



**HAL**  
open science

## Caractères remarquables de la méthode de Kron

Olivier Maurice

► **To cite this version:**

| Olivier Maurice. Caractères remarquables de la méthode de Kron. 2016. hal-01282162

**HAL Id: hal-01282162**

**<https://hal.science/hal-01282162>**

Preprint submitted on 3 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Caractères remarquables de la méthode de Kron

Olivier MAURICE

7 février 2016

## Résumé

On peut se demander quels avantages significatifs la méthode de Kron pourrait présenter par rapport aux méthodes usuelles de calcul de circuits électriques : méthodes directe (équations de Kirchhoff), nodale, MNA (Modified Nodal Analysis)? L'objet de ce papier est de présenter quelques cas où effectivement l'approche tensorielle de Kron et sa proposition de travailler dans les espaces des mailles et paires de nœuds semble présenter des avantages significatifs.

## 1 Introduction

Des cas déjà abordés peuvent être considérés comme premiers arguments ; dans le désordre :

- l'adéquation du formalisme de Kron avec la seconde géométrisation ;
- la possibilité de créer des topologies variables beaucoup plus facilement ;
- la machine de Kron ;
- l'expression du lagrangien ;
- le fait de travailler dans l'espace co-tangent ;
- le fait d'avoir moins de variables à résoudre ;
- structure vis à vis de la matrice d'interaction en CEM et utilisation abstraite de la méthode ;
- bon conditionnement des matrices.

Nous allons traiter chacun de ces cas en commençant par les plus évidents. Dans tous les cas nous écartons la méthode directe qui de toute façon ne résout pas les couplages multiples et a justifié par là la création des méthodes nodale ou MNA aujourd'hui les plus employées dans les simulateurs de circuits.

## 2 La machine de Kron

La machine de Kron part d'une machine synthétique statique, considérée comme "primitive" puis, par une transformation de connectivité, crée les équations de la machine réelle. L'exemple donné par Kron mais aussi par Papin et Kaufmann (cours de calcul tensoriel, chez Albin Michel, 1966) part d'une impédance de machine primitive donnée par :

$$Z = \begin{bmatrix} R + L_s p & Mp & 0 \\ Mp & r + L_r p & L_r \Omega \\ -M\Omega & -L_r \Omega & r + L_r p \end{bmatrix} \quad (1)$$

On y reconnaît les éléments de rotor et stator, vitesse angulaire, etc. A ce stade on fait le lien avec la machine réelle en créant une transformation des courants  $i^k$  de la machine synthétique vers ceux  $i'^q$  de la machine tournante réelle :

$$\begin{cases} i^1 = i'^1 \\ i^2 = -i'^2 \cos\alpha \\ i^3 = -i'^2 \sin\alpha \end{cases} \quad (2)$$

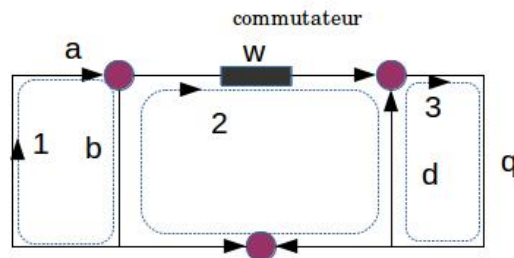
La connectivité qui s'en déduit est variable dans le temps. Il n'est pas utile d'aller plus loin. La méthode nodale ne travaillant qu'en transformation entre les potentiels de nœuds et de branches ne peut inscrire cette transformation située dans l'espace des mailles. La machine de Kron qui est la machine la plus générale et la plus rigoureuse dans sa description théorique (pouvant même être relativiste, même si cela n'a pas forcément de sens pour des machines électriques!) ne peut être transcrite en méthode nodale. Il en sera de même pour la MNA qui ajoute aux équations de l'espace des nœuds de la méthode nodale un jeu d'équations reportant les fém de branches associées aux inductances. On pourrait imaginer une transformation appliquée à cette seule partie. Mais cela compliquerait quand même significativement l'expression, obligeant à agir sur les potentiels de nœuds a posteriori. Il semblerait en tout cas que l'on ne trouve aucun travaux sur ce sujet en tout cas sous google scholar. Par ailleurs de nombreux articles sur les machines rappellent qu'aucune autre méthode ne permet de les modéliser avec autant de pertinence que la méthode de Kron (voir article ABDEL-HALIM, M. A. et MANNING, C. D. Modelling a laminated brushless exciter-alternator unit in all modes of operation. Electric Power Applications, IEE Proceedings B, 1991, vol. 138, no 2, p. 87-94.)

### 3 Topologies variables - facilité de création

La matrice de connectivité dans la méthode de Kron, peut dépendre du temps. Dans le modèle de la machine de Kron c'est même cette dépendance qui permet d'écrire les lois de la machine tournante. On se demande ici si l'établissement d'une connectivité variable utilisée pour faire varier la topologie d'un graphe ne serait pas un autre usage intéressant de cette modularité possible.

#### 3.1 Structure considérée

On se place sur une structure à trois mailles dont la maille centrale passe par un commutateur.



On peut définir une connectivité entre les courants de branches et de mailles qui dépendent du temps de façon à « faire disparaître » la branche du commutateur quand celui-ci est en état ouvert. Pour cela on définit :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -f & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & -f & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$f$  est une fonction qui dépend du temps et décrit la commutation. Partant de la description du circuit dans l'espace des branches :

$$z_b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

On calcule le passage de l'espace des branches à celui des mailles sous Maxima :

```
(%i1) z:matrix([a,0,0,0,0],[0,b,0,0,0],[0,0,w,0,0],[0,0,0,d,0],[0,0,0,0,q]);
(%o1)
[ a 0 0 0 0 ]
[ 0 b 0 0 0 ]
[ 0 0 w 0 0 ]
[ 0 0 0 d 0 ]
[ 0 0 0 0 q ]
(%i2) C:matrix([1,0,0],[1,-f,0],[0,f,0],[0,-f,1],[0,0,1]);
(%o2)
[ 1 0 0 ]
[ 1 - f 0 ]
[ 0 f 0 ]
[ 0 - f 1 ]
[ 0 0 1 ]
(%i3) transpose(C).z.C;
(%o3)
[ b + a      - b f      0 ]
[ - b f      f^2 + w + d + b f^2 - d f ]
[ 0      - d f      q + d ]
(%i4)
```

### 3.2 Comportement

La structure que l'on va résoudre de fait s'écrit :

$$\begin{bmatrix} e_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & -bf & 0 \\ -bf & (w + d + b)f^2 & -df \\ 0 & -df & q + d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{bmatrix}$$

Supposons que la fonction  $f$  soit une fonction binaire. Si  $f = 0$  on trouve :

$$\begin{bmatrix} e_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q + d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{bmatrix}$$

soit un circuit constitué des deux seules mailles 1 et 3 dont seule la première est alimentée ici et une équation ne sert plus à rien, la variable  $i^2$  devient indéterminée. Si par contre  $f = 1$  c'est à dire si le commutateur est en position fermée, on trouve :

$$\begin{bmatrix} e_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & -b & 0 \\ -b & (w+d+b) & -d \\ 0 & -d & q+d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{bmatrix}$$

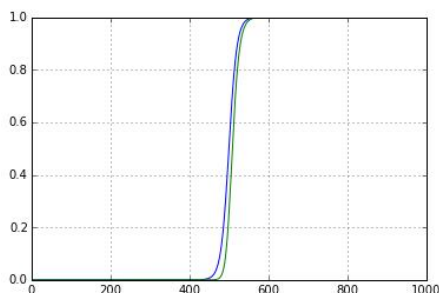
où  $w$  est l'impédance du commutateur fermé.

### 3.3 Choix d'une fonction de commutation et généralisation

On voit que dans la transformation apparaît le carré de la fonction de commutation  $f$ . Il est donc intéressant de trouver une fonction qui soit peu affectée par une élévation au carré. C'est le cas de la fonction logistique :

$$f(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}$$

On a tracé cette fonction et son carré figure suivante (le programme python est donné dessous). On voit qu'effectivement la fonction carré en vert s'écarte peu de celle d'origine.



Les fonctions logistiques semblent donc être de bonnes candidates pour être utilisées dans une connectivité variable dans le temps. Les commutateurs de plus pourront avoir des réactions réglables avec des temps de montées plus ou moins rapides en même temps qu'un caractère continu, ce qui est toujours préférable pour la programmation.

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Sat Feb  6 17:01:56 2016
4
5 @author: maurice
6 """
7
8 import numpy as np
9 import pylab as plt
10
11 # K.1/(1+aexp(-rt))
12
13 K=1.
14 a=1.
15 r=100.
16
17 dt=0.001
18 N=1000
19 f=np.zeros(N,dtype=float)
20 f2=np.zeros(N,dtype=float)
21
22 for it in range(N):
23     s=it*dt
24     f[it]=K/(1+a*np.exp(-r*(s-500*dt)))
25     f2[it]=(K/(1+a*np.exp(-r*(s-500*dt))))**2.
26
27 plt.plot(f)
28 plt.plot(f2)
29 plt.grid(True)
30 plt.show()

```

### 3.4 Conclusion sur les topologies variables

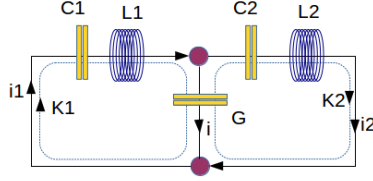
Il semble possible d'utiliser la connectivité de Kron comme élément de modélisation de commutateurs dans une topologie variable, dans l'espace des mailles. Un cas de pont dans un hacheur reste à évaluer pour voir les avantages et difficultés que peut engendrer cette possibilité. Entre autre, on veillera à estimer les impacts mathématiques mais aussi de sens physique au cas où on devrait dériver dans le temps la fonction d'un commutateur, son insertion comme composante de connectivité variable engendrant dans ce cas des coefficients apparentés à ceux de Christoffel (par exemple si l'on veut associer à l'impédance  $w$  une inductance intrinsèque). Dans tous les cas, cette approche n'est pas exploitable dans les méthodes nodales ou MNA qui ne considèrent pas de passage dans l'espace des mailles dont elles ne sont pas pourvues.

## 4 Gain en nombre de variables

L'espace des mailles a une particularité : l'intégrale des différences de potentiels le long des branches qui constituent la maille est nulle. De fait les seules variables à résoudre sont les courants de mailles. Donc les systèmes sont de dimensions plus faibles que dans les méthodes nodales d'un facteur 2 au moins.

## 5 Expression du lagrangien - identité avec la matrice d'interactions et espace co-tangent, conditionnement des matrices

Considérons la structure suivante de filtre de la figure suivante (le début de l'illustration est emprunté à l'ouvrage de Gabillard). On peut exprimer les énergies stockées dans les éléments condensateurs et inductances.



$$\left. \begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2C_1}q_1^2 + \frac{1}{2C_2}q_2^2 + \frac{1}{2G}q^2 \\ W_H &= \frac{L_1}{2}i_1^2 + \frac{L_2}{2}i_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

avec  $i_1 = \dot{q}_1, i_2 = \dot{q}_2, i = i_1 - i_2$ . D'où  $q = q_1 - q_2$  et  $q^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2$ . On peut de fait exprimer complètement l'état électrique du circuit en fonction des deux seuls paramètres  $q_1$  et  $q_2$ . L'énergie totale du circuit est donnée par ( $p$  est l'opérateur de Laplace) :

$$W_T = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{G} \right) \frac{i_1^2}{p^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{G} \right) \frac{i_2^2}{p^2} - \frac{1}{G} \frac{i_1 i_2}{p^2} + \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Exprimons maintenant la matrice de Kron dans l'espace des mailles :

$$z = \begin{bmatrix} L_1 p + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{G p} & -\frac{1}{G p} \\ -\frac{1}{G p} & L_2 p + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{G p} \end{bmatrix}$$

L'énergie est donnée par l'invariant fondamental  $s = (z_{\mu\nu} i^\mu i^\nu) / (2p)$  :

$$s = \frac{1}{2p} \left\{ \left( L_1 p + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{G p} \right) i_1^2 + \left( L_2 p + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{G p} \right) i_2^2 - \frac{2}{G p} i_1 i_2 \right\}$$

On reconnaît immédiatement  $s = W_T$ . La matrice impédance de Kron se connecte donc directement à l'expression du lagrangien du problème. Si l'on sépare les composantes inductives des composantes capacitatives, on retrouve d'ailleurs les opérateurs linéaire d'énergie électrique (potentielle  $\mathcal{T}$ ) et magnétique (cinétique  $\mathcal{U}$ ) dont on déduit le lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{U}$ . En méthode nodale, ce n'est pas la matrice impédance de mailles mais la matrice admittance de nœuds qui est l'objet fondamental de la méthode. On ne peut pas retrouver les termes d'énergie aussi simplement, directement à partir de cette matrice. En fait considérons un simple composant, un condensateur  $C$ , alimenté par un générateur de résistance interne  $R$ . Sous Kron on écrit :  $e = \left( R + \frac{1}{Cp} \right) i$ . D'où :

$$s = \left( R + \frac{1}{Cp} \right) \frac{i^2}{2p} = \frac{1}{2} \int_t dt R i^2 + \frac{q^2}{2C}$$

Par l'admittance on écrit :

$$i = \left( R + \frac{1}{Cp} \right)^{-1} V = \left( \frac{gCp}{g + Cp} \right) V$$

où l'on comprend déjà sur ce cas simple qu'il est plus compliqué de retrouver les termes du lagrangien sous ce formalisme. Le formalisme de la MNA n'y change

rien car il ne fait que séparer les composantes inductives pour autoriser des sources contrôlées, mais garde les admittances pour la dissipation et l'énergie électrique. Ce lien direct entre la matrice impédance de Kron et les opérateurs d'énergies à une autre conséquence. Lorsque l'on construit une matrice d'interaction en CEM (compatibilité électromagnétique), on vient identifier des interactions électromagnétiques sur les termes extra-diagonaux d'une matrice qui porte les propriétés des objets en présence. Ces couplages extra-diagonaux ainsi que les propriétés électromagnétiques intrinsèques s'identifient directement dans le tenseur fondamental de Kron. Par ailleurs, le fait d'user de l'algèbre tensoriel qui "classe" les objets de dimension courant comme vecteurs et ceux de dimension tension ou force électro-motrice comme co-vecteurs donne à la méthode une puissance de lecture incomparable. Sans même prêter attention aux symboles dans un circuit compliqué, on reconnaît immédiatement la nature des variables impliquées. C'est beaucoup moins clair dans la méthode MNA qui n'est pas de dimension homogène et mélange impédances, admittances et connectivité (matrice d'incidence). La méthode nodale est en ce sens beaucoup plus "propre" mathématiquement et permet en fait la prise en compte de générateurs pilotés. Mais paradoxalement, et ce n'est pas un hasard, la méthode nodale dans ce cas exprime les courants de branches en fonction des courants de maille, et retrouve, ..., la matrice de Kron (voir Peikari, "Fundamentals of Network Analysis and Synthesis", chez Practice Hall ; exemple 4.5-1 page 148) ! De par ces choix topologiques (au sens de la topologie cellulaire), le formalisme de Kron semble bien être le candidat idéal pour mener une étude théorique sur un système compliqué. Aucun autre formalisme parmi ceux identifiés, ne permet cette écriture et cette capacité à intégrer toutes les dimensions possibles de la physique de l'électromagnétisme, y compris celles relativistes. Avec la proposition de voir l'espace des paires de nœuds comme un espace de "mailles virtuelles", la déduction des formes linéaires appliquées à des flux qui constituent les vecteurs de l'espace naturel permet d'inscrire le formalisme de façon élégante dans toutes les démarches géométriques et de réflexions profondes sur la physique, ce que les autres écritures ne permettent pas.

## 6 Seconde géométrisation

Les arguments pour démontrer que le formalisme de Kron est le mieux adapté pour s'insérer dans une opération de géométrisation différentielle ont été développés dans l'article "<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01079386/document>". Nous ne les redévelopperons pas ici. L'ensemble de ces arguments me semble montrer pour le moins que le formalisme de Kron permet d'atteindre des mécanismes que l'on ne saurait atteindre avec la même facilité (voire atteindre tout court) par les formalismes nodaux même modifiés. D'ailleurs il y a un indicateur simple, c'est que, sans outils automatisés (et même dans ce cas c'est à voir), je défis quiconque de décrire un problème quelconque complètement (pas seulement en énergie comme les "bond graph") même de façon abstraite aussi vite qu'une personne qui utilise le formalisme de l'analyse tensorielle des réseaux, et ce, quelle que soit la méthode choisie. Ce sera ici ma conclusion.