



**HAL**  
open science

# GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE AU-DESSUS D'UN CORPS NON COMMUTATIF

Cédric Milliet

► **To cite this version:**

Cédric Milliet. GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE AU-DESSUS D'UN CORPS NON COMMUTATIF. 2016. hal-01283071v1

**HAL Id: hal-01283071**

**<https://hal.science/hal-01283071v1>**

Preprint submitted on 4 Mar 2016 (v1), last revised 2 Jun 2020 (v7)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE AU-DESSUS D'UN CORPS NON COMMUTATIF

CÉDRIC MILLIET

RÉSUMÉ. On considère un  $\sigma$ -analogue de la topologie de Zariski sur un corps non commutatif  $K$ . Les fermés de base sont des zéros de polynômes en la conjugaison  $\sigma$  par un élément fixé, à coefficients à droite dans  $K$ . Cela nous permet de développer des notions de géométrie algébrique élémentaire : variété affine, morphisme, comorphisme, dimension de Zariski, théorème de Chevalley constructible et un Nullstellensatz. On applique ces résultats à la théorie des modèles des corps, en considérant un corps  $K$  dont la théorie  $\text{Th}(K)$  n'a pas la propriété d'indépendance. Si  $K$  est de caractéristique  $p$ , il est de dimension finie sur son centre. Si  $K$  est de caractéristique zéro, l'équation  $ax - xb = c$  a une solution dans  $K$  pour tout élément  $a$  transcendant sur le centre de  $K$ .

## TABLE DES MATIÈRES

1. Distorsions linéaires	2
2. $\sigma$ -Espace et algèbre linéaire tordue	6
3. Corps $\sigma$ -algébriquement clos et théorème de Chevalley-Cohn	10
4. Géométrie algébrique élémentaire sur $K^n$	12
5. Topologie tordue de Zariski sur $K^n$	15
6. Dimension de Zariski	16
7. Sous-groupe fermés de $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$	19
8. Retour sur Terre	21
Références	27

L'histoire des corps non commutatifs commence en 1843 avec la découverte du corps des quaternions (voir [Ham50]). Le premier exemple de corps de dimension infinie sur son centre est donné en 1903 : le corps des séries de Laurent  $F((x, \sigma))$  à coefficients dans  $F = \mathbf{R}(t)$ , muni de la multiplication « tordue » par la règle  $ax = x\sigma(a)$ , où  $\sigma$  est l'automorphisme  $t \mapsto 2t$  (voir [Hil03]).

En géométrie algébrique classique, on étudie les solutions d'un système  $S$  d'équations polynomiales en  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  à coefficients dans un corps commutatif  $k$ . On recherche les solutions de  $S$  dans  $k^n$ , ou plus souvent dans  $\mathbf{k}^n$ , pour une clôture algébrique  $\mathbf{k}$ . Si

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C45, 03C60.

*Key words and phrases.* Corps non commutatifs, géométrie algébrique, théorie des modèles, propriété d'indépendance.

l'on autorise le corps  $k$  à être non commutatif, des problèmes élémentaires surgissent, à commencer par savoir ce que l'on entend par *polynôme en  $n$  variables*. Le nombre de racines d'un polynôme de degré  $d$  en une variable  $k_d + k_{d-1}x + \dots + k_0x^d$  à coefficients à gauche dans  $k$  est soit inférieur ou égal à  $d$  soit infini (voir [Her56]). Ses racines se répartissent en  $d$  classes de conjugaison, au plus (voir [GM65]). Le corps  $k$  est *algébriquement clos (à droite)* si chaque polynôme en une variable, non constant et à coefficients à gauche, a une racine dans  $k$ . Les corps algébriquement clos non commutatifs de dimension finie sur leur centre sont les corps de quaternions dont le centre est un corps réel clos (voir [Niv41] et [NE44]). Chaque corps se plonge dans un corps algébriquement clos de même centre (voir [Coh95, Theorem 8.5.1]). Si l'on veut considérer des polynômes en deux variables et évaluer chaque variable, il faut bien s'autoriser à considérer des monômes en une variable de la forme  $axb$ . Dans ce cas, l'équation linéaire la plus simple  $ax - xb = c$  peut n'avoir de solutions dans aucune extension de  $k$  (voir [Coh95, Theorem 8.1.3]). On peut considérer un polynôme formel comme étant une somme finie de produits finis de constantes et de variables ne commutant qu'avec les éléments du centre. On peut définir que  $k$  est *existentiellement clos* s'il possède toujours une solution à un système d'équations à coefficients dans  $k$  dont il possède une solution dans une quelconque de ses extensions, et montrer que tout corps se plonge dans une clôture existentielle de même centre et de même cardinal s'il est infini (voir [Coh95, Theorem 6.5.3]). Cette notion de polynôme ne semble pourtant pas propice à définir une notion d'indépendance algébrique satisfaisant l'axiome de transitivité (voir [Coh95, p. 406]). Pas de dimension donc.

Motivé par une question de théorie des modèles, nous proposons une approche différente réduisant autant que faire se peut le rôle de la multiplication.

## 1. DISTORSIONS LINÉAIRES

1.1. **L'algèbre des distorsions linéaires**  $K_\sigma^1[x]$ . Soit  $K$  un corps (commutatif ou non) de centre  $k$ , et soit  $\sigma$  un symbole que l'on conçoit comme un morphisme additif. On considère l'ensemble  $K_\sigma^1[x]$  des polynômes *formels* en  $\sigma$  à coefficients à droite dans  $K$ , sans terme constant, qu'on appelle espace des *distorsions linéaires* de  $K$ .

$$K_\sigma^1[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n x^{\sigma^i} k_i : (k_0, \dots, k_n) \in K^{n+1}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

L'ensemble  $K_\sigma^1[x]$  est un  $K$ -espace vectoriel à droite de dimension infinie engendré par  $x, x^\sigma, x^{\sigma^2}, \dots, x^{\sigma^n}, \dots$ . Le  $\sigma$ -degré d'une distorsion  $\delta$  est la plus grande puissance de  $\sigma$  apparaissant avec un coefficient non nul dans l'écriture de  $\delta$ . On le note  $\deg_\sigma \delta$ , et on convient que le  $\sigma$ -degré de la distorsion nulle est égal à  $-\infty$ . Par définition, une distorsion est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Si  $\sigma$  est aussi un morphisme additif de  $K$  dans  $K$ , La somme

$$\sum_{i=1}^n x^{\sigma^i} k_i + \sum_{j=1}^n x^{\sigma^j} h_j = \sum_{i=1}^n x^{\sigma^i} (k_i + h_i)$$

et la composée

$$\left( \sum_{i=1}^n x^{\sigma^i} k_i \right) \left( \sum_{j=1}^n x^{\sigma^j} h_j \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x^{\sigma^{i+j}} \sigma^i(h_j) k_i \right)$$

munissent  $K_\sigma^1[x]$  d'une structure d'anneau associatif, unitaire de centre  $k_\sigma^1[x]$ . Il est intègre si  $\sigma$  est **injectif**, ce que l'on supposera désormais. Les seuls éléments inversibles de  $K_\sigma^1[x]$  sont les homothéties. Si  $\delta$  et  $\gamma$  sont deux distorsions linéaires, on a également

$$\deg_\sigma(\delta\gamma) = \deg_\sigma \delta + \deg_\sigma \gamma, \text{ et}$$

$$\deg_\sigma(\delta + \gamma) \leq \max(\deg_\sigma \delta, \deg_\sigma \gamma).$$

**Lemme 1.1** (Division euclidienne à droite dans  $K_\sigma^1[x]$ ). *Pour tout  $\delta$  et  $\gamma \neq 0$  dans  $K_\sigma^1[x]$ , il existe un unique couple  $q$  et  $r$  dans  $K_\sigma^1[x]$  tel que*

$$\delta = q(\gamma) + r \quad \text{et} \quad \deg_\sigma r < \deg_\sigma \gamma.$$

*Démonstration.* Par récurrence sur  $\deg_\sigma \delta$ . Si  $\deg_\sigma \delta = -\infty$ , on pose  $q = 0$  et  $r = 0$ . Si  $\deg_\sigma \delta = n + 1$  et  $\deg_\sigma \gamma = d$ , soient  $x^{\sigma^{n+1}} k_{n+1}$  et  $x^{\sigma^d} k_d$  les termes dominants de  $\delta$  et  $\gamma$ . Si  $d > n + 1$ , on pose  $q = 0$  et  $r = \delta$ . Si  $d \leq n + 1$ . On a

$$\deg_\sigma \left( \delta - (\gamma k_d^{-1})^{\sigma^{n+1-d}} k_{n+1} \right) < n + 1.$$

En posant  $q_1(x) = (x k_d^{-1})^{\sigma^{n+1-d}} k_{n+1}$ , on applique l'hypothèse de récurrence à  $\delta - q_1(\gamma)$  : il existe  $q_2$  et  $r$  tels que  $\deg_\sigma r < d$  et

$$\delta - q_1(\gamma) = q_2(\gamma) + r.$$

On pose alors  $q = q_1 + q_2$ . □

**Corollaire 1.2.**  $K_\sigma^1[x]$  est un anneau principal à gauche.

*Démonstration.* Soit  $I$  un idéal à gauche de  $K_\sigma^1[x]$  qui soit non nul, et soit  $\gamma$  une distorsion non nulle de degré minimal appartenant à  $I$ . Si  $\delta \in I$ , on a  $\delta = q(\gamma) + r$  avec  $\deg_\sigma r < \deg_\sigma \gamma$ . Mais  $q(\gamma) \in I$ , donc  $r = 0$  et  $I = \langle \gamma \rangle$ . □

**Corollaire 1.3.**  $K_\sigma^1[x]$  est un anneau noethérien à gauche.

Puisque le degré d'un produit est la somme des degrés, les notions d'irréductibilité à gauche et à droite coïncident : un élément  $\delta$  de  $K_\sigma^1[x]$  est *irréductible* si ses seuls diviseurs sont *triviaux*, c'est-à-dire de la forme  $\pi\delta$  ou  $\pi$  pour un élément inversible de  $K_\sigma^1[x]$ .

**Corollaire 1.4.**  $K_\sigma^1[x]$  est un anneau factoriel.

**Corollaire 1.5** (Identité de Bézout). *Soient  $\delta$  et  $\gamma$  deux distorsions et  $\alpha$  leur plus grand facteur commun à droite. Il existe deux distorsions  $u$  et  $v$  telles que*

$$u\gamma + v\delta = \alpha.$$

*Démonstration.* L'idéal à gauche  $K_\sigma^1[x]\gamma + K_\sigma^1[x]\delta$  est principal, égal à  $K_\sigma^1[x]\pi$  pour une distorsion  $\pi$  qui divise  $\gamma$  et  $\delta$  à droite, donc  $K_\sigma^1[x]\pi = K_\sigma^1[x]\alpha$ . □

## 1.2. Racines d'une distorsion dans $K$ , factorisation.

**Lemme 1.6** (Factorisation à l'aide d'une racine non nulle). *Soit  $\delta$  une distorsion de  $\sigma$ -degré  $n+1$ . Si  $a$  est une racine non nulle de  $\delta$  dans  $K$ , il existe une distorsion  $\gamma$  de  $\sigma$ -degré  $n$  telle que*

$$\delta = \gamma(x^\sigma - xa^{-1}a^\sigma).$$

*Démonstration.* On divise  $\delta$  par  $x^\sigma - xa^{-1}a^\sigma$  : il existe  $q \in K_\sigma^1[x]$  et  $r \in K$  tels que

$$\delta = \gamma(x^\sigma - xa^{-1}a^\sigma) + xr.$$

Puisque  $\delta$  et  $x^\sigma - xa^{-1}a^\sigma$  s'annulent en  $a$ , on en déduit que  $r$  est nul. □

Le lemme précédent est inutile pour factoriser une distorsion qui ne s'annule qu'en zéro. Lorsque  $\sigma$  est la conjugaison par  $a$ , on donne une condition suffisante (et nécessaire lorsque  $a$  est transcendant sur  $k$ ) pour factoriser une distorsion de degré  $n$ .

**Lemme 1.7.** *Soit  $\sigma$  la conjugaison par  $a$ . Toute distorsion de degré  $n$  se factorise en produit de distorsions de degré un dès que tout polynôme  $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$  de degré  $n$  à coefficients dans  $K$  a une racine à droite dans  $K$ .*

*Démonstration.* Soit  $a^2x - ax\alpha + x\beta$  une distorsion de degré 2. Pour tout  $b$  et  $c$  dans  $K$ , on a

$$(ax - xc)(ax - xb) = a^2x - ax(b + c) + xbc.$$

On choisit pour  $c$  une solution de l'équation  $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ , et l'on pose  $b = \alpha - c$ , de sorte que l'on a

$$b + c = \alpha \quad \text{et} \quad bc = \alpha c - c^2 = \beta.$$

Soit  $a^3x - a^2x\alpha + ax\beta - x\gamma$  une distorsion de degré 3. Pour tout  $b$ ,  $c$  et  $d$  dans  $K$ , on a

$$(ax - xd)(ax - xc)(ax - xb) = a^3x - a^2x(b + c + d) + ax(bc + bd + cd) - xbcd.$$

On choisit pour  $d$  une solution de l'équation  $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ , pour  $c$  une solution de l'équation  $x^2 - (\alpha - d)x + \beta + \alpha d - d^2 = 0$  et on pose  $b = \alpha - c - d$ , de sorte que l'on a

$$0 = (c^2 - (\alpha - d)c + \beta + \alpha d - d^2) \times d = c^2d - (\alpha - d)cd + \gamma = \gamma - bcd, \text{ et}$$

$$bc + bd + cd = (b + c)d + bc = (\alpha - d)d + bc = \alpha d - d^2 + \gamma d^{-1} = \beta.$$

Le cas des degrés supérieurs est similaire. □

**Lemme 1.8** (Structure de l'ensemble des racines). *Soit  $\delta$  une distorsion de degré  $n$ .*

- (1) *Si  $\sigma$  est un morphisme de corps, l'ensemble des racines de  $\delta$  dans  $K$  est un  $\text{Fix}(\sigma)$ -espace vectoriel à gauche de dimension au plus  $n$ .*
- (2) *Si  $K$  est commutatif et si  $\sigma$  est une dérivation, l'ensemble des racines de  $\delta$  dans  $K$  est un espace vectoriel de dimension au plus  $n$  sur le corps des constantes.*

*Démonstration.* Si  $n = 1$ , et si  $\delta$  est unitaire,  $\delta(x) = x^\sigma + xk_0$ . D'après le lemme précédent, si  $a$  et  $b$  sont deux solutions non nulles de  $\delta_K(x) = 0$ , on a nécessairement

$$(1) \quad a^{-1}a^\sigma = b^{-1}b^\sigma.$$

Si  $\sigma$  est un morphisme de corps, ceci se traduit par  $ab^{-1} \in \text{Fix}(\sigma)$ . On conclut immédiatement sachant que  $\gamma$  étant  $\text{Fix}(\sigma)$ -linéaire à gauche, si  $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ , la dimension du noyau de  $\gamma$  ne peut excéder la somme des dimensions des noyaux de ses facteurs. Si  $\delta$  est une dérivation dans un corps commutatif, (1) se traduit par  $a^\sigma b - b^\sigma a = 0$ , c'est-à-dire par  $(ab^{-1})^\sigma = 0$ .  $\square$

*Exemples 1.9.* (1) Si  $L$  est un corps commutatif, en prenant  $K = L(x)$  et pour  $\sigma$  la multiplication par  $x$ , on obtient pour  $K_\sigma^1[x]$  un anneau isomorphe à  $(L[x], +, \times)$ . On retrouve donc que  $K[X]$  est euclidien, principal, etc. Le fixateur de  $\sigma$  est aussi petit que possible, réduit à zéro, mais  $\sigma$  n'est ni un morphisme de corps, ni une dérivation.

(2) Si  $K$  est commutatif de caractéristique  $p > 0$  et si  $\sigma$  est l'application de Frobenius,  $x \mapsto x^p$ , alors on retrouve qu'un polynôme en  $x^p$  de degré  $p^n$  n'a pas plus de  $p^n$  racines.

(3) Si  $K$  est le corps des fonctions  $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , et si  $\sigma$  est l'opérateur de dérivation, on retrouve que l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$  est de dimension au plus  $n$  sur  $\mathbf{R}$ .

(4) Si  $K$  est un corps non commutatif, et  $\sigma$  la conjugaison par un élément hors du centre, on obtient que les racines dans  $K$  d'une distorsion de degré  $n$  forment un  $C(a)$ -espace vectoriel à gauche de dimension au plus  $n$ .

**1.3. L'algèbre des distorsions  $n$ -linéaires  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ .** On définit le  $K$ -espace vectoriel à droite  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  des distorsions  $n$ -linéaires de  $K^n$  en posant

$$K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] = K_\sigma^1[x_1] \oplus \dots \oplus K_\sigma^1[x_n].$$

On le munit d'une structure d'anneau associatif non-commutatif en posant

$$\left( \sum_{i=1}^n \gamma_i(x_i) \right) \left( \sum_{j=1}^n \delta_j(x_j) \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \gamma_i \delta_j(x_j) \right).$$

Cet anneau est dépourvu d'unité si  $n > 1$ . Les éléments  $x_1, \dots, x_n$  sont des unités à gauche, mais pas à droite. On voit aisément qu'il ne possède pas de diviseurs de zéros. Son centre est réduit à  $\{0\}$ .

Pour chaque  $(i_1, \dots, i_{n-1})$  dans  $\{1, \dots, n\}$  l'application identité

$$K_\sigma^1[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}] \rightarrow K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n], \quad \delta_1 + \dots + \delta_{n-1} \mapsto \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}$$

respecte la multiplication, et définit un morphisme de  $K$ -algèbre injectif, de sorte que l'on peut identifier  $K_\sigma^1[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}]$  à une sous-algèbre de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ .

**Théorème 1.10** (de Hilbert, version faible).  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  est un anneau noethérien à gauche.

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Si  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  n'est pas noethérien à gauche, il existe un idéal à gauche  $I \subset K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  qui n'est pas finiment engendré. On construit par induction une suite  $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots)$  d'éléments de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  en posant  $I_\ell = \langle \delta_0, \dots, \delta_\ell \rangle$ , de telle sorte que pour tout entier  $\ell$ , l'élément  $\delta_{\ell+1}$  soit de  $\sigma$ -degré minimal en  $x_n$  vérifiant

$$\delta_{\ell+1} \in I \setminus I_\ell.$$

Posons

$$d_\ell = \deg_{\sigma, x_n} \delta_\ell.$$

La chaîne des degrés  $d_0, d_1, d_2 \dots$  est croissante. Puisque  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_{n-1}]$  est un sous-anneau noethérien à gauche par hypothèse de récurrence,  $d_\ell$  est positif à partir d'un certain rang  $N$ . Les termes de plus haut degré en  $x_n$  de  $\delta_{N+1}$  et  $\delta_N$  sont de la forme  $x_n^{\sigma^{d_{N+1}}} k_{N+1}$  et  $x_n^{\sigma^{d_N}} k_N$ . On pose

$$g = (\delta_N k_N^{-1})^{\sigma^{d_{N+1}-d_N}} k_{N+1} \in I_N,$$

de sorte que  $\deg_{\sigma, x_n}(\delta_{N+1} - g) < d_{N+1}$ . Mais  $\delta_{N+1} - g \in I \setminus I_N$ , contredisant le caractère minimal de  $d_{N+1}$ .  $\square$

**1.4. L'algèbre des distorsions de degré  $n$ ,  $K_{\sigma_i}^n[x]$ .** Étant donnés  $n$  symboles distincts  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  qui **commutent deux-à-deux**, on définit le  $K$ -espace vectoriel à droite  $K_{\sigma_i}^n[x]$  des distorsions de degré  $n$  de  $K^n$  en posant

$$K_{\sigma_i}^n[x] = K_{\sigma_1}^1[x] \oplus \dots \oplus K_{\sigma_n}^1[x].$$

On le munit d'une structure d'anneau associatif non-commutatif en posant

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \sum_{j=1}^n \delta_j(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i(\delta_j(x)).$$

**Théorème 1.11** (de Hilbert, version forte).  $K_{\sigma_i}^n[x]$  est un anneau noethérien à gauche.

## 2. $\sigma$ -ESPACE ET ALGÈBRE LINÉAIRE TORDUE

**Définition 2.1** ( $\sigma$ -Espace). Soient  $K$  un corps (commutatif ou non) et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel à droite muni d'un morphisme additif  $\sigma : E \rightarrow E$  injectif de  $E$ . On appelle  $E$  un  $\sigma$ -espace si l'application évaluation suivante, qui est un morphisme de  $K$ -algèbres, est injective.

$$K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] \rightarrow E^{E^n}, \delta \mapsto \delta_E.$$

À une distorsion linéaire  $\delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_j^{\sigma^i} k_{i,j}$  on associe la *fonction polynomiale* en  $\sigma$

$$\delta_E : E^n \rightarrow E, (a_1, \dots, a_n) \mapsto \delta_E(a_1, \dots, a_n),$$

définie par

$$\delta_E(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma^i(a_j) k_{i,j}$$

Si  $E$  est un  $\sigma$ -espace, on peut confondre distorsion linéaire et fonction polynomiale associée.

### 2.1. Exemples.

2.1.1. *Algèbre linéaire.* Supposons  $E = K$ , un corps commutatif, et  $\sigma$  est l'application nulle.

**Lemme 2.2.** *Le noyau de l'opérateur  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K^{K^n}$ ,  $\delta \mapsto \delta_K$ , est l'idéal bilatère*

$$\mathfrak{J} = \langle x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma \rangle,$$

*et  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{J}$  est isomorphe à l'anneau  $\mathcal{L}(K^n, K)$  des formes linéaires sur  $K^n$ .*

2.1.2. *Algèbre élémentaire sur les polynômes.* Supposons  $E = K[x]$  l'anneau commutatif des polynômes en  $x$  à coefficient dans le corps  $K$  commutatif, et  $\sigma$  le morphisme  $\sigma : K[x] \rightarrow K[x]$ ,  $P \mapsto xP$ .

**Lemme 2.3.** *l'opérateur  $K_\sigma^1[x] \rightarrow K[x]^{K[x]}$ ,  $\delta \mapsto \delta_K$ , est injectif, et  $K_\sigma^1[x]$  (muni de la composition) est isomorphe à l'anneau des polynômes  $K[x]$  (muni de la multiplication).*

Un isomorphisme d'anneau conservant toutes les propriétés étudiées précédemment, on retrouve bien sûr que l'anneau  $K[x]$  est euclidien, principal, factoriel etc. De la même manière, si l'on considère  $E = K[x_1, \dots, x_n]$ , et  $\sigma_i : E \rightarrow E$ ,  $P \mapsto x_i P$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  (qui commutent deux-à-deux), l'opérateur  $K_\sigma^1[x] \rightarrow E^E$ ,  $\delta \mapsto \delta_K$  définit un isomorphisme d'anneau sur l'anneau des polynômes  $K[x_1, \dots, x_n]$  à  $n$  indéterminées (muni de la multiplication). La version forte du théorème de Hilbert présentée précédemment s'applique donc en particulier à cet exemple.

2.1.3. *Algèbre non commutative.* Soit  $K$  un corps non-commutatif de centre  $k$ , et  $a$  un élément hors du centre. On pose  $\sigma$  égal à la conjugaison par  $a$  et  $E = K$ . À chaque distorsion  $\delta(x_1, \dots, x_n) \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ , on associe la fonction polynomiale en  $n$ -variables  $\delta_K : K^n \rightarrow K$ ,  $(k_1, \dots, k_n) \mapsto \delta(k_1, \dots, k_n)$ .

**Théorème 2.4** (d'Amitsur). *L'opérateur  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K^{K^n}$ ,  $\delta \mapsto \delta_K$  est injectif si  $[K : k]$  est infini et si  $a \notin k$ .*

*Démonstration.* Si  $\delta_K$  est la fonction nulle, et si un des coefficients de  $\delta$  est non nul, alors  $K$  satisfait une identité polynomiale « tordue » non triviale, contredisant le résultat d'Amitsur (voir [Ami65]).  $\square$

2.2. **Algèbre linéaire tordue, indépendance algébrique.** Étant donné un  $\sigma$ -espace  $E$ , un  $\sigma$ -sous-espace de  $E$  est un sous espace vectoriel stable par  $\sigma$ . Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on note  $\langle A \rangle_\sigma$  l'intersection de tous les  $\sigma$ -sous-espaces contenant  $A$ . Une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est  $\sigma$ -liée s'il existe une distorsion non nulle  $\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  telle que

$$\delta(e_1, \dots, e_n) = 0.$$

Dans le cas contraire, elle est  $\sigma$ -libre. Elle est  $\sigma$ -génératrice si pour tout élément  $f$  de  $E$ , il existe  $\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  telle que

$$f = \delta(e_1, \dots, e_n).$$

C'est une  $\sigma$ -base si elle est  $\sigma$ -libre et maximale ayant cette propriété. Grâce au lemme de Zorn, on peut énoncer :

**Lemme 2.5** (de Zorn,  $\sigma$ -base incomplète). *Soit  $E$  un  $\sigma$ -espace non nul,  $G$  une partie  $\sigma$ -génératrice et  $L \subset G$  une partie  $\sigma$ -libre. Il existe une  $\sigma$ -base  $B$  de  $E$  telle que  $L \subset B \subset G$ .*

Si  $B$  est une  $\sigma$ -base de  $E$ , alors, pour tout élément  $e$  de  $E \setminus B$ , la famille  $B \cup \{e\}$  est  $\sigma$ -liée : il existe  $b_1, \dots, b_n$  dans  $B$ , un élément  $\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  et  $h \in K_\sigma^1[x]$  non nul tels que

$$h(e) = \delta(b_1, \dots, b_n).$$

L'ensemble des  $h \in K_\sigma^1[x]$  tels que  $h(e) \in \langle B \rangle_\sigma$  est un idéal à gauche non nul de  $K_\sigma^1[x]$  engendré par une unique distorsion unitaire  $\delta_e$  de degré  $d$  que l'on appelle la *distorsion minimale de  $e$* . On dit que  $e$  est  $\sigma$ -algébrique de degré  $d$  sur  $B$ .

**Lemme 2.6** (Transitivité du caractère  $\sigma$ -algébrique). *Soient trois parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $E$ . Si  $A$  est  $\sigma$ -algébrique sur  $B$  et si  $B$  est  $\sigma$ -algébrique sur  $C$ , alors  $A$  est  $\sigma$ -algébrique sur  $C$ .*

*Démonstration.* Soit  $a$  dans  $A$ . Il existe des éléments non nuls  $h, \gamma_i$  dans  $K_\sigma^1[x]$  et deux familles  $\delta_i, \beta_i$  de  $K_\sigma^1[x]$ , des éléments  $b_1, \dots, b_n$  dans  $B$  et  $c_1, \dots, c_m$  de  $C$  tels que

$$h(a) = \delta_1(b_1) + \dots + \delta_n(b_n) \quad \text{et} \quad \gamma_i(b_i) = \beta_i(c_1, \dots, c_m),$$

En particulier, il y a une expression de la forme

$$g(a) = \beta(\bar{c}) + \sum_{i \in I} \pi_i(b_i),$$

avec  $g$  non nul, et on en choisit une de telle sorte que l'ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$  soit de cardinal minimal possible. Montrons que  $I$  est nécessairement vide. S'il contient 1 disons, alors  $\pi_1$  est non nul. On appelle  $\alpha$  le plus grand diviseur commun à droite de  $\pi_1$  et  $\gamma_1$ , et il existe  $u$  et  $v$  telles que  $u\pi_1 + v\gamma_1 = \alpha$ . En posant  $\gamma_1 = \gamma'_1\alpha$ , on a alors

$$\begin{aligned} \gamma'_1 u g(a) &= \gamma'_1 u \beta(\bar{c}) + \gamma'_1 u \left( \sum_{i \in I} \pi_i(b_i) \right) \\ &= \gamma'_1 u \beta(\bar{c}) + \gamma'_1 \left( \alpha(b_1) - v\gamma_1(b_1) + \sum_{i \in I \setminus \{1\}} u\pi_i(b_i) \right) \\ &= \gamma_1 u \beta(\bar{c}) + \beta_1(\bar{c}) - \gamma'_1 v \beta_1(\bar{c}) + \sum_{i \in I \setminus \{1\}} \gamma'_1 u \pi_i(b_i) \end{aligned}$$

avec  $\gamma'_1 u g$  non nul puisque  $\gamma'_1, u$  et  $g$  sont non nuls, une contradiction avec le caractère minimal de  $I$ .  $\square$

**Corollaire 2.7.** *Pour toute partie  $A \subset E$ , l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont  $\sigma$ -algébriques sur  $A$  est un  $\sigma$ -sous espace de  $E$ .*

*Démonstration.* Soient  $a$  et  $b$  deux éléments  $\sigma$ -algébriques sur  $A$ . Alors, pour tout élément  $k$  du corps  $K$ ,  $a + b, ak$  et  $a^\sigma$  sont  $\sigma$ -algébriques sur  $\{a, b\}$ , lesquels sont algébriques sur  $A$ , donc  $a + b, ak$  et  $a^\sigma$  sont algébriques sur  $A$ .  $\square$

### 2.3. $\sigma$ -Dimension.

**Théorème 2.8** ( $\sigma$ -Dimension). *Soit  $E$  un  $\sigma$ -espace. Toutes les  $\sigma$ -bases de  $E$  ont même cardinal, que l'on appelle  $\sigma$ -dimension de  $E$ .*

*Démonstration.* On traite le cas particulier où  $E$  possède une  $\sigma$ -base finie  $(b_1, \dots, b_n)$ . Soit  $(c_1, \dots, c_m)$  une famille  $\sigma$ -libre de  $E$ . Par maximalité de la famille  $B = (b_1, \dots, b_n)$ , on peut écrire  $\gamma(c_1) = \delta(\bar{b})$  pour une certaine distorsion  $\gamma$  non nulle. En particulier,  $\delta$  est non nulle, donc  $x_1$  par exemple y apparaît. Dans ce cas,  $b_1$  est algébrique sur  $(c_1, b_2, \dots, b_n)$ , mais puisque  $E$  est algébrique sur  $B$ , d'après le lemme précédent,  $E$  est algébrique sur  $(c_1, b_2, \dots, b_n)$ , donc  $(c_1, b_2, \dots, b_n)$  est bien une  $\sigma$ -base. On conclut de la même façon que  $(c_1, c_2, b_3, \dots, b_n)$  est

une  $\sigma$ -base, et de proche en proche, on peut rajouter tous les  $c_i$ . Si  $m < n$ , on arrive à la conclusion que  $c_m$  est algébrique sur ses prédécesseurs, une contradiction, d'où  $m \leq n$ . On conclut par symétrie que  $n = m$ .  $\square$

On note  $\dim_\sigma E$  la  $\sigma$ -dimension d'un  $\sigma$ -espace  $E$ . Le corps  $K$  est de  $\sigma$ -dimension nulle :  $x^\sigma - xk_0^{-1}k_0^\sigma$  annule  $k_0$ . L'algèbre  $K_\sigma^1[x]$  est engendrée par  $x$ , d'où  $\dim_\sigma K_\sigma^1[x] = 1$ . De même,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  forment une  $\sigma$ -base de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  d'où  $\dim_\sigma K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] = n$ .

**Lemme 2.9.** *Soient  $E$  et  $F$  deux  $\sigma$ -espaces, alors  $\dim_\sigma E \oplus F = \dim_\sigma E + \dim_\sigma F$ .*

Si  $F \subset E$  est un  $\sigma$ -sous-espace, l'ensemble quotient  $E/F$  est naturellement muni d'une structure de  $\sigma$ -espace.

**Lemme 2.10.** *Soit  $E$  un  $\sigma$ -espace et  $F \subset E$  un  $\sigma$ -sous-espace. Alors*

$$\dim_\sigma E/F = \dim_\sigma E - \dim_\sigma F.$$

*Démonstration.* Soit  $(b_1 + F, \dots, b_n + F)$  une  $\sigma$ -base de  $E/F$  et  $(c_1, \dots, c_m)$  une  $\sigma$ -base de  $F$ . Montrons que  $A = (b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m)$  est une  $\sigma$ -base de  $E$ . S'il existe une distorsion  $\pi(\bar{x}, \bar{y})$  qui annule  $A$ , alors il existe deux distorsions  $\delta(\bar{x})$  et  $\gamma(\bar{y})$  telles que  $\pi(\bar{x}, \bar{y}) = \delta(\bar{x}) - \gamma(\bar{y})$  et

$$\delta(b_1, \dots, b_n) = \gamma(c_1, \dots, c_m) \in F.$$

En particulier, on a

$$\delta(b_1 + F, \dots, b_n + F) = 0,$$

donc  $\delta = 0$ , et  $\gamma(c_1, \dots, c_m) = 0$ , d'où  $\gamma = 0$ , et  $\pi = 0$ . La famille  $A$  est donc  $\sigma$ -libre. Si  $x \in E \setminus A$ , alors par maximalité de  $(b_1, \dots, b_n)$ , il existe une distorsion  $\delta$  non nulle, et une autres  $h$  telle que

$$\delta(x) - h(\bar{b}) \in F.$$

Mais par maximalité de  $(c_1, \dots, c_m)$ , l'élément  $\delta(x) - h(\bar{b})$  est algébrique sur  $(c_1, \dots, c_m)$  : il existe une distorsion non nulle  $\gamma$  telle que

$$\gamma(\delta(x) - h(\bar{b})) \in \langle c_1, \dots, c_m \rangle_\sigma.$$

Puisque  $\gamma\delta$  est non nul,  $x$  est algébrique sur  $A$ .  $\square$

**2.4. Morphismes de  $\sigma$ -espaces.** Soient deux  $\sigma$ -espaces  $E$  et  $F$ . Une application  $\alpha : E \rightarrow F$  est un *morphisme de  $\sigma$ -espaces* si  $\alpha \circ \delta_E = \delta_F \circ \alpha$  pour tout  $\delta$  dans  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ .

**Lemme 2.11.** *Soit  $\alpha : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\sigma$ -espaces.*

- (1) *Si  $\alpha$  est injectif, alors  $\dim_\sigma E \leq \dim_\sigma F$ .*
- (2) *Si  $\alpha$  est surjectif, alors  $\dim_\sigma F \leq \dim_\sigma E$ .*
- (3) *Si  $\dim_\sigma E$  est fini, on a  $\dim_\sigma \text{Ker}\alpha + \dim_\sigma \text{Im}\alpha = \dim_\sigma E$ .*

*Démonstration.* (1) Si  $e_1, \dots, e_n$  est  $\sigma$ -libre dans  $E$ , et s'il existe une distorsion  $\delta$  telle que  $\delta_F(\alpha e_1, \dots, \alpha e_n) = 0$ , alors

$$\delta_F(\alpha(e_1, \dots, e_n)) = \delta_F \circ \alpha(e_1, \dots, e_n) = \alpha \circ \delta_E(e_1, \dots, e_n) = 0,$$

donc  $\delta_E(e_1, \dots, e_n) = 0$ , ce qui implique  $\delta = 0$ , et  $(\alpha e_1, \dots, \alpha e_n)$  est  $\sigma$ -libre.

(2) Si  $f_1, \dots, f_n$  est  $\sigma$ -libre dans  $F$ , et si  $(e_1, \dots, e_n)$  en sont des antécédents dans  $E$ , on montre que  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\sigma$ -libre.

(3) L'application induite  $E/\text{Ker}\alpha \rightarrow \text{Im}\alpha$  définit un morphisme de  $\sigma$ -espaces bijectif. On conclut avec (1), (2) et le lemme 2.10.  $\square$

### 3. CORPS $\sigma$ -ALGÈBRIQUEMENT CLOS ET THÉORÈME DE CHEVALLEY-COHN

**Lemme 3.1.** *L'extension de corps commutatifs  $k(a)/k$  est algébrique de degré  $n$  si et seulement si  $[K : C(a)] = n$ .*

*Démonstration.* Si  $a$  satisfait  $a^n + \dots + ak_1 + k_0 = 0$ , alors  $C(a^n + \dots + ak_1) = K$ , mais appartenir à  $C(a^n + \dots + ak_1)$  est équivalent à être racine d'une certaine distorsion de degré  $n$ , donc  $[K : C(a)] \leq n$ . Réciproquement, si  $[K : C(a)] \leq n$ , alors  $[k(a) : k] = [K : C(a)] \leq n$  d'après un résultat de Brauer (voir [Coh95, Corollary 3.3.9]).  $\square$

Géométriquement, la situation où  $k(a)/k$  est algébrique présente donc peu d'intérêt puisque les ensembles de dimension 0 et 1 sont par trop similaires. Nous supposons donc  $a$  transcendant sur le centre  $k$ .

**Définition 3.2** (corps  $\sigma$ -algébriquement clos).  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos si pour tout  $(c, k_0, \dots, k_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ , l'équation  $c = x^{\sigma^n} k_n + \dots + x k_0$  a une solution dans  $\mathbf{K}$ ,

Pour qu'un corps  $\mathbf{K}$  soit  $\sigma$ -algébriquement clos, il suffit que tout pour tout  $c, b$  dans  $\mathbf{K}^2$ , l'équation  $c = ax - xb$ , ait une solution dans  $\mathbf{K}$ , et que toute distorsion se factorise en produit de distorsions de degré 1.

**Théorème 3.3.** *Tout corps  $K$  de centre  $k$  se plonge dans un corps  $\sigma$ -algébriquement clos  $\mathbf{K}$  de centre  $k$ .*

*Démonstration.* On suppose  $a$  transcendant sur  $k$ . D'après [Coh95, Corollary 8.3.7], il existe une extension  $\mathbf{K}/K$  de centre  $k$  telle que toute matrice carrée à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ait des valeurs propres à gauche et à droite (voir aussi et [Coh73b]). D'après [Coh73a, Theorem 2], cela suffit pour que pour chaque  $b, c$  dans  $\mathbf{K}$ , l'équation  $ax - xb = c$  ait une solution dans  $\mathbf{K}$ . D'après [Coh95, Theorem 8.5.1], cela suffit également pour que tout polynôme à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ait une racine à droite dans  $\mathbf{K}$ . On conclut avec le lemme 1.7. On aurait aussi pu plonger  $K$  dans une extension existentiellement close (voir [Coh95] et [HW75]).  $\square$

Étant fixé un langage du premier ordre, et une théorie  $T$  dans ce langage, on dit que  $T$  élimine les quantificateurs si toute formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  de  $L$  est logiquement équivalente modulo  $T$  à une formule  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  sans quantificateurs, i.e. si pour tout modèle  $M$  de  $T$ , et tout uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  extrait de  $M$ , on a

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) \models T \iff \psi(a_1, \dots, a_n) \models T$$

**Théorème 3.4** (de Tarski, élimination des quantificateurs). *Si  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos, la théorie de  $\mathbf{K}$ , exprimée dans le langage  $(+, \{\alpha_k\}_{k \in \mathbf{K}}, \sigma, 0)$  où chaque  $\alpha_k$  est un prédicat de fonction unaire interprété par la multiplication à droite par  $k$ , est complète et élimine les quantificateurs.*

*Démonstration.* Soit  $T$  la théorie de  $\mathbf{K}$  dans ce langage, et  $A$  et  $B$  deux modèles suffisamment saturés de  $T$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $A$ , et  $b_1, \dots, b_n$  des éléments de  $B$  tels qu'il existe un isomorphisme local  $\pi$  entre  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$ , c'est-à-dire que  $\pi$  est une bijection entre  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  telle que pour toute formule sans quanteur  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en  $n$ -variables,  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  soit satisfaite dans  $A$  si et seulement si  $\varphi(b_1, \dots, b_n)$  est satisfaite dans  $B$ . Soit  $a_{n+1}$  un élément de  $A$ . Montrons que l'on peut prolonger  $\pi$  en un isomorphisme local de domaine de définition  $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ . C'est suffisant d'après [Poi85, Fraïssé, théorème 2.02]. On ne perd rien à remplacer  $a_1, \dots, a_n$  par une  $\sigma$ -base de  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_\sigma$  et l'on suppose que la famille  $a_1, \dots, a_n$  est  $\sigma$ -libre. Par conséquent, la famille  $b_1, \dots, b_n$  est aussi  $\sigma$ -libre.

Si  $a_{n+1}$  est  $\sigma$ -transcendant sur  $(a_1, \dots, a_n)$ , on choisit pour  $b_{n+1}$  un élément transcendant sur  $(b_1, \dots, b_n)$ , ce qui est possible par hypothèse de saturation.

Si  $a_{n+1}$  est  $\sigma$ -algébrique sur  $(a_1, \dots, a_n)$ , alors il existe une unique distorsion minimale unitaire et une autre distorsion  $\gamma$ , telle que

$$\delta(a_{n+1}) = \gamma(a_1, \dots, a_n).$$

$\gamma$  est unique puisque  $(a_1, \dots, a_n)$  est  $\sigma$ -libre. On choisit alors pour  $b_{n+1}$  une solution dans  $B$  de  $\delta(x) = \gamma(b_1, \dots, b_n)$ .

Reste à vérifier que  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  et  $(b_1, \dots, b_{n+1})$  satisfont les mêmes formules sans quantificateurs, c'est-à-dire combinaisons booléennes de formules de la forme

$$\delta(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

Il suffit de le faire pour la formule ci-dessus, que l'on peut mettre sous la forme  $h(x_{n+1}) = \gamma(x_1, \dots, x_n)$ . Si  $h$  est la fonction nulle, alors il n'y a rien à démontrer. Si  $h$  est non nulle, et si  $h(a_{n+1}) = \gamma(a_1, \dots, a_n)$ , alors  $a_{n+1}$  est  $\sigma$ -algébrique sur  $(a_1, \dots, a_n)$ , et l'on sait que  $h = h'\delta$  où  $\delta$  est la distorsion minimal de  $a_{n+1}$  et que  $\delta(a_{n+1}) = \gamma'(a_1, \dots, a_n)$  pour une certaine distorsion  $\gamma'$ . On a donc par construction de  $b_{n+1}$ ,

$$h(b_{n+1}) = h'\delta(b_{n+1}) = h'\gamma'(b_1, \dots, b_n),$$

mais  $h'\gamma'(a_1, \dots, a_n) = \gamma(a_1, \dots, a_n)$ , donc par hypothèse, on a également  $h'\gamma'(b_1, \dots, b_n) = \gamma(b_1, \dots, b_n)$ , d'où  $h(b_{n+1}) = \gamma(b_1, \dots, b_n)$ . La réciproque est symétrique.  $\square$

**Corollaire 3.5.** *Soit  $S$  un système fini de  $\sigma$ -équations et de  $\sigma$ -inéquations à coefficients dans un corps  $\sigma$ -algébriquement clos  $\mathbf{K}$ . Si  $S$  a une solution dans une extension  $\mathbf{L}/\mathbf{K}$  de centre  $k$ , elle a une solution dans  $\mathbf{K}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{M}$  une extension  $\sigma$ -algébriquement close de  $\mathbf{L}$ . Par élimination des quanteurs, toute formule à paramètres dans  $K$  qui est vraie dans  $\mathbf{M}$  l'est aussi dans  $\mathbf{K}$ , donc  $\mathbf{K}$  possède une solution de  $S$ .  $\square$

Un sous ensemble de  $K^n$  est *constructible* si c'est une combinaison booléenne finie de fermés et d'ouverts de  $K^n$ .

**Théorème 3.6** (de Chevalley-Cohn). *Si  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos,  $f : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$  un  $\sigma$ -morphisme et  $C \subset \mathbf{K}^n$  une partie constructible,  $f(C)$  est une partie constructible de  $\mathbf{K}^m$ .*

*Démonstration.* On a  $f(C) = \{\bar{y} \in \mathbf{K}^m : (\exists \bar{x} \in \mathbf{K}^n) f(\bar{x}) = y\}$ , un sous-ensemble de  $\mathbf{K}^m$  définissable dans le langage étudié précédemment. D'après le théorème 3.4, il existe une formule  $\varphi(\bar{y})$  sans quantificateurs telle que  $f(C) = \{\bar{y} \in \mathbf{K}^m : \varphi(\bar{y})\}$ .  $\square$

**Corollaire 3.7.** *Soit  $\mathbf{K}$  un corps  $\sigma$ -algébriquement clos,  $F \subset \mathbf{K}^n$  un fermé et  $\alpha : G \rightarrow \mathbf{K}^m$  un  $\sigma$ -morphisme. L'image  $\alpha(F)$  est un fermé de  $\mathbf{K}^m$ .*

*Démonstration.* On peut se restreindre au cas où  $F$  est un ensemble  $\sigma$ -algébrique, et même un groupe, quitte à traduire  $G$  et à composer  $f$  par une translation. On peut également supposer que  $f(0) = 0$  quitte à retrancher à  $f$  une translation et à traduire  $\alpha(F)$ . L'image  $\alpha(F)$  est constructible d'après le théorème de Chevalley-Cohn. Il contient donc un ouvert dense de son adhérence  $\overline{\alpha(F)}$  (voir [TY05, Proposition 1.4.6]). Le groupe  $\alpha(F)$  est donc fermé (voir [TY05, Proposition 21.2.2]).  $\square$

#### 4. GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE SUR $K^n$

**4.1. Ensemble algébrique, module d'un ensemble.** On note  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  l'ensemble des *distorsions affines*, que l'on considère comme un  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  module à gauche. Soit  $n > 0$  un entier. On appelle *ensemble  $\sigma$ -algébrique* l'ensemble des racines dans  $K^n$  d'une famille  $S \subset K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  de distorsions affines. On le note

$$V(S) = \{\bar{x} \in K^n : \delta(\bar{x}) = 0 \text{ pour tout } \delta \in S\}.$$

L'application  $V$  est décroissante, et l'on a  $V(0) = K^n$  et  $V(1) = \emptyset$ .

Réciproquement, étant donné  $V$  un sous-ensemble de  $K^n$ , on appelle *module de  $V$*  et l'on note  $I(V)$  l'ensemble des distorsions affines qui s'annulent sur  $V(S)$ ,

$$I(V) = \{\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K] : \delta(\bar{x}) = 0 \text{ pour tout } \bar{x} \in V\}.$$

L'ensemble  $I(V)$  est un  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -sous module à gauche de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$ . L'application  $I$  est décroissante. On a  $I(\emptyset) = K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$ , ainsi que  $I(K^n) = 0$  dès que  $[K : k]$  est infini d'après le résultat d'Amitsur, et

$$V(I(V(S))) = V(S).$$

Remarquer que 1 appartient à  $I(V)$  si et seulement si  $V$  est vide, si et seulement si  $I(V)$  est égal à  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$ .

**4.2. Irréductibilité.** Un espace topologique est *irréductible* s'il n'est pas la réunion de deux fermés propres non vides.

**Lemme 4.1.** *Un ensemble  $\sigma$ -algébrique  $V(S)$  est irréductible dès que  $k \neq \mathbf{F}_2$ . En particulier,  $K^n$  est irréductible dès que  $k \neq \mathbf{F}_2$ .*

*Démonstration.* Si l'on a  $V(S) = V(S_1) \cup V(S_2)$ , et si ni la première composante ni la seconde ne sont vides, montrons que l'une est incluse dans l'autre. Sinon, soit  $a$  dans  $V(S_1) \setminus V(S_2)$  et  $b$  dans  $V(S_2) \setminus V(S_1)$ . Pour tout élément  $c$  du centre, la moyenne  $ca + (1 - c)b$  appartient à  $V(S)$  : les ensembles  $\sigma$ -algébriques sont « plats » (*flat*) au sens de Cohn (voir [Coh95, p. 337]). Prenant un élément  $c \in k \setminus \{0, 1\}$ , l'élément  $ca + (1 - c)b$  doit appartenir à  $V(S_1)$  ou

$V(S_2)$ , disons  $V(S_1)$ . Étant un  $k$ -espace affine,  $V(S_1)$  contient toute la  $k$ -droite passant par  $a$  et  $b$ , en particulier  $b$ , une contradiction.  $\square$

**Corollaire 4.2** (Densité). *Si  $\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  s'annule en dehors d'un ensemble  $\sigma$ -algébrique  $V(S)$ , alors  $\delta$  est nulle.*

### 4.3. Nullstellensatz.

**Théorème 4.3** (Nullstellensatz faible). *Si  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos, un module maximal de  $\mathbf{K}_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, \mathbf{K}]$  qui ne contient pas 1 est de la forme  $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$  pour un point  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ .*

*Démonstration.* On s'inspire de [Art10] et [Per01]. Si  $n = 1$ , et si  $I$  est un module maximal ne contenant pas 1, alors il existe une unique distorsion affine unitaire de degré minimal appartenant à  $I$ , qui s'écrit  $\delta - a_1$  où  $\delta$  est une distorsion linéaire unitaire et  $a_1 \in \mathbf{K}$ . Montrons que  $I$  est engendré par cet élément. Soit  $\gamma + a_2$  un autre élément de  $I$ , on a  $\gamma = q\delta + r$  avec  $\deg_\sigma(r) < \deg_\sigma(\delta)$ , puis  $\gamma + a_2 = q(\delta + a_1) + r - q(a_1)$ , donc  $r - q(a_1) \in I$  et  $r = 0$  par minimalité de  $\delta$ . On a donc  $I = \langle \delta - a_1 \rangle$ . Mais puisque  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos,  $a_1 = \delta(a'_1)$ . Par maximalité de  $I$ , on a  $I = \langle x - a'_1 \rangle$ .

Si  $n > 1$ , et si  $x_1 - a_1 + I, \dots, x_n - a_n + I$  sont tous  $\sigma$ -algébriques sur  $I \cup \mathbf{K}$ , alors pour tout  $i$ , on a  $\delta_i(x_i - a_i) \in I$  pour un certain  $\delta_i$  de degré minimal et  $a_i \in \mathbf{K}$ , et  $I$  est donc contenu dans le module de la forme voulue, auquel il doit être égal par maximalité. Supposons au contraire que  $x_1$  par exemple soit  $\sigma$ -transcendant sur  $I \cup \mathbf{K}$ . On fixe un  $b \in \mathbf{K}$ , et on a  $1 \in \langle x_1 - b, I \rangle$  par maximalité de  $I$  : il existe  $h \in \mathbf{K}_\sigma^1[x]$  non nul tel que

$$h(x_1 - b) - 1 \in I,$$

i.e.  $x_1 - b$  est « inversible à gauche » dans  $\mathbf{K}_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$ . On peut supposer  $h_b$  de degré  $m$  constant indépendant de  $b$  (sans quoi l'on peut trouver  $b$  et  $c$  tels que  $h_c(x_1 - c) - h_b(x_1 - b)$  est non nul et appartient à  $I$ ). Posons

$$h_b(x) = \sum_{i=0}^m x^{\sigma^i} k_i,$$

d'où

$$h_b(x_1 - b) = \sum_{i=0}^m (x_1 - b)^{\sigma^i} k_i = \sum_{i=0}^m x_1^{\sigma^i} k_i - \sum_{i=0}^m b^{\sigma^i} k_i.$$

Si tous les coefficients sont constants en  $b$ , on a nécessairement pour tout  $b \in \mathbf{K}$ ,

$$\sum_{i=0}^m b^{\sigma^i} k_i = 0,$$

ce qui est impossible si  $a$  est transcendant sur  $k$ .  $\square$

**Corollaire 4.4.** *Supposons  $\mathbf{K}$   $\sigma$ -algébriquement clos et soient  $I$  un module ne contenant pas 1. Alors  $V(I)$  n'est pas vide.*

*Démonstration.* (1) D'après le lemme de Zorn,  $I$  est contenu dans un module maximal  $M$  qui ne contient pas 1, et  $V(M) \subset V(I)$  contient un point d'après le Nullstellensatz.  $\square$

**4.4. Clôture d'un module, composante radicale d'un ensemble algébrique.** Pour tout module  $I$  de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$ , on définit la *clôture de  $I$*  par :

$$\text{cl}(I) = \left\{ f \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K] : \text{il existe } g \in K_\sigma^1[x] \text{ non nulle telle que } g(f) \in I \right\}.$$

On a l'inclusion  $I \subset \text{cl}(I)$ . On dit que  $I$  est *clos* si  $I = \text{cl}(I)$ , et que  $V(I)$  est radical si  $I$  est clos. On note  $V^0 = V(\text{cl}(I))$  que l'on appelle la *composante radicale* de  $V$ .

**Lemme 4.5.**  $\text{cl}(I)$  est un module de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  et  $\text{cl}(\text{cl}(I)) = \text{cl}(I)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.7 puisque  $\text{cl}(I)$  est précisément l'ensemble des éléments de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  qui sont  $\sigma$ -algébriques sur  $I$ .  $\square$

Si  $I$  est un module de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ , le quotient  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]/I$  est naturellement muni d'une structure de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -module à gauche. On dit que le quotient est *simple* si ses seuls sous-modules sont  $\{0\}$  et  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$ .

**Lemme 4.6.** Soit  $I$  un module de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$ .

- (1)  $I$  est maximal si et seulement si  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]/I$  est simple.
- (2)  $I$  est clos si et seulement si pour tout  $\bar{\delta} \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$  non nul et  $\gamma \in K_\sigma^1[x]$  non nul,  $\gamma(\bar{\delta})$  est non nul.

*Démonstration.* (1) Si  $I$  est maximal, soit  $\pi : K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$  la projection canonique, et  $M$  un  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -sous-module de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$  non nul. Alors  $\pi^{-1}(M)$  est un idéal à gauche de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$  contenant  $I$  proprement, donc  $\pi^{-1}(M) = K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ , d'où  $M = K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$ . Réciproquement, si  $I$  n'est pas maximal, soit  $J$  un idéal à gauche proprement compris entre  $I$  et  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ . Dans ce cas,  $J/I$  est un sous-module de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]/I$  non trivial.  $\square$

*Remarque 4.7.* Si  $I$  est un idéal de  $K_\sigma^1[x]$  engendré par  $\delta = \delta_1 \cdots \delta_m$  où  $\delta_m$  est irréductible, alors  $\text{cl}(I) = \langle \delta_m \rangle_\sigma$ .

**Lemme 4.8.** Si  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos, on a pour tout module  $J$ ,

$$I(V(J)) \subset \text{cl}(J).$$

De plus, si  $I \subset J$  est une inclusion propre de modules clos, alors l'inclusion  $V(J) \subset V(I)$  est propre.

*Démonstration.* Supposons que  $\delta_1, \dots, \delta_r$  soit une  $\sigma$ -base de  $J$ . Si  $\delta$  appartient à  $I(V(J))$ , alors  $\langle \delta_1, \dots, \delta_r, \delta - 1 \rangle$  contient 1 d'après le Nullstellensatz, et il existe  $h_1, \dots, h_r$  et  $h$  non nul tels que  $1 = h(\delta - 1) + h_1\delta_1 + \cdots + h_r\delta_r$ . En appliquant l'égalité à un point de  $V(J)$ , que l'on peut supposer propre, on a nécessairement  $h(1) = 1$ , d'où  $\delta \in \text{cl}(I)$ .  $\square$

**4.5. Morphismes.** Étant donné un ensemble  $\sigma$ -algébrique  $V$ , on définit

$$\Gamma_\sigma[V] = K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]/I(V)$$

le  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -module quotient.

**Définition 4.9** ( $\sigma$ -Morphisme,  $\sigma$ -comorphisme). Soient  $V \subset K^n$  et  $W \subset K^m$  deux ensembles algébriques. On appelle  $\sigma$ -morphisme toute application  $f : V \rightarrow W$  dont les applications coordonnées  $f_1, \dots, f_m$  sont des distorsions affines. On appelle  $\sigma$ -comorphisme de  $f$  le morphisme de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -modules

$$f^* : \Gamma_\sigma[W] \rightarrow \Gamma_\sigma[V], \delta \mapsto \delta \circ f$$

**Définition 4.10** ( $\sigma$ -Morphisme dominant). Un  $\sigma$ -morphisme est *dominant* si son image  $f(V) \subset W$  est dense dans  $G$  pour la topologie de Zariski. C'est un  $\sigma$ -isomorphisme s'il est bijectif et si son inverse est un  $\sigma$ -morphisme.

**Lemme 4.11.** *Un morphisme  $f$  est dominant si et seulement si son comorphisme  $f^*$  est injectif.*

*Démonstration.* On a

$$I(f(F)) = \{\gamma \in \Gamma_\sigma[K^m] : \gamma(f(F)) = 0\} = \{\gamma : f^*(\gamma)(F) = 0\} = \{\gamma : f^*(\gamma) \in I(F)\},$$

donc  $I(f(F))/I(G)$  est égal à  $\text{Ker } f^*$ . Donc  $f^*$  est injective si et seulement si  $I(f(F)) \subset I(G)$ , c'est-à-dire si et seulement si  $V(I(f(F))) = \overline{f(F)} = G$ .  $\square$

## 5. TOPOLOGIE TORDUE DE ZARISKI SUR $K^n$

Soit  $K$  un corps non commutatif de centre  $k$  tel que  $[K : k]$  soit infini, soit  $a$  un élément hors du centre, et  $\sigma$  la conjugaison par  $a$ . On appelle *fermé de base de  $K^n$*  un sous-ensemble

$$V(\delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : \delta(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

où  $\delta \in K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  est une distorsion affine de  $K^n$ . On considère sur  $K^n$  la topologie  $\tau_\sigma$ , dont les fermés de base constituent une base de fermés. Nous l'appellerons *topologie tordue de Zariski*. Dans le cas particulier où  $K$  est commutatif et algébriquement clos,  $\tau_\sigma$  correspond à la topologie de Zariski sur  $K^1$ , mais pas sur  $K^n$  pour  $n \geq 2$ , puisque l'on ne considère pas les variétés définies par des polynômes irréductibles non linéaires. Cette topologie est en ce sens assez grossière. Une distorsion étant  $C(a)$ -linéaire à gauche, un fermé de base non vide a une structure de  $C(a)$ -espace affine à gauche.

**5.1. Topologie sur la droite  $K^1$ .** Si  $K$  est commutatif, ses fermés sont les ensembles finis de points. Il en va différemment si  $K$  est non commutatif et  $a$  hors du centre. Les fermés propres irréductibles sont de deux types, donnés soit par

$$x = b,$$

qui correspond au singleton  $\{b\}$ , soit par une équation

$$xk_0 + x^\sigma k_1 + \dots + x^{\sigma^\ell} k_\ell = b.$$

Un cas particulier, l'équation

$$(2) \quad xk_0 + x^{\sigma^\ell} = b,$$

qui correspond à l'ensemble vide ou à l'espace affine  $\alpha + C(a^\ell)\beta$  de  $C(a)$ -dimension finie au plus  $\ell$ , le point  $\alpha$  étant une solution particulière de (2), et  $\beta$  une solution particulière non nulle de l'équation homogène associée  $xk_0 + x^{\sigma^\ell} = 0$  (voir aussi [Coh95, p. 408]).

**Lemme 5.1** (Fermés de  $K^1$ ). *Un fermé propre de  $K^1$  est une réunion finie de  $C(a)$ -espaces affines à gauche de dimensions finies. Si  $K$  est  $\sigma$ -algébriquement clos, les fermés propres de  $K^1$  sont précisément les réunions finies de  $C(a)$ -espaces affines à gauche de dimension finie.*

*Démonstration.* La première assertion est une conséquence immédiate du lemme 1.8.(1). Réciproquement, il est facile de voir que  $C(a)k_0$  est un fermé pour tout  $k_0 \in K$ . L'application  $C(a)k_0 \times \cdots \times C(a)k_n \rightarrow C(a)k_0 + \cdots + C(a)k_n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$  est un  $\sigma$ -morphisme de groupes, donc, si  $K$  est  $\sigma$ -algébriquement clos, son image est fermée d'après le corollaire 3.7, de même que chacun de ses translatés.  $\square$

**Corollaire 5.2.** *La topologie tordue de Zariski sur  $K^1$  est noethérienne.*

**5.2. Topologie sur  $K^n$ .** Au dessus d'un corps commutatif, un fermé de Zariski ne coupe une droite propre qu'en un nombre fini de points. Ici :

**Corollaire 5.3** (Intersection d'une droite et d'un fermé de  $K^n$ ). *Soit  $F$  un fermé de  $K^n$  et  $L$  une droite affine à gauche de  $K^n$ , propre dans  $F$ . Alors  $L$  coupe  $F$  en une réunion finie de  $C(a)$ -espaces affines de dimensions finies.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour un fermé de base  $V(\delta)$  défini par l'application

$$(3) \quad \delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{\ell} x_1^{\sigma^i} k_{1,i} + \cdots + \sum_{i=0}^{\ell} x_n^{\sigma^i} k_{n,i} = \alpha,$$

soit l'espace vectoriel  $V(\delta) \cap L$  est de dimension finie sur  $C(a)$ , soit  $L \subset V(\delta)$ . Supposons  $V(\delta) \cap L$  non vide. La droite  $L$  est une intersection de  $n - 1$  hyperplans à gauche d'équation du type  $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$  avec  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dans  $K^n$ , de sorte que l'on peut exprimer chaque coordonnée d'un point  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $L$  comme  $x_i = x_1\beta_i$ . En remplaçant dans (3), on obtient une équation de la forme

$$xc_0 + x^{\sigma}c_1 + \cdots + x^{\sigma^{\ell}}c_{\ell} = \beta,$$

et on conclut comme précédemment.  $\square$

**Lemme 5.4.** *Tout  $K$ -espace vectoriel à gauche est fermé.*

**Lemme 5.5.** *L'espace topologique  $K^n$  est noethérien.*

*Démonstration.* À une suite décroissante d'ensembles  $\sigma$ -algébriques  $V(I_1) \supset V(I_2) \supset V(I_3) \cdots$  correspond une suite croissante de modules  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \cdots$  de  $K_{\sigma}^1[x_1, \dots, x_n, K]$ , qui est un module noethérien, donc les deux suites stationnent. Une intersection de  $\sigma$ -fermé de bases étant un translaté d'un ensemble algébrique, la conclusion vaut aussi pour une intersection de  $\sigma$ -fermés de base. Un fermé tordu de Zariski étant une réunion finie de fermés de base, on conclut facilement.  $\square$

## 6. DIMENSION DE ZARISKI

Dans le cas où  $K$  est commutatif, une famille de polynômes additifs est linéairement indépendante si et seulement si elle est algébriquement liée (voir [Spr98, Lemma 3.3.6]).

**Définition 6.1** (Dimension de Zariski). On définit la *dimension de Zariski d'un ensemble algébrique*  $F = V(S)$  de  $K^n$  par

$$\dim(F) = \dim_{\sigma} \Gamma_{\sigma}[F] = n - \dim_{\sigma} \langle S \rangle_{\sigma}.$$

*Remarques 6.2.* (1)  $K^1$  est de dimension 1. Si  $a$  n'est pas dans le centre, tous les fermés propres de  $K^1$  considérés précédemment sont de dimension 0.

(2) L'espace  $K^n$  est de dimension  $n$  et ses singletons de dimensions 0

(3) La dimension est croissante : si  $F \subset G$  sont deux fermés irréductibles,  $\dim F \leq \dim G$ .

**Théorème 6.3** (Section par une hypersurface). *Si  $V$  est un ensemble  $\sigma$ -algébrique, et si  $\delta$  est une distorsion de la clôture de  $I(V)$ , alors*

$$\dim V \cap V(\delta) = \dim V.$$

*Si  $\delta$  n'est pas dans la clôture de  $I(V)$ ,*

$$\dim V \cap V(\delta) = \dim V - 1.$$

*En particulier, si  $\delta$  est non nulle,*

$$\dim V(\delta) = n - 1.$$

*Démonstration.* On a bien sûr  $\dim V(I) \cap V(\delta) \leq \dim V(I)$ . Supposons que  $\delta$  est dans la clôture de  $I$ . Soient  $\delta_1 + I, \dots, \delta_d + I$   $\sigma$ -libres. Montrons que  $\delta_1 + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}, \dots, \delta_d + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}$  sont  $\sigma$ -libres. Soit  $h(x_1, \dots, x_d)$  une distorsion linéaire telle que  $h(\delta_1, \dots, \delta_d) \in \langle I, \delta \rangle_{\sigma}$ . Il existe donc une distorsion  $g \in K^1[x]$  non nulle telle que

$$h(\delta_1, \dots, \delta_d) + g(\delta) \in I.$$

La clôture de  $I$  étant un module, il contient  $g(\delta)$  : il existe une distorsion non nulle  $\gamma$  telle que  $\gamma g(\delta) \in I$ , d'où  $\gamma h(\delta_1, \dots, \delta_d) \in I$ , ce qui implique  $h = 0$ .

Supposons  $\delta$  hors de la clôture de  $I$  et posons  $\dim V = d$ . Supposons  $\dim V \cap V(\delta) \geq d$  et soient  $\delta_1, \dots, \delta_p$  dans  $K_{\sigma}^1[x_1, \dots, x_n]$  tels que  $\delta_1 + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}, \dots, \delta_p + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}$  soient  $\sigma$ -libres. La famille  $(\delta_1 + I, \dots, \delta_p + I, \delta + I)$  est  $\sigma$ -liée donc il existe une distorsion  $g \in K^1[x_1, \dots, x_{d+1}]$  non nulle telle que  $g(\delta_1, \dots, \delta_p, \delta) \in I$ . Si  $g$  ne met en jeu que la variable  $x_{d+1}$ , elle est du type  $h(x_{d+1})$  pour une certaine distorsion  $h \in K^1[x_{d+1}]$  non nulle, et dans ce cas  $h(\delta) \in I$ , une contradiction. La distorsion  $g(x_1, \dots, x_d, 0)$  est donc non nulle, mais on a également

$$g(\delta_1, \dots, \delta_p, 0) \in -g(0, \dots, 0, \delta) + I \subset \langle I, \delta \rangle_{\sigma}$$

ce qui contredit la liberté de  $\delta_1 + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}, \dots, \delta_p + \langle I, \delta \rangle_{\sigma}$ . On a donc montré que

$$\dim V \cap V(\delta) \leq d - 1.$$

Réciproquement, on considère  $\delta_1 + I, \dots, \delta_d + I$   $\sigma$ -libres et on cherche à montrer qu'il existe un entier  $i$  telle que la seule distorsion  $\gamma$  vérifiant  $\gamma(\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_d) \in \langle \delta, I \rangle_{\sigma}$  soit la distorsion nulle (on en déduit alors que  $\delta_1 + \langle \delta, I \rangle_{\sigma}, \dots, \delta_{i-1} + \langle \delta, I \rangle_{\sigma}, \delta_{i+1} + \langle \delta, I \rangle_{\sigma}, \dots, \delta_d + \langle \delta, I \rangle_{\sigma}$  est  $\sigma$ -libre d'où  $\dim V(I) \cap V(\delta) \geq d$ ). Supposons au contraire que pour tout  $i$ , il existe une distorsion non nulle  $\gamma_i$  telle que

$$\gamma_i(\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_d) \in \langle \delta, I \rangle_{\sigma}.$$

Étant non nulle,  $\gamma_1$  met en jeu au moins un  $\delta_i$ , disons  $\delta_2$ , qui est algébrique sur  $\{\delta_3, \dots, \delta_d, \delta\} \cup I$ . Mais  $\gamma_2$  nous indique que  $\delta$  est algébrique sur  $\{\delta_1, \delta_3, \dots, \delta_d\} \cup I$ . Par transitivité,  $\delta_2$  est algébrique sur  $\{\delta_1, \delta_3, \dots, \delta_d\} \cup I$ , une contradiction.  $\square$

**Corollaire 6.4.** *Soient  $V \subset Z$  deux ensembles algébriques distincts de  $K^n$ .*

- (1) *Si  $Z$  est radical, on a  $\dim V < \dim Z$ .*
- (2) *Quel que soit  $V$ , on a  $\dim V = \dim \sqrt{V}$ .*

*Remarque 6.5.* On ne peut pas faire mieux : dans  $K$ , l'inclusion  $\{0\} \subset C(a)$  est propre mais ces deux fermés irréductibles ont même dimension 0 si  $a$  n'est pas dans le centre de  $K$ .

Soit  $V(S)$  un ensemble algébrique de  $K^n$ , et  $\mathbf{K}/K$  une extension de corps de centre  $k$ . On note

$$V_{\mathbf{K}} = \{x \in \mathbf{K}^n : \delta(\bar{x}) = 0 \text{ pour tout } \delta \in S\}$$

l'ensemble algébrique correspondant dans  $\mathbf{K}$ .

**Théorème 6.6.** *La dimension de Zariski d'un ensemble algébrique  $V$  de  $K^n$  est égale*

- (1) *à la longueur maximale  $d$  d'une chaîne  $\text{cl}(I(V)) = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_d$  de modules de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  qui soient clos et distincts,*
- (2) *à la longueur maximale  $d$  d'une chaîne  $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V_{\mathbf{K}}$  d'ensembles algébriques radicaux distincts de  $\mathbf{K}^n$  définis sur  $K$ , où  $\mathbf{K}/K$  est une extension de centre  $k$ .*
- (3) *au nombre minimal de distorsions  $\delta_0, \dots, \delta_d$  de  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n, K]$  nécessaires pour que  $V_{\mathbf{K}} \cap V_{\mathbf{K}}(\delta_0, \dots, \delta_d)$  soit vide dans toute extension  $\mathbf{K}/K$  de centre  $k$ .*

En particulier, on retrouve le même phénomène qu'en géométrie euclidienne, où si une famille de vecteurs de  $K^n$  est  $\mathbf{K}$ -liée pour une extension de  $\mathbf{K}/K$ , alors elle est  $K$ -liée, et réciproquement bien sûr. La dimension de Zariski ne change pas si l'on considère les variétés dans une extension  $\mathbf{K}/K$  de centre  $k$  : la dimension d'un ensemble  $\sigma$ -algébrique  $V_K \subset K^n$  au dessus de  $K$  est égale à la dimension de  $V_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{K}^n$  au dessus de  $\mathbf{K}$ , et l'on ne perd rien à considérer que  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos. D'autre part, la dimension d'un  $K$ -espace vectoriel à droite de  $K^n$  coïncide avec sa dimension usuelle.

*Démonstration.* (1) L'équivalence de (1) avec la définition est donnée par le théorème 6.3.

(2) Si (2) nous donne une chaîne d'ensembles  $\sigma$ -algébriques  $V_{\mathbf{K}}^0, \dots, V_{\mathbf{K}}^d$  définis sur  $K$ , alors les  $K_\sigma^1[x_1, \dots, x_n]$ -modules de la chaîne correspondante  $I(V_{\mathbf{K}}^0), \dots, I(V_{\mathbf{K}}^d)$  sont clos et distincts puisque les variétés sont distinctes dans  $\mathbf{K}^n$ . Réciproquement, si l'on a une chaîne  $I_0, \dots, I_d$  de modules donnée par (1), on considère la chaîne des variétés correspondante au dessus d'une clôture  $\sigma$ -algébrique  $\mathbf{K}/K$ . Elle n'est pas forcément radicale, mais si  $\delta \in I_{i+1} \setminus I_i$ , alors  $\delta \in \text{cl}(\langle I_{i+1} \rangle_{\mathbf{K}}) \setminus \text{cl}(\langle I_i \rangle_{\mathbf{K}})$  (ce qui provient du fait qu'être lié à droite dans  $\mathbf{K}$ , c'est l'être dans  $K$ ), ce qui nous fournit une chaîne de variétés radicales, propre d'après le lemme 4.8, et de longueur  $d$ .

(3) Si  $V = V(S)$  est de dimension  $d$ , d'après le théorème 6.3, il faut exactement  $d$  distorsions  $\delta_1, \dots, \delta_d$  pour que  $V \cap V(\delta_1, \dots, \delta_d)$  soit de dimension 0, et dans ce cas,  $\delta_{i+1}$  n'est

nécessairement pas algébrique sur  $S \cup \delta_i$  pour chaque  $i$ . En particulier si l'on suppose  $S$   $\sigma$ -libre, alors  $S \cup \{\delta_1, \dots, \delta_d\}$  est  $\sigma$ -libre, donc 1 n'appartient pas à l'idéal qu'elles engendrent. On déduit du Nulstellensatz que  $V_{\mathbf{K}}(S, \delta_1, \dots, \delta_d)$  n'est pas vide si  $\mathbf{K}$  est  $\sigma$ -algébriquement clos. Il suffit de prendre  $\delta_0 = 1$  pour s'assurer que  $V_{\mathbf{K}}(S, \delta_0, \dots, \delta_d)$  soit vide pour toute extension  $\mathbf{K}/K$ .  $\square$

**Lemme 6.7** (Dimension d'un produit). *Soient  $V \subset K^n$  et  $Z \subset K^m$  deux ensembles  $\sigma$ -algébriques. Alors  $V \times Z \subset K^{n+m}$  est un ensemble  $\sigma$ -algébrique, et*

$$\dim V \times Z = \dim V + \dim Z$$

*Démonstration.* Si  $V = V(\delta_1(\bar{x}), \dots, \delta_n(\bar{x}))$  et  $Z = V(\gamma_1(\bar{y}), \dots, \gamma_m(\bar{y}))$ , alors  $V \times Z = V(\delta_1(\bar{x}), \dots, \gamma_m(\bar{y}))$ , et l'on a  $I(V \times Z) = I(V) \oplus I(Z)$  dès que  $I(V)$  et  $I(Z)$  ne contiennent pas 1, donc  $\dim_{\sigma} I(V \times Z) = \dim_{\sigma} I(V) + \dim_{\sigma} I(Z)$  d'après le lemme 2.9, c'est-à-dire

$$n + m - \dim(V \times Z) = n - \dim V + m - \dim Z. \quad \square$$

### 6.1. Morphismes et dimension.

**Théorème 6.8.** *Soit  $V \subset K^n$  un ensemble  $\sigma$ -algébrique et  $f : V \rightarrow K^m$  un  $\sigma$ -morphisme.*

- (1) *Alors  $\overline{f(V)}$  est irréductible, et  $\dim F \geq \dim \overline{f(V)}$ .*
- (2) *Si  $f : F \rightarrow \overline{f(V)}$  est un  $\sigma$ -isomorphisme, alors  $\dim V = \dim \overline{f(V)}$ .*
- (3) *Si les fibres de  $f$  sont de dimension au plus  $r$ ,  $\dim \overline{f(V)} \geq \dim V - r$ .*

*Démonstration.* (1) L'image d'un irréductible par une application continue étant irréductible, et une partie étant irréductible si et seulement si son adhérence l'est (voir [TY05, 1.1]), l'ensemble  $\overline{f(V)}$  est un fermé irréductible, donc un ensemble  $\sigma$ -algébrique. Considérons la restriction  $f : V \rightarrow \overline{f(V)}$ . C'est un  $\sigma$ -morphisme dominant, donc son  $\sigma$ -comorphisme  $f^* : \Gamma_{\sigma}[\overline{f(V)}] \rightarrow \Gamma_{\sigma}[V]$  est injectif d'après le lemme 4.11, ce qui implique  $\dim \overline{f(V)} \leq \dim V$  d'après le lemme 2.11.

(2) Procède de (1).

(3) Soit  $y$  un point de l'image, et  $X$  le fermé  $\{f^{-1}(y)\}$ . Puisque  $\{y\}$  est de dimension 0, il existe  $f_1, \dots, f_s$  avec  $s = \dim(\overline{f(V)})$  telles que  $\{y\} = V(f_i)$ . Soit  $g_i = f_i \circ f$ . On a  $X = V(g_i)$ , d'où  $\text{codim}_F(X) = \text{codim}_F(V(g_i)) \geq m$ , et donc  $\dim F - r \leq m$ .  $\square$

On en déduit :

**Théorème 6.9** (de Ax-Grothendieck). *Soit  $\mathbf{K}$  un corps  $\sigma$ -algébriquement clos et  $\alpha : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$  un  $\sigma$ -morphisme. Si les fibres de  $\alpha$  sont de dimension 0,  $\alpha$  est surjectif.*

*Première démonstration.* L'image  $\alpha(G)$  est un fermé de  $K^n$  d'après le théorème de Chevalley-Cohn, de dimension  $n$  d'après le théorème 6.8. Puisque  $K^n$  est radical, on a  $\alpha(\mathbf{K}^n) = \mathbf{K}^n$ .  $\square$

## 7. SOUS-GROUPE FERMÉS DE $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$

$K$  est toujours un corps non-commutatif, et  $\sigma$  la conjugaison par un élément hors du centre. On note  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$  le groupe additif de  $K^n$ . On cherche à classer les sous-groupe fermé de  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$  à  $\sigma$ -isomorphisme près. On s'inspire de [Hum75, Theorem 20.5].

**Lemme 7.1.** *Soit un entier  $n \geq 1$ , un sous-groupe  $G \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1}$ . Si  $G = V(\delta)$  pour une distorsion non nulle, il existe un  $\sigma$ -automorphisme  $A$  de  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1}$  tel que  $f \circ A$  s'annule sur  $\{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$ . De plus, si  $\mathbf{d} = (0, \dots, 0, \mathbf{d}_{n+1})$  est un point non nul de  $G(\mathbf{K})$ , où  $\mathbf{K}/K$  est une extension de corps de centre  $k$ , on peut choisir  $A$  tel que  $A_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$ .*

*Démonstration.* On traite le cas  $n = 1$ , le cas général étant similaire. Soit

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^m x^{\sigma^i} k_i + \sum_{j=1}^{\ell} y^{\sigma^j} h_j.$$

On appelle *partie principale* de  $\delta$  le polynôme  $x^{\sigma^m} k_m + y^{\sigma^\ell} h_\ell$ . On montre le résultat par induction sur  $m + \ell$ . Si  $m = \ell = 0$ , alors  $\delta(x, y) = xa + yb$ . Si  $a = 0$ , on pose  $A = id$ ; si  $b = 0$  (auquel cas le point  $d$  n'existe pas), on pose  $A(x, y) = (y, x)$ . Si  $ab \neq 0$ , en posant

$$(x, y) = (ua^{-1} - vba^{-1}, v) = A(u, v),$$

on a

$$\delta \circ A(u, v) = \delta(x, y) = u,$$

donc  $\delta \circ A$  s'annule sur  $\{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$ .

Cas général. On ne perd rien à supposer  $m \geq \ell$ . On peut trouver  $(\alpha, \beta) \in K^2$  non nul annulant la partie principale de  $\delta$ . On peut supposer  $\alpha \neq 0$  par exemple. On pose

$$(x, y) = (u\alpha, v + u^{\sigma^{m-\ell}} \beta) = A(u, v).$$

On a bien  $A_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$ , et

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= x^{\sigma^m} k_m + y^{\sigma^\ell} h_\ell + (\text{termes de petit degré}). \\ &= (u\alpha)^{\sigma^m} k_m + (v + u^{\sigma^{m-\ell}} \beta)^{\sigma^\ell} h_\ell + (\text{termes de petit degré}). \\ &= u^{\sigma^m} \alpha^{\sigma^m} k_m + v^{\sigma^\ell} h_\ell + u^{\sigma^m} \beta^{\sigma^\ell} h_\ell + (\text{termes de petit degré}). \\ &= v^{\sigma^\ell} h_\ell + (\text{termes de petit degré}). \end{aligned}$$

On applique l'hypothèse d'induction à  $\delta \circ A$ . □

**Théorème 7.2** (Sous-groupes fermés radicaux). *Un sous-groupe fermé radical  $G \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$  de dimension  $\ell$  est  $\sigma$ -isomorphe à  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^\ell$ . De plus, si  $\mathbf{d} = (0, \dots, 0, \mathbf{d}_n)$  est un point non nul de  $G(\mathbf{K})$ , où  $\mathbf{K}/K$  est une extension de corps de centre  $k$ , on peut choisir un  $\sigma$ -isomorphisme  $A : G \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^\ell$  tel que  $A_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}) = (0, \dots, 0, \mathbf{d}_n)$ .*

*Démonstration.* On traite seulement le cas  $\ell = 1$ . On procède par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , le groupe  $G$  est égal à  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$ . Si  $n = 2$ , on considère  $\delta(x, y)$  dans  $I(G)$  qui soit irréductible à gauche; c'est possible puisque  $G$  est radical. On a donc  $I(G) = \langle \delta \rangle_\sigma$ . Puisque  $G$  est radical, on a nécessairement  $G = V(\delta)$  d'après le lemme 6.3. D'après le lemme précédent, il existe un automorphisme  $A$  de  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^2$  (fixant  $\mathbf{d}$ ) tel que  $\delta \circ A$  s'annule sur  $\{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$ . On a donc

$$A^{-1} : V(\delta) \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^2 \rightarrow V(\delta \circ A) \subset \{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1,$$

qui est un  $\sigma$ -automorphisme. Mais  $V(\delta \circ A)$  est aussi radical donc on a nécessairement

$$V(\delta \circ A) = \{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1.$$

Si  $G \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1}$ , on considère  $\delta(x_1, \dots, x_{n+1})$  dans  $I(G)$  qui soit irréductible à gauche ; c'est possible puisque  $G$  est radical. On a donc  $G \subset V(\delta)$ . On pose  $J = \langle \delta \rangle_\sigma$ , qui est clos et de dimension  $n$  dans  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1}$ . D'après le lemme précédent, il existe un automorphisme  $A$  de  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1}$  tel que  $\delta \circ A$  s'annule sur  $\{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$  (et fixe  $\mathbf{d}$ ). On a donc

$$A^{-1} : V(\delta) \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{n+1} \longrightarrow V(\delta \circ A) \subset \{0\} \times \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n,$$

qui est un  $\sigma$ -automorphisme. Mais  $V(\delta \circ A)$  est aussi radical, et de dimension 1, donc par hypothèse de récurrence, il existe un  $\sigma$ -isomorphisme  $B$  entre  $V(\delta \circ A)$  et  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$  (tel que  $B_K(\mathbf{d}) = \mathbf{d}_n$ ). En posant  $G = V(\delta_1, \dots, \delta_m)$ , on a donc en particulier la restriction

$$B \circ A^{-1} : G \longrightarrow V(\delta_1 \circ B \circ A^{-1}, \dots, \delta_m \circ B \circ A^{-1}) \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1.$$

Mais l'image de  $B \circ A^{-1}$  est radicale et de dimension 1, donc égale à  $\mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$ .  $\square$

*Remarque 7.3.* Si les coefficients de  $\delta$  sont dans un corps  $L \subset K$ , le  $\sigma$ -isomorphisme est à coefficients dans  $L$ .

**Théorème 7.4** (Sous-groupes fermés irréductibles). *Si  $G \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^n$  est un sous-groupe fermé irréductible de dimension  $\ell$ , il existe un  $\sigma$ -morphisme  $A : G \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^\ell$  dont les fibres sont de dimension 0.*

## 8. RETOUR SUR TERRE

On considère un corps *non commutatif*  $K$  dont la caractéristique est un entier premier  $p$  ou 0, et on s'intéresse à sa théorie du premier ordre  $\text{Th}(K)$  exprimée dans le langage des corps  $(+, \times, 0, 1)$ . Puisque  $K$  n'est pas commutatif, d'après Wedderburn, il est infini. La théorie de  $K$  n'est pas superstable (voir [Che78]). Si  $K$  est de caractéristique  $p$ , sa théorie n'est pas non plus menue (voir [Mil07]) et en particulier,  $K$  possède  $2^{\aleph_0}$  modèles dénombrables deux-à-deux non isomorphes. La question de savoir si  $\text{Th}(K)$  peut être stable est encore ouverte, mais si  $\text{Th}(K)$  est stable et de caractéristique  $p$ , le corps  $K$  n'est pas loin d'être commutatif puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie sur son centre (voir [Mil11]).

Nous nous intéressons ici au cas où  $\text{Th}(K)$  n'a pas la *propriété d'indépendance* au sens de Shelah. En caractéristique zéro, un exemple est donné par le corps des quaternions sur  $\mathbf{R}$ , interprétable dans le corps des réels. Voici un exemple de caractéristique  $p$ .

Soit  $\Gamma_p = \langle \frac{1}{p^i} : i \in \mathbf{N} \rangle$  le sous-groupe ordonné de  $\mathbf{R}^+$ . On considère le corps *commutatif*  $H = \mathbf{F}_p^{\text{alg}}((\Gamma_p))$  des séries formelles de Hahn

$$a = \sum_{g \in \Gamma_p} a_g t^g$$

ayant un support  $S(a) \subset \Gamma_p$  bien ordonné et des coefficients  $a_g$  dans  $\mathbf{F}_p^{\text{alg}}$ . Muni de sa valuation naturelle  $v$  associant à une série le minimum de son support, le corps valué  $(H, v)$  est maximal, *i.e.* n'a pas d'extension de corps valué ayant à la fois le même corps résiduel et le même groupe de valuation (voir [Kru32] ou [EP05, Exercice 3.5.6]). Son corps résiduel est infini, parfait et n'a pas la propriété d'indépendance. Son groupe de valuation est  $p$ -divisible, donc  $H$  n'a pas la propriété d'indépendance d'après [KSW11, Theorem 5.9]. Si la caractéristique  $p$  est un entier impair, l'extension  $H(\sqrt{t})/H$  est galoisienne et cyclique de

groupe de Galois engendré par l'automorphisme  $\sigma \in \text{Aut}(H(\sqrt{t})/H)$  échangeant  $\sqrt{t}$  et  $-\sqrt{t}$ . On considère le  $H(\sqrt{t})$ -espace vectoriel de dimension 2 à gauche

$$K = H(\sqrt{t}) \oplus H(\sqrt{t}) \cdot x$$

muni de la multiplication interne définie par les deux règles

$$x^2 = t^{1/p} \quad \text{et} \quad x \cdot k = \sigma(k)x \quad \text{pour tout } k \in H(\sqrt{t}).$$

$K$  est une  $H$ -algèbre non commutative de centre  $H$  et de dimension 4, interprétable dans  $H$ , donc  $K$  n'a pas la propriété d'indépendance. Puisque la norme  $N_{H(\sqrt{t})/H}$  de l'extension  $H(\sqrt{t})/H$  est définie par

$$N_{H(\sqrt{t})/H}(a + b\sqrt{t}) = a^2 + b^2t,$$

il n'est pas difficile de vérifier que l'on a

$$t^{1/p} \notin N_{H(\sqrt{t})/H}(H(\sqrt{t})),$$

donc  $K$  est un corps d'après [Lam91, Corollary 14.8]. En caractéristique 2, on peut réitérer une construction similaire à partir de l'extension cyclique galoisienne  $H(\sqrt[3]{t})/H$ .

Remarquons que le corps  $K$  ci-dessus n'est pas stable, puisque son centre ne l'est pas :  $H$  est Hensélien (voir [Efr06, Corollary 18.4.2]), et possède une valuation non-triviale définissable dans le langage des corps (voir [KJ15b, Theorem 5.2] ou [KJ15a, Theorem 3.10]).

**Définition 8.1** (corps sans propriété d'indépendance). Un corps gauche  $K$  n'a pas la propriété d'indépendance si chaque formule  $\varphi(x, \bar{y})$  dans le langage des corps a une dimension de Vapnis-Chervonenkis finie, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel maximal  $n$  dépendant de  $\varphi$  et des éléments  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(\bar{b}_J)_{J \subset \{1, \dots, n\}}$  dans  $K$  tels que que

$$(K \models \varphi(a_i, \bar{b}_J)) \iff i \in J.$$

Les groupes définissables dans un corps sans propriété d'indépendance satisfont la condition noethérienne suivante (voir [Poi87]).

**Condition de chaîne de Baldwin-Saxl 8.2** ([BS76]). Soit  $G$  un groupe, et  $\mathfrak{H}$  une famille de sous-groupes de  $G$  uniformément définissable par une formule  $\varphi(x, \bar{y})$ . Si  $\varphi(x, \bar{y})$  a pour dimension de Vapnis-Chervonenkis  $n$ , alors pour toute famille finie  $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$ , il existe une famille  $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{K}$  de taille au plus  $n$  telle que

$$\bigcap \mathfrak{K} = \bigcap \mathfrak{K}_n.$$

On peut étendre cette conditions à certaines parties d'un groupe uniformément définissables qui ne sont pas nécessairement stables par multiplications (voir [Mil16]).

**8.1. Préliminaire sur les corps commutatifs sans propriété d'indépendance.** Si  $K$  est un corps commutatif de caractéristique  $p$ , une extension commutative  $K(a)/K$  est de type Artin-Schreier si  $a$  est racine de l'équation

$$X^p - X = b$$

pour un certain élément  $b$  de  $K$ . On sait peu de choses sur les corps commutatifs pour lesquels  $\text{Th}(K)$  n'a pas la propriété d'indépendance. Nous utiliserons principalement le résultat

suivant, dont la démonstration repose sur la classification des sous-groupe fermés de  $\mathbf{G}_a^n$  de dimension 1 :

**Théorème 8.3** (I. Kaplan [KSW11, Theorem 4.3]). *Un corps commutatif infini de caractéristique  $p$  tel que  $\text{Th}(K)$  n'a pas la propriété d'indépendance n'a pas d'extension propre de type Artin-Schreier.*

Avec comme conséquence immédiate utilisant le résultat de Duret sur les corps faiblement algébriquement clos non séparablement clos (voir [Dur79, Théorème 6.4]) :

**Corollaire 8.4** (I. Kaplan [KSW11, Corollary 4.5]). *Un corps commutatif infini de caractéristique  $p$  tel que  $\text{Th}(K)$  n'a pas la propriété d'indépendance contient le corps  $\mathbf{F}^{alg}$ .*

## 8.2. Préliminaires sur les corps gauches.

**Lemme 8.5** (Herstein [Her96, Lemma 3.1.1 p.70]). *Soit  $K$  un corps non commutatif de caractéristique  $p$ . Soit  $a$  un élément de  $K^\times$  d'ordre fini et hors du centre de  $K$ . Il existe un élément  $b$  de  $K$  et un entier  $i > 0$  tels que*

$$bab^{-1} = a^i \neq a.$$

**Lemme 8.6** (Lam [Lam03, Exercice 13.8 p. 205]). *Soit  $K$  un corps non commutatif de caractéristique  $p$ . Soit  $a$  un élément de  $K^\times$  hors du centre de  $K$  tel que  $a^{p^n}$  soit dans le centre de  $K$ . Il existe un élément  $b$  de  $K$  tel que*

$$bab^{-1} = b + 1.$$

**Lemme 8.7** (Lam [Lam03, Exercice 16.11 p. 239]). *Soit  $K$  un corps non commutatif de centre  $Z(K)$ , et  $a \in K$  un élément algébrique sur  $Z(K)$ . L'équation  $ax - xa = 1$  a une solution  $x$  dans  $D$  si et seulement si  $a$  n'est pas séparable sur  $Z(K)$ .*

**8.3. Corps non commutatifs de caractéristique  $p > 0$  sans propriété d'indépendance.** On considère un corps non commutatif  $K$  de caractéristique  $p$  tel que  $\text{Th}(K)$  n'a pas la propriété d'indépendance.

**Lemme 8.8.** *Le centre de  $K$  est infini, et contient  $\mathbf{F}_p^{alg}$ .*

*Démonstration.* Si tous les éléments de  $K$  sont d'ordre fini, on montre que  $K$  est commutatif : s'il existe un élément  $a$  hors du centre, d'après le lemme de Herstein il existe un élément  $b$  de  $D$  et un entier  $i > 0$  tels que  $bab^{-1} = a^i \neq a$ . Puisque l'on a supposé que  $b$  aussi est d'ordre fini, il s'en suit que le corps engendré par  $a$  et  $b$  est fini, ce qui contredit le théorème de Wedderburn. Supposons donc qu'il existe un élément  $c$  d'ordre infini. Le corps  $Z(C(c))$  est infini et commutatif. Il contient une copie de  $\mathbf{F}^{alg}$  d'après le corollaire 8.4. Il suffit de montrer que le centre de  $K$  contient toute racine  $p^n$ -ième de l'unité. Supposons au contraire qu'il existe un élément  $a \in K \setminus Z(K)$  tel que  $a^{p^n} = 1$ . D'après le lemme de Lam, il existe un élément  $b \in K$  tel que

$$(4) \quad b^a = b + 1.$$

En élevant à la puissance  $p$ , on en déduit  $(b^p)^a = b^p + 1$ , puis

$$(5) \quad (b^p - b)^a = b^p - b.$$

Si  $(b^p - b)$  est d'ordre fini, disons  $(b^p - b)^{p^m} = b^p - b$ , on a pour tout entier  $q$ ,

$$(b^p - b)^{p^{qm}} = b^p - b, \quad \text{et} \\ \left( (b^{p^{qm}})^p - b^{p^{qm}} \right) = b^p - b.$$

Dans le corps commutatif engendré par  $b$ , le polynôme  $X^p - X - (b^p - b)$  n'a qu'un nombre fini de racines, donc il existe deux entiers  $q_1 \neq q_2$  tels que  $b^{p^{q_1 m}} = b^{p^{q_2 m}}$ , et l'ordre de  $b$  est fini. D'après (4),  $a$  et  $b$  engendrent un corps fini, une contradiction avec le théorème de Wedderburn. L'ordre de  $(b^p - b)$  est donc infini, et le corps commutatif  $Z(C(b^p - b))$  est infini. L'élément  $b$  commute avec  $Z(C(b^p - b))$  donc  $Z(C(b^p - b))(b)/Z(C(b^p - b))$  est une extension de type Artin-Schreier. D'après le théorème 8.3, l'élément  $b$  appartient à  $Z(C(b^p - b))$ , donc  $b$  et  $a$  commutent d'après (5), une contradiction avec (4).  $\square$

*Remarque 8.9.* Les corps non commutatifs ayant un centre fini existent. Considérons l'automorphisme de Frobenius  $\sigma : x \mapsto x^p$  sur le corps  $\mathbf{F}_p^{\text{alg}}$ , et le corps  $K = \mathbf{F}_p^{\text{alg}}((x, \sigma))$  des séries de Laurent

$$\sum_{i=m}^{+\infty} a_i x^i$$

où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbf{F}_p^{\text{alg}}$ , et  $m \in \mathbf{Z}$ . La multiplication sur  $K$  est définie en posant

$$x \cdot a = \sigma(a) \cdot x \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{F}_p^{\text{alg}}.$$

Ceci définit bien une structure de corps non commutatif sur  $K$  (voir par exemple [Lam91, Exemple 1.8]). On peut vérifier que le centre de  $K$  est  $\mathbf{F}_p$  (voir [Lam91, Proposition 14.2]).

**Lemme 8.10.** *Pour tout élément  $a$  de  $K$ , on a*

$$C(a^p - a) = C(a).$$

*Démonstration.* Puisque  $a$  commute avec  $Z(C(a^p - a))$ , le corps  $Z(C(a^p - a))(a)$  est commutatif, et l'extension  $Z(C(a^p - a))(a)/Z(C(a^p - a))$  est de type Artin-Schreier. Le corps  $Z(C(a^p - a))$  est infini d'après le lemme précédent. D'après le théorème 8.3, l'élément  $a$  appartient à  $Z(C(a^p - a))$ , donc  $a$  commute avec  $C(a^p - a)$ , et  $C(a^p - a) \subset C(a)$ .  $\square$

**Lemme 8.11** (Équation du métré). *Pour tout élément  $a$  de  $K$ , l'équation  $ax - xa = 1$  n'a pas de solution dans  $K$ .*

*Démonstration.* Sinon, il existe un  $y$  tel que  $y^a = y + 1$ . On en déduit  $(y^p)^a = y^p + 1$ . En retranchant ces deux identités, on obtient

$$(y^p - y)^a = y^p - y.$$

L'élément  $a$  commute avec  $y^p - y$ , mais ne commute pas avec  $y$ , une contradiction avec le lemme précédent.  $\square$

*Remarque 8.12.* Les corps non commutatifs qui pour chaque élément  $a$  hors du centre possèdent une solution à l'équation  $ax - xa = 1$  sont nombreux. On sait que pour tout corps non commutatif  $K$  de centre  $k$ , il existe une extension  $L$  de  $K$  gardant pour centre  $k$  et telle que l'équation  $ax - xa = 1$  ait une solution dans  $L$  pour tout  $a \in L$  transcendant sur  $k$  (voir [Coh73a]).

**Corollaire 8.13.** *Pour tout élément  $a$  de  $K$ , on a*

$$C(a^p) = C(a).$$

*Démonstration.* L'élément  $a$  est algébrique sur  $ZC(a^p)$ . Puisque l'équation  $ax - xa = 1$  n'a pas de solution dans  $K$  d'après le lemme précédent,  $a$  est séparable sur  $ZC(a^p)$  d'après le lemme de Lam, et  $a \in ZC(a^p)$ , donc  $a$  commute avec  $C(a^p)$ , et  $C(a^p) \subset C(a)$ .  $\square$

#### 8.4. Résultat général.

**Théorème 8.14.** *Soit  $K$  un corps non commutatif sans propriété d'indépendance.*

- (1) *Si la caractéristique de  $K$  est  $p > 0$ , le corps  $K$  est de dimension finie sur son centre.*
- (2) *Si la caractéristique de  $K$  est 0, l'équation  $ax - xb = c$  a une solution dans  $K$  pour tout élément  $a$  transcendant sur le centre de  $K$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $K$  contienne un élément  $a$  transcendant sur son centre  $k$ . Puisque  $k(a)/k$  est transcendant, on peut choisir une extension  $\sigma$ -algébriquement close  $\mathbf{K}/K$  de  $K$  d'après le théorème 3.3. Soit  $c$  un élément de  $K$  fixé, et soit  $\sigma$  l'application  $x \mapsto a^{-1}xa$ , et  $\gamma : x \mapsto x^\sigma - xc$ . Si  $ca^{-1}$  est algébrique sur  $k$ , alors  $\gamma$  est surjective d'après [Coh73a, Theorem 2.(ii)]. On suppose donc que  $ca^{-1}$  est transcendant sur  $k$ . On munit  $K^m$  de la topologie de Zariski tordue associée à  $\sigma$ . On emprunte une idée de [Sca99, KSW11] : pour tout entier  $m$  et tout uplet  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$  de  $K^m$ , on considère le sous-groupe fermé  $G_{\bar{b}}^{m+1} \subset \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^{m+1}$  défini par

$$G_{\bar{b}}^{m+1} = \left\{ (t, x_1, \dots, x_m) \in K^{m+1} : t = \gamma(x_i)b_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Il s'agit d'une intersections de  $m$  hypersurfaces, donc  $G_{\bar{b}}^{m+1}$  est irréductible d'après le lemme ?? et  $\dim G_{\bar{b}}^{m+1} \geq 1$  d'après le lemme 6.3. Les fibres de la première projection

$$\pi_1 : G_{\bar{b}}^{m+1} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$$

sont isomorphes à  $C(a)$ , donc de dimension 0, et  $\dim G_{\bar{b}}^{m+1} \leq 1$  d'après le théorème 6.8.(3). D'après la condition de chaîne 8.2, il existe un entier  $n$  tel que pour tout  $b = (b_1, \dots, b_{n+1})$  dans  $K$ , il existe un  $b_i$ , disons par exemple  $b_{n+1}$  tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} \gamma(K)b_i = \bigcap_{i=1}^n \gamma(K)b_i,$$

donc la projection

$$\pi : G_{\bar{b}}^{m+1} \longrightarrow G_{\bar{c}}^m, (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (t, x_1, \dots, x_{n-1})$$

est surjective. Enfin,

*Lemme.* Le groupe  $G_{\bar{b}}^m$  est radical dès que  $0 \notin \bar{b}$ .

*Démonstration du lemme.* On traite le cas  $m = 2$ , le cas général étant similaire. Supposons qu'il existe une distorsion  $u \in K_\sigma^1[x]$  non nulle et  $g(t, x_1, x_2)$  telle que  $u(g) \in I(G_{\bar{b}}^m)$ . En posant  $g = h(t) + i(x_1) + j(x_2)$ , on a

$$(6) \quad uh(t) + ui(x_1) + uj(x_2) = k(t - (x_1^\sigma - x_1c)b_1) + \ell(t - (x_2^\sigma - x_2c)b_2).$$

En faisant la division euclidienne de  $i(x_1)$  par  $(x_1^\sigma - x_1c)b_1$ , on obtient

$$i(x_1) = i'((x_1^\sigma - x_1c)b_1) + x_1r_1, \quad \text{d'où}$$

$$ui(x_1) = ui'((x_1^\sigma - x_1c)b_1) + u(x_1r_1).$$

Mais  $u(x_1r_1)$  doit être divisible par  $x_1^\sigma - x_1c$ . Pour des raisons de degré, on doit avoir  $r_1 = 0$ . De la même manière, on obtient

$$j(x_2) = j'((x_2^\sigma - x_2c)b_2).$$

L'égalité (6) est valable dans tout surcorps de  $K$  de centre  $k$ , et en particulier dans  $\mathbf{K}$ , dans lequel on peut choisir pour chaque  $t \in \mathbf{K}$  des points  $(x_1, x_2)$  vérifiant  $t = (x_1^\sigma - x_1c)b_1 = (x_2^\sigma - x_2c)b_2$ . On en tire  $uh(t) + ui'(t) + uj'(t) = 0$ , et, puisque  $u$  est non nul, l'égalité  $h + i' + j' = 0$ , qui est vrai en particulier dans  $K$ , d'où

$$g(t, x_1, x_2) = i'((x_1^\sigma - x_1c)b_1 - t) + j'((x_2^\sigma - x_2c)b_2 - t). \quad \square$$

Le noyau de  $\pi$  est égal à  $C(a)d$  où  $d = (0, \dots, 0, d_{n+1})$  et  $d_{n+1}$  est une solution non nulle de l'équation  $x^\sigma - xc = 0$  lorsqu'elle existe dans  $K$ , ou nulle sinon. On pose  $\mathbf{d}$  une solution non nulle de  $x^\sigma - xc = 0$  dans  $\mathbf{K}$  (qui existe d'après [Coh73a, Theorem 2.(i)] puisque  $ca^{-1}$  est transcendant sur  $k$ ). D'après le théorème 7.4, on a deux  $\sigma$ -isomorphismes  $\delta : G_b^{n+1} \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$  et  $\gamma : G_b^n \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1$ , et l'on peut choisir  $\delta$  tel que  $\delta_{\mathbf{K}}(0, \dots, 0, \mathbf{d}) = \mathbf{d}$ . Le  $\sigma$ -morphisme  $\rho = \gamma\pi\delta^{-1}$  fait donc commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_b^{m+1} & \xrightarrow{\pi} & G_b^m \\ \delta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1 & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{G}_{\mathbf{a},\sigma}^1 \end{array}$$

$\pi$  étant surjective,  $\rho$  l'est aussi. Le noyau de  $\rho$  est donc égal à  $C(a)\delta(d)$ . Considéré dans  $\mathbf{K}$ , on peut montrer que le diagramme ci-dessus jouit des mêmes propriétés : les fibres de  $\pi_{\mathbf{K}}$  sont de dimension 0, donc son image, qui est fermée d'après le théorème de Chevalley-Cohn, est de dimension 1 ; mais  $G_b^m(\mathbf{K})$  est radical, de sorte que  $\pi_{\mathbf{K}}$  est surjective. Considérés dans  $\mathbf{K}$ , les  $\sigma$ -morphisms  $\delta_{\mathbf{K}}$  et  $\gamma_{\mathbf{K}}$  sont encore bijectifs (c'est une conséquence directe du théorème d'Amitsur puisque qu'on considère que  $[K : k]$  est infini : si un  $\sigma$ -morphisme à coefficients dans  $K$  est nul sur  $K$ , il est nul sur  $\mathbf{K}$  également). Dans  $\mathbf{K}$ , l'équation  $x^\sigma - xc = 0$  a une solution non nulle  $\mathbf{d}$  : le  $\sigma$ -morphisme  $\rho_{\mathbf{K}}$  s'annule en  $\delta_{\mathbf{K}}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}$ , et d'après le lemme 1.6, se factorise dans  $\mathbf{K}_\sigma^1[x]$  en  $\rho_{\mathbf{K}} = \beta_{\mathbf{K}}\gamma_{\mathbf{K}}$  avec

$$\gamma_{\mathbf{K}}(x) = x^\sigma - x\mathbf{d}^{-1}\mathbf{d}^\sigma = x^\sigma - xc.$$

Puisque  $\gamma_{\mathbf{K}}$  et  $\rho_{\mathbf{K}}$  sont à coefficients dans  $K$ ,  $\beta_{\mathbf{K}}$  est également à coefficients dans  $K$ . La fonction  $\beta_{\mathbf{K}}$  est nécessairement injective, ainsi que sa restriction  $\beta_{\mathbf{K}}$  à  $K$ . On en déduit que  $\gamma_{\mathbf{K}}$  est surjective dans  $K$ . En caractéristique positive, en prenant  $c = 1$ , on obtient une contradiction avec le lemme 8.11 : dans ce cas, le corps  $K$  est algébrique sur son centre, et par un argument de compacité, il doit être de dimension finie sur  $k$ . En caractéristique zéro,

on déduit de la définition 3.2 que  $K$  est  $\sigma$ -algébriquement clos pour tout  $a$  transcendant sur le centre.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [Ami65] Shimshon Amitsur, *Generalized polynomial identities and pivotal monomials*, Transaction of the American Mathematical Society **114** (1965), 210–226.
- [Art10] Michael Artin, *Algebra*, Pearson, Second Edition, 2010.
- [BS76] John Baldwin and Jan Saxl, *Logical stability in group theory*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **21** (1976), no. 3, 267–276.
- [Che78] Gregory Cherlin, *Superstable division rings*, Logic Colloquium 1977, 1978, pp. 99–111.
- [Coh73a] Paul Moritz Cohn, *The range of derivations on a skew field and the equation  $ax - xb = c$* , Journal of the Indian Mathematical Society **37** (1973), 61–69.
- [Coh73b] ———, *The similarity reduction of matrices over a skew field*, Mathematische Zeitschrift **132** (1973), 151–163.
- [Coh95] ———, *Skew fields, theory of general division rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 57, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Dur79] Jean-Louis Duret, *Les corps faiblement algébriquement clos non séparablement clos ont la propriété d'indépendance*, Model Theory of Algebra and Arithmetic (proc. Karpacz), Lecture Notes in Mathematics, vol. 834, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp. 13–162.
- [Efr06] Ido Efrat, *Valuations, orderings, and milnor  $k$ -theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [EP05] Antonio Engler and Alexander Prestel, *Valued fields*, Springer Monographs in Mathematics, 2005.
- [GM65] Basil Gordon and Theodore Motzkin, *On the zeros of polynomials in division rings*, Transactions of the American Mathematical Society **116** (1965), 218–226.
- [Ham50] William Hamilton, *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science (1844-1850).
- [Her56] Israel Herstein, *Conjugates in division rings*, Proceedings of the American Mathematical Society **7** (1956), 1021–1022.
- [Her96] ———, *Noncommutative rings*, The Mathematical Association of America, fourth edition, 1996.
- [Hil03] David Hilbert, *Grundlagen der geometrie*, 2nd Edition, Leipzig (1903).
- [Hum75] James Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate texts in mathematics, Springer-verlag, 1975.
- [HW75] Joram Hirschfeld and William Wheeler, *Forcing, arithmetic, division rings*, Springer-verlag, 1975.
- [KJ15a] Jochen Koenigsmann and Franziska Jahnke, *Definable henselian valuations*, The Journal of Symbolic Logic **80** (2015), 85–99.
- [KJ15b] ———, *Uniformly defining  $p$ -henselian valuations*, Annals of Pure and Applied Logic **166** (2015), 741–754.
- [Kru32] Wolfgang Krull, *Allgemeine bewertungstheorie*, Journal für Mathematik **167** (1932), 160–196.
- [KSW11] Itay Kaplan, Thomas Scanlon, and Frank O. Wagner, *Artin-Schreier extensions in NIP and simple fields*, Israel J. Math. **185** (2011), 141–153.
- [Lam91] Tsit Yuen Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1991.
- [Lam03] ———, *Exercises in classical ring theory*, Problem books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003, Second Edition.
- [Mil07] Cédric Milliet, *Small skew fields*, Mathematical Logic Quarterly **53** (2007), 86–90.

- [Mil11] ———, *Stable division rings*, *Journal of Symbolic Logic* **76** (2011), 348–352.
- [Mil16] ———, *Variations sur un thème de Aldama et Shelah*, *The Journal of Symbolic Logic* (2016), 1–31.
- [NE44] Ivan Niven and Samuel Eilenberg, *The ‘fundamental theorem of algebra’ for quaternions*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **50** (1944), 246–248.
- [Niv41] Ivan Niven, *Equations in quaternions*, *The American Mathematical Monthly* **48** (1941), 654–661.
- [Per01] Daniel Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction*, EDP Sciences, CNRS Éditions, 2001.
- [Poi85] Bruno Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Bruno Poizat, Lyon, 1985, Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].
- [Poi87] ———, *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma’rifah [Light of Logic and Knowledge], 2, Bruno Poizat, Lyon, 1987, Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique. [An attempt at reconciling algebraic geometry and mathematical logic].
- [Sca99] Thomas Scanlon, *Infinite stable fields are Artin-Schreier closed*, unpublished (1999).
- [Spr98] Tonny Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, 1998.
- [TY05] Patrice Tauvel and Rupert Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, 2005.

5, RUE ORNANO,  
69001 LYON, FRANCE

*E-mail address:* `cedric.milliet@gmail.com`