



HAL
open science

Stabilité forte du fibré tangent pour des variétés Fano

Julien Keller

► **To cite this version:**

| Julien Keller. Stabilité forte du fibré tangent pour des variétés Fano. 2002. hal-01282580

HAL Id: hal-01282580

<https://hal.science/hal-01282580>

Preprint submitted on 3 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Stabilité forte du fibré tangent pour des variétés lisses de type Fano

Julien Keller

Laboratoire E.Picard, Université Paul Sabatier - Toulouse III

Email : keller@picard.ups-tlse.fr

May 22, 2002

1 Introduction

Soit M une variété Kählérienne compacte de dimension complexe n et soit H un fibré en droites ample sur M . Pour tout faisceau \mathcal{F} cohérent sans torsion sur M , nous notons $\deg(\mathcal{F})$ le degré de \mathcal{F} par rapport à H , c'est à dire le degré du fibré déterminant de \mathcal{F}

$$\deg(\mathcal{F}) = \deg(\wedge^r \mathcal{F}) = (c_1(\mathcal{F}) \cdot H^{n-1})$$

et

$$\mu_H(\mathcal{F}) = \frac{\deg(\mathcal{F})}{\text{rang}(\mathcal{F})}$$

le degré normalisé de \mathcal{F} par rapport à H . Rappelons que dans le cadre des variétés Kählériennes, nous disposons de la notion de stabilité au sens de Mumford-Takemoto : \mathcal{F} est dit H -stable (resp. H -semistable) si pour tout sous-faisceau \mathcal{F}' de \mathcal{F} avec $0 < \text{rang}(\mathcal{F}') < \text{rang}(\mathcal{F})$, on a $\mu_H(\mathcal{F}') < \mu_H(\mathcal{F})$ (resp. $\mu_H(\mathcal{F}') \leq \mu_H(\mathcal{F})$).

Nous allons tout d'abord généraliser la notion de stabilité de Mumford-Takemoto. Soit maintenant deux faisceaux cohérents \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sur M . Une extension de \mathcal{F}_1 par \mathcal{F}_2 est la donnée d'un faisceau cohérent \mathcal{F}_3 avec la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0$$

Définition 1.0.1 Une paire $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ de faisceaux cohérents est dit H -stable (resp. H -semistable) si l'extension générique \mathcal{F}_3 de \mathcal{F}_1 par \mathcal{F}_2 est H -stable (resp. H -semistable) au sens de Mumford-Takemoto. Un faisceau cohérent sans torsion \mathcal{F} est fortement H -stable (resp. fortement H -semistable) si \mathcal{F} et la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{O}_M)$ sont tous deux H -stables (resp. H -semistables), où \mathcal{O}_M est le faisceau structural de M .

Les propriétés de tels fibrés sont étudiées dans [T2]. De plus, F. Bogomolov a introduit une autre notion de stabilité :

Définition 1.0.2 Soit un réel $0 < \lambda \leq 1$. Un faisceau sans torsion \mathcal{F} est dit λ -stable si pour tout sous-faisceau \mathcal{F}' avec $0 < \text{rang}(\mathcal{F}') < \text{rang}(\mathcal{F})$, l'on a l'inégalité

$$\mu_H(\mathcal{F}') < \lambda \mu_H(\mathcal{F})$$

Proposition 1.1 Les propriétés suivantes sont vraies :

- (1) Une petite déformation d'un fibré λ -stable est encore λ -stable
- (2) Si E est $\frac{n}{n+1}$ -stable, alors E est fortement stable.

Dans la section suivante, nous étudierons $M \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ (pour $n \geq 3$) une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$, la stabilité sera considérée par rapport au fibré ample naturel $\mathcal{O}_M(1)$ et l'on posera $\mu(\mathcal{F}) = \mu_{\mathcal{O}_M(1)}(\mathcal{F})$.

Nous cherchons maintenant à prouver de manière élémentaire que dans ces conditions, le fibré tangent complexe TM de M est fortement stable. En particulier, nous savons par [T2, Théorème 2.1] que pour toute variété X Kähler-Einstein avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et avec algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes $\eta(X)$ triviale, le fibré TX est $\frac{n}{n+1}$ -stable. Or pour $d > n$, M est une variété Kähler-Einstein (puisque $c_1(M) = 0$ ou $c_1(M) < 0$) avec $\eta(M) = \{0\}$ et $\text{Pic}(M) = \mathbb{Z}$ ([Ha1],[M-F-K]). Nous nous restreignons donc au cas où $3 \leq d \leq n$, c'est à dire au cas où le fibré anticanonique est ample, ce qui, par définition, signifie que M est une variété de type Fano.

Remarque 1 Il existe différentes notions de stabilité [H-L]. En particulier, une conséquence de notre travail est que le fibré TM est stable au sens de Gieseker.

Remarque 2 Dans le cas $d \geq \frac{n+1}{2}$, T. Aubin conjecture qu'il existe une métrique Kähler-Einstein sur toute hypersurface lisse de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de degré d (Voir [A]).

Ainsi le but de cette note est le

Théorème 1 Toute hypersurface lisse de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de degré $d > 2$ a son fibré tangent fortement stable.

2 Preuve du théorème

Soit \mathcal{F} un sous-faisceau de $\mathcal{E} = \mathcal{O}(TM)$ cohérent de rang $r < \text{rang}(TM)$ tel que \mathcal{E}/\mathcal{F} est sans torsion. L'inclusion $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ induit un homomorphisme injectif $\det(j)$ (\mathcal{F} est un sous fibré de \mathcal{E} sur un ouvert Zariski de M)

$$\det(j) : \det(\mathcal{F}) = (\wedge^r \mathcal{F})^{**} \rightarrow (\wedge^r \mathcal{E})^{**} = (\wedge^r \mathcal{E})$$

dont le noyau est un faisceau de torsion. En tensorisant avec l'endomorphisme identité de $(\det \mathcal{F})^*$, nous obtenons un homomorphisme non trivial qui peut-être vu comme une section holomorphe non triviale du fibré $\wedge^r TM \otimes \det(\mathcal{F})^*$:

$$s : \mathcal{O}_M \rightarrow \wedge^r TM \otimes \det(\mathcal{F})^*$$

Mais, puisque $\dim(M) \geq 3$, $\text{Pic}(M) = \mathbb{Z}$ par [Ha1], et en vue de la proposition 1.1 (2), il nous suffit de prouver que

$$H^0(M, \wedge^r TM \otimes \det(\mathcal{F})^*) = H^0(M, \wedge^r TM \otimes \mathcal{O}_M(-f)) = 0$$

pour tout $(r, f) \in I$ où l'on a défini l'ensemble

$$I = \left\{ (r, f) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq r \leq n-2 \text{ et } \frac{f}{r} \geq \frac{c_1(TM) \cdot (c_1(\mathcal{O}_M(1)))^{n-2}}{n} \right\}$$

ce qui permettra de conclure par [Ko, p:52-54] que $\mu(\mathcal{F}) < \frac{n-1}{n}\mu(\mathcal{E})$.

Nous pouvons appliquer la dualité de Serre puisque nous connaissons le fibré canonique de M , $K_M = \mathcal{O}(n+1-d)$ ([Hal]), et nous sommes ramenés à prouver par conséquent que

$$H^{n-1}(M, \Omega_M^r \otimes \mathcal{O}_M(f) \otimes K_M) = H^{n-1}(M, \Omega_M^r \otimes \mathcal{O}_M(f+d-n-1)) = 0 \quad (1)$$

pour $1 \leq r \leq n-2$ et $f \geq r \frac{n+1-d}{n}$. Notons désormais

$$f_r = \begin{cases} r \frac{n+1-d}{n} & \text{si } r \frac{n+1-d}{n} \in \mathbb{N} \\ \lceil r \frac{n+1-d}{n} \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et remarquons que l'on a toujours $f_r \geq 1$.

Proposition 2.1 *Dans les conditions précédentes, nous avons*

$$H^{n-1}(M, \Omega_M^r \otimes \mathcal{O}_M(f_r + d - n - 1)) = 0$$

Preuve. En effet, la suite exacte courte du fibré normal sur M s'écrit,

$$0 \rightarrow T_M \rightarrow T_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}|_M \rightarrow \mathcal{O}_M(d) \rightarrow 0$$

soit encore dualement,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_M(-d) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1|_M \rightarrow \Omega_M^1 \rightarrow 0$$

et donc

$$0 \rightarrow \Omega_M^r(-d) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}|_M \rightarrow \Omega_M^{r+1} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \Omega_M^r(f_r + d - n - 1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M \rightarrow \Omega_M^{r+1}(f_r + 2d - n - 1) \rightarrow 0$$

ce qui donne au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-2}(M, \Omega_M^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) &\rightarrow H^{n-1}(\Omega_M^r(f_r + d - n - 1)) \\ &\rightarrow H^{n-1}(M, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M) \rightarrow H^{n-1}(M, \Omega_M^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Supposons dans un premier temps que $d \geq \frac{n+1}{2}$. Alors, $f_r + 2d - n - 1 > 0$ et on

peut appliquer le théorème d'annulation de Nakano [Ko, p:74] puisque $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} H^{n-2}(M, \Omega^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) &= 0 \\ H^{n-1}(M, \Omega^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) &= 0 \end{aligned}$$

On est donc ramené à démontrer d'après la suite cohomologique ci-dessus que $H^{n-1}(M, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M) = 0$.

Maintenant, considérons la suite exacte naturelle, donnée par “multiplication par F ” où F est la forme de degré d définissant la variété M ,

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1(-d) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1|_M \rightarrow 0$$

ce qui donne

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + d - n - 1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M \rightarrow 0$$

et au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) &\rightarrow H^{n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M) \\ &\rightarrow H^n(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + d - n - 1)) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3)$$

On peut alors appliquer le théorème d’annulation de Bott [Ko, p:78]

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^p(k)) = 0 \text{ pour } p, q \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ sauf pour } \begin{cases} p = q, & k = 0 \\ q = 0, & k > p \\ q = n, & k < p - n \end{cases}$$

et si $H^n(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + d - n - 1)) \neq 0$ alors $2 - d > f_r - r$ puis il vient $(d - 2) < r \frac{(d-1)}{n}$, ce qui est absurde puisque $d > 2$ et $r < n - 1$ (ici une étude du cas critique $d = \frac{n+1}{2}$ s’impose avec l’utilisation du fait que $f_r \in \mathbb{N}^*$). Avec toujours $f_r + 2d - n - 1 > 0$ on obtient que $H^{n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)) = 0$ et ainsi $H^{n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + 2d - n - 1)|_M) = 0$. Dès lors la proposition 2.1 est prouvée pour $d \geq \frac{n+1}{2}$. Un calcul simple montre également que dans le cas $2 < d < \frac{n+1}{2}$, et $n - 3 \leq r \leq n - 2$, l’on a encore $f_r + 2d - n - 1 > 0$ donc le même raisonnement peut-être appliqué dans ce cas particulier ainsi qu’à tous les triplets (d, r, n) tels que $f_r + 2d - n - 1 > 0$.

Reste à prouver que la proposition 2.1 est encore vraie dans les autres cas, c’est à dire $(2 < d < \frac{n+1}{2}, r < n - 3)$. Soit $p > 3$ le plus petit entier tel que l’on ait l’inégalité $f_r + pd - n - 1 > 0$. Le théorème d’annulation de Nakano donne cette fois-ci que les espaces $H^{n-1}(\Omega_M^r(f_r + (p-1)d - n - 1))$ et $H^{n-1}(M, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + pd - n - 1)|_M)$ sont isomorphes et on peut encore appliquer le théorème d’annulation de Bott puisque

$$r + 1 - (p - 1)d - f_r + n + 1 > n$$

conduit à une absurdité vu que $p > 2$, $d > 2$ et $r < n - 1$. Ainsi,

$$H^{n-1}(\Omega_M^r(f_r + (p - 1)d - n - 1)) = 0$$

La suite cohomologique (3) peut-être réécrite en

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p - 1)d - n - 1)) &\rightarrow H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p - 1)d - n - 1)|_M) \\ &\rightarrow H^n(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p - 2)d - n - 1)) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4)$$

et comme $r \neq n - 2$, le théorème d’annulation de Bott prouve que l’on a $H^{n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p - 1)d - n - 1)|_M) = 0$. Avec la suite (2), nous obtenons donc la nouvelle suite cohomologique :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-2}(M, \Omega_M^{r+1}(f_r + (p - 1)d - n - 1)) &\rightarrow \\ H^{n-1}(M, \Omega_M^r(f_r + (p - 2)d - n - 1)) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Montrons maintenant que $H^{n-2}(M, \Omega_M^{r+1}(f_r + (p-1)d - n - 1)) = 0$. Nous disposons de la suite exacte suivante donnée par multiplication par F :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow 0$$

et donc

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(-d) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1} \rightarrow \Omega_M^{r+1} \rightarrow 0$$

et au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^{n-2}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p-1)d - n - 1)) \rightarrow H^{n-2}(\Omega_M^{r+1}(f_r + (p-1)d - n - 1)) \\ &\rightarrow H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p-2)d - n - 1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Comme $r \neq n-3$, $H^{n-2}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p-1)d - n - 1)) = 0$, et l'on a également $H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{r+1}(f_r + (p-2)d - n - 1)) = 0$ car $r \neq n-2$ et en appliquant une nouvelle fois le théorème de Bott. Ainsi, la suite (5) prouve que

$$H^{n-1}(M, \Omega_M^r(f_r + (p-2)d - n - 1)) = 0$$

et en itérant ce processus k fois jusqu'à ce que $(p-k-1) = 1$ (les hypothèses des théorèmes d'annulations sont vérifiées à chaque étape), on prouve ainsi que $H^{n-1}(M, \Omega_M^r(f_r + d - n - 1)) = 0$. ■

Par ailleurs la proposition 2.1 suffit à prouver l'annulation des espaces

$$H^{n-1}(M, \Omega_M^r \otimes \mathcal{O}_M(f) \otimes K_M)$$

de (1) pour $1 \leq r \leq n-2$ et $f \geq r \frac{n+1-d}{n}$. En effet, si nous fixons D une section hyperplane de M , $\Omega^r(m)$ peut être identifié avec le faisceau des p -formes à valeurs dans $\mathcal{O}_M(m+1)$ avec pôle d'ordre 1 sur D . Ainsi, nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_M^p(m) \rightarrow \Omega_M^p(m+1) \xrightarrow{R} \Omega_D^{p-1}(m) \rightarrow 0 \quad (6)$$

en définissant R de la manière suivante : si localement $\{g=0\}$ définit D et $\phi \in \Omega_M^p(m+1)$ s'écrit $\phi = \frac{1}{g}(dg \wedge \eta + \alpha)$ où α ne fait pas intervenir le terme dg , alors on pose $R(\phi) = \pi^* \eta$ où $\pi : D \hookrightarrow M$ est le plongement canonique. Dès lors, par (6), on voit que $\forall f \geq f_r$, $H^{n-1}(\Omega_M^r(f_r + d - n - 1)) = 0$ infère $H^{n-1}(\Omega_M^r(f + d - n - 1)) = 0$ et le théorème est prouvé.

Corollaire 2.1 *Les hypersurfaces lisses de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de degré supérieur ou égal à 3, qui sont exactement toutes les hypersurfaces Hilbert-Mumford stables (orbite fermée sous l'action naturelle de $SL(n+1, \mathbb{C})$ et stabilisateur fini, [M-F-K, p:79]) ont leur fibré tangent fortement stable.*

Remarque 3 *Le résultat reste vrai sur tout corps de caractéristique nulle de par le résultat de P. Deligne [D].*

Remarque 4 *La première suite exacte peut être réutilisée pour prouver de manière similaire que le fibré cotangent est aussi fortement stable.*

Remarque 5 *Le théorème se généralise bien entendu au cadre des intersections complètes. En particulier, ceci est intéressant si la conjecture de R. Hartshorne est vraie : toute variété complexe projective $M \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de dimension m , lisse et connexe, est une intersection complète si $m > \frac{2}{3}n$ [Ha2].*

3 Forte stabilité pour les variétés del Pezzo

En dimension 2, les variétés Fano ont été classifiées. Il s'agit des variétés Del Pezzo, c'est à dire de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et des éclatés de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en k points (en position générique) pour $1 \leq k \leq 8$. Dans [T2], G. Tian prouve que pour $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ éclaté en un point, le fibré tangent n'est pas fortement semi-stable. Une question naturelle est de s'intéresser à la forte stabilité du fibré tangent de $S_k = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \#_k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ pour $2 \leq k \leq 8$, ce qui n'est pas évident puisque [T2, Théorème 2.1] ne s'applique pas. Nous prouvons maintenant une généralisation de [F, Théorème §3]:

Théorème 2 *Les surfaces del Pezzo $(S_k)_{k=2..8}$ ont leurs fibrés tangents fortement stables.*

Preuve. La surface S_k est l'éclatée des points $(p_i)_{i=1..k}$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ auxquels sont associés les droites exceptionnelles $(E_i)_{i=1..k}$. On désigne par E_0 l'image réciproque d'une droite de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et par e_i la classe du diviseur E_i pour $i = 0, \dots, k$ dans $Pic(S_k)$. Le groupe $Pic(S_k)$ est engendré par $(e_i)_{i=0..k}$ et la forme d'intersection est donnée par (Cf [Ha1])

$$\begin{aligned} \langle e_0, e_0 \rangle &= 1, & \langle e_i, e_i \rangle &= -1 \text{ si } i = 1, \dots, k \\ \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \text{ pour } i \neq j \end{aligned}$$

La classe dans $Pic(S_k)$ du diviseur canonique K de S_k est $-3e_0 + \sum_{i=1}^k e_i$. Considérons la stabilité relativement à la polarisation donnée par $-K$. En vue de la proposition 1.1 et de [F, lemme 1], il s'agit de prouver que pour tout sous-faisceau $L = \mathcal{O}(-rE_0 + \sum_{i=1}^k a_i E_i)$ saturé de TS_k ($r > 2$), nous avons

$$(-K \cdot L) < \frac{1}{3}(-K \cdot K) \quad (7)$$

Toujours par [F, lemme 1], il existe un diviseur effectif C tel que

$$C = (r-1)E_0 - (a_1+1)E_1 - \sum_{i=2}^k (a_i-1)E_i$$

Notons $d = (-K \cdot C) = 3r - \sum a_i + k - 5$ et bien sûr $d > 0$ puisque $-K$ est ample. Or l'inégalité (7) se réécrit par un simple calcul sous la condition

$$3 \sum_{i=1}^k a_i < 9r + k - 9$$

c'est à dire

$$3d > 2k - 6$$

▷ Pour $k = 2, 3$ le résultat est immédiat.

▷ Pour $k = 4, 5, 6$ il suffit d'étudier le cas $d \leq 2$. Comme $C \cdot E_1 \leq 2$, l'on obtient $a_1 \leq 1$ et par symétrie, on peut supposer $a_i \leq 1$. Si $k > 2$, cela donne une contradiction : $d \geq 4$.

▷ Pour $k = 7$, l'on suppose $d \leq 3$. L saturé donne $c_2(TS_7 \otimes L^{-1}) \geq 0$, soit

$$\sum_{i=1}^k (a_i - a_i^2) + r^2 - 3r + 10 > 0$$

et en majorant $\sum a_i^2$ par $\frac{1}{k} (\sum a_i)^2$,

$$(3r - d + 2)^2 \leq 7(r^2 - d + 12) \quad (8)$$

La surface S_6 admet un diviseur effectif : $(r - 1) E_0 - (a_1 + 1) E_1 - \sum_{i=2}^6 (a_i - 1) E_i$, et son image par le plongement ϕ_{-K} est de degré $d + a_7 - 1$. Prenant l'intersection avec E_1 , on obtient

$$a_1 + 1 \leq d + a_7 - 1$$

Si $d = 1$, on en déduit $a_1 < a_7$ ce qui est impossible vu le rôle symétrique des a_i . Si $d = 2$, les a_i sont tous égaux et $3r = 7a_i$ donc $r \geq 7$ ce qui contredit (8).
 ▷ Pour $k = 8$, on se ramène à étudier le cas $d \leq 3$ et $r \geq 3$. En numérotant les points p_i de sorte que $a_1 \geq a_i$ pour tout i , on obtient que $a_1 \geq 2$. Soit le diviseur $D = 6E_0 - 3E_1 - 2 \sum_{i=2}^8 E_i$. Remarquons que $D \cdot D = D \cdot K = -1$. Par conséquent D est linéairement équivalent à une courbe exceptionnelle C ([Hal]) et l'on dispose de la suite exacte

$$0 \rightarrow O_{S_8}(-C)|_C \rightarrow T_{S_8}|_C \rightarrow K_C \rightarrow 0$$

En tensorisant par L^{-1} , on obtient

$$0 \rightarrow L^{-1}(-C)|_C \rightarrow T_{S_8} \otimes L^{-1}|_C \rightarrow K_C \otimes L^{-1}|_C \rightarrow 0 \quad (9)$$

On calcule

$$\deg_C (L^{-1}(-C)|_C) = 2d - a_1 - 5 < 0$$

et

$$\deg (K_C \otimes L^{-1}|_C) = 2d - a_1 - 8 < 0$$

Par conséquent, la suite cohomologique associée à (9) donne

$$H^0(C, T_{S_8} \otimes L^{-1}|_C) = 0$$

Ainsi, toute section globale de $T_{S_8} \otimes L^{-1}|_C$ s'annule sur C , ce qui contredit le fait que L est saturé. ■

Remarque 6 *A l'inverse de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, \mathbb{CP}^2 a son fibré stable fortement stable. Avec le théorème, on obtient donc la classification des variétés Fano de dimension 2 à fibré tangent fortement stable.*

Conjecture 1 *Il existe une variété X Fano de dimension 3, avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et fibré tangent Mumford stable mais non fortement stable.*

References

- [A] Aubin, T. *Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes à la démonstration d'une inégalité*, Journ. Funct. Analysis, 57(2):143-153 (1984).
- [D] Deligne, P. *Groupes de Monodromie en Géométrie algébrique, (SGA 7 II)*, Lect. Notes in Math, 340 (1973).
- [F] Fahlaoui, R. *Stabilité du fibré tangent des surfaces del Pezzo*, Math. Ann, 283(1):171-176 (1989).
- [Ha1] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1977).
- [Ha2] Hartshorne, R. *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. Amer. Soc., 80:1017-1032 (1974).
- [H-L] Huybrechts, D. & Lehn, M. *The Geometry of moduli of sheaves*, Pub. of Max-Planck-Institut Bonn, (1997).
- [Ho] Hoppe, H. J., *Generic decomposition type and second Chern class of stable rank 4 vector bundles on \mathbb{P}^4* , Math.Z, 187(3):345-360 (1984).
- [K-S] Katz, N. & Sarnak, P. *Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy*, Colloquium Pub. Amer. Math. Society, Vol 45 (1999).
- [Ko] Kobayashi, S. *Differential Geometry of complex vector bundles*, Princeton Univ. Press, (1987).
- [M-F-K] Mumford, D. & Fogarty, J. & Kirwan, F. *Geometric Invariant Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, (1994).
- [T1] Tian, G. *Kähler-Einstein metrics on Algebraic manifolds*, Lect. Notes in Mathematics, Springer, 1646 (1996).
- [T2] Tian, G. *On stability of the tangent bundles of Fano varieties*, Int. Journ. Math, 3(3):401-413 (1992).