$$

12.2.3 Crochet de Lie sur $\mathfrak{se}(3)$

Si $\zeta = (\widehat{\omega}, \mathbf{v})$, $\zeta' = (\widehat{\omega}', \mathbf{v}') \in \mathfrak{se}(3)$ on définit le crochet de Lie $[\zeta, \zeta'] \in \mathfrak{se}(3)$ de la manière suivante :

$[\zeta, \zeta'] \triangleq (\widehat{\omega \times \omega'}, \omega \times \mathbf{v}' - \omega' \times \mathbf{v})$ [49]³⁷². Alors :

$\widetilde{[\zeta, \zeta']} = \widetilde{\zeta} \widetilde{\zeta}' - \widetilde{\zeta}' \widetilde{\zeta} \in M(4)$. En effet :

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta} \widetilde{\zeta}' - \widetilde{\zeta}' \widetilde{\zeta} &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\omega}' & \mathbf{v}' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widehat{\omega}' & \mathbf{v}' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega} \widehat{\omega}' - \widehat{\omega}' \widehat{\omega} & \widehat{\omega} \mathbf{v}' - \widehat{\omega}' \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega \times \omega'} & \omega \times \mathbf{v}' - \omega' \times \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{[\zeta, \zeta']}. \end{aligned}$$

$$\text{Et } \llbracket [\zeta, \zeta'] \rrbracket = \begin{pmatrix} \omega \times \omega' \\ \omega \times \mathbf{v}' - \omega' \times \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

On a $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_1, e_4] = 0$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_1, e_6] = -e_5$,
 $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = -e_6$, $[e_2, e_5] = 0$, $[e_2, e_6] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$,
 $[e_3, e_5] = -e_4$, $[e_3, e_6] = 0$, $[e_4, e_5] = 0$, $[e_4, e_6] = 0$, $[e_5, e_6] = 0$.

Donc les coefficients de structure de cette base de $\mathfrak{se}(3)$ sont nuls sauf :

$$\begin{aligned} c_{12}^3 &= -c_{21}^3 = 1, \quad c_{13}^2 = -c_{31}^2 = -1, \quad c_{15}^6 = -c_{51}^6 = 1, \quad c_{16}^5 = -c_{61}^5 = -1, \\ c_{23}^1 &= -c_{32}^1 = 1, \quad c_{24}^6 = -c_{42}^6 = -1, \quad c_{26}^4 = -c_{62}^4 = 1, \quad c_{34}^5 = -c_{43}^5 = 1, \\ c_{35}^4 &= -c_{53}^4 = -1. \end{aligned}$$

12.2.4 L'opération ad_ζ de $\mathfrak{se}(3)$, avec $\zeta \in \mathfrak{se}(3)$

$\mathfrak{se}(3) \xrightarrow{\text{ad}_\zeta} \mathfrak{se}(3)$. Alors :
 $\zeta' \mapsto \text{ad}_\zeta(\zeta') \triangleq [\zeta, \zeta']$

$\widetilde{\text{ad}_\zeta(\zeta')} = \widetilde{\zeta} \widetilde{\zeta}' - \widetilde{\zeta}' \widetilde{\zeta}$ et $\llbracket \text{ad}_\zeta(\zeta') \rrbracket = \llbracket \text{ad}_\zeta \rrbracket \llbracket \zeta' \rrbracket$, avec :

$\llbracket \text{ad}_\zeta \rrbracket \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & 0 \\ \widehat{\mathbf{v}} & \widehat{\omega} \end{pmatrix} \in M(6)$ ($M(6)$ groupe des matrices d'ordre 6). En effet, avec cette dernière matrice :

$$\begin{aligned} \llbracket \text{ad}_\zeta \rrbracket \llbracket \zeta' \rrbracket &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & 0 \\ \widehat{\mathbf{v}} & \widehat{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\omega} \omega' \\ \widehat{\mathbf{v}} \omega' + \widehat{\omega} \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \times \omega' \\ \omega \times \mathbf{v}' - \omega' \times \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \llbracket [\zeta, \zeta'] \rrbracket = \llbracket \text{ad}_\zeta(\zeta') \rrbracket. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En particulier } \llbracket \text{ad}_\xi \rrbracket &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_b & 0 \\ \widehat{\mathbf{v}}_b & \widehat{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T \dot{R} & 0 \\ R^T \widehat{P} R & R^T \dot{R} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \llbracket \text{ad}_\eta \rrbracket &= \begin{pmatrix} \widehat{\omega}_s & 0 \\ \widehat{\mathbf{v}}_s & \widehat{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R} R^T & 0 \\ -\dot{R} R^T \widehat{P} + \widehat{P} \dot{R} R^T + \widehat{P} & \dot{R} R^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

³⁷². p. 475 éq. (14.7.5)

Remarque : on constate que $[[\text{ad}_\zeta]]^T = \begin{pmatrix} -\widehat{\omega} & -\widehat{\mathbf{v}} \\ 0 & -\widehat{\omega} \end{pmatrix}$.

12.2.5 L'opération Ad_g de $\mathfrak{se}(3)$, avec $g \in SE(3)$

$\mathfrak{se}(3) \xrightarrow[\zeta]{\text{Ad}_g} \mathfrak{se}(3)$, avec :

$\text{Ad}_{(R,P)}((\widehat{\omega}, \mathbf{v})) \triangleq (\widehat{R}\omega, \widehat{P}R\omega + R\mathbf{v})$ lorsque $g = (R, P)$ et $\zeta = (\widehat{\omega}, \mathbf{v})$ [49]³⁷³.

◇ $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\text{Ad}_g(\zeta)} = \widetilde{g\zeta g^{-1}} \in M(4)$. En effet :

$$\begin{aligned} \widetilde{g\zeta g^{-1}} &= \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^T & -R^T P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R\widehat{\omega}R^T & -R\widehat{\omega}R^T P + R\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{R}\omega & -\widehat{R}\omega P + R\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{R}\omega & -(R\omega) \times P + R\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{R}\omega & P \times (R\omega) + R\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{R}\omega & \widehat{P}R\omega + R\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\text{Ad}_g(\zeta)} = \widetilde{\alpha}, \text{ lorsque } g = (R, P) \text{ et } \zeta = (\widehat{\omega}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

◇ $[[\alpha]] = [[\text{Ad}_g(\zeta)]] = [[\text{Ad}_g]] [[\zeta]] \in \mathbb{R}^6$ avec $[[\text{Ad}_g]] \triangleq \begin{pmatrix} R & 0 \\ \widehat{P}R & R \end{pmatrix} \in SL(6)$ [49]³⁷⁴ et [51]³⁷⁵. On vérifie que $[[\text{Ad}_g]] = N M^{-1}$

En effet, avec cette dernière matrice :

$[[\alpha]] = [[\text{Ad}_g]] [[\zeta]] = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \widehat{P}R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega \\ \widehat{P}R\omega + R\mathbf{v} \end{pmatrix} = [[\text{Ad}_g(\zeta)]]$,
lorsque $g = (R, P)$ et $\zeta = (\widehat{\omega}, \mathbf{v})$; soit :

$$\varpi = R\omega \text{ et } \mathbf{w} = \widehat{P}R\omega + R\mathbf{v}.$$

Par conséquent on en déduit (cf. équation (I)) :

$$[[\frac{d}{dt}\alpha(t)]] = \begin{pmatrix} \dot{R}\omega + R\dot{\omega} \\ \widehat{P}R\dot{\omega} + \widehat{P}\dot{R}\omega + \widehat{P}R\dot{\omega} + \dot{R}\mathbf{v} + R\dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$$

373. p. 475 éq. (14.7.6)

374. p. 475 éq. (14.7.7)

375. p. 421, avec l'ordre $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{pmatrix}$ pour $[[\zeta]]$ et non $\begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$. C'est pour cela que pour ces auteurs, mais avec les notations de ce rapport, $[[\text{Ad}_g]] = \begin{pmatrix} R & \widehat{P}R \\ 0 & R \end{pmatrix}$

Remarque : on constate que $[[\text{Ad}_g]]^T = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \widehat{P} \\ 0 & R^T \end{pmatrix}$.

12.2.6 L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}$ de $\mathfrak{se}(3)$, avec $g \in SE(3)$

$$\mathfrak{se}(3) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}} \\ \alpha \mapsto \zeta = \text{Ad}_g(\alpha)} \end{array} \mathfrak{se}(3), \text{ avec :}$$

Il suffit de remplacer $g = (R, P)$ par $g^{-1} = (R^T, -R^T P)$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{(R^T, -R^T P)}((\widehat{\omega}, \mathbf{w})) &\triangleq (\widehat{R^T \omega}, -R^T P R^T \omega + R^T \mathbf{w}) \\ &= (\widehat{R^T \omega}, -R^T \widehat{P} \omega + R^T \mathbf{w}). \end{aligned}$$

$$\diamond \widetilde{\zeta} = \widetilde{\text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha)} = \widetilde{g^{-1} \alpha \widetilde{g}} = \begin{pmatrix} \widehat{R^T \omega} & -R^T \widehat{P} \omega + R^T \mathbf{w} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4). \text{ Et :}$$

$\diamond [[\zeta]] = [[\text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha)]] = [[\text{Ad}_{g^{-1}}]] [[\alpha]] \in \mathbb{R}^6$ avec :

$$[[\text{Ad}_{g^{-1}}]] \triangleq \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ -R^T P R^T & R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T & 0 \\ -R^T \widehat{P} & R^T \end{pmatrix} \in SL(6)$$

Alors $\omega = R^T \varpi$ et $\mathbf{v} = -R^T \widehat{P} \varpi + R^T \mathbf{w}$.

Par conséquent on en déduit (cf. équation (III)) :

$$[[\frac{d}{dt} \zeta(t)]] = \begin{pmatrix} -R^T \dot{R} R^T \varpi + R^T \dot{\varpi} \\ R^T \dot{R} R^T \widehat{P} \varpi - R^T \widehat{P} \dot{\varpi} - R^T \widehat{P} \dot{\varpi} - R^T \dot{R} R^T \mathbf{w} + R^T \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix}$$

Remarque : on constate que $[[\text{Ad}_{g^{-1}}]]^T = \begin{pmatrix} R & \widehat{P} R \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

12.2.7 Comparaison entre les opérations Ad_g et $\text{Ad}_{g^{-1}}$

On constate que :

• $[[\text{Ad}_g]]^{-1} = [[\text{Ad}_{g^{-1}}]] \neq [[\text{Ad}_g]]^T$; donc $[[\text{Ad}_g]] \notin SO(6)$ ($SO(6)$ groupe spécial orthogonal des matrices réelles orthogonales d'ordre 6).

• $[[\text{Ad}_{g^{-1}}]]^{-1} = [[\text{Ad}_g]] \neq [[\text{Ad}_{g^{-1}}]]^T$; donc $[[\text{Ad}_{g^{-1}}]] \notin SO(6)$.

12.3 L'application exponentielle du groupe de Lie $SE(3)$

$$\text{On a : } \mathfrak{se}(3) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{exp}} \\ \zeta \mapsto \text{exp}(\zeta) \end{array} SE(3).$$

Calcul de $\exp(\zeta)$ [51]³⁷⁶.

On va se servir de la matrice carrée, d'ordre 4, $\tilde{\zeta} \in M(4)$ pour obtenir la matrice carrée, d'ordre 4, $\widetilde{\exp(\zeta)} \in SL(4)$:

$$\widetilde{\exp(\zeta)} \triangleq I_4 + \frac{\tilde{\zeta}}{1!} + \frac{\tilde{\zeta}^2}{2!} + \frac{\tilde{\zeta}^3}{3!} + \frac{\tilde{\zeta}^4}{4!} + \frac{\tilde{\zeta}^5}{5!} + \frac{\tilde{\zeta}^6}{6!} + \frac{\tilde{\zeta}^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \tilde{\zeta} &= \begin{pmatrix} \hat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\zeta}^2 = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^2 & \hat{\omega} \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\zeta}^3 = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^3 & \hat{\omega}^2 \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\zeta}^4 &= \begin{pmatrix} \hat{\omega}^4 & \hat{\omega}^3 \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\zeta}^5 = \begin{pmatrix} \hat{\omega}^5 & \hat{\omega}^4 \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\exp(\zeta)} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\hat{\omega}}{1!} + \frac{\hat{\omega}^2}{2!} + \frac{\hat{\omega}^3}{3!} + \frac{\hat{\omega}^4}{4!} + \frac{\hat{\omega}^5}{5!} + \dots & (I_3 + \frac{\hat{\omega}}{2!} + \frac{\hat{\omega}^2}{3!} + \frac{\hat{\omega}^3}{4!} + \frac{\hat{\omega}^4}{5!} + \dots) \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\hat{\omega}) & (I_3 + \frac{\hat{\omega}}{2!} + \frac{\hat{\omega}^2}{3!} - k^2 \frac{\hat{\omega}}{4!} - k^2 \frac{\hat{\omega}^2}{5!} + \dots) \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\hat{\omega}) & [I_3 + (\frac{1}{2!} - \frac{k^2}{4!} + \dots) \hat{\omega} + (\frac{1}{3!} - \frac{k^2}{5!} + \dots) \hat{\omega}^2] \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Si $\omega \neq 0$ (i.e. si $k \neq 0$) :

$$\widetilde{\exp(\zeta)} = \begin{pmatrix} \exp(\hat{\omega}) & (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \hat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \hat{\omega}^2) \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4) \text{ et :}$$

$$\exp(\zeta) = (\exp(\hat{\omega}), (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \hat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \hat{\omega}^2) \mathbf{v}) \in SE(3).$$

Donc :

$$\widetilde{\exp(-\zeta)} = \begin{pmatrix} \exp(-\hat{\omega}) & -(I_3 - \frac{1-\cos k}{k^2} \hat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \hat{\omega}^2) \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4) \text{ et :}$$

$$\exp(-\zeta) = (\exp(-\hat{\omega}), -(I_3 - \frac{1-\cos k}{k^2} \hat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \hat{\omega}^2) \mathbf{v}) \in SE(3).$$

• Si $\omega = 0$ (i.e. si $k = 0$) :

$$\widetilde{\exp(\zeta)} = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4) \text{ et :}$$

$$\exp(\zeta) = (I_3, \mathbf{v}) \in SE(3).$$

Donc :

$$\widetilde{\exp(-\zeta)} = \begin{pmatrix} I_3 & -\mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4) \text{ et :}$$

$$\exp(-\zeta) = (I_3, -\mathbf{v}) \in SE(3).$$

376. p. 413 Exemple A.12

Calcul de $(\exp(\zeta))^{-1}$

· Si $\omega \neq 0$ (i.e. si $k \neq 0$); puisque

$\exp(\zeta) = (\exp(\widehat{\omega}), (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \mathbf{v})$ on a :

$$\begin{aligned} (\exp(\zeta))^{-1} &= ((\exp(\widehat{\omega}))^T, -(\exp(\widehat{\omega}))^T (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \mathbf{v}) \\ &= (\exp(-\widehat{\omega}), -\exp(-\widehat{\omega})(I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \mathbf{v}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Mais } \exp(-\widehat{\omega})(I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \\ &= (I_3 - \frac{\sin k}{k} \widehat{\omega} + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega}^2) (I_3 + \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \\ &= I_3 - \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2. \text{ Et donc} \end{aligned}$$

$(\exp(\zeta))^{-1} = (\exp(-\widehat{\omega}), -(I_3 - \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \mathbf{v}) = \exp(-\zeta)$ et bien sur :

$$\begin{aligned} &\widetilde{(\exp(\zeta))^{-1}} = \widetilde{\exp(\zeta)}^{-1} = \widetilde{\exp(-\zeta)} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{\exp(-\widehat{\omega})} & -(I_3 - \frac{1-\cos k}{k^2} \widehat{\omega} + \frac{k-\sin k}{k^3} \widehat{\omega}^2) \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

· Si $\omega = 0$ (i.e. si $k = 0$); puisque $\exp(\zeta) = (I_3, \mathbf{v})$ on a :

$(\exp(\zeta))^{-1} = (I_3, -\mathbf{v}) = \exp(-\zeta)$ et bien sur :

$$\widetilde{(\exp(\zeta))^{-1}} = \widetilde{\exp(\zeta)}^{-1} = \widetilde{\exp(-\zeta)} = \begin{pmatrix} I_3 & -\mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Le dual $\mathfrak{se}(3)^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$

Le dual $\mathfrak{se}(3)^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ est par définition :

$$\mathfrak{se}(3)^* = \mathfrak{so}(3)^* \times \mathbb{R}^3$$

Étant donné que $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ on en conclut que $\mathfrak{se}(3)^* \cong \mathbb{R}^6$.

12.4.1 Base de $\mathfrak{se}(3)^*$

Étant donné que $\mathfrak{se}(3)^* \cong \mathbb{R}^6$ et que $\mathfrak{se}(3) \cong \mathbb{R}^6$ on va choisir la même base dans $\mathfrak{se}(3)^*$ que dans $\mathfrak{se}(3)$:

$$\begin{aligned} e_1^* &= e_1; \text{ soit } \widetilde{e}_1^* = \widetilde{e}_1 \text{ et } \llbracket e_1^* \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket, \\ e_2^* &= e_2; \text{ soit } \widetilde{e}_2^* = \widetilde{e}_2 \text{ et } \llbracket e_2^* \rrbracket = \llbracket e_2 \rrbracket, \\ e_3^* &= e_3; \text{ soit } \widetilde{e}_3^* = \widetilde{e}_3 \text{ et } \llbracket e_3^* \rrbracket = \llbracket e_3 \rrbracket, \\ e_4^* &= e_4; \text{ soit } \widetilde{e}_4^* = \widetilde{e}_4 \text{ et } \llbracket e_4^* \rrbracket = \llbracket e_4 \rrbracket, \\ e_5^* &= e_5; \text{ soit } \widetilde{e}_5^* = \widetilde{e}_5 \text{ et } \llbracket e_5^* \rrbracket = \llbracket e_5 \rrbracket, \\ e_6^* &= e_6; \text{ soit } \widetilde{e}_6^* = \widetilde{e}_6 \text{ et } \llbracket e_6^* \rrbracket = \llbracket e_6 \rrbracket. \end{aligned}$$

12.4.2 Représentation des éléments de $\mathfrak{se}(3)^*$

On peut donc écrire $\zeta^* = (\widehat{\omega}^*, \mathbf{v}^*)$ et $\zeta'^* = (\widehat{\omega}'^*, \mathbf{v}'^*)$ pour les éléments ζ^* et ζ'^* de $\mathfrak{se}(3)^*$, avec $\widehat{\omega}^*, \widehat{\omega}'^* \in \mathfrak{so}(3)^*$, $\mathbf{v}^*, \mathbf{v}'^* \in \mathbb{R}^3$.

Mais on va représenter également les éléments de $\mathfrak{se}(3)^*$ de deux autres manières, étant donné que $\mathfrak{se}(3)^* \subset M(4)$ ($M(4)$ groupe des matrices d'ordre 4) et que $\mathfrak{se}(3)^* \cong \mathbb{R}^6$.

On va donc représenter ζ^* et ζ'^* respectivement par les matrices carrées $\widetilde{\zeta}^*$ et $\widetilde{\zeta}'^*$, d'ordre 4, telles que :

$$\widetilde{\zeta}^* \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\omega}^* & \mathbf{v}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\zeta}'^* \triangleq \begin{pmatrix} \widehat{\omega}'^* & \mathbf{v}'^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4)$$

et par les matrices colonnes $[[\zeta^*]]$ et $[[\zeta'^*]]$, de dimension 6, telles que :

$$[[\zeta^*]] \triangleq \begin{pmatrix} \omega^* \\ \mathbf{v}^* \end{pmatrix} = (\omega_1^* \ \omega_2^* \ \omega_3^* \ v_1^* \ v_2^* \ v_3^*)^T,$$

$$[[\zeta'^*]] \triangleq \begin{pmatrix} \omega'^* \\ \mathbf{v}'^* \end{pmatrix} = (\omega_1'^* \ \omega_2'^* \ \omega_3'^* \ v_1'^* \ v_2'^* \ v_3'^*)^T \in \mathbb{R}^6.$$

12.5 Produit scalaire

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{se}(3)^* \times \mathfrak{se}(3) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\zeta^*, \zeta) & \longmapsto & \langle \zeta^*, \zeta \rangle \triangleq [[\zeta^*]]^T [[\zeta]] \end{array}$$

$$\text{On a donc } \langle \zeta^*, \zeta \rangle \triangleq [[\zeta^*]]^T [[\zeta]] = \omega'^*{}^T \omega + \mathbf{v}'^*{}^T \mathbf{v}$$

12.6 L'opération ad_ζ^* de $\mathfrak{se}(3)^*$, avec $\zeta \in \mathfrak{se}(3)$

L'opération ad_ζ^* de $\mathfrak{se}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération ad_ζ de $\mathfrak{se}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{ad}_\zeta^*(\zeta^*), \zeta' \rangle = \langle \zeta^*, \text{ad}_\zeta(\zeta') \rangle; \quad \forall \zeta' \in \mathfrak{se}(3) \text{ et } \forall \zeta^* \in \mathfrak{se}(3)^*$$

$$\text{Alors } [[\text{ad}_\zeta^*]] = [[\text{ad}_\zeta]]^T = \begin{pmatrix} -\widehat{\omega} & -\widehat{\mathbf{v}} \\ 0 & -\widehat{\omega} \end{pmatrix}.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{ad}_\zeta^*(\zeta^*), \zeta' \rangle = \omega^*{}^T \widehat{\omega} \omega' + \mathbf{v}^*{}^T \widehat{\mathbf{v}} \omega' + \mathbf{v}^*{}^T \widehat{\omega} \mathbf{v}' = \langle \zeta^*, \text{ad}_\zeta(\zeta') \rangle.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \llbracket \text{ad}_\xi^* \rrbracket &= \llbracket \text{ad}_\xi \rrbracket^T = \begin{pmatrix} -\widehat{\omega}_b & -\widehat{v}_b \\ 0 & -\widehat{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^T \dot{R} & -R^T \widehat{P} R \\ 0 & -R^T \dot{R} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \llbracket \text{ad}_\eta^* \rrbracket &= \llbracket \text{ad}_\eta \rrbracket^T = \begin{pmatrix} -\widehat{\omega}_s & -\widehat{v}_s \\ 0 & -\widehat{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{R} R^T & \dot{R} R^T \widehat{P} - \widehat{P} \dot{R} R^T - \widehat{P} \\ 0 & -\dot{R} R^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

12.7 L'opération Ad_g^* de $\mathfrak{se}(3)^*$, avec $g \in SE(3)$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{se}(3)^* & \xrightarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{se}(3)^* \\ \alpha^* & \longmapsto & \zeta^* = \text{Ad}_g^*(\alpha^*) \end{array}.$$

L'opération Ad_g^* de $\mathfrak{se}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération Ad_g de $\mathfrak{se}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{Ad}_g^*(\alpha^*), \zeta \rangle = \langle \alpha^*, \text{Ad}_g(\zeta) \rangle; \forall \zeta \in \mathfrak{se}(3) \text{ et } \forall \alpha^* \in \mathfrak{se}(3)^*$$

$$\text{Alors } \llbracket \text{Ad}_g^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_g \rrbracket^T = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \widehat{P} \\ 0 & R^T \end{pmatrix}.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{Ad}_g^*(\alpha^*), \zeta \rangle = \varpi^{*T} R \omega + w^{*T} \widehat{P} R \omega + v^{*T} R v = \langle \alpha^*, \text{Ad}_g(\zeta) \rangle.$$

$$\llbracket \zeta^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_g^* \rrbracket \llbracket \alpha^* \rrbracket \text{ soit :}$$

$$\omega^* = R^T \varpi^* - R^T \widehat{P} w^* \text{ et } v^* = R^T w^*.$$

Par conséquent on en déduit (cf. équation (IV)) :

$$\llbracket \frac{d}{dt} \zeta^*(t) \rrbracket = \begin{pmatrix} -R^T \dot{R} R^T \varpi^* + R^T \dot{\varpi}^* + R^T \dot{R} R^T \widehat{P} w^* - R^T \widehat{P} \dot{w}^* - R^T \widehat{P} \dot{w}^* \\ -R^T \dot{R} R^T w^* + R^T \dot{w}^* \end{pmatrix}$$

12.8 L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ de $\mathfrak{se}(3)^*$, avec $g \in SE(3)$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{se}(3)^* & \xrightarrow{\text{Ad}_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{se}(3)^* \\ \zeta^* & \longmapsto & \alpha^* = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*) \end{array}.$$

L'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}^*$ de $\mathfrak{se}(3)^*$ est la duale, ou la transposée de l'opération $\text{Ad}_{g^{-1}}$ de $\mathfrak{se}(3)$ i.e. telle que :

$$\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*), \zeta \rangle = \langle \zeta^*, \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta) \rangle; \forall \zeta \in \mathfrak{se}(3) \text{ et } \forall \zeta^* \in \mathfrak{se}(3)^*$$

$$\text{Alors } \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}}^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}} \rrbracket^T = \begin{pmatrix} R & \widehat{P} R \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

En effet on vérifie qu'avec une telle matrice :

$$\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*), \zeta \rangle = \omega^{*T} R^T \omega - \mathbf{v}^{*T} R^T \widehat{P} \omega + \mathbf{v}^{*T} R^T \mathbf{v} = \langle \zeta^*, \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta) \rangle.$$

$$\llbracket \alpha^* \rrbracket = \llbracket \text{Ad}_{g^{-1}}^* \rrbracket \llbracket \zeta^* \rrbracket \text{ soit :}$$

$$\varpi^* = R\omega^* + \widehat{P} R\mathbf{v}^* \text{ et } \mathbf{w}^* = R\mathbf{v}^*.$$

Par conséquent on en déduit (cf. équation (II)) :

$$\llbracket \frac{d}{dt} \alpha^*(t) \rrbracket = \begin{pmatrix} \dot{R}\omega^* + R\dot{\omega}^* + \widehat{P} R\dot{\mathbf{v}}^* + \widehat{P} \dot{R}\mathbf{v}^* + \widehat{P} R\dot{\mathbf{v}}^* \\ \dot{R}\mathbf{v}^* + R\dot{\mathbf{v}}^* \end{pmatrix}.$$

12.9 Vérification des formules (I), (II), (III) et (IV)

On a :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \alpha(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}([\xi(t), \zeta(t)] + \frac{d}{dt} \zeta(t)) \\ &= \text{Ad}_{g(t)}(\text{ad}_{\xi(t)}(\zeta(t)) + \frac{d}{dt} \zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}(\frac{d}{dt} \zeta(t) + [\eta(t), \alpha(t)]) \text{ (I)}. \end{aligned}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^6 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) :

$$\begin{pmatrix} \dot{R}\omega + R\dot{\omega} \\ \widehat{P} R\omega + \widehat{P} \dot{R}\omega + \widehat{P} R\dot{\omega} + \dot{R}\mathbf{v} + R\dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \alpha^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(\zeta^*(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(-\text{ad}_{\xi(t)}^*(\zeta^*(t)) + \frac{d}{dt} \zeta^*(t)) \text{ (II)}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^6 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) :

$$\begin{pmatrix} \dot{R}\omega^* + R\dot{\omega}^* + \widehat{P} R\dot{\mathbf{v}}^* + \widehat{P} \dot{R}\mathbf{v}^* + \widehat{P} R\dot{\mathbf{v}}^* \\ \dot{R}\mathbf{v}^* + R\dot{\mathbf{v}}^* \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-[\eta(t), \alpha(t)] + \frac{d}{dt} \alpha(t)) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-\text{ad}_{\eta(t)}(\alpha(t)) + \frac{d}{dt} \alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\frac{d}{dt} \alpha(t) - [\xi(t), \zeta(t)]) \text{ (III)} \end{aligned}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^6 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) :

$$\begin{pmatrix} -R^T \dot{R} R^T \varpi + R^T \dot{\varpi} \\ R^T \dot{R} R^T \widehat{P} \varpi - R^T \widehat{P} \dot{\varpi} - R^T \widehat{P} \dot{\varpi} - R^T \dot{R} R^T \mathbf{w} + R^T \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}^*(\alpha^*(t)) = \text{Ad}_{g(t)}^*(\text{ad}_{\eta(t)}^*(\alpha^*(t)) + \frac{d}{dt} \alpha^*(t)) \text{ (IV)}$$

En effet les projections de tous les membres dans \mathbb{R}^6 sont égaux à (on évite l'emploi de t pour alléger l'écriture) :

$$\begin{pmatrix} -R^T \dot{R} R^T \varpi^* + R^T \dot{\varpi}^* + R^T \dot{R} R^T \hat{P} w^* - R^T \hat{P} \dot{w}^* - R^T \hat{P} \dot{w}^* \\ -R^T \dot{R} R^T w^* + R^T \dot{w}^* \end{pmatrix}.$$

12.10 Cas d'utilisation des angles d'Euler classiques ψ, θ, φ pour l'orientation et des coordonnées cartésiennes x, y, z pour la position

Les angles d'Euler classiques ont été présentés dans la section précédente. On a donc choisi :

$$\begin{aligned} \llbracket g \rrbracket = q &= (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6)^T = (\psi \ \theta \ \varphi \ x \ y \ z)^T \text{ et} \\ \llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} &= (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6)^T = (\dot{\psi} \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi} \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T. \end{aligned}$$

Alors :

$$M = \begin{pmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \text{ et } M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \bar{N} & 0 \\ \hat{P} \bar{N} & I_3 \end{pmatrix} \text{ et } N^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{N}^{-1} & 0 \\ -\hat{P} & I_3 \end{pmatrix}$$

avec (cf. exemple du mouvement libre d'un solide ayant un point fixe de la section précédente) :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\bar{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} & 0 \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\cos(\theta) \sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & -\frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\sin(\theta)} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\psi) & -\cos(\psi) \sin(\theta) \\ 1 & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\psi) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} & 1 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)} & -\frac{\cos(\psi)}{\sin(\theta)} & 0 \end{pmatrix}.$$

12.11 Cas d'utilisation des angles de Bryant λ, μ, ν pour l'orientation et des coordonnées cartésiennes x, y, z pour la position

Les angles de Bryant ont été présentés dans la section précédente. On a donc choisi :

$$\begin{aligned} \llbracket g \rrbracket = q &= (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6)^T = (\lambda \ \mu \ \nu \ x \ y \ z)^T \text{ et} \\ \llbracket \dot{g} \rrbracket = \dot{q} &= (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6)^T = (\dot{\lambda} \ \dot{\mu} \ \dot{\nu} \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T. \end{aligned}$$

Alors :

$$M = \begin{pmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \text{ et } M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \bar{N} & 0 \\ \hat{P} \bar{N} & I_3 \end{pmatrix} \text{ et } N^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{N}^{-1} & 0 \\ -\hat{P} & I_3 \end{pmatrix}$$

avec (cf. exemple du mouvement libre d'un solide ayant un point fixe de la section précédente) :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) \cos(\nu) & \sin(\nu) & 0 \\ -\cos(\mu) \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ \sin(\mu) & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\bar{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\nu)}{\cos(\mu)} & -\frac{\sin(\nu)}{\cos(\mu)} & 0 \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ -\frac{\sin(\mu) \cos(\nu)}{\cos(\mu)} & \frac{\sin(\mu) \sin(\nu)}{\cos(\mu)} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\mu) \\ 0 & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \cos(\mu) \\ 0 & \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \cos(\mu) \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$\bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} & -\frac{\cos(\lambda) \sin(\mu)}{\cos(\mu)} \\ 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & -\frac{\sin(\lambda)}{\cos(\mu)} & \frac{\cos(\lambda)}{\cos(\mu)} \end{pmatrix}.$$

12.12 Exemple : le problème de la forme d'une tringle élastique et inextensible dans l'espace

On pourra consulter [7], [8], [13], [20], [32], [33], [34], [36], [37], [47], [62], [63], [64], [66] et [71].

On suppose qu'il s'agit d'une tringle élastique de Kirchhoff inextensible empoignée à ces deux extrémités par deux pinces qui lui imposent des efforts (forces et couples-efforts).

Soient $\xi = (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g}) \in \mathfrak{se}(3)$ et donc $\dot{g} = (T_e L_g)(\xi)$.

On suppose que $\xi = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + e_4$ où u_1, u_2, u_3 sont des commandes scalaires. Soit :

$$\tilde{\xi} = u_1 \tilde{e}_1 + u_2 \tilde{e}_2 + u_3 \tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 & 1 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou :}$$

$$\llbracket \xi \rrbracket = u_1 \llbracket e_1 \rrbracket + u_2 \llbracket e_2 \rrbracket + u_3 \llbracket e_3 \rrbracket + \llbracket e_4 \rrbracket = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

On a $\llbracket \xi \rrbracket = M \dot{q}$ et $\dot{q} = M^{-1} \llbracket \xi \rrbracket$.

Soit $T = \frac{1}{2} (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 u_3^2)$ l'énergie élastique de la tringle où c_1, c_2, c_3 sont des constantes strictement positives.

Pour trouver la forme spatiale de la triangle il faut résoudre le problème de commande optimale :

Déterminer l'application $[0 \ 1] \subset \mathbb{R} \xrightarrow[t]{q} \mathbb{R}^6$ par résolution de l'équation d'état :

$\dot{q} = M^{-1} \llbracket \xi \rrbracket = M^{-1} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, avec $q(0) = 0$ et $q(1) = b$ (imposé) et en minimisant $\int_0^1 T(t) dt$.

Soit $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$ l'état adjoint et \mathbb{H} l'hamiltonien de ce problème de commande :

$$\mathbb{H} = p^T \dot{q} - T = p^T M^{-1} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T - T.$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= (p_1 \bar{m}_{11}^{-1} + p_2 \bar{m}_{21}^{-1} + p_3 \bar{m}_{31}^{-1}) u_1 + (p_1 \bar{m}_{12}^{-1} + p_2 \bar{m}_{22}^{-1} + p_3 \bar{m}_{32}^{-1}) u_2 \\ &+ (p_1 \bar{m}_{13}^{-1} + p_2 \bar{m}_{23}^{-1} + p_3 \bar{m}_{33}^{-1}) u_3 + (p_4 r_{11} + p_5 r_{21} + p_6 r_{31}) \\ &- \frac{1}{2} (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 u_3^2) \end{aligned}$$

les conditions nécessaires de minimisation sont :

$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u_i} = 0$; $i = 1, 2, 3$. Soit :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{c_1} (p_1 \bar{m}_{11}^{-1} + p_2 \bar{m}_{21}^{-1} + p_3 \bar{m}_{31}^{-1}), \\ u_2 &= \frac{1}{c_2} (p_1 \bar{m}_{12}^{-1} + p_2 \bar{m}_{22}^{-1} + p_3 \bar{m}_{32}^{-1}), \\ u_3 &= \frac{1}{c_3} (p_1 \bar{m}_{13}^{-1} + p_2 \bar{m}_{23}^{-1} + p_3 \bar{m}_{33}^{-1}) \text{ et alors :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c_1} (p_1 \bar{m}_{11}^{-1} + p_2 \bar{m}_{21}^{-1} + p_3 \bar{m}_{31}^{-1})^2 + \frac{1}{c_2} (p_1 \bar{m}_{12}^{-1} + p_2 \bar{m}_{22}^{-1} + p_3 \bar{m}_{32}^{-1})^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{c_3} (p_1 \bar{m}_{13}^{-1} + p_2 \bar{m}_{23}^{-1} + p_3 \bar{m}_{33}^{-1})^2 \right] + (p_4 r_{11} + p_5 r_{21} + p_6 r_{31}) = \mathbf{H}(q, p). \end{aligned}$$

Considérons l'application moment : $T^*G \xrightarrow{\mathbf{J}^-} \mathfrak{g}_-^*$; soit :
 $(q, p) \mapsto \zeta^* = \mathbf{J}^-(q, p) = M^{-T} p$

$$\llbracket \zeta^* \rrbracket = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-T} & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} p \text{ ou, de manière développée :}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \\ \zeta_3^* \\ \zeta_4^* \\ \zeta_5^* \\ \zeta_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{m}_{11}^{-1} & \bar{m}_{21}^{-1} & \bar{m}_{31}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{m}_{12}^{-1} & \bar{m}_{22}^{-1} & \bar{m}_{32}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{m}_{13}^{-1} & \bar{m}_{23}^{-1} & \bar{m}_{33}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ 0 & 0 & 0 & r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ 0 & 0 & 0 & r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}, \text{ soit :}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1^* &= \bar{m}_{11}^{-1} p_1 + \bar{m}_{21}^{-1} p_2 + \bar{m}_{31}^{-1} p_3, \\ \zeta_2^* &= \bar{m}_{12}^{-1} p_1 + \bar{m}_{22}^{-1} p_2 + \bar{m}_{32}^{-1} p_3, \\ \zeta_3^* &= \bar{m}_{13}^{-1} p_1 + \bar{m}_{23}^{-1} p_2 + \bar{m}_{33}^{-1} p_3, \\ \zeta_4^* &= r_{11} p_4 + r_{21} p_5 + r_{31} p_6, \\ \zeta_5^* &= r_{12} p_4 + r_{22} p_5 + r_{32} p_6, \\ \zeta_6^* &= r_{13} p_4 + r_{23} p_5 + r_{33} p_6. \end{aligned}$$

Donc $u_1 = \frac{1}{c_1} \zeta_1^*$, $u_2 = \frac{1}{c_2} \zeta_2^*$, $u_3 = \frac{1}{c_3} \zeta_3^*$ et :

$$\mathbf{H}(q, p) = H^-(\zeta^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} \zeta_1^{*2} + \frac{1}{c_2} \zeta_2^{*2} + \frac{1}{c_3} \zeta_3^{*2} + \zeta_4^* \right).$$

En fait on a : $H^- = \mathbf{H}|_{\mathfrak{g}_-^*} : \mathfrak{g}_-^* \xrightarrow{H^-} \mathbb{R}$
 $\zeta^* \mapsto H^-(\zeta^*) \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} \zeta_1^{*2} + \frac{1}{c_2} \zeta_2^{*2} + \frac{1}{c_3} \zeta_3^{*2} + \zeta_4^* \right)$.

Équation de réduction de Lie-Poisson

Étant donné que :

$$\begin{aligned} \llbracket \xi \rrbracket &= \begin{pmatrix} \omega_b \\ \nu_b \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ 1 \ 0 \ 0)^T \\ &= \left(\frac{1}{c_1} \zeta_1^* \ \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \ \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \ 1 \ 0 \ 0 \right)^T \text{ on a :} \end{aligned}$$

$$\llbracket \text{ad}_\xi^* \rrbracket = \begin{pmatrix} -\widehat{\omega}_b & -\widehat{v}_b \\ 0 & -\widehat{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_3} \zeta_3^* & -\frac{1}{c_2} \zeta_2^* & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c_3} \zeta_3^* & 0 & \frac{1}{c_1} \zeta_1^* & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{c_2} \zeta_2^* & -\frac{1}{c_1} \zeta_1^* & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_3} \zeta_3^* & -\frac{1}{c_2} \zeta_2^* \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_3} \zeta_3^* & 0 & \frac{1}{c_1} \zeta_1^* \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_2} \zeta_2^* & -\frac{1}{c_1} \zeta_1^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Étant donné que $\frac{d\zeta^*}{dt} = \text{ad}_\xi^*(\zeta^*)$ on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_2} \right) \zeta_2^* \zeta_3^* \\ \frac{d\zeta_2^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \zeta_1^* \zeta_3^* + \zeta_6^* \\ \frac{d\zeta_3^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) \zeta_1^* \zeta_2^* - \zeta_5^* \\ \frac{d\zeta_4^*}{dt} &= \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \zeta_5^* - \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \zeta_6^* \\ \frac{d\zeta_5^*}{dt} &= \frac{1}{c_1} \zeta_1^* \zeta_6^* - \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \zeta_4^* \\ \frac{d\zeta_6^*}{dt} &= \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \zeta_4^* - \frac{1}{c_1} \zeta_1^* \zeta_5^*. \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation de réduction de Lie-Poisson écrite sous la forme d'un système différentiel.

Remarque : on a aussi :

$$\frac{d\zeta^*}{dt} = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*), \text{ soit } \frac{d\zeta_i^*}{dt} = - \sum_{j,k=1}^6 c_{ij}^k \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_j^*} \zeta_k^*. \text{ Et étant donné que :}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \rrbracket &= \left(\frac{\partial H^-}{\partial \zeta_1^*} \quad \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_2^*} \quad \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_3^*} \quad \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_4^*} \quad \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_5^*} \quad \frac{\partial H^-}{\partial \zeta_6^*} \right)^T \\ &= \left(\frac{1}{c_1} \zeta_1^* \quad \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \quad \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right)^T \text{ on retrouve, grâce à la valeur des coefficients de structure donnés précédemment :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_2} \right) \zeta_2^* \zeta_3^* \\ \frac{d\zeta_2^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \zeta_1^* \zeta_3^* + \zeta_6^* \\ \frac{d\zeta_3^*}{dt} &= \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) \zeta_1^* \zeta_2^* - \zeta_5^* \\ \frac{d\zeta_4^*}{dt} &= \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \zeta_5^* - \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \zeta_6^* \\ \frac{d\zeta_5^*}{dt} &= \frac{1}{c_1} \zeta_1^* \zeta_6^* - \frac{1}{c_3} \zeta_3^* \zeta_4^* \\ \frac{d\zeta_6^*}{dt} &= \frac{1}{c_2} \zeta_2^* \zeta_4^* - \frac{1}{c_1} \zeta_1^* \zeta_5^*. \end{aligned}$$

Première équation de reconstruction de Lie-Poisson

Une fois ζ^* obtenu par résolution du système différentiel précédent à partir de conditions initiales $\zeta^*(0)$ imposées on détermine q – et donc la forme de la tringle – grâce à la résolution de la première équation de reconstruction de Lie-Poisson qui s'écrit :

$$\dot{q} = M^{-1} \left[\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \right] = \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \left[\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*} \right] \text{ soit, plus explicitement :}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{c_1} \bar{m}_{11}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \bar{m}_{12}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} \bar{m}_{13}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{c_1} \bar{m}_{21}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \bar{m}_{22}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} \bar{m}_{23}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{c_1} \bar{m}_{31}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \bar{m}_{32}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} \bar{m}_{33}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_4 &= r_{11}, \\ \dot{q}_5 &= r_{21}, \\ \dot{q}_6 &= r_{31}. \end{aligned}$$

Il s'agit tout simplement de la moitié des équations de Hamilton ³⁷⁷ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_2}, \quad \dot{q}_3 = \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_3}, \quad \dot{q}_4 = \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_4}, \quad \dot{q}_5 = \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_5}, \\ \dot{q}_6 &= \frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial p_6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } \mathbf{H}(q,p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c_1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3)^2 + \frac{1}{c_2} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{c_3} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3)^2 + r_{11} p_4 + r_{21} p_5 + r_{31} p_6 \right] \end{aligned}$$

et par conséquent on a bien :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{c_1} m_{11}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_2} m_{12}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_3} m_{13}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{c_1} m_{11}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} m_{12}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} m_{13}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{c_1} m_{21}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_2} m_{22}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_3} m_{23}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{c_1} m_{21}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} m_{22}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} m_{23}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{c_1} m_{31}^{-1} (m_{11}^{-1} p_1 + m_{21}^{-1} p_2 + m_{31}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_2} m_{32}^{-1} (m_{12}^{-1} p_1 + m_{22}^{-1} p_2 + m_{32}^{-1} p_3) \\ &+ \frac{1}{c_3} m_{33}^{-1} (m_{13}^{-1} p_1 + m_{23}^{-1} p_2 + m_{33}^{-1} p_3) \\ &= \frac{1}{c_1} m_{31}^{-1} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} m_{32}^{-1} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} m_{33}^{-1} \zeta_3^*, \\ \dot{q}_4 &= r_{11}, \\ \dot{q}_5 &= r_{21}, \\ \dot{q}_6 &= r_{31}. \end{aligned}$$

Remarque : cette première équation de reconstruction de Lie-Poisson est en général présentée par les différents auteurs qui traitent de ce problème ou d'un problème voisin sous la forme :

377. l'autre moitié étant $\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial q_1}$, ... et $\dot{p}_6 = -\frac{\partial \mathbf{H}(q,p)}{\partial q_6}$

$\widetilde{g^{-1}} \widetilde{g} = \widetilde{\xi}$ ou $\widetilde{g} = \widetilde{g} \widetilde{\xi}$, soit, plus explicitement :

$$\widetilde{g} = \widetilde{g} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c_3} \zeta_3^* & \frac{1}{c_2} \zeta_2^* & 1 \\ \frac{1}{c_3} \zeta_3^* & 0 & -\frac{1}{c_1} \zeta_1^* & 0 \\ -\frac{1}{c_2} \zeta_2^* & \frac{1}{c_1} \zeta_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Citons [7]³⁷⁸, [8]³⁷⁹, [20]³⁸⁰, [32], [34]³⁸¹, [64]³⁸², [71]³⁸³ ...

La résolution de la seconde équation de reconstruction de Lie-Poisson est inutile pour déterminer la forme de la tringle.

Remarque : on peut résoudre le système différentiel qui correspond à l'équation de réduction grâce aux fonctions elliptiques pour déterminer *analytiquement* $\zeta^*(t)$. Par contre la résolution de la première équation de reconstruction pour déterminer *analytiquement* $q(t)$ est visiblement hors de portée ; la détermination de la forme de la tringle doit donc se faire *numériquement*.

Cependant dans le cas d'une tringle plane la résolution analytique est possible [62] et [63].

12.12.1 Cas d'utilisation des angles d'Euler classiques ψ, θ, φ pour l'orientation et des coordonnées cartésiennes x, y, z pour la position

L'équation de réduction de Lie-Poisson est celle du cas général et la première équation de reconstruction de Lie-Poisson s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{c_1} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_2^*, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{c_1} \cos(\varphi) \zeta_1^* - \frac{1}{c_2} \sin(\varphi) \zeta_2^*, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{c_1} \frac{\cos(\theta) \sin(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_1^* - \frac{1}{c_2} \frac{\cos(\theta) \cos(\varphi)}{\sin(\theta)} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} \zeta_3^*, \\ \dot{x} &= \cos(\psi) \cos(\varphi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ \dot{y} &= \sin(\psi) \cos(\varphi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ \dot{z} &= \sin(\theta) \sin(\varphi). \end{aligned}$$

378. p. 1028 éq. (1)

379. p. 5 éq. (1)

380. p. 69 éq. (2.1)

381. p. 94 éq. (1)

382. p. 2 éq. (7)

383. p. 1258 éq. (1)

12.12.2 Cas d'utilisation des angles de Bryant λ, μ, ν pour l'orientation et des coordonnées cartésiennes x, y, z pour la position

L'équation de réduction de Lie-Poisson est celle du cas général et la première équation de reconstruction de Lie-Poisson s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{1}{c_1} \frac{\cos(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_1^* - \frac{1}{c_2} \frac{\sin(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_2^*, \\ \dot{\mu} &= \frac{1}{c_1} \sin(\nu) \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \cos(\nu) \zeta_2^*, \\ \dot{\nu} &= -\frac{1}{c_1} \frac{\sin(\mu) \cos(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_1^* + \frac{1}{c_2} \frac{\sin(\mu) \sin(\nu)}{\cos(\mu)} \zeta_2^* + \frac{1}{c_3} \zeta_3^*, \\ \dot{x} &= \cos(\mu) \cos(\nu), \\ \dot{y} &= \cos(\lambda) \sin(\nu) + \sin(\lambda) \sin(\mu) \cos(\nu), \\ \dot{z} &= \sin(\lambda) \sin(\nu) - \cos(\lambda) \sin(\mu) \cos(\nu).\end{aligned}$$

Annexe : Les variétés de Poisson et les différents crochets

Variétés de Poisson

- T^*M, T^*N, T^*P (et en particulier T^*G) sont des variétés de Poisson.
- $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ est une variété de Poisson.

Différents crochets

Sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs différentiels

- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ ou $\mathcal{X}(G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(T^*M)$ ou $\mathcal{X}(T^*G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{P}(T^*M)$ ou $\mathcal{P}(T^*G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{H}(T^*M)$ ou $\mathcal{H}(T^*G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{X}_L(G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{X}_R(G)$
- $[,]$ crochet de Jacobi-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(\mathfrak{g}^*)$

Sur les algèbres de Lie de fonctions numériques différentielles

- $\{, \}$ crochet de Poisson quelconque sur $\mathcal{F}(T^*M)$
- $\{, \}_{\text{can}}$ crochet de Poisson canonique sur $\mathcal{F}(T^*M)$
- $\{, \}$ crochet de Poisson quelconque sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$
- $\{, \}$ crochet de Poisson quelconque sur $\mathcal{L}(T^*M)$
- $\{, \}_+$ crochet de Lie-Poisson sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$
- $\{, \}_-$ crochet de Lie-Poisson sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*)$

Sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g}

- $[,]^L$ crochet de Lie sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g}
- $[,]^R$ crochet de Lie sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g}
- $[,] = [,]^L = -[,]^R$ crochet de Lie sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g}

Annexe : Principales notations et relations

Variétés quelconques

M, N, P variétés différentielles quelconques.

$x \in M, y \in N, z \in P$.

$T_x M, T_y N, T_z P$ espaces tangents à M, N, P aux points x, y, z .

$v_x \in T_x M, w_y \in T_y N, u_z \in T_z P$.

TM, TN, TP fibrés tangents à M, N, P .

$v \in TM, w \in TN, u \in TP$.

$\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)$ algèbres de Lie des applications numériques différentielles sur M, N .

$U, V \in \mathcal{F}(M); U', V' \in \mathcal{F}(N)$.

$\mathcal{X}(M), \mathcal{X}(N)$ algèbres de Lie des champs de vecteurs sur M, N , dotées du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$X, Y, \sigma_M = C(\sigma), \sigma'_M = C(\sigma'), \mu_M = C(\mu), \nu_M = C(\nu) \in \mathcal{X}(M); X', Y' \in \mathcal{X}(N)$.

$\mathcal{L}_X U = X[U] \in \mathcal{F}(M)$ dérivée de Lie de U selon X .

$\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{X}(M)$ dérivée de Lie de Y selon X .

$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y \in \mathcal{X}(M)$ crochet de Jacobi-Lie.

$T_x^* M, T_y^* N, T_z^* P$ espaces cotangents à M, N, P aux points x, y, z .

$v_x^* \in T_x^* M, w_y^* \in T_y^* N, u_z^* \in T_z^* P$.

$T^* M, T^* N, T^* P$ fibrés cotangents à M, N, P ; variétés de Poisson.

$v^* \in T^* M, w^* \in T^* N, u^* \in T^* P$.

$\mathcal{F}(T^* M)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur $T^* M$, dotée du crochet de Poisson $\{ \cdot, \cdot \}$.

$\mathcal{L}(T^* M)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur $T^* M$ linéaires sur les fibres de $T^* M$, dotée du crochet de Poisson $\{ \cdot, \cdot \}$.

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}, \dots \in \mathcal{F}(T^* M)$.

$\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(\sigma_M), \mathcal{P}(\sigma'_M), \mathcal{P}(\mu_M), \mathcal{P}(\nu_M) \in \mathcal{F}(T^* M)$ fonctions moments.

$\mathcal{X}(T^*M)$, $\mathcal{X}(T^*N)$ algèbres de Lie des champs de vecteurs sur T^*M , T^*N , dotées du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$\mathcal{P}(T^*M) = \{X \in \mathcal{X}(T^*M) \mid \mathbf{X}[\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}] = \{\mathbf{X}[\mathbf{F}], \mathbf{G}\} + \{\mathbf{F}, \mathbf{X}[\mathbf{G}]\}$ algèbre de Lie des automorphismes de Poisson infinitésimaux sur T^*M , dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$\mathcal{H}(T^*M) = \{X_{\mathbf{H}} \in \mathcal{P}(T^*M) \mid \mathbf{H} \in \mathcal{F}(T^*M)\}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens sur T^*M , dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \sigma_{T^*M} = D(\sigma), \sigma'_{T^*M} = D(\sigma') \in \mathcal{X}(T^*M); \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \in \mathcal{X}(T^*N)$.

$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{F} = \mathbf{X}[\mathbf{F}] \in \mathcal{F}(T^*M)$ dérivée de Lie de \mathbf{F} selon \mathbf{X} .

$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ dérivée de Lie de \mathbf{Y} selon \mathbf{X} .

$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(T^*M)$ crochet de Jacobi-Lie.

$X_{\mathbf{H}} \in \mathcal{X}(T^*M)$ champ de vecteurs hamiltonien de \mathbf{H} .

$X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \in \mathcal{F}(T^*M)$.

$X_{\mathcal{P}(\mathcal{X})} \in \mathcal{H}(T^*M)$ relèvement cotangent sur T^*M de X sur M .

$\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}_{\text{can}}$ crochet de Poisson canonique.

Groupe de Lie

G groupe de Lie, d'opération \cdot .

$e, g, h, k \in G$ (e élément neutre).

L_h translation à gauche, R_h translation à droite et I_h automorphisme intérieur : $L_h(g) = h \cdot g$, $R_h(g) = g \cdot h$, $I_h(g) = h \cdot g \cdot h^{-1}$.

$T_gG, T_hG, T_kG, T_{g \cdot h}G, T_{h \cdot g}G$ espaces tangents à G aux points $g, h, k, g \cdot h, h \cdot g$.

$v_g, v'_g, v''_g, v'''_g \in T_gG, w_h \in T_hG, u_k \in T_kG, a_{g \cdot h} \in T_{g \cdot h}G, b_{h \cdot g} \in T_{h \cdot g}G$ et, en particulier $\dot{g} = \frac{dg}{dt} \in T_gG, \dot{h} = \frac{dh}{dt} \in T_hG, \frac{d(g \cdot h)}{dt} \in T_{g \cdot h}G$ et $\frac{d(h \cdot g)}{dt} \in T_{h \cdot g}G$.

$a_{g \cdot h} = (T_gR_h)(v_g), b_{h \cdot g} = (T_hL_g)(v_g)$.

TG fibré tangent.

$v, w, a, b \in TG$, avec $a = (TR_h)(v), b = (TL_h)(v)$.

$\mathfrak{g} = T_eG$ algèbre de Lie du groupe de Lie G , dotée du crochet de Lie $[\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot]^L = -[\cdot, \cdot]^R$.

Dans \mathfrak{g} on considère les éléments suivants :

- σ, σ' (génériques et indépendants),
- pour une conception à gauche : μ, μ' (génériques et indépendants) et $\zeta, \theta, \delta, \xi, \chi$ (particuliers) et
- pour une conception à droite : ν, ν' (génériques et indépendants) et $\alpha, \beta, \varepsilon, \eta, \kappa$ (particuliers).

$$\begin{aligned} v_g &= (T_e L_g)(\zeta) = (T_e R_g)(\alpha), \\ v'_g &= (T_e L_g)(\theta) = (T_e R_g)(\beta), \\ v''_g &= (T_e R_g)(\zeta), \\ v'''_g &= (T_e L_g)(\alpha). \text{ Et, en particulier :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{g} &= (T_e L_g)(\xi), \\ \dot{g} &= (T_e R_g)(\eta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= (T_g L_{g^{-1}})(v_g) = (T_g R_{g^{-1}})(v''_g), \\ \theta &= (T_g L_{g^{-1}})(v'_g), \\ \alpha &= (T_g R_{g^{-1}})(v_g) = (T_g L_{g^{-1}})(v'''_g), \\ \beta &= (T_g R_{g^{-1}})(v'_g). \text{ Et, en particulier :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= (T_g L_{g^{-1}})(\dot{g}), \\ \eta &= (T_g R_{g^{-1}})(\dot{g}). \end{aligned}$$

$$\text{Ad}_h = T_e I_h.$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_h &= (T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h) = (T_{h^{-1}} L_h) \circ (T_e R_{h^{-1}}) \text{ et} \\ \text{Ad}_{h^{-1}} &= (T_{h^{-1}} R_h) \circ (T_e L_{h^{-1}}) = (T_h L_{h^{-1}}) \circ (T_e R_h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu &= \text{Ad}_h(\mu), \nu' = \text{Ad}_h(\mu'), \\ \mu &= \text{Ad}_h^{-1}(\nu) = \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu), \mu' = \text{Ad}_h^{-1}(\nu') = \text{Ad}_{h^{-1}}(\nu') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Ad}_g(\zeta). \\ \zeta &= \text{Ad}_g^{-1}(\alpha) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\alpha). \\ \beta &= \text{Ad}_g(\theta). \\ \theta &= \text{Ad}_g^{-1}(\beta) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\beta). \text{ Et, en particulier :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \text{Ad}_g(\xi). \\ \xi &= \text{Ad}_g^{-1}(\eta) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\eta). \end{aligned}$$

$$\text{Ad}_h([\mu, \mu']) = [\text{Ad}_h(\mu), \text{Ad}_h(\mu')] = [\nu, \nu'].$$

$$\exp(\nu) = \exp(\text{Ad}_h(\mu)) = h \cdot \exp(\mu) \cdot h^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{ad}_\sigma &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma)}. \\ \text{ad}_{\sigma'} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\sigma')}. \end{aligned}$$

• à gauche :

$$\diamond [\mu, \mu'] = \text{ad}_\mu(\mu').$$

$$\diamond \delta \triangleq \text{ad}_\zeta(\theta) \triangleq [\zeta, \theta] = -[\theta, \zeta] = -\text{ad}_\theta(\zeta),$$

$$\diamond \chi \triangleq \text{ad}_\xi(\zeta) \triangleq [\xi, \zeta] = -[\zeta, \xi] = -\text{ad}_\zeta(\xi),$$

• à droite :

$$\diamond [\nu, \nu'] = \text{ad}_\nu(\nu').$$

$$\diamond \varepsilon \triangleq \text{ad}_\alpha(\beta) \triangleq [\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] = -\text{ad}_\beta(\alpha),$$

$$\diamond \kappa \triangleq \text{ad}_\eta(\alpha) \triangleq [\eta, \alpha] = -[\alpha, \eta] = -\text{ad}_\alpha(\eta).$$

$$\bullet \text{Ad}_g(\delta) = \text{Ad}_g[\zeta, \theta] = [\text{Ad}_g(\zeta), \text{Ad}_g(\theta)] = [\alpha, \beta] = \text{ad}_\alpha(\beta) = \varepsilon.$$

$$\text{Ad}_g(\text{ad}_\zeta(\theta)) = \text{ad}_\alpha(\text{Ad}_g(\theta)).$$

$$\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\zeta = \text{ad}_\alpha \circ \text{Ad}_g.$$

$$\text{Ad}_g(\chi) = \text{Ad}_g[\xi, \zeta] = [\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\zeta)] = [\eta, \alpha] = \text{ad}_\eta(\alpha) = \kappa.$$

$$\text{Ad}_g(\text{ad}_\xi(\zeta)) = \text{ad}_\eta(\text{Ad}_g(\zeta)).$$

$$\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\xi = \text{ad}_\eta \circ \text{Ad}_g.$$

$$\delta = \text{Ad}_g^{-1}(\varepsilon) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\varepsilon).$$

$$\text{ad}_\zeta \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\alpha.$$

$$\chi = \text{Ad}_g^{-1}(\kappa) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\kappa).$$

$$\text{ad}_\xi \circ \text{Ad}_{g^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{ad}_\eta.$$

Champs de vecteurs

$\mathcal{X}(G)$ algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G , dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$\mathcal{X}_L(G)$ sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G , invariants à gauche, dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$\mathcal{X}_R(G)$ sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G , invariants à droite, dotée du crochet de Jacobi-Lie $[\cdot, \cdot]$.

$$X, Y \in \mathcal{X}(G).$$

$$X^L, X'^L, X_\sigma^L, X_{\sigma'}^L \in \mathcal{X}_L(G).$$

$$X^R, X'^R, X_\sigma^R, X_{\sigma'}^R \in \mathcal{X}_R(G).$$

$$\begin{aligned}
X_{h \cdot g}^L &= (T_g L_h)(X_g^L), \\
X_{g \cdot h}^R &= (T_g R_h)(X_g^R), \\
X_{\sigma h}^L &= (T_e L_h)(\sigma), \\
X_{\sigma h}^R &= (T_e R_h)(\sigma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\zeta g}^L &= (T_e L_g)(\zeta) = X_{\alpha g}^R = (T_e R_g)(\alpha) = v_g, \\
X_{\theta g}^L &= (T_e L_g)(\theta) = X_{\beta g}^R = (T_e R_g)(\beta) = v'_g, \\
X_{\alpha g}^L &= (T_e L_g)(\alpha) = v''_g, \\
X_{\zeta g}^R &= (T_e R_g)(\zeta) = v''_g, \\
X_{\beta g}^L &= (T_e L_g)(\beta) \text{ et } X_{\theta g}^R = (T_e R_g)(\theta),
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
X_{\xi g}^L &= (T_e L_g)(\xi) = X_{\eta g}^R = (T_e R_g)(\eta) = \dot{g}, \\
X_{\eta g}^L &= (T_e L_g)(\eta), \\
X_{\xi g}^R &= (T_e R_g)(\xi).
\end{aligned}$$

$T_g^*G, T_h^*G, T_k^*G, T_{g \cdot h}^*G, T_{h \cdot g}^*G$ espaces cotangents à G aux points $g, h, k, g \cdot h, h \cdot g$.

$$v_g^* \in T_g^*G, w_h^* \in T_h^*G, u_k^* \in T_k^*G, a_{g \cdot h}^* \in T_{g \cdot h}^*G, b_{h \cdot g}^* \in T_{h \cdot g}^*G.$$

$$v_g^* = (T_g^* R_h)(a_{g \cdot h}^*) = (T_g^* L_h)(b_{h \cdot g}^*).$$

$\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ variété de Poisson.

Dans \mathfrak{g}^* on considère les éléments suivants :

- σ^*, σ'^* (génériques et indépendants),
- pour une conception à gauche : μ^*, μ'^* (génériques et indépendants) et $\zeta^*, \theta^*, \delta^*, \xi^*, \chi^*$ (particuliers) et
- pour une conception à droite : ν^*, ν'^* (génériques et indépendants) et $\alpha^*, \beta^*, \varepsilon^*, \eta^*, \kappa^*$ (particuliers).

$$\begin{aligned}
\zeta^* &= (T_e^* L_g)(v_g^*) = (T_e^* R_g)(v_g''^*), \\
\alpha^* &= (T_e^* R_g)(v_g^*) = (T_e^* L_g)(v_g'''^*), \\
\theta^* &= (T_e^* L_g)(v_g^*) \\
\beta^* &= (T_e^* R_g)(v_g^*). \text{ Et, en particulier :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_g^* &= (T_g^* L_{g^{-1}})(\zeta^*) = (T_g^* R_{g^{-1}})(\alpha^*), \\
v_g^* &= (T_g^* L_{g^{-1}})(\theta^*) = (T_g^* R_{g^{-1}})(\beta^*), \\
v_g''^* &= (T_g^* R_{g^{-1}})(\zeta^*), \\
v_g'''^* &= (T_g^* L_{g^{-1}})(\alpha^*).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^* &= \text{Ad}_h^*(\nu^*), \\ \nu^* &= \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu^*), \\ \mu'^* &= \text{Ad}_h^*(\nu'^*), \\ \nu'^* &= \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu'^*).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta^*). \\ \zeta^* &= \text{Ad}_g^*(\alpha^*). \\ \beta^* &= \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\theta^*). \\ \theta^* &= \text{Ad}_g^*(\beta^*).\end{aligned}$$

$$\text{ad}_\zeta^* \circ \text{Ad}_g^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{ad}_\alpha^*.$$

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \text{ad}_\zeta^* = \text{ad}_\alpha^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}}^*.$$

$$v^* = (T^*R_h)(a^*) = (T^*L_h)(b^*).$$

En particulier

$$\begin{aligned}\eta^* &= \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\xi^*). \\ \xi^* &= \text{Ad}_g^*(\eta^*).\end{aligned}$$

$$\text{ad}_\xi^* \circ \text{Ad}_g^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{ad}_\eta^*.$$

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^* \circ \text{ad}_\xi^* = \text{ad}_\eta^* \circ \text{Ad}_{g^{-1}}^*.$$

$$\theta^* = \text{ad}_\zeta^*(\delta^*), \quad \beta^* = \text{ad}_\alpha^*(\varepsilon^*).$$

$\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur \mathfrak{g}^* , dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur \mathfrak{g}_+^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_+$.

$\mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur \mathfrak{g}_-^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_-$.

$\mathcal{L}(\mathfrak{g}^*)$ algèbre de Lie des applications numériques linéaires sur \mathfrak{g}^* , dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathcal{L}(\mathfrak{g}_+^*)$ algèbre de Lie des applications numériques linéaires sur \mathfrak{g}_+^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_+$.

$\mathcal{L}(\mathfrak{g}_-^*)$ algèbre de Lie des applications numériques linéaires sur \mathfrak{g}_-^* , dotée du crochet de Lie-Poisson $\{, \}_-$.

$$F, G, H, X_H[F] = \{F, H\} \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*).$$

$$F^+, G^+, H^+, \{F^+, H^+\}_+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*).$$

$$F^-, G^-, H^-, \{F^-, H^-\}_- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*).$$

$\mathcal{X}(\mathfrak{g}^*)$ algèbre de Lie des champs de vecteurs sur \mathfrak{g}^* , dotée du crochet de Jacobi-Lie $\{, \}$.

$X_H \in \mathcal{X}(\mathfrak{g}^*)$ champ de vecteur hamiltonien.

T^*G fibré cotangent : variété de Poisson.

$v^*, w^*, a^*, b^* \in T^*G$.

$\mathcal{F}(T^*G)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur T^*G , dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathcal{F}_L(T^*G)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur T^*G invariante à gauche, dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathcal{F}_R(T^*G)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur T^*G invariante à droite, dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathcal{L}(T^*G)$ algèbre de Lie des applications numériques différentielles sur T^*G linéaires sur les fibres de T^*G , dotée du crochet de Poisson $\{, \}$.

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, X_{\mathbf{H}}[\mathbf{F}] = \{\mathbf{F}, \mathbf{H}\} \in \mathcal{F}(T^*G)$.

$J_{\mu}^+ = \mathcal{P}(\mu_G), J_{\nu}^- = \mathcal{P}(\nu_G), J_{\alpha}^+ = \mathcal{P}(\alpha_G) = \mathcal{P}(X_{\alpha}^R),$
 $J_{\zeta}^- = \mathcal{P}(\zeta_G) = \mathcal{P}(-X_{\zeta}^L) \in \mathcal{F}(T^*G)$ fonctions moments.

$\mathcal{X}(T^*G)$ ensemble des champs de vecteurs sur T^*G .

$\mu_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(\mu_G)} = X_{J_{\mu}^+}, \nu_{T^*G} = X_{\mathcal{P}(\nu_G)} = X_{J_{\nu}^-} \in \mathcal{X}(T^*G)$ champs de vecteurs hamiltoniens.

$\mu^* = \mathbf{J}^+(v^*)$ et $\mu'^* = \mathbf{J}^+(v'^*) = \text{Ad}_{h^{-1}}^*(\mu^*)$ (donc $\mu'^* = \nu^*$).

$\nu'^* = \mathbf{J}^-(v'^*)$ et $\nu^* = \mathbf{J}^-(v^*) = \text{Ad}_h^*(\nu'^*)$ (donc $\nu^* = \mu'^*$).

Équations (I), (II) (III) et (IV)

Soient les deux courbes différentielles *indépendantes* :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} G \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\zeta} \mathfrak{g} .$$

$$t \mapsto g(t) \quad t \mapsto \zeta(t)$$

Étant donné que $\alpha(t) \triangleq \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t))$ on en déduit, avec :

$$\xi(t) = (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) \quad \text{et} \quad \eta(t) = (T_{g(t)}R_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}(\zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}(\text{ad}_{\xi(t)}(\zeta(t)) + \frac{d}{dt} \zeta(t)) \\ &= \text{Ad}_{g(t)}([\xi(t), \zeta(t)] + \frac{d}{dt} \zeta(t)) = \text{Ad}_{g(t)}(\frac{d}{dt} \zeta(t)) + [\eta(t), \alpha(t)] \quad \text{(I)}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(\zeta^*(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^*(-\text{ad}_{\xi(t)}^*(\zeta^*(t)) + \frac{d}{dt} \zeta^*(t)) \quad \text{(II)}.$$

Soient les deux courbes différentielles *indépendantes* :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} G \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} .$$

$$t \mapsto g(t) \quad t \mapsto \zeta(t)$$

Étant donné que $\zeta(t) \triangleq \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t))$ on en déduit, avec :

$$\xi(t) = (T_{g(t)}L_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) \quad \text{et} \quad \eta(t) = (T_{g(t)}R_{g^{-1}(t)})(\dot{g}(t)) :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-\text{ad}_{\eta(t)}(\alpha(t)) + \frac{d}{dt} \alpha(t)) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(-[\eta(t), \alpha(t)] + \frac{d}{dt} \alpha(t)) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}(\frac{d}{dt} \alpha(t) - [\xi(t), \zeta(t)]) \quad \text{(III)}. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g(t)}^*(\alpha^*(t)) = \text{Ad}_{g(t)}^*(\text{ad}_{\eta(t)}^*(\alpha^*(t)) + \frac{d}{dt} \alpha^*(t)) \quad \text{(IV)}.$$

$$\{F^-, H^-\}_-(\zeta^*) = \langle \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*), \frac{\delta F^-}{\delta \zeta^*} \rangle ; \zeta^* \in \mathfrak{g}_-^* ; F^-, H^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*).$$

$$\{F^+, H^+\}_+(\alpha^*) = - \langle \text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^*(\alpha^*), \frac{\delta F^+}{\delta \alpha^*} \rangle ; \alpha^* \in \mathfrak{g}_+^* ; F^+, H^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$$

$\frac{d}{dt} \zeta^*(t) = \text{ad}_{\frac{\delta H^-}{\delta \zeta^*}}^*(\zeta^*(t)) ; H^- \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_-^*)$ **équation de réduction de Lie-Poisson, à gauche.**

$\frac{d}{dt} \alpha^*(t) = -\text{ad}_{\frac{\delta H^+}{\delta \alpha^*}}^*(\alpha^*(t)) ; H^+ \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}_+^*)$ **équation de réduction de Lie-Poisson, à droite.**

c_{ij}^k coefficients de structure.

Références

- [1] R. A. Abraham et J. E. Marsden. *Foundations of mechanics. Second Edition. Updated 1985 Printing.* Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachussets, ..., Taipei. 1985.
- [2] R. A. Abraham, J. E. Marsden et T.S. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis and applications. Second Edition.* Applied Mathematical Sciences 75. Springer-Verlag. 1988.
- [3] V. I. Arnold. *Équations différentielles ordinaires.* Éditions MIR. Moscou. 1974.
- [4] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics.* Seconde édition. Springer Verlag. New York. Heidelberg. Berlin. 1989.
- [5] M. Aymerich. *Lie-Poisson reduction (Reduccion de Lie-Poisson).* Universidad de la Laguna. Departamento de mathematica fundamental. Juin 2010.
- [6] M. Berger et B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* PUF. Paris. 1987.
- [7] J. Biggs, W. Holderbaum et V. Jurdjevic. *Singularities of optimal control problems on some 6-D Lie groups.* IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 52, No. 6, pp. 1027-1038. Juin 2007.
- [8] J. Biggs et W. Holderbaum. *Integrable quadratic Hamiltonians on th Euclidean group of motions.* 1 février 2010.
- [9] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control.* Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 24. Springer Verlag New York, Inc. 2003.
- [10] W. M. Boothby. *An introduction to differential manifolds and riemannian geometry.* Academic Press Inc.. Boston ... Toronto. Seconde édition. 1986.
- [11] J.-P. Bourguignon. *Calcul variationnel.* Les éditions de l'école polytechnique. Palaiseau. 2007.
- [12] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques.* PUF. Paris. 1983.
- [13] T. Bretl et Z. McCarthy. *Quasic-static manipulation of a Kirchhoff elastic rod based on a geometric analysis of equilibrium configurations.* The International Journal of Robotics Research. 17 juin 2013.
- [14] L. Brillouin. *Les tenseurs en mécanique et en électricité.* Masson et Cie. Paris. 1960.

- [15] J. Butterfield. *On symplectic reduction in classical mechanics*. Un chapitre de “The North Holland Handbook of Philosophy of Physics”. 21 juillet 2005.
- [16] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann. Paris. 1971.
- [17] E. Cartan. *Éxposés de géométrie*. Hermann. Paris. 1971.
- [18] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann. Paris. 1971.
- [19] Y. Choquet-Bruhat. *Géométrie différentielle et systèmes linéaires*. Dunod. Paris. 1968.
- [20] M. Craiovean, C. Pop, A. Aronet et C. Petrisor. *An optimal control problem on the special Euclidian group $SE(3, \mathbb{R})$* . MSC 53D17. 2010.
- [21] R. Deheuvelds. *Tenseurs et spineurs*. PUF. Paris. 1993.
- [22] A. Delachet. *La géométrie différentielle*. Que sais-Je? PUF. Paris. 1970.
- [23] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Première partie. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs*. Éditions MIR. Moscou. 1982.
- [24] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Deuxième partie. Géométrie et topologie des variétés*. Éditions MIR. Moscou. 1982.
- [25] R.L. Fernandes et I. Marcut. *Lectures on Poisson Geometry*. Springer. 15 Mars 2014.
- [26] W. Fulton. *Algebraic topology. A first course*. Springer-Verlag New York, Inc. 1995.
- [27] R. V. Gamkrelidze. *Geometry I. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 28*. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1991.
- [28] R. Godbillon. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Collection Méthodes. Hermann. Paris. 1969.
- [29] R. Godbillon. *Éléments de géométrie algébrique*. Collection Méthodes. Hermann. Paris. 1971.
- [30] R. Godement. *Cours d’algèbre*. Collection Enseignement des sciences no. 5. Hermann. Paris. 1966.
- [31] V. G. Ivancevic et T ; T ; Ivancevic. *Applied differential geometry. A modern introduction*. World Scientific. New Jersey ... 2007.
- [32] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 52. Cambridge University Press. 1997.

- [33] V. Jurdjevic. *Integrable Hamiltonian systems on complex Lie groups*. Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 178. No. 838. Novembre 2005.
- [34] V. Jurdevic. *Elastic problems and optimal control : integrable systems*. 2010.
- [35] P. S. Krishnaprasad. *Optimal control and Poisson reduction*. Technical Research Report T.R. 93-87. Institute for Systems Research. University of Maryland. College Park, MD 20742. 1993.
- [36] J. Langer et D. A. Singer. *The total squared curvature of closed curves*. J. Differential Geometry 20. pp. 1-22. 1984.
- [37] J. Langer et D. A. Singer. *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*. SIAM Review, Vol. 38, No. 4, pp. 605-618. Décembre 1996.
- [38] D. Leborgne. *Calcul différentiel et géométrie*. PUF. Paris. 1982.
- [39] J. Lerbet. *Mécanique des systèmes de solides rigides comportant des boucles fermées*. Thèse de Docteur-Ingénieur. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. 19 juin 1987.
- [40] A. Lesfari. *Champs de vecteurs, flots, opérateurs différentiels et variétés difféomorphes aux tores réels*. Département de mathématiques. Faculté des sciences. Université Chouaib Doukkali. El-Jadida. Maroc.
- [41] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus*. Dover Publications, Inc..New-York. 1977.
- [42] P. Libermann et C.-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*. D. Reidel Publ. Dordrecht. 1987.
- [43] A. Lichnerowicz. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin. Paris 1946. Et Éditions Jacques Gabay. Sceaux. 1987.
- [44] A. Lichnerowicz. *Structures de contact et formalisme hamiltonien invariant*. CRAS. Série A. pp. 171-175. 1975.
- [45] A. Lichnerowicz. *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*. J. Differential Geometry 12. pp. 253-300. 1977.
- [46] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Collection Enseignement des sciences no. 14. Hermann. Paris. 1972.
- [47] V. Manikonda. *Control and stabilization of a class of nonlinear systems with symmetry*. Ph. D. thesis. The Center for Dynamics and Control of Smart Structures (CDCSS). Boston university. University of Maryland center. 1998.
- [48] J. E. Marsden et T. S. Ratiu. *Reduction of Poisson manifolds*. Letters in Math. Phy. Vol. 11. pp. 161-169. 1986.

- [49] J. E. Marsden et T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*. Springer-Verlag New York, Inc. 1999.
- [50] R. Mneimné et F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. Hermann. Paris. 1986.
- [51] R. M. Murray, Z. Li et S. S. Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press. Boca Raton, Ann Arbor, Londres, Tokyo. 1994.
- [52] Pham Mau Quan. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*. Dunod. Paris. 1969.
- [53] F. Pham. *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*. InterÉditions. Paris. 1992.
- [54] G. Pichon. *Groupes de Lie. Représentation linéaires et applications*. Collection Méthodes. Hermann. Paris. 1973.
- [55] L. Pontriaguine. *Équations différentielles ordinaires*. Éditions MIR. Moscou. 1969.
- [56] M. Postnikov. *Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie*. Éditions MIR. Moscou. 1985.
- [57] M. Postnikov. *Leçons de géométrie. Géométrie différentielle*. Éditions MIR. Moscou. 1990.
- [58] M. Postnikov. *Leçons de géométrie. Variétés différentiables*. Éditions MIR. Moscou. 1990.
- [59] M. Renaud. *Comment définir l'orientation d'un corps ? Quelles relations unissent les dérivées des paramètres d'orientation aux composantes de la vitesse angulaire du corps ?* Rapport LAAS N° 96078. Mars 1996.
- [60] M. Renaud. *Mécanique générale. Mécanique classique. Notes de cours*. Département de Génie Mécanique. INSA de Toulouse. 2003-2004.
- [61] Ph. Robba. *Cours de mathématiques*. École Supérieure d'Électricité no. 1020. Paris. 1968-1969.
- [62] O. Roussel, M. Renaud et M. Taïx. *Closed-forms of planar Kirchhoff elastic rods : application to inverse geometry*. IMA Conference on Mathematics of Robotics. Oxford. Angleterre. Septembre 2015.
- [63] O. Roussel. *Planification de mouvements pour tiges élastiques. Motion planning for elastic rods*. Doctorat de l'université de Toulouse. France. 5 octobre 2015.
- [64] I. Sager et N. Abazari. *Optimization problem of the rigid body motion with the geodesic frame*. World Academy of Science, Engineering and Technology. Vol. 4. 29-03-2010.

- [65] L. Schwartz. *Les tenseurs*. Hermann. Paris. 1981.
- [66] D. A. Singer. *Lectures on elastic curves and rods*. 18 novembre 2007.
- [67] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod. Paris. 1970.
- [68] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish, Inc.. Houston, Texas. 1970.
- [69] Y. Talpaert. *Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique*. Cépaduès Éditions. Toulouse. 1993.
- [70] L. W. Tu. *An introduction to manifolds*. Springer Science + Business Media. LLC 2011.
- [71] G.C. Walsh, R. Montgomery et S.S. Sastry. *Optimal path planning on matrix Lie group*. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista. FL. Décembre 1994.
- [72] J. Watts. *An introduction to Poisson manifolds*. 24 Avril 2007.
- [73] A. Weinstein. *The local structure of Poisson manifolds*. J. Diff. Geom. Vol. 18. pp. 523-557. 1983.
- [74] A. Weinstein. *The local structure of Poisson manifolds. Errata and addenda*. J. Diff. Geom. Vol. 22. p. 255. 1985.
- [75] E. W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press. Boca Raton, Londres, New-York, Washington D.C.. 1999.
- [76] Wikipedia. *Lie group*. https://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group.
- [77] Wikipedia. *Lie algebra*. https://en.wikipedia.org/wiki/Lie_algebra.
- [78] Wikipedia. *Poisson manifold*. https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_manifold.
- [79] Wikipedia. *Symplectic manifold*. https://en.wikipedia.org/wiki/Symplectic_manifold.
- [80] Wikipedia. *Fréchet derivative*. https://en.wikipedia.org/wiki/Fréchet_derivative.